בס"ד

12.11.16

אלגוריתמים - תרגול 5

תכנות דינאמי.

בעייה: קביעת פס הייצור הנע.

(*) נתונות n תחנות ב-2 פסי ייצור, כאשר הזוג הסדור (i,j) מייצג את התחנה ה-j-ית בפס הייצור ה-i.

(*) עלות שהייה בתחנה (i,j) היא $a_{i,j}$.

(*) ניתן לעבור מהתחנה ה-j-ית בפס מסויים, אך ורק לתחנה ה-j+1 באותו פס או בפס השני.

(*) מעבר מתחנה לתחנה באותו פס ייצור הוא בחינם.

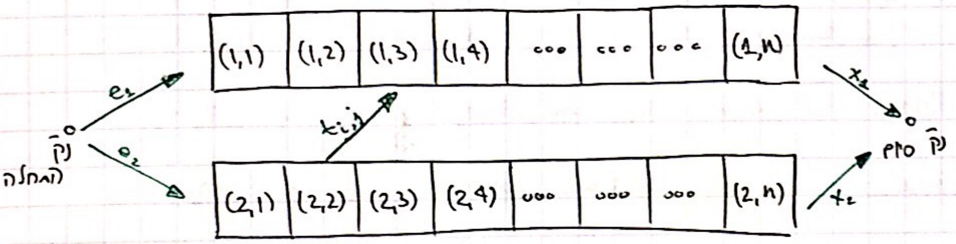
(*) מעבר מהתחנה ה-(i,j) לתחנה ה-(3-i,j+1) עולה $t_{i,j}$

(*) עלות המעבר מנקודת ההתחלה לתחנה הראשונה בפס הראשון היא e_1.

(*) עלות המעבר מנקודת ההתחלה לתחנה הראשונה בפס השני היא e_2.

(*) כמו כן, עלות המעבר מהתחנה האחרונה בפס הראשון לתחנת הסיום היא x_1.

(*) עלות המעבר מהתחנה האחרונה בפס השני לתחנת הסיום היא x_2.



המטרה: מציאת העלות המינימלית למעבר מנק' ההתחלה לתחנת הסיום דרך n התחנות.

באופן פורמלי:

קלט: (*) n - מס' התחנות.

(*) מערך דו מימדי A של עלויות השהייה.

	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	
2			...	

(*) מערך דו מימדי T של עלויות המעבר.

	1	2	...	n-1
1	t_{11}	t_{12}		
2				

(*) העלויות המיוחדות e_1,e_2,x_1,x_2.

פלט: העלות המינימלית למעבר מנק' ההתחלה לתחנת הסיום.

בתכנות דינמי יש לנו שלבי עבודה מוגדרים מראש והם:

1) פתרון נאיבי

2) פתרון רקורסיבי

→ הוכחת נכונות

3) פתרון תכנות דינמי.

→ מה מבנה הנתונים

→ אופן מילוי מבנה הנתונים

→ מה תנאי העצירה והיכן ממלאים אותם.

→ מה סדר מילוי מבנה הנתונים.

→ מיקום הפתרון הסופי.

→ סיבוכיות מקום וזמן

(→ שחזור הפתרון)

1) - פתרון נאיבי:

- עבור על כל האפשרויות למעבר מנק' ההתחלה לתחנת הסוף. (2^n אפשרויות, כיוון שבכל תחנה ניתן להיות או בפס הראשון או בפס השני)
- עבור כל אפשרות נחשב את העלות הכוללת של המסלול שהיא מייצגת.
- נחזיר את העלות המינימלית המתקבלת מבין כל האפשרויות.

זמן ריצה: $O(n\cdot 2^n)$

2) - פתרון רקורסיבי:

נסמן ב- $F[i,j]$ את העלות המינימלית להגעה לתחנה ה- (i,j)

הפתרון האופטימלי: $F^* = \min(F[1,n]+x_1, F(2,n]+x_2)$ (הקריאה החיצונית)

נוסחת הרקורסיה הכללית:

$$F[i,j] = \min(F[i,j-1]+a_{ij}\ ,\ F[3-i,j-1]+a_{i,j}+t_{3-i,j-1})$$

$i\in\{1,2\}$

$2\le j\le n$

תנאי עצירה: $F[1,1] = e_1 + a_{11}$

$F[2,1] = e_2 + a_{21}$

12.10.16

זמן הריצה: $T(n) = 2T(n-1) + O(1)$

$T(n)$ - זמן הריצה לחישוב העלות של ההגעה לתחנה ה- n בשני הפסים.

⇐ זמן ריצה אקספוננציאלי !

רוים
היה
פה:

(3) - פתרון תכנון דינמי:

נבחר את מבנה הנתונים שלנו, בד"כ המבנה "יוצא" מהנתונים שלנו, יש לנו $F[i,j]$ כאשר ל- i יש 2 אפשרויות ול- j יש n אפשרויות לכן מבנה הנתונים שלנו יהיה מערך דו מימדי, טבלה, F בגודל $n \times 2$:

בד"כ נמלא את המבנה "מההתחלה", הכוונה או להגדיר התחלה, ראינו בהרצאה שהיה מדובר על אלכסון ראשון לאורך ההתחלה, פה נמלא את ערכי תנאי העצירה בעמודה הראשונה.

e_1+a_{11}		...	
e_2+a_{21}			

תנאי העצירה.

נמשיך למלא את הטבלה עמודה עמודה מהעמודה הראשונה ועד העמודה ה- n בהתאם לנוסחת הרקורסיה, תוך שימוש בערכים שכבר נשמרו בטבלה.

הפתרון הסופי: $F^* = \min(F[1,n]+X_1, F[2,n]+X_2)$

כאשר $F[1,n]$ ו- $F[2,n]$ נמצאים בעמודה האחרונה בטבלה.

סיבוכיות זמן: $O(n)$

סיבוכיות מקום: $O(n)$

ניתן להסתפק ב- $O(1)$ מקום ולשמור רק את שתי העמודות האחרונות.

נשים ♡:
כל עמודה מחושבת עפ"י הערכים בעמודה שקודמת לה.

הוכחת נכונות הנוסחה הרקורסיבית: (אמור להגיע לפני הפתרון בחישוב דינמי)

נוכיח באינדוקציה על n (מס' התחנות)

בסיס: מיידי. או שנעלה לתחנה הראשונה בפס הראשון בעלות e_1+a_{11} או שנעלה לתחנה הראשונה בפס השני בעלות e_2+a_{21}.

הנחה: נניח שהנוסחה מחשבת את העלות האופטימלית עבור הגעה לתחנה ה- $k-1$.

צעד: נוכיח אופטימליות עבור הגעה לתחנה ה- k.

(נוכיח את האופטימליות של $F[1,k]$ ניתן להוכיח באופן שקול על $F[2,k]$)

המשך בעמוד הבא:

בס"ד

נניח בשלילה $F[1,k]$ אינו אופטימלי, לכן קיימת עלות אחרת $F^*[1,k]$ להגעה

לתחנה $(1,k)$ כאשר: $F^*[1,k] < F[1,k]$

לפי נוסחת הרקורסיה -

$F^*[1,k] < F[1,k-1] + a_{1k}$

וגם: $F^*[1,k] < F[2,k-1] + a_{1k} + t_{2,k-1}$

לפי הנחת האינדוקציה $F[1,k-1]$ ו- $F[2,k-1]$ אופטימליים.

ניתן להגיע לתחנה ה- $(1,k)$ רק ע"י 2 אפשרויות:

1) או מהתחנה ה- $(1,k-1)$ באותו פס לעלות מינ' של $F[1,k-1] + a_{1k}$

2) או מהתחנה ה- $(2,k-1)$ בפס השני בעלות מינ' $F[2,k-1] + a_{1k}$ בתוספת עלות מעבר $t_{2,k-1}$

לכן לא ייתכן ש- $F^*[1,k]$ קטנה משתי העלויות הנ"ל ⇐ סתירה ∎

בעייה: קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בעץ.

עלינו לארגן מסיבה בחברת הייטק, בה יש היררכיה ניהולית בצורת עץ.

אנו מעוניינים ליצור רשימת מוזמנים בכפוף לתנאים הבאים:

* כשעובד מוזמן מוזמנים יחד איתו כל בני משפחתו (נניח שאין עובדים שהם קרובים אחד לשני.)
* כשעובד מוזמן ← הבוס הישיר שלו לא מוזמן
* לכל עובד יש בוס ישיר יחיד, פרט לעלים שאין לו בוס.

המטרה: למקסם את מספר האנשים ברשימה.

באופן פורמלי: ההיררכיה הניהולית נתונה ע"י עץ בעל n קודקודים. כל קודקוד בעץ מייצג עובד x וכולל מאפיין כלשהו של העובד, את מס' בני משפחתו,

F_x כולל x עצמו ומצביעים לעובדים שכפופים לו ישירות.

↳ מס' בני משפחתו

פתרון נאיבי:

- נעבור על כל תתי הקבוצות של עובדים בחברה. (יש 2^n אפשרויות כי לכל עובד יש אפשרות להיות מוזמן או לא)
- עבור כל תת-קבוצה נבדוק האם היא מייצגת אפשרות חוקית (שעובד לא מוזמן עם הבוס שלו)
- לכל אפשרות חוקית נחשב את מס' המוזמנים למסיבה לפיה.
- נחזיר את מס' המוזמנים המקסימלי מבין האפשרויות.

זמן ריצה: $O(n \cdot 2^n)$

12.11.16

בס"ד

פתרון רקורסיבי:

- נסמן ב- $I(x)$ את מספר המוזמנים המקסימלי שניתן להזמין בתת עץ המושרש ב- x.
- נסמן ב- $P(x)$ את מספר המוזמנים המקסימלי שניתן להזמין בתת-עץ (המקסימלי) כאשר x מוזמן.
- נסמן ב- $H(x)$ את מספר המוזמנים המקסימלי שניתן להזמין בתת עץ כאשר x לא מוזמן.

מתקיים: $I(x) = \max(P(x), H(x))$

$I(r) =$ נרצה להחזיר את $I(r)$ כאשר r שורש העץ.

חיים היה פה

$P(x) = F_x + \sum_{y \in \{\text{בנים של } x\}} H(y)$ ← $P(x)$ אומר שהזמנו את x, לכן כולל את משפחתו אך ללא הבנים הישירים שלו y ← $\Sigma H(y)$.

$$H(x) = \sum_{y \in \{\text{בנים של } x\}} \max(P(y), H(y))$$

תנאי עצירה: x עלה, אזי $H(x) = 0$; $P(x) = F_x$.

פתרון תכנות דינמי:

* נשמור את פתרונות הביניים במבנה נתונים בצורת עץ, בכל קודקוד x נשמור שני ערכים $H(x)$ ו- $P(x)$.
* נסרוק את העץ בסדר Post Order.
* הערכים הראשונים שנמלא הינם העלים, וימולאו לפי תנאי העצירה.
(נמלא את העלים של העץ לפי תנאי העצירה, נמשיך למלא במעלה העץ)
* נשים ♡:
ערכים בקודקוד מסויים מתבססים אך ורק על ערכי בניו שכבר חושבו.
* הפתרון הסופי: $I(r) = \max(P(r), H(r))$
← כאשר $P(r), H(r)$ הם הערכים לשורש העץ.

זמן הריצה: $O(n)$ (סריקת פוסט אורדר שעוברים פעם אחת על כל קודקוד)

סיבוכיות מקום: $O(n)$ שמירת הנתונים בעץ.