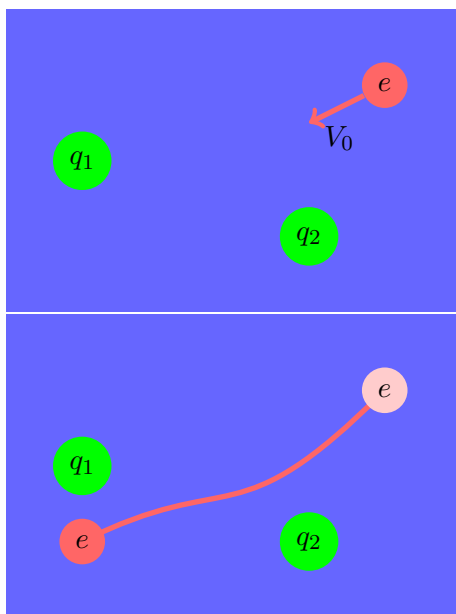


1 Introdução

Comencemos con un problema de cargas. Sean q_1 y q_2 dos cargas positivas, por ejemplo dos protones que se encuentran en una situación de equilibrio. Y ahora introducimos una carga negativa, por ejemplo un electrón e con una velocidad V_0 . ¿Qué va a ocurrir en el sistema? ¿Cuál va a ser la trayectoria del electrón? ¿Cómo modelizamos matemáticamente un ejemplo tan sencillo? ¿Cómo solucionamos esa modelización? ¿Ocurre algo similar dentro de los cables eléctricos?



Todas estas preguntas son las que vamos a dar respuesta en este artículo. Nos enfrentaremos a una ecuación diferencial cuya solución definirá la trayectoria del electrón que introducimos en el sistema de equilibrio. Veremos que llegar a una solución exacta es algo que en la mayoría de los casos no se podrá dar. Veremos que otras herramientas tendremos para poder conseguir al menos una solución aproximada y analizaremos con detalle estas soluciones. Esperemos se diviertan y aprendan mucho con este artículo.

2 Modelo matemático de la trayectoria del electrón

Para modelizar la trayectoria del electrón, o en general una partícula, introducido en un sistema de partículas (que pueden ser electrones o protones) necesitamos determinar:

- Su posición $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ en el instante t sabiendo que su posición inicial es $x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20})$.
- Su velocidad $V(t) = (V_1(t), V_2(t))$ en el instante t sabiendo que su velocidad inicial es $V(0) = V_0$.
- Su aceleración $a(t)$ en el instante t .

Es bien conocido que la derivada del espacio es la velocidad y que la derivada de la velocidad es la aceleración. De este modo podemos plantear el siguiente sistema diferencial:

$$(2.1) \quad \left. \begin{aligned} x'(t) &= V(t) \\ V'(t) &= a(t) \end{aligned} \right\}$$

La pregunta clave ahora para poder formular completamente nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es, ¿cuánto vale la aceleración $a(t)$ en cada instante? Y la respuesta la tenemos por la ecuación fundamental de la dinámica que nos dice que la fuerza es el producto de la masa por la aceleración, esto es $F = m \cdot a$. Esta ecuación proviene de la segunda ley de Newton¹.

Usando lo anterior la función $a(t)$ puede ser calculada conociendo la fuerza F que será la suma de las fuerzas ejecutada entre el electrón y los dos protones en equilibrio y la masa m_e del electrón. Este razonamiento se puede realizar en genérico introduciendo una partícula en un sistema en equilibrio que contiene n partículas pero vamos a

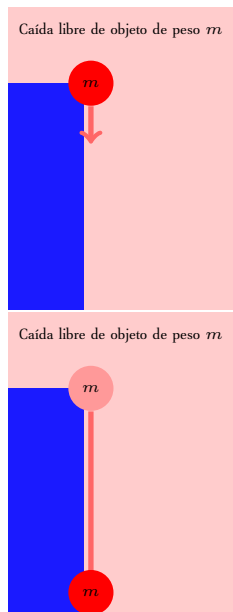
¹Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

realizar el estudio con un electrón que se introduce en un sistema equilibrado donde hay dos protones. Generalizarlo es bastante sencillo y lo dejamos como ejercicio para el lector.

Sabemos que la fuerza entre dos cargas...

3 Resolución numérica: Método de Euler

Como hemos mencionado antes, llegar a una solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales es complicado. Existen casos donde esto sí ocurre, por ejemplo la caída libre. Supongamos un objeto de masa m a una altura h , las ecuaciones de movimiento de caída libre vendrían modelizadas con el sistema de ecuaciones (2.1). La aceleración en este caso se corresponde con la aceleración de la gravedad, esto es $g = 9.81$



4 Resolución numérica de nuestra ecuación

5 Fallos cualitativos de Euler. Mejoras.