שיטות נומריות - הרצאה י"ג סיון, 7/6/17

לבד

הנחיות לתרגיל 4 - הגשה לזוג. ~~שלושה שבועיים~~ -תהיה הארכה.

שאלה 1: פירוק SVD, מתוק: ← נניח שמטריצה A ניתנת ללכסון.

כלומר: $A_{n\times n} = CDC^{-1}$

[c מטריצה לא סינגולרית — $\det c \neq 0$]

D- מטריצה אלכסונית = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

לא כל מטריצה ניתנת ללכסון. ~~אך כדי שקיים~~ הפירוק קיים רק במקרה ש-A ניתנת ללכסון.

תמיד ניתן להציג: $A = UDV'$ כאשר המימדים $A_{n\times m} = U_{n\times n} D_{n\times m} V'_{m\times m}$

U, V אורתוגונליות (=) מתקיים $U\cdot U' = I_{n\times n}$ ו- $V'V = I_{m\times m}$

$n \geq m$.

בהצגה שתמיד נכונה - D לא דווקא עם הע"ע! ← $\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \end{pmatrix}$.
אלא עם ערכים סינגולריים.

למשל (לא דווקא ריבועי): $D = \boxed{\begin{matrix} \ddots & 0 \end{matrix}}$

$\sigma_i = \sqrt{\rho(AA')}$

הע"ע של המטריצה הזו

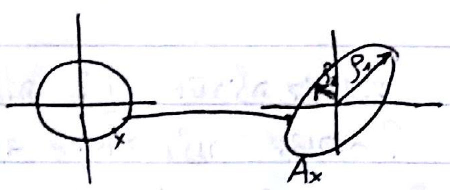
A' זה טרנספוז

$A'A$, AA' - חיוביות וסימטריות.

ערכים סינגולריים של מטריצה D הם השורשים של הע"ע של מטריצה AA'.

$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} \sigma_i$

$[UDV] = svd(A)$. - מה המשמעות הגאומטרית של ערכים סינגולריים?



המקום הגאומטרי זה אליפסה שה"רדיוסים" שלה זה הערכים הסינגולריים.
האליפסואיד.

{ מטריצה ריבועית - לפחות ע"ע אחד יהיה 0.
לא " - " ערך סינגולרי אחד יהיה 0 }

תזכ' - עכשיו נרצה למצוא מטריצה "כאילו הפיכה" (לא דווקא ריבועית).

$$\tilde{A}^{-1} = V\tilde{D}^{-1}U'$$

$Ax=b$

$$\tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & 1/\sigma_2 & & \\ & & \ddots & 1/\sigma_m \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

$$\boxed{x = pinv(A) * b}$$

least square Method

ריבועים פחותים מזעריים.

לתרגול: עשינו svd, מוצאים 3 מט': u, D, V'.
ואז את ההפיכה של V, U'.

$$AA^{-1} = UD\underbrace{V'V}_{I}\tilde{D}^{-1}U^{-1} = \tilde{I}$$

בגלל שה-$\tilde{D}$ צה זוויג.

כיצד זה עוזר לפתור $Ax=b$?

נניח נתונה המטריצה $A = UDV'$, $Ax=b$

$$U'UDV'x = U'b$$

$$DV'x = U'b$$

$$V'x = y \Rightarrow \boxed{x = Vy} \quad (1)$$

$$Dy = V'b \qquad \boxed{y = D^{-1}U'b} \quad (2)$$

בגלל אורתו'

בגלל אלכסונית — 2 משוואות לפתור, (מה) נמצא x ו-y.

שאלה 2: מטריצה רגישה:
כיצד מראים לצורה מבוזרת?
נחבר שורה 1 ו-2, 1 ו-3 עד שנקבל אפסים.

$$\mathrm{cond}(A) = \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ -1 & 1 & & \vdots \\ -1 & & 1 & \vdots \\ -1 & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & 1 \\ -1 & (-1 & \cdots -1) & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{cond}(A_m) = ?$

A_1
A_2
$\vdots$
A_m

לא גודל ערכו ($\mathrm{cond}(A)$) יוצא נטן, אולי מטריצה חולה-צורה
מבוזרת דטבך
(אבל מה הגאושל המטריצה צבנן).

אם נעשה עם pivot טסיום קודם - מה התנאי לא ישתנה.
(שלם)

שים - כשנגדיר למטריצה פיווטינג. מהצורה:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & & & 1 \\ & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & & \\ 1 & & & 1 & \ddots \end{pmatrix}$$

$PA \ne AP$

צורה מדורגת.

$PA = LU$. - הבדל זה חייב פיווטינג.

$[LUP] = lu(A)$

במטלב:

U - הצורה המדורגת של A

שאלה 3: גרהם-שמידט: העברת וקטורים לצורה בסיס.

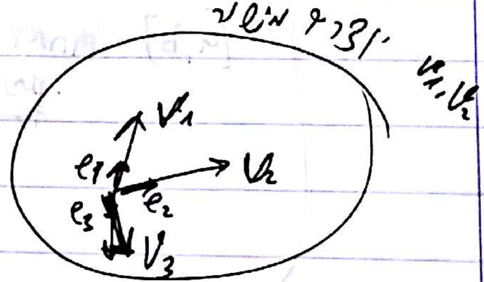
(מתי ניתן תמיד.)

נתון אוסף וקטורים $V_1 \dots V_m \in R^n$

כיצד נבנה מתוך הוקטורים הללו: $\{e_1, \dots, e_k\} \in R^n$ אורתונורמליים.

$e_i \perp e_j \quad i \ne j$

$\|e_i\|_2 = 1 \qquad \forall i,j: \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.



$\bar{e}_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$

$V_1 = \alpha_1 \cdot e_1$.

$V_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 \cdot e_2$

$V_3 = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3$

$\langle V_2, e_1 \rangle = \alpha_2$ מחפשים את e_2:

$\langle V_2, e_2 \rangle = \beta_2$.

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_m \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_k \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ 0 & \beta_2 & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = Q \cdot R}$$

מטריצה משולשית עליונה. לא הוכחה רחמנא. Lens

שאלה 4: שגיאה כללית.

$\boxed{\text{קלט} \rightarrow \text{חישוב} \rightarrow \text{פלט}}$

מס המצב של האלגו':

$$\text{cond} = Max\left\{\frac{\text{השגיאה דפלט}}{\text{השגיאה דקלט}}\right\}.$$

⊛ אלגו' מציאת ע"ע של A: $eig(A) \Leftarrow A \rightarrow \lambda_1,\dots,\lambda_n$.

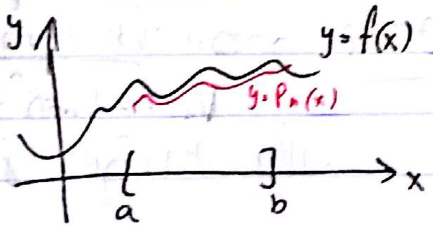
$\tilde{A}$ (מטריצה קצת משובשת) $\rightarrow \tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_n$

~~cond~~ ~~cond~~ condeig(A). ← וקטור.

⊗ $Ax=b$. קלט: A,b. פלט: x. cond(A). ← מס בודד.

יכולה לעוד שדות.

בעיית האינטרפולציה:

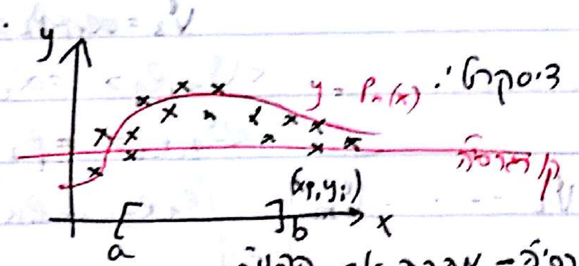


משל:
$y=\sin(x)$
$y=a_0+a_1x+a_2x^2$
דקלמרקין $[a,b]$

נרצה לקרב את הפונק' $y=f(x)$ בעזרת פולינום, בתחום $[a,b]$ מסדר n נתון.

אינטרפולציה - בתוך התחום.
אקסטרפולציה - מחוץ ל...
קירוב, מה יקרה מחוץ לתחום - נשער.

באופן דיסקרטי:

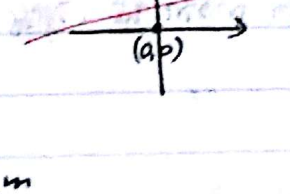


קו רגרסיה - מקרב את הפונק'.

הבעיה הדיסקרטית: אוסף נקודות — נתון עם טבלה: נתונים

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1		y_n

למשל עבור 3 נק':



$\boxed{P_m(x)=?}$ השאלה

$\boxed{P_m(x_i)=y_i}$ (*)

$P_m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_mx^m$.
נחפש את המקדמים.

$$\begin{pmatrix}1 & x_0\\1 & x_1\\ \vdots & \\ 1 & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נקרא מטריצת ונדרמונד. (vander) מטלב

$$\begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\\ \vdots & x_1 & x_1^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\det V = \pm \prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$$

דרישת האינטרפולציה שקולה לפתרון מערך משוואות של המקדמים a הפולינום.

עפ"י הנתונים של הדוגמא:

x	-1	0	1
y	1	0	1
y	2/3	2/3	2/3

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

אין פתרון כי יש משוואות יותר מנעלמים.

$$\boxed{a_0 + a_1 x_i = y_i}$$

$$Aa = b \rightarrow a = A\backslash b$$

פקודה חכמה.

אם יש יותר שורות מעמודות הפתרון אינו קיים.

Regularisation : $A'Ax = A'l$, $A' = A^T$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

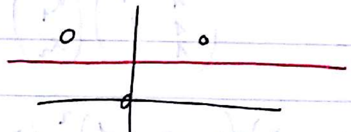
$$\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=1$$

$3a_0 = 2$

$2a_1 = 0$

$$\boxed{a_1 = 0,\quad a_0 = 2/3}$$

$$P_1(x) = \underset{2/3}{a_0} + \underset{0}{a_1}x = \frac{2}{3}$$



נבדוק את ההפרש בין y ל-$\tilde{y}$:

$$SSE = (y-\tilde{y})^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

Sum of Square Errors.

LSM נותן שה-SSE יהיה מינימלי.

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$\Leftarrow$ אי אפשר לקרב את שלושת הנק' בקו ישר כך שה-SSE יהיה פחות מ-$\frac{2}{3}$.

32.

למה רגולריזציה נותנת את הקירוב הטוב ביותר עבור ריבועים מזעריים?

$$A_x = b$$

$$A'A = A'b.$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) =$$

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m - b_1)^2 \cancel{=0}$$
$$+ (a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}\cdot x_m - b_2)^2 \cancel{=0}$$
$$+ \qquad = b_3$$
$$+ \qquad \vdots$$
$$+ (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m - b_n)^2 \cancel{=0}$$

$$\to \min$$

אם יש פתרון (כל שורה פה שווה ל-0) זה כבר מינימלי.

אך אם לא - נחפש את המינימלי.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2a_{11}(a_{11}x_1 + \dots - b_1) + 2a_{21}(\dots) + \dots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2a_{12}(\dots) + 2a_{22}(\dots) + \dots = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

$$2A'(A_x - b) = 0.$$

⇐ שיטת הריבועים המזעריים $\Leftrightarrow$ משוואת רגולריזציה.

חסר: פירוק ה-SDP. עם קשר לערכים סינגולריים.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לבדוק שמקבלים את אותו הדבר.

* במטלב שיטה זו (אינטרפולציה):

$$\text{cftool}(x, y) \leftarrow \begin{cases} \text{curve} \\ \text{fitting} \\ \text{tools} \end{cases}$$

מערכים

להסתכל על זה במטלב.

* לשים לב לסדרת הציור.

* $y = P_n(x)$. נגדיר. ⇐

- אינטרפולציה -

$$\text{cond}(\text{אינטרפולציה}) = \text{cond}(\text{Vander}(x_0, x_1, \dots, x_n))$$

מס' רנדומליים

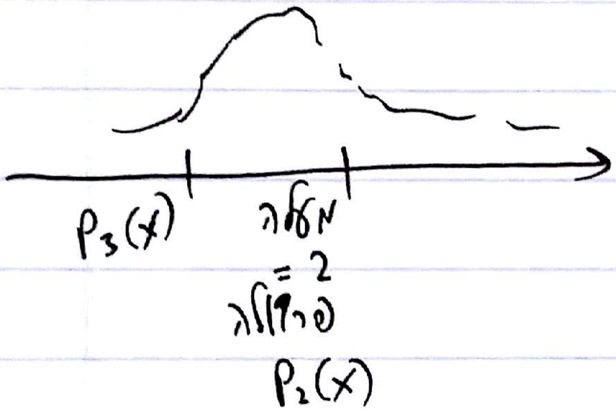
בעיית האינטרפ' לא טובה כך. לכן: ה-cond יהיה מאוד גדול. נפל קומץ ממעלה גבוהה.

שבוע 3,

Cubic Spline interpolation.

במקרים הללו, פול' עם מעלה קטנה זה טוב.

נחפש בתתי-הקטע שבתוך [a,b].



~~אלא~~ נחפש פולינום עד מעלה 3 בקטע הקטן.

דורש את התנאי של רציפות פונק' ונגזרת ...