1. $DTIME(s(n)) \subseteq DSPACE(s(n)) \subseteq NSPACE(s(n)) \subseteq DTIME(n \cdot 2^{O(s(n))})$

2. $NL \subseteq DSPACE(\log^2 n)$ ובאופן כללי -

$NSPACE(s(n)) \subseteq DSPACE(s(n)^2)$

3. $NL = coNL$ ובאופן כללי -

$NSPACE(s(n)) = coNSPACE(s(n))$

4. $PH \subseteq PSPACE = NSPACE \subseteq EXP$

משפט היררכיית המקום

תהי פונקציה $G(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש $G(n) \geq \log n$ ו-$G(n)$ היא space-constructible
ותהי $g(n)$ פונקציה כך ש $g(n) = o(G(n))$,
מתקיים ש $SPACE(g(n))$ מוכל ממש ב $SPACE(G(n))$.

הוכחה

מספיק להראות שקיימת שפה L כך ש $L \in SPACE(G(n))$ אבל $L \notin SPACE(g(n))$.
את השפה L נגדיר כקלטים שמקבלת המכונה M_L שפועלת באופן הבא:

הפורמט קלט $w = \langle M, y \rangle$ כאשר $n = |w|$.

1. M_L מריצה את המכונה M על w למשך לכל היותר $2^{G(n)}$ צעדים תוך שהיא משתמשת בלכל היותר $G(n)$ מקום.
2. במידה ו M על w קיבלה במגבלות הנ"ל - נדחה. אחרת - נקבל.

M_L פועלת בסיבוכיות מקום $O(G(n))$.

- כדי לוודא שמס' הצעדים יהיה לכל היותר $2^{G(n)}$ נחזיק counter, יעלה לנו $\log(2^{G(n)}) = G(n)$.
- כדי לוודא שנשארים בלכל היותר $G(n)$ מקום (נצטרך לחשב את $G(n)$ ולכן לסמן את המשבצות הסופיות ולסמן לנו שם *, שבסוף עד לכאן מותר לי לצעוד.
מי אומר שניתן לחשב את $G(n)$ בלכל היותר $G(n)$ מקום?
ומכאן לנו ההנחה הנוספת שכן $G(n)$ היא space-constructible

נניח בשלילה $L \in SPACE(g(n))$, לכן קיימת מכונה M'_L שמכריעה את L בסיבוכיות מקום $g(n)$.
ניתן לבחור k מספיק גדול שמקיים את התנאים הבאים:

1. $g(k) < G(k)$
2. M_L מבצעת לכל היותר $2^{G(k)}$ צעדים על קלטים באורך k.
$DSPACE(g(k)) \subseteq DTIME(2^{G(k)})$
3. סימולציה של M'_L על קלטים באורך k מתבצעת תוך שימוש בלכל היותר $G(k)$ מקום.

בס"ד

טענה

$SPACE(n) \neq P$

הוכחה

נניח בשלילה $SPACE(n) = P$

תהי $L \in SPACE(n^2)$ שפה. כלומר, קיימת מכונה M_L שמכריעה את L בסיבוכיות מקום $O(n^2)$.

נגדיר: $L' = \{ x01^{|x|^2} \mid x \in L \}$.

ניתן לבנות מכונה $M_{L'}$ שמכריעה את L' בסיבוכיות מקום $O(n)$ באופן הבא:

1. בהינתן קלט y, המכונה תבדוק שהוא בפורמט $x01^{|x|^2}$, אחרת - תדחה.
2. המכונה תריץ את M_L על x ותחזיר את תשובתה.

את צעד 1. ניתן לבצע בפשטות ע"י סריקה של הקלט ולכן ב- בסיבוכיות מקום $O(n)$.
צעד 2. דורש $O(|x|^2) = O(|y|)$ מקום.
כלומר סה"כ מדובר בסיבוכיות מקום לינארית $|y| = |x|+1+|x^2|$.

קיבלנו ש $L' \in SPACE(n)$ לכן לפי ההנחה $L' \in P$.
כלומר קיימת מ"ט $M^*_{L'}$ שמכריעה את L' בסיבוכיות זמן $O(n^c)$ עבור קבוע $c>0$ כלשהו.
ניתן ליצור מכונה M^*_L שמכריעה את L באופן הבא:

1. בהינתן קלט x, ניצור $y = x01^{|x|^2}$.
2. נריץ את $M^*_{L'}$ על y ונחזיר את תשובתה.

את צעד 1. ניתן לעשות ב $O(|x|^2)$ זמן.
כמו כן צעד 2. מתבצע ב $O(|y|^c) = O(|x|^{2c})$ זמן.
כלומר, M^*_L מכריעה את L בזמן פולינומי, לכן $L \in P$.
מכאן עם ההנחה $L \in SPACE(n)$.
בסתירה למשפט היררכיית המקום.