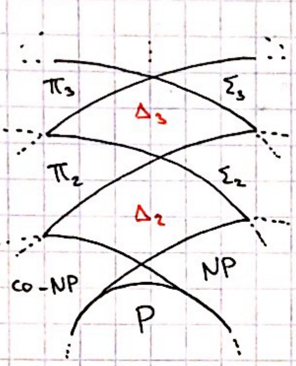
בס"ד

3.5.17

סיבוכיות - תרגול 6

PH:



ההיררכיה הפולינומית:

משפטים ותכונות:

1) $\Pi_k = co\text{-}\Sigma_k$

2) $\Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$ (נרחיב היום)

3) $\Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}$ וגם $\Pi_k \subseteq \Pi_{k+1}$

4) $\Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1}$ וגם $\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1}$

5) אם $\Pi_k \subseteq \Sigma_k$ אזי $\Sigma_k = \Sigma_{k+1}$ (לכל $k \geq 1$)

6) אם $\Sigma_k = \Sigma_{k+1}$ אזי $PH = \Sigma_k$.

7) לכל $k \geq 0$ $\Sigma_{k+1} = NP^{\Sigma_k}$.

תזכורת: P^{Σ_k} - המחלקה של השפות המוכרעות ע"י מ"ט פול' דט' עם גישת אורקל לשפה השייכת ל- Σ_k.

תרגיל: הוכיחו לפי הגדרה 2 את התכונות הבאות:

1. $\Delta_k \subseteq \Sigma_k \cap \Pi_k$

הוכחה-

נראה - $\Delta_k \subseteq \Sigma_k$. כזכור, $\Delta_k = P^{\Sigma_{k-1}}$, $\Sigma_k = NP^{\Sigma_{k-1}}$.

תהי $S \in \Delta_k$, לכן קיימת מ"ט פול' דט' עם גישת אורקל לשפה ב- Σ_{k-1}, מכונה זו היא בפרט מכונה לא דטרמיניסטית ולכן $S \in \Sigma_k = NP^{\Sigma_{k-1}}$.

נראה - $\Delta_k \subseteq \Pi_k$.

תהי $S \in \Delta_k$, לכן קל לראות ש- $\bar{S} \in \Delta_k$ (ניתן להפוך את התשובה של המכונה שמכריעה את S בגלל שהיא דטרמיניסטית.) ולכן לפי מה שהוכחנו קודם $\bar{S} \in \Sigma_k$ ומהגדרה 1 נקבל $S \in \Pi_k$. □

2. $\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1}$ (ראינו הוכחה לפי כמתים בהרצאה ועכשיו לפי הגדרה 2)

הוכחה-

נוכיח ש- $\Sigma_k \subseteq \Delta_{k+1}$ ומכאן נסיק את מה שצריך להוכיח. (לפי הסעיף הקודם.)

תהי $S \in \Sigma_k$, נוכיח ש- $S \in \Delta_{k+1}$. כאשר $\Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$. נבנה מ"ט פול' דט' עם גישת אורקל ל- S שעבור כל קלט x תשאל את האורקל על x ותחזיר את תשובתו.

קל לראות שמכונה זו מכריעה את S בזמן פול' דט' ולכן $S \in \Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$.

בס"ד

3. $\Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1}$

הוכחה-

מספיק להראות $\Pi_k \subseteq \Delta_{k+1}$.

תהי $S \in \Pi_k$, נוכיח ש- $S \in \Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$.

בגלל ש- $S \in \Pi_k$ אזי $\bar{S} \in \Sigma_k$. נגדיר מ"ט פול דט' עם גישה אורקל ל- $\bar{S}$ שבהינתן קלט x תבדוק שאילתא אורקל על x ותחזיר תשובה הפוכה לזו של האורקל.
קל לראות שהמכונה M מכריעה את S בזמן פול דט' ולכן $S \in \Delta_{k+1}$.

4. תזכורת: MinCNF מכילה את כל הנוסחאות בצורת CNF כך שלא קיימת נוסחה שקולה לפורמט CNF קצרה יותר.

צריך להוכיח: $Min\text{-}CNF \in \Pi_2$.

הוכחה-

נראה ש- $\overline{Min\text{-}CNF} \in \Sigma_2 = NP^{NP}$.

נגדיר את השפה NOT-EQUI המכילה את כל הנוסחאות הבוליאניות (Φ_1,Φ_2) שאינן שקולות זו לזו. קל לראות ש- $NOT\text{-}EQUI \in NP$. נבנה את המכונה $M^{NOT\text{-}EQUI}$ באופן הבא:
בהינתן נוסחה Φ:

1) אם Φ אינה בצורת CNF החזר 1.
2) ננחש נוסחה Φ' קצרה יותר מ- Φ באופן לא"ד.
3) נבדוק שאילתת אורקל על (Φ,Φ')
4) אם $(\Phi,\Phi') \in NOT\text{-}EQUI$ החזר 0, אחרת החזר 1.

נכונות:

אם Φ בפורמט CNF ושייכת ל- $\overline{Min\text{-}CNF}$ אזי קיים ניחוש של Φ' קצרה יותר עבורה האלגו' יחזיר 1, אחרת נחזיר 0.

נשים לב! זמן הריצה של המכונה פול, כיוון שניחוש פול ושאילתה אחת לאורקל.

בס"ד -

3.5.17

תרגיל: הוכיחו שאם $NP=co\text{-}NP$ אזי $NP^{NP}=NP$ לפי הגדרה 2.

<u>פתרון</u> -

$S\in NP^{NP}$, לכן קיימת מכונה M^A עבור $A\in NP$ שמכריעה את S ופועלת כך:

בצע x

בצע y

נחש z

אם $a\in A$: בצע ...

אחרת: בצע ...

⋮

מכיוון ש- $A\in NP$ קיימת מ"ט לא"ד פולינומית M' שמכריעה את A.

כמו כן, מכיוון ש- $NP=co\text{-}NP$ אזי $\bar{A}\in NP$ ולכן קיימת M'' שמכריעה את $\bar{A}$.

נבנה מ"ט M שמכריעה את S באופן הבא:

בהינתן קלט x המכונה M תסמלץ את ריצה של M^A על x.

כאשר M^A מבצעת שאילתא לאורקל עם מחרוזת y:

המכונה M מריצה את M' עם y, במידה וקיבלנו 1 נבצע את מה ש- M^A מבצעת אם האורקל החזירה תשובה חיובית עבור y.

אחרת, M מריצה את M'' על y ואם קיבלנו חזרה 1 M תבצע את מה ש- M^A מבצעת אם הוחזרה תשובה שלילית עבור y.