אלגוריתמים - תרגול

מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונק' משקלות $w: E\to\mathbb{R}$. נרצה לחשב:

1) מטריצה $D=(d_{i,j})$ כך ש- $d_{i,j}=\delta(i,j)$

2) מטריצה $\Pi=(\pi_{i,j})$ כך ש- $\pi_{i,j}=Null$ אם $i=j$ או שאין מסלול מ-i ל-j. אחרת $\pi_{i,j}$ הוא הקודם לקודקוד j למסלול קצר ביותר מ-i ל-j.

רעיון:
נריץ בלמן-פורד מכל קודקוד כמקור.

סיבוכיות: $O(|V|^2\cdot|E|)$ ← יכול להגיע עד ל- $O(|V|^4)$, נניח שהגרף הנתון ע"י מטריצה

סימונות W שאיבר כללי זה מוגדר כ:

$$W_{i,j}=\begin{cases} 0 & , i=j \\ w(i,j) & , i\neq j \wedge (i,j)\in E \\ \infty & , \text{אחרת} \end{cases}$$

האלגוריתם של פלויד-וורשל.

האלגוריתם פועל תחת ההנחות הבאות:

- מותרות קשתות בעלות משקל שלילי.
- אסורים מעגלים בעלי משקל שלילי.

בהינתן קבוצת קודקודים $V=\{1,2,\dots,n\}$. האלגו' מתקדם לפי הקבוצה $\{1,2,\dots,k\}$
עבור k כלשהו נבחן את המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j שעובר דרך קודקודי ביניים מהקבוצה $\{1,2,\dots,k\}$

הגדרה: קודקודי ביניים למסלול מ-v_1 ל-v_k $P=(v_1,v_2,\dots,v_k)$ הם כל הקודקודים למסלול P פרט ל-v_1 ו-v_k.

נחלק לשני מקרים:

(*) אם k אינו קודקוד ביניים למסלול P אזי כל קודקודי הביניים ב-P שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,k-1\}$

(*) אם k הוא קודקוד ביניים ב-P, אז ניתן לפצל את P לשני מסלולים P_1 ו-P_2 כאשר קודקודי הביניים שלהם הם $\{1,2,\dots,k-1\}$

← להוכחה לא ייתכן ש-k יופיע ב-P_1 או ב-P_2 כי אז יהיה מעגל ⇐ סתירה להנחה שאסור.

בס"ד

נגדיר סדרת מטריצות $D^0, D^1, \dots, D^{|V|}$ באופן הבא:

(*) נגדיר את $d^0_{i,j}$ להיות המשקל של המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j כך שאין בו קודקוד ביניים בכלל (קשת אחת בלבד).

(*) נגדיר את $d^1_{i,j}$ להיות המשקל של המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j כך שמותר להשתמש בקודקוד 1 בלבד בתור קודקוד ביניים.

(*) נגדיר את $d^2_{i,j}$ להיות המשקל של המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j כך שמותר להשתמש במספר קודקוד ביניים מהקבוצה $\{1,2\}$

(*) נגדיר את $d^k_{i,j}$ להיות המשקל של המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j כך שמותרים קודקודי ביניים מהקבוצה $\{1,\dots,k\}$

← הפתרון לבעיה הוא המטריצה האחרונה בסדרה $D = D^{|V|}$.

נוסחת הרקורסיה $d^k_{i,j}$ היא:

$$d^k_{i,j} = \begin{cases} \omega_{i,j} & , k=0 \\ \min\{d^{k-1}_{i,j} , d^{k-1}_{i,k} + d^{k-1}_{k,j}\} & , k>0 \end{cases}$$

פסאודו קוד:

```
Floyd-Warshal (W)
    n ← Rows[W]
    D^0 ← W
    for k ← 1 to n
        for i ← 1 to n
            for j ← 1 to n
                d^k_{i,j} ← min{ d^{k-1}_{i,j} , d^{k-1}_{i,k} + d^{k-1}_{k,j} }
    return D^n.
```

סיבוכיות זמן: $O(|V|^3)$

סיבוכיות מקום: $O(|V|^2)$ כי מספיק לשמור רק 2 מטריצות אחרונות.

נוסחה לחישוב $\pi^k_{i,j}$:

$$\pi^0_{i,j} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \wedge (i,j)\in E \\ Null & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\pi^k_{i,j} = \begin{cases} i & , i \neq j \wedge (i,j)\in E \\ Null & , \text{אחרת} \end{cases}$$

23.1.17

בס"ד

האלגוריתם של ג'ונסון: האלגוריתם מוצא מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות בזמן $O(|V|\cdot|E|+|V|^2\log|V|)$ ולכן הוא מהיר אסימפטוטית מהאלגוריתם של פלויד-וורשל עבור גרפים דלילים.

→ מהיר אסימפטוטית, כלומר, לגרפים שבהם ש- $|E|$ הוא לכל היותר $|V|^{1.5}$ נקבל זמן ריצה יותר טוב פה.

(*) האלגוריתם פועל תחת ההנחות הבאות:

- מותרות קשתות בעלות משקל שלילי.
- מותרים מעגלים בעלי משקל שלילי ⟸ האלגוריתם יזהה אותם.

(*) איך נתמודד עם המשקלות השליליים?

- נשתמש בטכניקה של "שקלול מחדש" לחישוב משקלות חדשים לגרף הנתון.

→ פונק' המשקל החדשה $\hat{w}$ תקיים את התכונות הבאות:

1. לכל זוג קודקודים $u,v\in V$, מסלול קצר ביותר מ-u ל-v כאשר פונק' המשקל היא w הוא גם מסלול קצר ביותר מ-u ל-v כאשר פונק' המשקל היא $\hat{w}$.
2. לכל קשת $(u,v)\in E$ המשקל החדש מתקיים ש- $\hat{w}(u,v)$ אי שלילי.

נוכיח למה שתראה כיצד ניתן להגדיר פונק' שתקיים את התכונה הראשונה.

למה: יהיו גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$, תהי $h:V\to\mathbb{R}$ פונק' כלשהי הממפה קודקודים לערכים ממשיים. עבור כל קשת $(u,v)\in E$ נגדיר:

$$\hat{w}(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)$$

יהי $p=(v_0,v_1,\dots,v_k)$ מסלול מ-v_0 ל-v_k כך ש- $w(p)=\delta(v_0,v_k) \iff \hat{w}(p)=\hat{\delta}(v_0,v_k)$

כמו כן, G מכיל מעגל שלילי תחת w $\iff$ G מכיל מעגל שלילי תחת $\hat{w}$.

הוכחה -

נראה תחילה שמתקיים: $\hat{w}(p)=w(p)+h(v_0)-h(v_k)$.

$$\hat{w}(p)=\sum_{i=1}^{k}\hat{w}(v_{i-1},v_i)=\sum_{i=1}^{k}\left(w(v_{i-1},v_i)+h(v_{i-1})-h(v_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}w(v_{i-1},v_i)+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}h(v_{i-1})-h(v_i)}_{\text{טור טלסקופי}}$$

$$w(p)+h(v_0)-h(v_k)$$

המשך בעמוד הבא ↵

נראה כעת,

$$\hat{\omega}(p)=\hat{\delta}(v_0,v_k) \Longleftarrow \omega(p)=\delta(v_0,v_k)$$

נניח בשלילה שכאשר משתמשים בפונק' $\hat{\omega}$ קיים מסלול קצר יותר טוב יותר p'

מ-v_0 ל-v_k, כלומר מתקיים $\hat{\omega}(p')<\hat{\omega}(p)$ נקבל:

$$\omega(p')+h(v_0)-h(v_k)=\hat{\omega}(p')<\hat{\omega}(p)=\omega(p)+h(v_0)-h(v_k)$$

$\Leftarrow$ $\omega(p')<\omega(p)$ סתירה לכך ש- p מסלול קצר ביותר מ-v_0 ל-v_k

תחת ω.

(*) הכיוון השני ניתן להוכיח באופן דומה.

נראה כי קיים ב-G מעגל שלילי תחת ω אמ"מ קיים ב-G מעגל שלילי תחת $\hat{\omega}$.

נתבונן במעגל $C=(v_0,v_1,\dots,v_k)$ כאשר $v_0=v_k$ ב-G.

$$\hat{W}(C)=\omega(C)+h(v_0)-h(v_k)=\omega(C)$$

כלומר, משקלות של מעגלים נשמרים בין w ל-$\hat{w}$.

קיבלנו שאכן קיים מעגל אי שלילי ב-G תחת w $\Longleftrightarrow$ קיים מעגל אי שלילי ב-G תחת $\hat{w}$.

כעת, נראה כיצד ניתן להבטיח את התכונה השניה - אין מעגלים בעלי משקל שלילי. (תחת $\hat{w}$)

לשם כך, בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונק' משקל $\omega:E\to\mathbb{R}$, נבנה גרף חדש

$G'=(V',E')$ כאשר $V'=V\cup\{s\}$ עבור קודקוד חדש $s\notin V$ ו- $E'=E\cup\{(s,v)\}$

ונרחיב את פונק' המשקל ω כך ש- $\omega(s,v)=0$ לכל $v\in V$.

<u>נשים ♡!</u>

אין מסלולים קצרים ביותר ב-G' שמכילים את s פרט למסלולים שיוצאים ממנו.

כמו כן, ב-G קיים מעגל שלילי $\Longleftrightarrow$ ב-G' קיים מעגל שלילי.

נניח שב-G וב-G' אין מעגלים שליליים ונגדיר $h(v)=\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

עפ"י תכונת אי שוויון המשולש מתקיים לכל קשת $(u,v)\in E$: $\underset{\delta(s,v)}{h(v)}\le \underset{\delta(s,u)}{h(u)}+\omega(u,v)$

לכן, אם נגדיר $\hat{W}(u,v)=W(u,v)+h(u)-h(v)$

נקבל: $\hat{W}(u,v)\ge h(v)-h(v)=0$

כלומר, גם התכונה השניה מתקיימת.

23.1.17

TO2

פסאודו קוד:

Johnson (G):

Compute G', where $V[G'] = V[G] \cup \{s\}$

and $E[G'] = E \cup \{(s,v) \mid v \in V[G]\}$

if Bellman-Ford (G', w, s) = False do:

Print "Negative Cycle!"

else

for each vertex $v \in V[G]$ do:

set $h(v)$ to be $\delta(s,v)$ compute by Bellman-Ford.

for each $(u,v) \in E[G]$ do:

$\hat{w}(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$

for each vertex $u \in V[G]$ do:

Run Dixtra $(G, \hat{w}, u)$ to compute $\hat{\delta}(u,v)$ for all $v \in V[G]$

for each vertex $v \in V[G]$ do:

$d_{uv} \leftarrow \hat{\delta}(u,v) + h(v) - h(u)$

זמן הריצה:

Bellman-Ford - $O(|E| \cdot |V|)$

הרצת Dixtra עבור כל אחד מהקודקודים - $O(|V| \cdot |E| + |V|^2 \cdot \log |V|)$