ההיררכיה הפולינומית

הגדרה 1 - באמצעות כמתים.

$$PH = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k$$

הגדרה 2 - מ"ט עם גישת אורקל.

תהי $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ פונקציית אורקל.
מ"ט M עם גישת אורקל ל-f (סימון: M^f) היא מ"ט שיש לה סרט נוסף המכונה "סרט אורקל" שהיא יכולה לכתוב עליו מחרוזת z ולקבל חזרה מהאורקל תוך צעד אחד את הערך של $f(z)$.
פעולה זו נקראת "שאילתא" והיא מבוצעת בצעד יחיד מרגע הפקת השאילתא ועד להחזרת התשובה.

עבור שפה / בעיית הכרעה A. מ"ט M עם גישת אורקל ל-A (סימון: M^A) היא מ"ט M שיכולה לכתוב על סרט האורקל שלה מחרוזת a ולקבל חזרה מהאורקל תשובה האם $a \in A$ או לא (פונקציה בוליאנית).

המחלקה של הקבוצות המתקבלות ע"י מ"ט פולינומית דטרמיניסטית עם גישת אורקל לפונקציה f מכונה P^f.
ובאופן דומה המחלקה של הקבוצות המתקבלות ע"י מ"ט לא דטרמיניסטית פולינומית עם גישת אורקל לפונקציה f מכונה: NP^f.

כמו כן מוגדר עבור מחלקת בעיות הכרעה C:

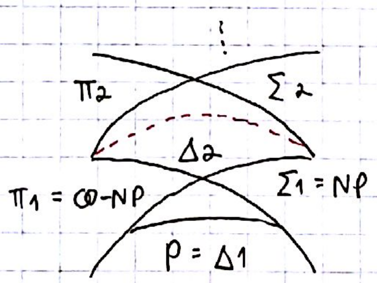
$$P^C = \bigcup_{f \in C} P^f \qquad NP^C = \bigcup_{f \in C} NP^f$$

משפט - הקשר בין שתי ההגדרות.

$$\Sigma_{k+1} = NP^{\Sigma_k}$$

סימונים ותכונות

1. $\Pi_k = co\Sigma_k$
2. $\Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$ $\qquad \Delta_1 = P^{\Sigma_0} = P^P = P$
3. $\Pi_k \subseteq \Sigma_k \Rightarrow \Sigma_k = \Sigma_{k+1}$ לכל $k \geq 1$
4. $\Sigma_k = \Sigma_{k+1} \Rightarrow PH = \Sigma_k$ לכל $k \geq 0$
5. $\Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}$, $\Pi_k \subseteq \Pi_{k+1}$



תרגול

הוכיחו את הטענות הבאות באמצעות הגדרה (2).
1. $\Delta_k \subseteq \Sigma_k \cap \Pi_k$
2. $\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1}$
3. $\Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1}$

פתרון

1. נראה כי $\Delta_k \subseteq \Sigma_k$.
כזכור, $\Delta_k = P^{\Sigma_{k-1}}$, $\Sigma_k = NP^{\Sigma_{k-1}}$
תהי $S \in \Delta_k$ לכן קיימת מ"ט פולינומית דט' עם גישת אורקל לשפה ב Σ_{k-1} שמכריעה את S. מכונה זו בפרט לד' (ללא מנחש כלום)
ולכן $S \in \Sigma_k = NP^{\Sigma_{k-1}}$.

נראה כי $\Delta_k \subseteq \Pi_k$
תהי $S \in \Delta_k$ לכן $\bar{S} \in \Delta_k$ (ניתן להפוך את התשובה של המכונה שמכריעה את S)
$\Leftarrow$ ($\Delta_k \subseteq \Sigma_k$) $\bar{S} \in \Sigma_k$ לכן $S \in \Pi_k$ (תכונה 1)

2. נטען ש $\Sigma_k \subseteq \Delta_{k+1}$ ולכן לפי מה שהוכחנו בסעיף 1 הטענה מתקיימת מיידית.
תהי $S \in \Sigma_k$ כלומר מתקיים $S \in \Delta_{k+1}$

• $\Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$

ניתן ליצור מ"ט M עם גישת אורקל ל-S שמכריעה את S באופן הבא:
בהינתן קלט x
המכונה תשאל את האורקל עם מחרוזת x ותחזיר את תשובת האורקל.

$\Leftarrow$ $S \in \Delta_{k+1}$

3. נטען ש $\Pi_k \subseteq \Delta_{k+1}$ ולכן לפי מה שהוכחנו בסעיף 1 הטענה נובעת מיידית.
תהי $S \in \Pi_k$ לכן $\bar{S} \in \Sigma_k$ לפיכך ניתן ליצור מ"ט פולינומית דט' עם גישת אורקל ל-$\bar{S}$ שמכריעה את S:
בהינתן קלט x
המכונה תשאל את האורקל עם המחרוזת x ותחזיר תשובה הפוכה לזו של האורקל.

$\Leftarrow$ $S \in \Delta_{k+1} = P^{\Sigma_k}$

מזכיר את רדוקציית קוק
שניתן לשחק עם המצבים
כיוון שהיא דט' פולינומית.