אלגוריתמים - הרצאה 10

מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד: (המשך של התרגול)

תזכיר: הקלה של קשת $\{u,v\}$ זו בדיקה האם ניתן להגיע לקשת הזו דרך מסלול יותר קל ואם כן נשנה את המשקל של הקודקוד שסימנו (v)

$\boxed{\text{תכונות של הקלה:}}$

<u>תכונת החסם העליון</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$. יהי s קודקוד מקור, נניח שהגרף שלנו אותחל ע"י $I\_S\_S(G,s)$. (Initialize Single Source) אזי $d[v]\geq\delta(s,v)$ עבור כל $v\in V$, והאינווריאנטה זו נשמרת לכל סדרה של צעדי הקלה על קשתות G. יתר על כן כאשר $d[v]$ מגיע לחסם התחתון $\delta(s,v)$ ערכו אינו משתנה עוד אף פעם.

הוכחה - באינדוקציה על מספר צעדי ההקלה נוכיח כי מתקיים $d[v]\geq\delta(s,v)$ לכל $v\in V$

בסיס: מיד לאחר האתחול מתקיים $d[s]=0$ ואומנם $\delta(s,s)=0$ או $\delta(s,s)=-\infty$ אם קיים מעגל שלילי המכיל את s, לכן $d[s]\geq\delta(s,s)$, כמו כן לכל קודקוד v אחר מתקיים $d[v]=\infty$ ולכן ברור ש- $d[v]\geq\delta(v,s)$

הנחה: נניח שעשינו k צעדי הקלה על קשתות G ומתקיים לכל $v\in V$ $d[v]\geq\delta(s,v)$

צעד האינדוקציה: נבצע הקלה על הקשת $(u,v)\in E$, ההקלה על הקשת (u,v) משפיעה אך ורק על ערכו של $d[v]$ ולכן עבור יתר הקודקודים $w\in V$ בגרף מתקיים $d[w]\geq\delta(s,w)$ לפי הנחת האינדוקציה.

עבור הקודקוד v אם הערך $d[v]$ שלו לא השתנה כתוצאה מההקלה על הקשת (u,v) אז $d[v]\geq\delta(v,s)$. לפי הנחת האינדוקציה. אחרת, מתקיים

$$d[v]= d[u]+w(u,v) \underset{\text{הנחת האינדוקציה.}}{\geq} \delta(s,u)+w(u,v) \underset{\text{אי שוויון המשולש.}}{\geq} \delta(s,v)$$

← ברגע שמתקיים שוויון $d[v]=\delta(s,v)$ הערך של $d[v]$ לא ישתנה יותר לעולם. הוא לא יכול לרדת כי כך נסתור את ההוכחה הנ"ל וכנ"ל הערך לא יכול לעלות כי הקלה על קשתות יכולה רק להוריד אותו לכן ברגע שמתקיים שוויון הערך $d[v]$ לא ישתנה.

תכונות אין מסלול: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$

יהי s קודקוד מקור ונניח שהגרף אותחל באמצעות $I\_S\_S(G,s)$.

יהי $v\in V$ קודקוד שאין מסלול מ-s אליו ב-G אזי $d[v]=\delta(s,v)=\infty$

ואינווריאנטה זו נשמרת לכל ~~נשמרת~~ סדרה של צעדי הקלה על הגרף G.

הוכחה-

לפי תכונת החסם העליון מתקיים $d[v]\geq\delta(s,v)=\infty$, לכן כיוון ש- $d[v]$ מאותחל ל-∞ יתקיים $d[v]=\infty=\delta(s,v)$ והשוויון לא ישתנה לעולם עפ"י התכונה הקודמת לכל סדרה של צעדי הקלה על קשתות G.

למה - יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$ ותהי $(u,v)\in E$ אזי מיד לאחר ההקלה על הקשת (u,v) מתקיים $d[v]\leq d[u]+w(u,v)$

הוכחה-

אם לפני ההקלה מתקיים אי השוויון ההקלה לא ישנה דבר, אחרת, הערך של $d[v]$ ישתנה ל- $d[u]+w(u,v)$, כלומר יתקיים שוויון.

תכונת ההתכנסות: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$, יהי s קודקוד מקור ויהי $s\rightsquigarrow u\to v$ מסלול קצר ביותר מ-s ל-v עבור זוג קודקודים $u,v\in V$ נניח שהגרף אותחל באמצעות $I\_S\_S(G,s)$ ולאחר מכן ביצענו סדרה של צעדי הקלה על קשתות G הכוללת הקלה על הקשת (u,v).

אם $d[u]=\delta(s,u)$ בזמן כלשהו לפני ההקלה על הקשת (u,v) אזי מתקיים ש- $d[v]=\delta(s,v)$ בכל זמן לאחר ההקלה על הקשת הזו.

הוכחה-

לפי תכונת החסם ~~העליון~~ העליון, אם $d[u]=\delta(s,u)$ בזמן כלשהו לפני ההקלה על הקשת (u,v) השוויון ישאר מכאן והלאה, לכן נקבל אחרי ההקלה על הקשת (u,v)

$$\underbrace{d[v]\leq d[u]+w(u,v)}_{\text{לפי הלמה הקודמת.}}=\delta(s,u)+w(u,v)\underbrace{=}_{\text{לפי הנתון ותכונת תת מבנה האופטימלי של מסלולים קצרים ביותר}}\delta(s,v)$$

לפי תכונת החסם העליון $d[v]\geq\delta(s,v)$ ולכן $d[v]=\delta(s,v)$, כמו כן, לפי תכונה זו ברגע שמתקיים שוויון הוא יישאר מכאן והלאה.

תכונת הקלת המסלול: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקל $w:E\to R$ ויהי קודקוד מקור s. יהי $p=(v_0,v_1,\dots,v_k)$ מסלול קצר ביותר מ- $s=v_0$ ל- v_k. אם הגרף מאותחל באמצעות $I\_S\_S(G,s)$ ולאחר מכן סדרה של צעדי הקלה על הקשתות G הכוללות הקלה על כל הקשתות של p לפי הסדר: $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{k-1},v_k)$ אזי $d[v_k]=\delta(s,v_k)$ לאחר ביצוע ההקלות האלו ומכאן ואילך.

הוכחה-

נוכיח באינדוקציה שלאחר ההקלה על הקשת ה- i במסלול p מתקיים $d[v_i]=\delta(s,v_i)$

בסיס: עבור $i=0$ מתקיים $d[s]=\delta(s,s)=0$, בגלל האתחול והשוויון לא ישתנה בגלל תכונת החסם העליון.

הנחת האינדוקציה: נניח שלאחר ההקלה על הקשת ה- $i-1$ במסלול p מתקיים $d[v_{i-1}]=\delta(s,v_{i-1})$ ונוכיח עבור i.

צעד האינדוקציה: לפי תכונת ההתכנסות, ההקלה על הקשת (v_{i-1},v_i) תגרום לכך ש- $d[v_i]=\delta(s,v_i)$ והשוויון יישאר מכאן ואילך (נשים לב שהוכחנו בתרגול שתתי מסלולים של מסלולים קצרים ביותר הם גם מסלולים קצרים ביותר)

עצי מסלולים קצרים ביותר והקלה 8

למה- יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקלים $w:E\to R$, יהי s קודקוד מקור ונניח ש- G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ- s. אזי לאחר אתחול הגרף באמצעות $I\_S\_S(G,s)$, G_π יוצר עץ המושרש ב- s וכל סדרה של צעדי הקלה על קשתות משמרת תכונה זו כאינווריאנטה.

$$G_\pi=(V_\pi,E_\pi)\quad;\quad V_\pi=\{v\in V \mid \pi[v]\neq NULL\}\quad;\quad E_\pi=\{(\pi[v],v)\mid v\in V_\pi\}$$

תכונת תת-גרף הקודמים: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון בעל פונק' משקלות $w:E\to R$ יהי s קודקוד מקור, נניח ש- G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ- s. אזי לאחר אתחול הגרף באמצעות $I\_S\_S(G,s)$ וביצוע סדרת צעדי הקלה שבסופה לכל $v\in V$ מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$, גרף הקודמים G_π שנוצר הוא עץ המסלולים הקצרים ביותר המושרש ב- s.

קוד.

נסתכל על האלגוריתם של בלמן פורד:

```
Bellman-Ford(G,w,s):
    Initialize_Single_Source(G,s)
    for i=1 to |V[G]|-1 do:
        for each edge (u,v)∈E[G] do:
            Relax(u,v,w)
    for each edge (u,v)∈E[G] do:
        if d[v] > d[u] + w(u,v)
            return False
    return True
```

$O(|E|\cdot|V|)$

למה - יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקלים $w:E\to\mathbb{R}$. יהי $s\in V$ קודקוד מקור. ונניח ש- G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s אזי עם עצירת האלגו' מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$ לכל קודקוד v הנגיש מ-s.

⇐ מסקנה: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונק' משקלים $w:E\to\mathbb{R}$ קודקוד מקור ונניח ש-G אינו מכיל מעגלים הנגישים מ-s אזי לכל קודקוד $v\in V$ קיים מסלול מ-s ל-v אמ"מ האלגו' עוצר עם $d[v]<\infty$ כשהוא מורץ על G.

נכונות:

נניח שמריצים את האלגו' של בלמן פורד על גרף $G=(V,E)$ מכוון עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$ מקודקוד מקור $s\in V$ אם G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s אזי האלגו' יחזיר True, מתקיים $d[v]=\delta(v,s)$ לכל $v\in V$ וגם גרף הקודקודים הקודמים הוא עץ מסלולים קצרים ביותר המושרש ב-s. אם G מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s האלגו' מחזיר False.

(*) אם אין מעגל שלילי שנגיש מ-s לכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים בסוף האלגו':

$$d[v]=\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(u,v)=d[u]+w(u,v)$$

(*) אם יש מעגל שלילי שנגיש מ-s. יהי $C=(v_0,\dots,v_k,v_0)$ מעגל בעל משקל שלילי שנגיש מ-s, $\sum_{i=0}^{k-1}w(v_i,v_{i+1})<0$, נניח בשלילה שהאלגו' יחזיר True, כלומר לכל $(u,v)\in E$ מתקיים $d[v]\le d[u]+w(u,v)$

בפרט לכל הקשתות במעגל מתקיים:

$$d[v_i]\le d[v_{i-1}]+w(v_{i-1},v_i)$$

19.1.17 בס"ד.

נסכום על כל המעגל ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \le \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \omega(v_{i-1},v_i) = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} \omega(v_{i-1},v_i)$$

מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות:

נתון: גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונק' משקל $\omega: E \to \mathbb{R}$, נרצה לחשב

1) מטריצה $D=(d_{i,j})$ כך ש- $d_{i,j}=\delta(i,j)$

2) מטריצה $\pi=(\pi_{i,j})$ כך ש- $\pi_{i,j}=Null$ אם אין מסלול מ-i ל-j או $i=j$

אחרת $\pi_{i,j}$ הוא הקודם של הקודקוד j למסלול הקצר ביותר מ-i ל-j.

אפשרות: נשתמש בבלמן פורד מכל קודקוד כמקור.

סיבוכיות: $O(|V|^2 \cdot |E|)$ שזה יכול להיות $O(|V|^4)$

נרצה לרדת מהסיבוכיות הזו.

נניח שהגרף נתון כמטריצה סמיכויות W בה כל איבר נתון ע"י:

$$W_{i,j} = \begin{cases} 0 & i=j \\ \omega(i,j) & i\neq j,\ (i,j)\in E \\ \infty & \text{אחרת.} \end{cases}$$

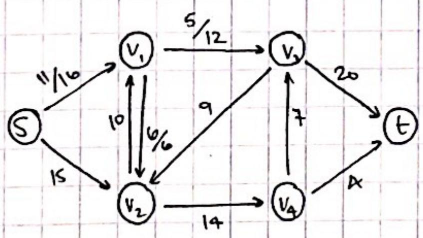
נתחיל עכשיו עם מבוא להרצאה.. (עד עכשיו זה היה המשך של התרגול והקדמה למרצה הזו)

רשתות זרימה:

(*) רשת זרימה זה גרף מכוון $G=(V,E)$ שבו לכל קשת $(u,v)\in E$ יש קיבול $c(u,v)>0$

(אם $(u,v)\notin E$ אז $c(u,v)=0$)

כמו כן, ברשת יש קודקוד מקור s וקודקוד בור t.



(*) נשים לב:
באגף המספר הימני הוא הקיבול והמספר השמאלי הוא המעבר בפועל.

$f(s,V_1)=11$
$f(V_1,s)=-11$

זרימה ב-G היא פונק' על המכפלה הקרטזית של הקודקודים $f: V\times V \to \mathbb{R}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. אילוץ קיבול: $f(u,v) \le c(u,v)$ לכל $u,v\in V$

2. סימטריה נגדית: $f(u,v) = -f(v,u)$ לכל $u,v\in V$

3. שימור הזרימה: $\sum_{v\in V} f(u,v) = 0$ לכל $u,v\in V\setminus\{s,t\}$

$$\sum f(u,v) = -\sum f(u,v) = \sum -f(u,v) = \sum f(v,u)$$

$$0 = \sum f(u,v) = \sum_{f(u,v)>0} f(u,v) + \sum_{f(u,v)<0} f(u,v)$$

ערך של זרימה:

$$|f| = \sum_{u \in V} f(s,u)$$