26.1.17

אלגוריתמים - הרצאה

<u>רשת זרימה</u>: גרף מכוון $G=(V,E)$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$ יש קיבולת $c(u,v)>0$

אם $(u,v)\notin E$ אז $c(u,v)=0$ וקודקוד מקור s וקודקוד יעד t.

<u>זרימה ב-G</u>: היא פונקציה $f:V\times V\to\mathbb{R}$

1. $f(u,v)\le c(u,v)$
2. $f(u,v)=-f(v,u)$
3. שימור הזרימה: $\forall x\in V\setminus\{s,t\}:\ \sum_{y\in V} f(x,y)=0$

ערך הזרימה: $|f|=\sum_{y\in V} f(s,y)$

בעיית הזרימה המקסימלית:

קלט: רשת זרימה - $<G=(V,E),c,s,t>$

פלט: זרימה f ל-G כך ש- $|f|$ מקסימלי.

סימון: עבור $X,Y\subseteq V$ נסמן $f(X,Y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y)$

קבוצה X

קבוצה Y

דוגמה: $|f|=f(\{s\},V)$

דוגמה: שימור הזרימה: $\forall x\in V\setminus\{s,t\}:\ f(\{x\},V)=0$

<u>למה</u>: תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה ותהי f זרימה ל-G אזי עבור:

$X\subseteq V$: $f(X,X)=0$

$X,Y\subseteq V$: $f(X,Y)=-f(Y,X)$

נובעים מהסימטריה של הזרימה

$X,Y,Z\subseteq V,\ X\cap Y=\emptyset$: $f(X\cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$

$f(Z,X\cup Y)=f(Z,X)+f(Z,Y)$

נובע מפיזור פשוט של סכומים.

<u>טענה</u>: $|f|=f(V,\{t\})$

הוכחה-

$$|f|=f(\{s\},V)=\overbrace{f(V,V)}^{0}-f(V-\{s\},V)=-f(V-\{s\},V)=f(V,V-\{s\})=f(V,\{t\})+f(V,V-\{s\}-\{t\})\underset{(*)}{=}f(V,\{t\})$$

$$f(V,V)=f(\{s\},V)+f(V\setminus\{s\},V)\Rightarrow f(\{s\},V)=f(V,V)-f(V\setminus\{s\},V)$$

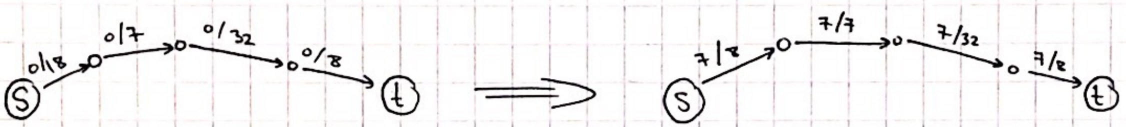
$$(*)\ f(V,V-\{s\}-\{t\})=-f(V-\{s\}-\{t\},V)=\sum_{x\in V-\{s\}-\{t\}} f(\{x\},V)\underset{\text{עפ"י שימור הזרימה}}{=}\sum 0=0$$

בס"ד

זרימת ה-0 : $\forall_{u,v\in V} : f(u,v)=0$

זו זרימה חוקית, כמובן שאינה מקסימלית. לפני שננסה להחזיר את המקסימלית אפשר לנסות קודם לשפר את זרימת ה-0 כך שעדיין תקיים את הגדרות הזרימה.

נסתכל על מסלול כלשהו, מ-s ל-t, נאתחל את הזרימה בכל הקשתות לזרימה השווה לקיבולת המינימלית מבין הקשתות באורך המסלול. לדוג' -



וכך שיפרנו את הזרימה.

אם יש מסלול נוסף שמתחבר לקודקוד מסוים דרך המסלול הזה נצטרך להעלות את כל הקשתות באורך ערך כדי לשמור על שימור הזרימה:

האלגוריתם של פורד-פלקרסון:

1. אתחל זרימה f לזרימת ה-0.
2. כל עוד קיים "מסלול שיפור" p, שפר את הזרימה f לפי p.
3. החזר f.

מה נעשה אם במסלול קשתות אשר אינם באותו הכיוון? (לאו דווקא מ-s ל-t)

נתייחס לקשתות "דמה" לכיוון ההפוך שיוגדרו כמינוס הקשת לכיוון האמיתי בגרף.

הגדרה: יהיו $u,v\in V$, הקיבולות השיוריות (יחסית ל-f) הן $C_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$

הגדרה: הרשת השיורית עבור רשת זרימה $<G=(V,E),c,s,t>$ וזרימה f מוגדרת:

כגרף $G_f=(V,E_f)$ כאשר $E_f=\{(u,v)|C_f(u,v)>0\}$

הגדרה: מסלול שיפור הוא מסלול מ-s ל-t ב-G_f.

הגדרה: הקיבולת השיורית של המסלול p מוגדרת כ: $C_f(p)=\min_{(u,v)\in p} C_f(u,v)$

26.1.17 בס"ד

פסאודו קוד:

Ford - Fulkerson:

$\forall_{(u,v)\in E}$

$f(u,v) \leftarrow 0 \qquad C_f(u,v) \leftarrow c(u,v)$

$f(v,u) \leftarrow 0 \qquad C_f(v,u) \leftarrow c(v,u)$

While $\exists p$ from s to t in G_f

$C_f(p) \leftarrow \min\{C_f(u,v) \mid (u,v)\in p\}$

for each $(u,v)\in p$

$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + C_f(p)$

$f(v,u) \leftarrow f(v,u) - C_f(p)$

$C_f(u,v) \leftarrow c(u,v) - f(u,v)$

$C_f(v,u) \leftarrow c(v,u) - f(v,u)$

הגדרה: חתך ברשת זרימה $<G,c,s,t>$ = חלוקה של הקודקודים (S,T), $S,T \subseteq V$

(כלומר חלוקה מוגדרת כך: $S\cup T=V$, $S\cap T=\emptyset$) כך ש- $s\in S$, $t\in T$.

טענה: לכל חתך (S,T) ברשת זרימה $(<G,c,s,t>)$ ולכל זרימה f ב- G

מתקיים ש- $f(S,T)=|f|$

הוכחה -

$$f(S,T) = f(S,V) - \overbrace{f(S,S)}^{0} = f(S,V) = f(\{s\},V) + f(S\setminus\{s\},V) = |f| + f(S\setminus\{s\},V) = |f| + \overbrace{\sum_{x\in S-\{s\}} f(\{x\},V)}^{0} = |f|$$

$\downarrow$

$f(S,V) = f(S, T\cup S) =$
$= f(S,T) + f(S,S)$

הגדרה: קיבול של חתך $C(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y)$

טענה: לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) מתקיים $|f| \le c(S,T)$

הוכחה -

$$|f| = f(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f(x,y) \le \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y) = C(S,T)$$

טענה קודמת

בס"ד

משפט: (פורד - פלקרסון) אם f זרימה ברשת זרימה $\langle G,c,s,t \rangle$ אזי (התנאים) הבאים שקולים:

(1) f זרימה מקסימלית

(2) הרשת השיורית G_f אינה מכילה מסלול שיפור.

(3) קיים חתך (S,T) ב- $\langle G,c,s,t \rangle$ כך ש- $|f|=c(S,T)$

הוכחה:

$(1) \Rightarrow (2)$: נניח ש- f זרימה מקסימלית ונניח בשלילה שיש מסלול שיפור ב- G_f , p.

אזי יש זרימה f' שערכה $|f'|=|f|+c_f(p)>|f|$ בסתירה ל- f מקסימלית.

$(2) \Rightarrow (3)$: נגדיר: $S=\{u \mid$ יש מסלול מ-s ל-u ב-$G_f\}$ ו- $T=V-S$

(S,T) חתך ברשת הזרימה כי $s\in S$ (לפי הגדרת S) ו- $t\in T$ (כי אם $t\in S$

אזי יש מסלול שיפור בסתירה להנחה לכן $t\notin S$ ומכאן $t\in T$ בהכרח)

נרצה להוכיח שלכל (u,v) כך ש- $u\in S$ ו- $v\in T$ מתקיים $f(u,v)=c(u,v)$

נניח בשלילה ש- $f(u,v)<c(u,v)$ $\Rightarrow$ $c_f(u,v)>0$ וכיוון שיש מסלול מ-s ל-u ($u\in S$)

ויש קשת ב- G_f מ-u ל-v $\Rightarrow$ יש מסלול מ-s ל-v $\Rightarrow$ $v\in S$ ← סתירה.

ולכן קיבלנו $f(u,v)=c(u,v)$ ומכאן -

$$|f| = f(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f(x,y) \underset{f(x,y)=c(x,y)}{=} \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y) = C(S,T)$$

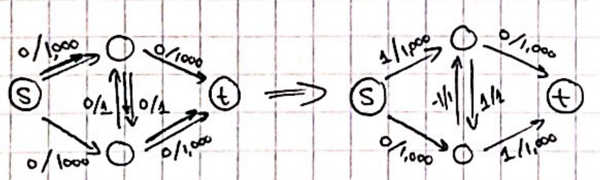
כדרוש.

$(3) \Rightarrow (1)$: נניח בשלילה שקיים (S,T) כך ש- $|f|=C(S,T)$ אך f אינה מקסימלית

לכן קיים f' כך ש- $|f'|>|f|$ ולכן $|f'|>|f|=c(S,t)$ $\Rightarrow$ סתירה.
(לטענה מעמוד קודם)

זמן ריצה:

נסתכל על מקרה גרוע:



נשים לב!

אם במקרה הגרוע בכל פעם ניקח את המסלול שכולל את הקשת באמצע
נקבל $O(1,000)$, נלמד שיפור הזה אך ניתן לשפר זאת.

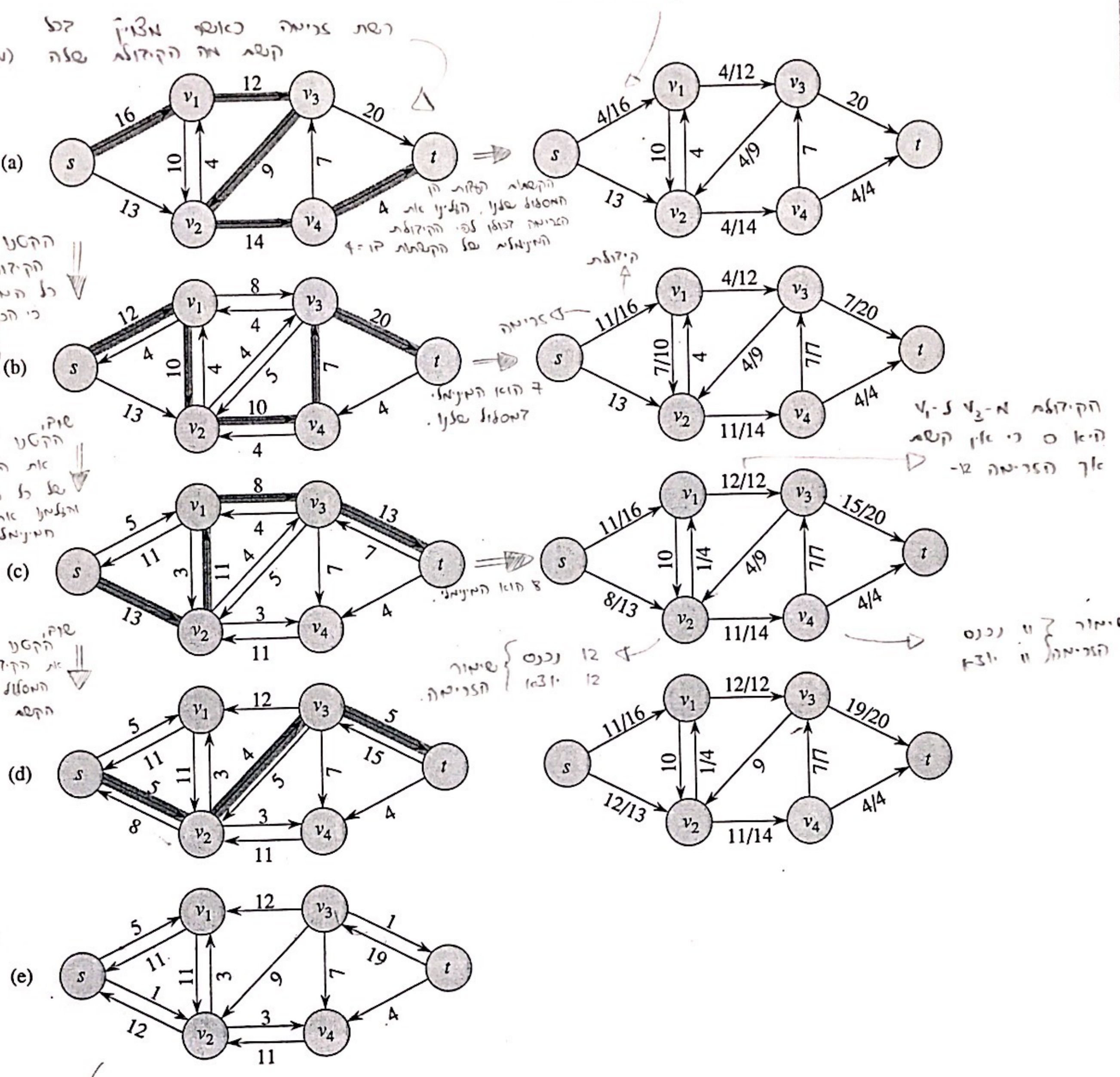


Figure 26.5 The execution of the basic Ford-Fulkerson algorithm. **(a)–(d)** Successive iterations of the **while** loop. The left side of each part shows the residual network G_f from line 4 with a shaded augmenting path p. The right side of each part shows the new flow f that results from adding f_p to f. The residual network in (a) is the input network G. **(e)** The residual network at the last **while** loop test. It has no augmenting paths, and the flow f shown in (d) is therefore a maximum flow.