

בעיית התרמיל בשברים

זוהי וריאציה של בעיית התרמיל, שבה ניתן לקחת שבר של פריט.

אלגוריתם חמדני :

- נחשב את ה"ערך- α " $\alpha_i = \frac{v_i}{w_i}$ עבור כל פריט.
- ניקח כמות גדולה כלל הניתן מהפריט i שעבורו ה"ערך- α " מקסימלי.
- אם סיימנו לקחת את כל הכמות הקיימת עבור פריט זה, ועדיין נותר מקום בתרמיל, ניקח כמות גדולה ככל האפשר מהפריט בעל ה"ערך- α " השני בגודלו.
- נמשיך באופן זה עד למילוי התרמיל.

הוכחת נכונות : נסמן את הפתרון האופטימלי ב- O .

שלב 1 : נראה כי יש פתרון אופטימלי הכולל את הבחירה החמדנית.
מקרה א' : הפתרון החמדני לוקח כבחירה חמדנית שבר f מפריט i , מכאן שמתקיים : $W = f \cdot w_i$.
אם O כולל שבר f של הפריט i , סיימנו.
אחרת, נוריד מ- O משקל $f \cdot w_i$, ונוסיף שבר f של הפריט i .
קיבלנו פתרון חדש O' שערכו לפחות כמו O , כיוון שהפריט i בעל השווי המקסימלי ליחידת משקל. לכן O' אופטימלי וכולל שבר f מהפריט i .

מקרה ב' : הפתרון החמדני לוקח את הפריט i בשלמותו.
אם O גם לוקח את הפריט i בשלמותו, סיימנו.
אחרת, נוריד מ- O משקל w_i , ונוסיף את הפריט i . קיבלנו פתרון חדש O' הכולל את הפריט i . ערך O' לפחות כערך O , מכיוון שהפריט i בעל השווי המקסימלי ליחידת משקל. לכן O' אופטימלי וכולל את הפריט i בשלמותו.

שלב 2: הפתרון האופטימלי לבעיה כולה הוא איחוד של הבחירה החמדנית, והפתרון האופטימלי לתת הבעיה שנותרה.

הוכחה :

אם משקלו של הפריט שנבחר בבחירה החמדנית גדול-שווה W , סיימנו. אין יותר מה להוסיף לתרמיל.

אחרת, יהי a_i הפריט בעל ערך המקסימלי. אנו טוענים כי קיים פתרון אופטימלי O המקיים $\{a_1, \dots, a_n\} - \{a_i\}$, כאשר $O = O' \cup \{a_i\}$, הוא הפתרון האופטימלי לבעיה התרמיל עם הפריטים $\{a_1, \dots, a_n\} - \{a_i\}$ ומגבלת תרמיל $W - w_i$.

נניח שלא קיים פתרון שכזה. יהי Q'' פתרון אופטימלי לבעיה. אם Q'' מכיל את $\{a_i\}$ כולו סיימנו בסתירה, שכן אז נותר למלא את יתרת התרמיל $W - w_i$ בצורה אופטימלית מיתר הפריטים. אם Q'' לא מכיל את $\{a_i\}$ או לא מכיל אותו בשלמותו ניתן בדומה למה שעשינו בהוכחה של שלב א' להוציא מהתרמיל פריטים כמשקלו של a_i שלא כלול ב- Q'' , ולהוסיף אותו תמורתם. בגלל שהשווי שלו ליחידת משקל הוא הטוב ביותר מובטח שנקבל פתרון אופטימלי הכולל את a_i כשיתר הפתרון מורכב ממילוי תרמיל במשקל $W - w_i$ מיתר הפריטים בסתירה להנחתנו.

לאור 2 שלבים אלה, ניתן להראות באינדוקציה על n את נכונות האלגוריתם החמדני.