בס"ד

5.4.17

סיבוכיות - תרגול 3.

רדוקציות קוק לעומת רדוקציית קארפ:

תרגיל: קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם נכונה או לא.

א. לכל בעיית הכרעה S קיימת רדוקציית קוק למשלים שלה $\bar{S}$.

נכון,

תהי $M_{\bar{S}}$ ה"קופסא השחורה" שמכריעה את $\bar{S}$. נוכל לבנות אלגו' M_S שמכריע את S באופן הבא: בהינתן קלט x, נריץ את $M_{\bar{S}}$ על x ונחזיר תשובה הפוכה לזו ש-$M_{\bar{S}}$ החזירה. קל לראות שהאלגו' הנ"ל מכריע את S ועושה זאת בזמן פול' עד כדי זמן ריצתו של $M_{\bar{S}}$ לכן זו רדוקציית קוק תקינה.

ב. לכל בעיית הכרעה S קיימת רדוקציית קארפ למשלים שלה $\bar{S}$.

לא נכון, תהי $S=\emptyset$, מתקיים $\bar{S}=\{0,1\}^*$ אם נניח בשלילה שקיימת רדוקציית קארפ מ-S ל-$\bar{S}$, כלומר קיימת פונק' f הניתנת לחישוב בזמן פולינומי ק שלכל $x\notin S$ מתקיים $f(x)\notin\bar{S}$ אך מכיוון ש-$\bar{S}$ מכילה את כל המחרוזות אין לנו $f(x)$ למפות אליו. ולכן לא קיימת f כזו בסתירה להנחה שלנו.

ג. לכל בעיית הכרעה $S\in P$ שאינה טריוויאלית (כלומר $S\neq\emptyset$ וגם $S\neq\{0,1\}^*$) קיימת רדוקציית קארפ מ-S למשלים שלה $\bar{S}$.

נכון, יהיו $x_1\in\bar{S}$ ו- $x_2\notin\bar{S}$ (מההכרח קיימים כאלה כי S אינה טריוויאלית. כמו כן, קל למצוא כאלה) נגדיר רדוקציית קארפ מ-S ל-$\bar{S}$ ע"י הגדרת הפונק' f הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} x_1, & x\in S \\ x_2, & x\notin S \end{cases}$$

קל לראות ש-f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי כיוון ש-$S\in P$. כמו כן מתקיים לכל x $f(x)\in\bar{S} \iff x\in S$. לכן זו רדוקציית קארפ תקינה מ-S ל-$\bar{S}$.

(*) למה קל למצוא x_1, x_2 כנ"ל? כי גם אם הבדיקה הזו לוקחת המון זמן זה עדיין לא תלוי באורך הקלט לכן זה זמן קבוע.

יחס שלא ניתן לרדוקציה עצמית:

co-NP - כל השפות S שהמשלים שלהן $\bar{S}$ נמצא ב- NP.

נניח $P \neq NP\cap co\text{-}NP$, נראה כי קיימת בעיית חיפוש (יחס) ב- PC שאינה ניתנת לרדוקציה עצמית.

הוכ': $S\in (NP\cap co\text{-}NP)\setminus P$ לפיכך $S\in NP$ לכן קיים מוודא פולינומי דטרמיניסטי V_S כך שלכל $x\in S$ קיים y (שאורכו חסום פולינומית באורך x) כך ש- $V_S(x,y)=1$ ולכל $x\notin S$ ולכל y: $V_S(x,y)=0$.

$S\in co\text{-}NP$ ולכן $\bar{S}\in NP$ מכאן שקיים מוודא פולינומי דטרמיניסטי $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\in\bar{S}$ קיים y שאורכו חסום פולינומי באורך x כך ש- $V_{\bar{S}}(x,y)=1$ ולכל $x\notin\bar{S}$ ולכל y מתקיים $V_{\bar{S}}(x,y)=0$.

כלומר קיים מוודא $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\notin S$ קיים y כך ש- $V_{\bar{S}}(x,y)=1$ ולכל $x\in S$ ולכל y מתקיים $V_{\bar{S}}(x,y)=0$.

נגדיר 2 יחסים באופן הבא:

$$R_1=\{(x,y)\,|\,V_S(x,y)=1\}\quad,R_2=\{(x,y)\,|\,V_{\bar{S}}(x,y)=1\}$$

שני היחסים האלו ב- PC כי ניתן להשתמש במוודאים V_S ו- $V_{\bar{S}}$ כדי להכריע האם זוג (x,y) שייך ליחס או לא. כמו כן, היחסים הנ"ל חסומים פולינומית כיוון ש- $S,\bar{S}\in NP$ ולכן אורך y חסום פולינומית באורך x עבור (x,y) ביחסים האלו.

נשים ♡!

$$S=\{x\,|\,R_1(x)\neq\emptyset\}=\{x\,|\,R_2(x)=\emptyset\}$$

(כאשר לכל יחס R נגדיר $R(x)=\{y\,|\,(x,y)\in R\}$)

נגדיר יחס R באופן הבא:

$$R=\{(x,1y)\,|\,(x,y)\in R_1\}\cup\{(x,0y)\,|\,(x,y)\in R_2\}$$

נראה שמתקיים - $S_R=\{x\,|\,R(x)\neq\emptyset\}$ ובמקרה שלנו - (כלומר יחס R הנ"ל) $S_R=\{0,1\}^*$

מדוע? נניח בשלילה שקיים $x\notin S_R$ לכן בהכרח לכל y: $(x,y)\notin R_1$ כלומר $V_S(x,y)=0$ לכל y $\Leftarrow$ $x\notin S$.

מצד שני בהכרח לכל y $(x,y)\notin R_2$, כלומר $V_{\bar{S}}(x,y)=0$ לכל y $\Leftarrow$ $x\notin\bar{S}$ $\Leftarrow$ $x\in S$ $\Leftarrow$ סתירה.

לכן $S_R=\{0,1\}^*$ $\Leftarrow$ $S_R\in P$