חישוביות - הרצאה 11

נזכיר: NP - בעיות שניתן לבדוק בזמן פולינומי.
P - בעיות שניתן לפתור בזמן פולינומי.

השאלה: האם $P=NP$? שאלה פתוחה...

נזכיר משפט שנלמד: $SAT=\{\psi \mid \psi$ נוסחת CNF ספיקה.$\} \in NP$.

רדוקציה פולינומית מ-L_1 ל-L_2 תסומן $L_1 \le_p L_2$ ובנוסף מתקיים - (רדוקציה ומחושבת בזמן פולינומי)

$L_1 \le_p L_2$ אם $L_2 \in P \Leftarrow L_1 \in P$

טרנזיטיביות: $L_1 \le_p L_2$ וגם $L_2 \le_p L_3 \Leftarrow L_1 \le_p L_3$.

הגדרה: שפה L תיקרא NP-קשה אם לכל $L' \in NP$ מתקיים $L' \le_p L$

נסמן ב- NPH את אוסף השפות ה- NP-קשות.

נאמר כי L הינה NP-שלמה אם L הינה NP-קשה ובנוסף $L \in NP$.

נשים לב!

כלומר הערה אינטואיטיבית הסימון - $L' \le_p L$ מסמן לנו ש- L קשה לפחות אם לא יותר מכל $L' \in NP$, מה זה בעצם קושי? זמן ריצה של פתרון.
...

טענה: L שפה NP-שלמה אזי: $P=NP \Leftrightarrow L \in P$.

נסמן ב- NPC את אוסף השפות ה-NP-שלמות.

משפט לוין קוק: SAT הינה NP-שלמה. ($SAT \in NPC$)

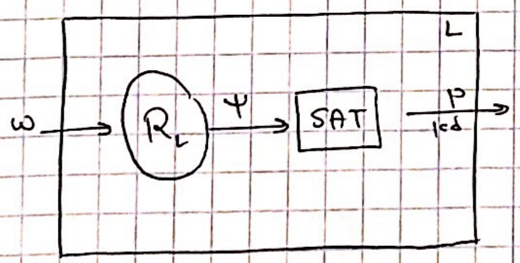
הוכחה -

$SAT \in NP$ - הראנו.

נראה ש- $SAT \in NPH$ (הינה NP-קשה) צריך להראות שלכל $L \in NP$ יש רדוקציה פולינומית R_L מ- L ל- SAT. תהי $L \in NP$, אזי קיימת מ"ט לא"ד:

$M_L=\{Q,\Sigma,\Gamma,\Delta,q_0,q_{acc},q_{rej}\}$ שמכריעה את L ופולינום P_L כך שלכל

קלט ω M_L מבצעת לכל היותר $P_L(|\omega|)$ צעדים.



כלומר, רוצים שבהינתן ω לבנות ψ נוסחת CNF כך ש- ψ ספיקה $\Leftrightarrow \omega \in L$

$\Leftrightarrow$ M_L מאשרת את ω

$\Leftrightarrow$ קיים חישוב של M_L על ω שמגיע ל- q_{acc}.

בהינתן מכונה המ"ט לה שפנו שמאושרת את L, נרצה לבנות פסוקית Ψ.

ניזכר בצורה של ההוכחה של הרדוקציה של Tile המקורית, וכך נסמן כל שורה כמישור כרצף קונפיגורציה, כך ששתי שורות עוקבות במישור יהוו 2 קונפיגורציות עוקבות כך שהשורה העליונה תקבל את q_{acc}.

לעומת ההוכחה של Tile פה אנו לא מסתפקים בגודל אינסופי אלא בגודל סופי.

כיוון שהתקבל q_{acc}, מהו הגודל? $P_L(|w|)$

מה הרוחב? $2P_L(|w|)$ כי היא יכולה לכל צעד להתקדם מקסימום צעד אחד לכיוון מסוים ולכן אם התחלנו ב-0 והיא לקחה $P_L(|w|)$ צעדים לימין היא תגיע ל-$P_L(|w|)$ ובצורה סימטרית לשמאל תגיע ל-$-P_L(|w|)$ לכן סה"כ

$$\underbrace{-P_L(|w|) \xleftarrow{P_L(|w|)} 0 \xrightarrow{P_L(|w|)} P_L(|w|)}_{2P_L(|w|)}$$

נוסיף ל-Δ את הריצות הבאות לכל $\sigma\in\Gamma$: $(q_{acc},\sigma,q_{acc},\sigma)$

מדוע? כי אולי לא נגיע ל-q_{acc} בשורה האחרונה, הרי $P_L(|w|)$ הוא חסם עליון לכן אם הגענו ל-q_{acc} נרצה את הריצה שתשאיר אותנו באותו מצב.

לשם הנוחות נסמן: $k=P_L(|w|)$.

<u>משתנים</u>: $i\uparrow \ \to j$

<u>משתני תוכן</u>: לכל $0\le i\le k$ ו-$-k\le j\le k$ ולכל $\sigma\in\Gamma$ נסמן $X_{\sigma,i,j}$

כלומר אם בנקודה (i,j) נמצא σ הערך $X_{\sigma,i,j}=True$, אחרת יהיה False.

<u>משתני ראש</u>: לכל i,j כנ"ל ולכל $q\in Q$ נסמן $Y_{q,i,j}$ באותה צורה.

כלומר, יהיה True אם q כשהוא נמצא בנקודה (i,j)

הפסוקיות/תנאים ב-Ψ:

1. בכל משבצת יש תוכן אחד ויחיד: לכל $0\le i\le k$, $-k\le j\le k$

יש תוכן אחד: $\bigvee_{\sigma\in\Gamma} X_{\sigma,i,j}$ ← סימן ל- $x\vee x\vee\dots\vee x$, הרחבה "או".

יש תוכן יחיד: $\forall\sigma,\pi\in\Gamma$ כאשר $\sigma\neq\pi$ $\overline{(X_{\sigma,i,j}\wedge X_{\pi,i,j})}$

בעיה: נרצה CNF, כלומר שבתוך הסוגריים יש $\vee$, נבצע דה-מורגן: $(\overline{X_{\sigma,i,j}}\vee\overline{X_{\pi,i,j}})$

2. בכל שורה יש ראש אחד ויחיד: לכל $0\le i\le k$,

יש תוכן אחד: $\bigvee_{-k\le j\le k}\bigvee_{q\in Q} Y_{q,i,j}$ $(Y_{q_0,i,-k}\vee Y_{q_0,i,-k-1}\vee\dots\vee Y_{q_0,i,k}\vee Y_{q_1,i,-k}\vee\dots\vee Y_{q_n,i,k})$

יש תוכן יחיד: $\forall_{(j',q'),(j,q)}$ מתקיים כאשר $(j',q')\neq(j,q)$ $\Leftarrow$ $(\overline{Y_{q,i,j}}\vee\overline{Y_{q',i,j'}})$

← כאשר בין כל הפסוקיות הנ"ל נשים $\wedge$ (וגם).

22.1.17 בס"ד

3. השורה הראשונה מתאימה לקונפיגורציה ההתחלתית.

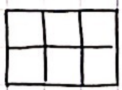
נגדיר $w=w_0w_1\cdots w_{n-1}$ כאשר $w_i\in\Sigma$ לכל $0\le i\le n-1$.

לכל $0\le l\le n-1$: $X_{w_l,0,l}$ (האות w_l נמצאת בתא $(0,l)$)

לכל $-k\le j\le -1$, $n\le l\le k$: $X_{-,0,l}$ (בשאר השורה יש רווח -)

וכמו כן, $Y_{q_0,0,0}$ (הראש נמצא ב- $(0,0)$)

4. החישוב תקין מבחינת M_L.

נבדוק בכל פעם שישייה של משבצות  שמתארות לנו מעבר בין קונפיגורציות עוקבות.

מהי שישייה תקינה?

- אם אין באף משבצת q_i השישייה תקינה, רק אם שתי השורות זהות.
- אם יש במשבצת (i,j) q_t כלשהו אזי יתכן שב- $(i+1,j)$ יהיה $q_{t'}\neq q_t$ אם קיימת קונפיגורציה כזו.
- אם יש במשבצת (i,j) q_t כלשהו אזי יתכן שבשורה מעל יהיה אותו q_t בעמודה מימין או משמאל ל- j אם קיימת קונפיגורציה שמזיזה את הראש ימינה או שמאלה בהתאמה.

~~אם יש במשבצת q_t ... השורה הראשונה ...~~

באופן פורמלי:

לכל $0\le i\le k-1$ ולכל $-k\le j\le k-2$:

"השישייה שהקצה השמאלי התחתון שלה ב- i,j אינה לא תקינה" =

= לכל צורת אי תקינות F השישייה שמיקום i,j אינה מסוג F.

5. השורה האחרונה יש q_{acc}: $\bigvee_{-k\le j\le k} Y_{q_{acc},k,j}$

⇐ לסיכום, קיבלנו רדוקציה שמקיימת $w\in L \iff \Psi\in SAT$

⇐ SAT היא NP-שלמה. □