# פירוק $QR$

"אב" של הפירוק QR הוא גראם (1883). מאוחר יותר שמידט (1907)

הוכיח את **QR decomposition theorem**.

**Jørgen Pedersen Gram**
(1850 –1916)

**Erhard Schmidt**
(1876-1959)

אם $A$ - מטריצה $m \times n$ , עם עמודות בת"ל אזי היא ניתנת לפירוק

$$A = QR$$

אשר בו

$Q$ – מטריצה $m \times m$ אשר עמודותיה הן בסיס אורטונורמאלי עבור מרחב עמודות של $A$

$R$ – מטריצה משולשת עליונה לא סינגולארית

- **מוטיבציה :**
  - אלטרנטיבה לשיטת גאוס לפתרון $Ax = b$
  - מציאת ערכים עצמיים של מטריצה
  - מציאת בסיס של תת-מרחבים אורטוגונליים
  - וכו'
- **דוגמאות לאפשרות לבניית מטריצה אורטוגונלית:**

- תהליך Gram-Schmidt

- Householder Reflection

- Givens Rotation

# Alston Scott Householder

Born: 5 May 1904 in Rockford, Illinois, USA.
Died: 4 July 1993 in Malibu, California, USA.

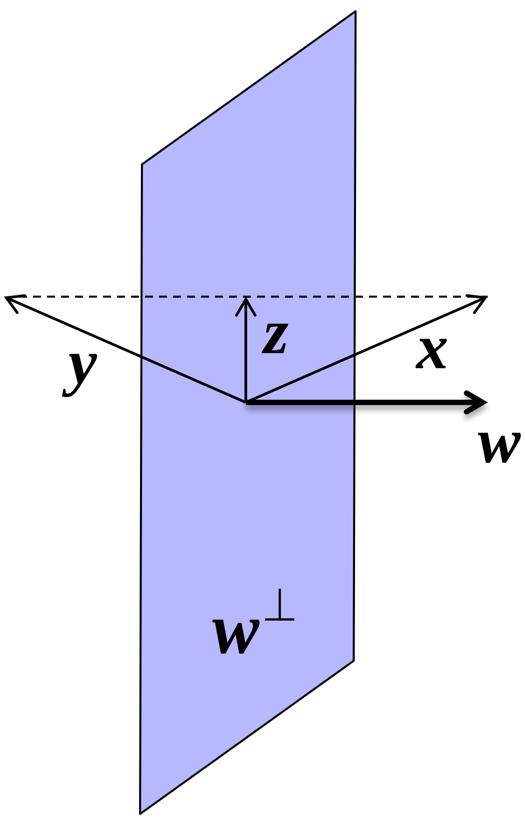
**משפט (Householder reflection) :** אם $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ - וקטורים בעלי אותה נורמה, אזי קיימת מטריצה אורטוגונלית סימטרית $H$ המקיימת $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$

כאשר

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$$

ו-

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$




מהאורטוגונליות וסימטריות של $H$ נובע כי

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}$$

**מסקנה (מטריצה ה- $k$ -ית של Householder)** : תהי $A$ - מטריצה

ו- $x$ - וקטור כלשהו. אם $k$ - מספר שלם המקיים $1 \le k \le n-2$ ,

אזי אפשר לבנות וקטור $w_k$ ומטריצה $H_k = I - 2w_k w_k^T$ כך ש

$$H_k x = H_k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ -s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y$$

# תהליך הפירוק QR
# בעזרת טרנספורמציית Householder

**צעד 1**

$$A = IA = \underset{Q^{(1)}}{IH^{(1)}}\ \underbrace{H^{(1)}A}_{R^{(1)}}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

**צעד 2**

$$A = Q^{(1)}R^{(1)} = \underbrace{Q^{(1)}H^{(2)}}_{Q^{(2)}}\ \underbrace{H^{(2)}R^{(1)}}_{R^{(2)}}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q^{(2)} = Q^{(1)}H^{(2)} = H^{(1)}H^{(2)}$$

$$R^{(2)} = H^{(2)}R^{(1)} = H^{(2)}H^{(1)}A$$

**צעד $m$**

$$A = Q^{(m)} R^{(m)} = QR$$

$$Q = Q^{(m)} = H^{(1)} H^{(2)} \dots H^{(m)}$$

$$R = R^{(m)} = H^{(m)} \dots H^{(2)} H^{(1)} A$$

# דוגמא 1 : מצא פירוק $QR$ של המטריצה הבאה

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## צעד 1

1. נגדיר $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$

2. $$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\left\|\boldsymbol{v}_1\right\|_2}\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{s}\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{sign}(\boldsymbol{a}_{11})\sqrt{\left\|\boldsymbol{a}_1\right\|_2}$$

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\left\|\boldsymbol{v}_1\right\|_2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{s} = \sqrt{4} = 2$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\boldsymbol{T}} \quad .3$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

## צעד 2 : נתבונן רק בתת-מטריצה של $A^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_1^{(1)} = \frac{1}{\left\|\boldsymbol{v}_1^{(1)}\right\|_2}\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \quad \boldsymbol{v}_1^{(1)} = \boldsymbol{a}_1^{(1)} - \boldsymbol{s}^{(1)}\boldsymbol{e}_1^{(1)}, \quad \boldsymbol{s}^{(1)} = \boldsymbol{sign}(\boldsymbol{a}_{11}^{(1)})\sqrt{\left\|\boldsymbol{a}_1^{(1)}\right\|_2}$$

$$\boldsymbol{w}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{s} = \sqrt{25} = 5$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)\boldsymbol{T}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(2)}=\boldsymbol{H}^{(1)}\boldsymbol{H}^{(2)}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

קיבלנו :

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

# שיטות איטרטיביות
# לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

- השיטות שימושיות עבור מערכות גדולות ודלילות

- **רעיון :** $Ax = b$ ⇦ $x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

- יהי $A = L + D + U$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$\left(L + D + U\right)x = b$$

## שיטת גאוס-זיידל

## Gauss-Seidel's Method

$$\Downarrow$$

$$(L + D)x = -Ux + b$$

$$\Downarrow$$

$$x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1} = -(L + D)^{-1}Ux_k + (L + D)^{-1}b$$

## שיטת יעקובי

## Jacobi's Method

$$\Downarrow$$

$$Dx = -(L + U)x + b$$

$$\Downarrow$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

# שיטת גאוס-זיידל : צורה שקולה, שימושית יותר

נחזור ל-

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}_{k+1} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_{k+1} = -\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

שוני בין שתי השיטות – צורת עדכון של איטרציה

# דוגמא

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 6 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

- איטרציית יעקובי :

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k} \\ y^{k} \\ z^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^k + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^k + 0.5y^k - 1.5 \end{cases}$$

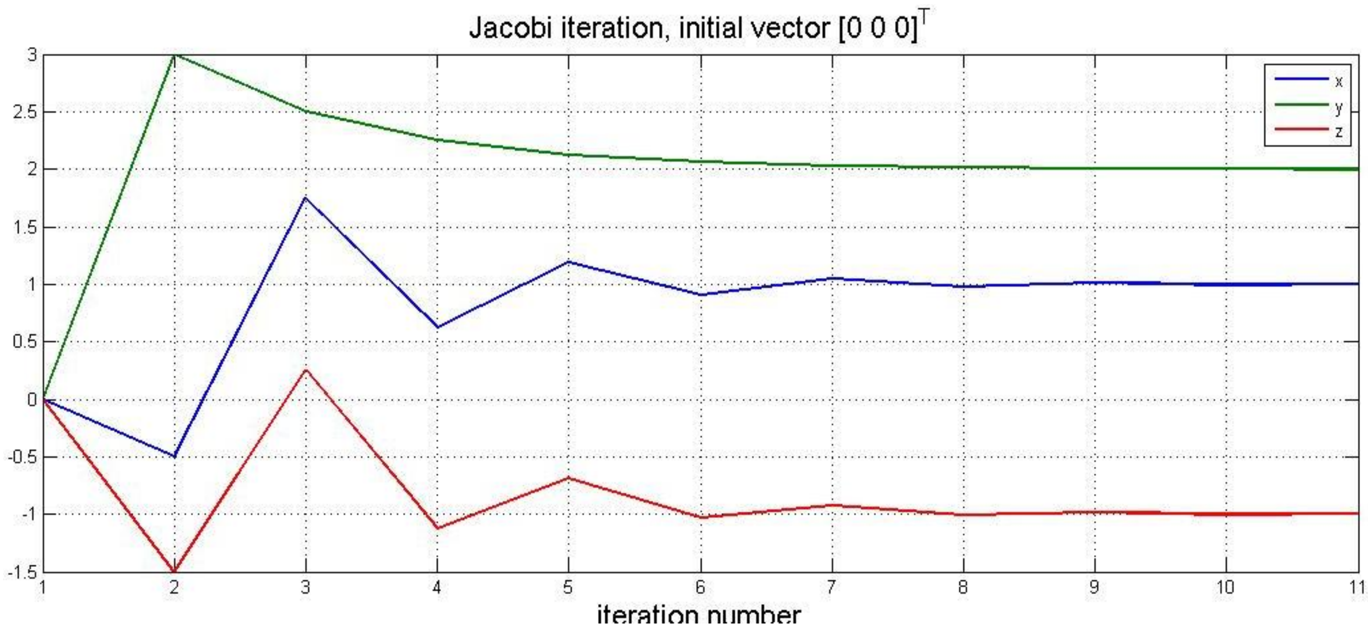
- איטרציית גאוס – זיידל :

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5y^{k+1} - 1.5 \end{cases}$$

## איטרציית יעקובי עם ניחוש התחלתי $[0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^k + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^k + 0.5y^k - 1.5 \end{cases}$$

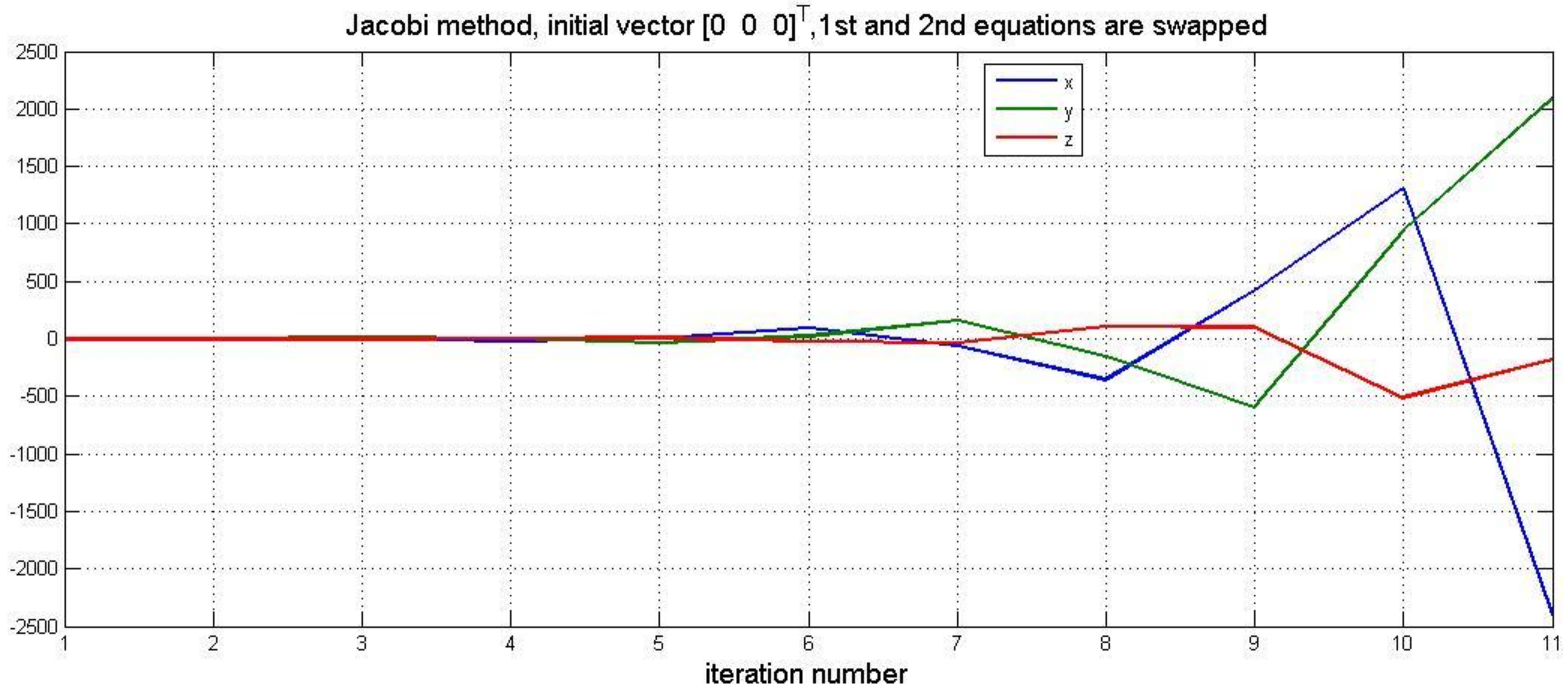
| iteration | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -0.5 | 3 | -1.5 |
| 2 | 1.75 | 2.5 | 0.25 |
| 3 | 0.625 | 2.25 | -1.125 |
| 4 | 1.1875 | 2.125 | -0.6875 |
| 5 | 0.90625 | 2.0625 | -1.03125 |
| 6 | 1.046875 | 2.03125 | -0.92188 |
| 7 | 0.976563 | 2.015625 | -1.00781 |
| 8 | 1.011719 | 2.007813 | -0.98047 |
| 9 | 0.994141 | 2.003906 | -1.00195 |
| 10 | 1.00293 | 2.001953 | -0.99512 |



## איטרציית יעקובי עם ניחוש התחלתי $[0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 6 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

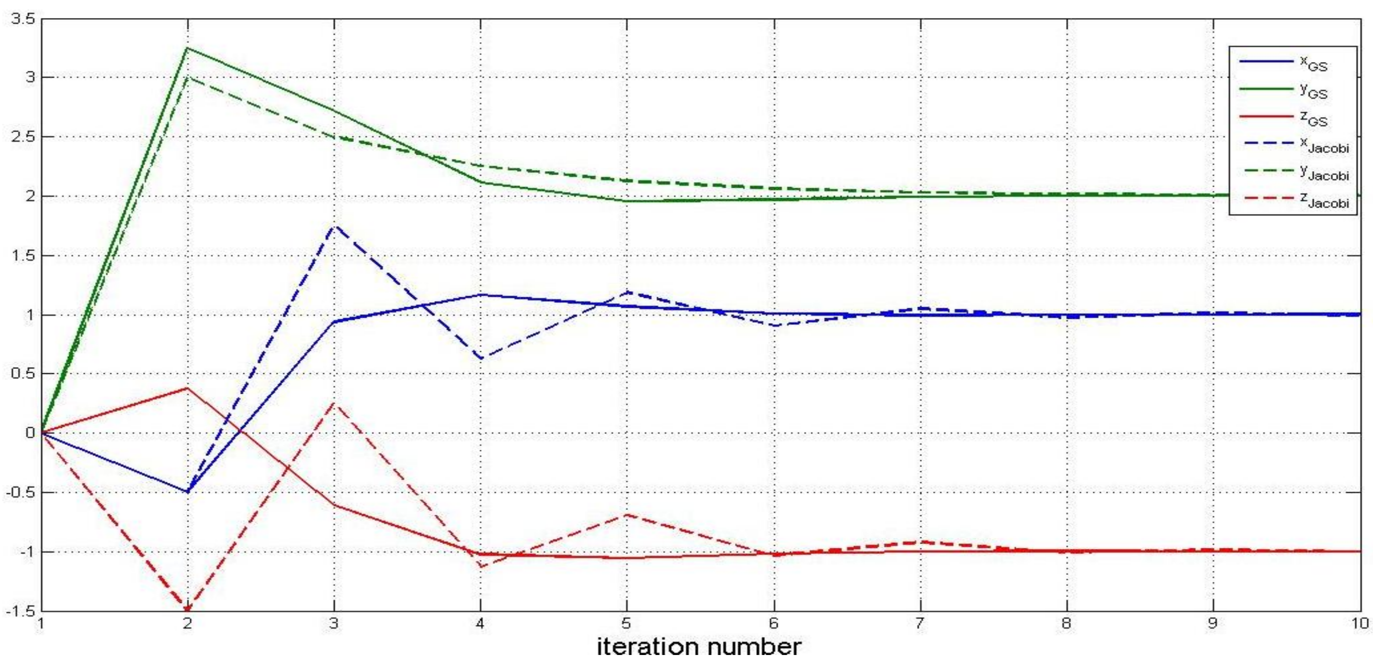
| iteration | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 6 | 1 | -1.5 |
| 2 | 2.5 | 11.5 | -4 |
| 3 | -21 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | -38 | 10 |
| 5 | 92 | 21 | -23 |
| 6 | -59 | 162 | -37 |
| 7 | -355 | -154 | 109 |
| 8 | 423 | -600 | 99 |
| 9 | 1305 | 946 | -513 |
| 10 | -2399 | 2098 | -181 |



## איטרציית גאוס - זיידל
## עם ניחוש התחלתי $[0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5y^{k+1} - 1.5 \end{cases}$$

| iteration | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -0.5 | 3.25 | 0.375 |
| 2 | 0.9375 | 2.71875 | -0.60938 |
| 3 | 1.164063 | 2.113281 | -1.02539 |
| 4 | 1.069336 | 1.952637 | -1.05835 |
| 5 | 1.005493 | 1.968079 | -1.01871 |
| 6 | 0.993393 | 1.99395 | -0.99972 |
| 7 | 0.996836 | 2.001721 | -0.99756 |
| 8 | 0.999639 | 2.001402 | -0.99912 |
| 9 | 1.00026 | 2.00031 | -0.99997 |
| 10 | | | |



# תנאים להתכנסות השיטות האיטרטיביות

- **משפט (תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות האיטרציה מהצורה**
**(** $x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0,1,2,\ldots$

בהינתן וקטור התחלתי כלשהו $x_0$ , האיטרציה הנ"ל תתכנס **אם ורק אם**

מתקיים $\rho(B) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(B)| < 1$ .

$\rho(B)$ נקרא *הרדיוס הספקטראלי* של $B$.

- **תנאי מספיק להתכנסות האיטרציה הנ"ל :** $\|B\| < 1$

- **משפט :** תהי $A$ – מטריצה עם אלכסון דומיננטי (שולט) ממש. אזי

מערכת $Ax = b$ בעלת פתרון יחיד ואיטרציית יעקובי וגם איטרציית

גאוס -זיידל יוצרות סדרת הניחושים המתכנסים לפתרון הזה לכל בחירה

של ניחוש התחלתי.

- ברוב המקרים איטרציית גאוס – זיידל מתכנסת יותר מהר מאשר איטרציית יעקובי

- בחלק מהמקרים בהם איטרציית גאוס – זיידל לא תתכנס, איטרציית יעקובי כן תתכנס.

- **תנאי עצירה** עבור איטרציות : $\left\| \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-1} \right\| < \varepsilon$

# מציאת ערכים עצמיים של מטריצה

- תהי מטריצה ריבועית A בגודל $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ , $\boldsymbol{v_i}$ מקיימים

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v_i}=0,\ \boldsymbol{v_i}\neq 0$$

משוואה אופיינית

$$\boldsymbol{p_A}(\lambda)=\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0$$

- אם ידוע ו"ע , אפשר לקבל מיידית את ע"ע המתאים לפי

$$\lambda_i=\frac{\boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}}{\boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{v_i}}$$

$$\frac{\boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}}{\boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{v_i}}=\lambda_i \Leftarrow \boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}=\lambda_i\boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{v_i} \Leftarrow \boldsymbol{v_i}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}=\boldsymbol{v_i}^T\lambda_i\boldsymbol{v_i} \Leftarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}=\lambda_i\boldsymbol{v_i}$$

# ע"ע עבור מטריצה סימטרית.

**הגדרה** : $A$ סימטרית אם $A^T = A$ , כלומר $i,j=1..n$ ,. $a_{ij} = a_{ji}$

**תכונות של מטריצה ממשית וסימטרית** $n \times n$

1) כל הע"ע הם מספרים ממשיים

2) יש $n$ ו"ע $v^{(i)}, i=1..n$ והם אורטוגונאליים בזוגות

3) כל וקטור $x$ ניתן לייצוג באופן יחיד כצירוף ליניארי של ו"ע

4)תהי $U = \left[ v^{(1)}, v^{(2)}, \dots v^{(n)} \right]$. אזי $UU^T = U^T U = I$ ו-

$$U^T A U = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

5) $\|A\|_2 = \rho(A)$

# Power method

ו-
.

- שיטה למציאת ערך עצמי הגדול ביותר בערך מוחלט
- **הנחה :** $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$
- **מטרה:** למצוא $\lambda_1$ ו- $\boldsymbol{v}^{(1)}$
- **אלגוריתם**

**איטרציה 1 :** 1) נבחר ניחוש התחלתי עבור $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ונקרא לו $\boldsymbol{z}^{(0)}$.

2) נגדיר $\boldsymbol{w}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(0)}$ ונגדיר $\alpha_1 = \max_{\boldsymbol{i}=1..\boldsymbol{n}} \left| \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i}}^{(1)} \right|$.

3) נגדיר $\boldsymbol{z}^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1} \boldsymbol{w}^{(1)}$

4) לחזור על התהליך

**איטרציה m:** $w^{(m)} = Az^{(m-1)}$, $\alpha_m = \max_{i=1..n} \left| w_i^{(m)} \right|$, נגדיר $z^{(m)} = \frac{1}{\alpha_m} w^{(m)}$

## הוכחת אלגוריתם :

- **הנחות נוספות** – $A$ בעלת $n$ ו"ע בת"ל, מנורמלים ומהווים בסיס וגם

$$\max_{k=1..n} \left| z_k^{(0)} \right| = 1, \quad c_1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i v^{(i)}}$$

**צעד 1 :**

$$w^{(1)} = Az^{(0)} = A\sum_{i=1}^{n} c_i v^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i A v^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v^{(i)} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v^{(i)}$$

וגם

$$\boxed{z^{(1)} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v^{(i)}}$$

## צעד 2 :

$$\boldsymbol{w}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(1)} = \boldsymbol{A}\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}^{2}}{\lambda_1}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})} = \frac{\lambda_1^{2}}{\alpha_1}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$$

וגם

$$\boldsymbol{z}^{(2)} = \frac{\lambda_1^{2}}{\alpha_1\alpha_2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$$

## צעד m :

$$\boldsymbol{w}^{(\boldsymbol{m})} = \frac{\lambda_1^{\boldsymbol{m}}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\boldsymbol{m}-1}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\right)^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$$

וגם

$$\boldsymbol{z}^{(\boldsymbol{m})} = \frac{\lambda_1^{\boldsymbol{m}}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\boldsymbol{m}}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{i}}}{\lambda_1}\right)^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$$

$$\lim_{m\to\infty} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m v^{(i)} = 0 \;\; \textbf{\textit{for all}} \;\; i = 2..n \qquad \Leftarrow \qquad \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$$

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_1{}^m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m v^{(i)} = \lim_{m\to\infty} \frac{c_1\lambda_1{}^m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} v^{(1)} \qquad \Leftarrow$$

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = v^{(1)} \;\Leftarrow\; \underbrace{\lim_{m\to\infty} \frac{c_1\lambda_1{}^m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = 1}_{(*)} \qquad \Leftarrow \qquad \max_{i=1..n} \left|z_i{}^{(m)}\right|$$

$$= \max_{i=1..n} \left|v_i{}^{(1)}\right| = 1, \quad m = 1..n$$

$$\underbrace{\lim_{m\to\infty} \frac{c_1\lambda_1{}^{m-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}} = 1}_{(**)}$$

ב- (*) , נחליף $m-1 \leftarrow m$

נחלק (*) ב- (**) :

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_1}{\alpha_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\dfrac{c_1\lambda_1^{\,m}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}}{\dfrac{c_1\lambda_1^{\,m-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}}}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_1=\lim_{m\to\infty}\alpha_m}$$

מ.ש.ל.

# דוגמא : מצא ע"ע כלשהו של

,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix}$$

כאשר $z^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

## צעד 1

$$w^{(1)} = Az^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \mathbf{12} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 z^{(1)}$$

## צעד 2

$$w^{(2)} = Az^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ 16/3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}} \begin{bmatrix} 7/16 \\ 5/8 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 z^{(2)}$$

תוצאות של 6 צעדים ראשונים :

$$12\begin{bmatrix}0.5\\2/3\\1\end{bmatrix},\ \frac{16}{3}\begin{bmatrix}7/16\\5/8\\1\end{bmatrix},\ \frac{9}{2}\begin{bmatrix}5/12\\11/18\\1\end{bmatrix},\ \frac{38}{9}\begin{bmatrix}31/76\\23/38\\1\end{bmatrix},\ \frac{78}{19}\begin{bmatrix}21/52\\47/78\\1\end{bmatrix},\ \frac{158}{39}\begin{bmatrix}127/316\\95/158\\1\end{bmatrix}$$

או במספרים עשרוניים:

$$12\begin{bmatrix}0.5\\0.667\\1\end{bmatrix},\ 5.333\begin{bmatrix}0.436\\0.625\\1\end{bmatrix},\ 4.5\begin{bmatrix}0.417\\0.611\\1\end{bmatrix},\ 4.222\begin{bmatrix}0.408\\0.605\\1\end{bmatrix},\ 4.105\begin{bmatrix}0.404\\0.603\\1\end{bmatrix},\ 4.051\begin{bmatrix}0.402\\0.601\\1\end{bmatrix}$$

**מסקנה** : ע"ע מתכנס ל-4 וו"ע מתכנס ל- $\begin{bmatrix}0.4 & 0.6 & 1\end{bmatrix}^T$

# Inverse power method

- למציאת ע"ע הקטן בערך מוחלט.
- השיטה מתבססת על המשפט שערכים עצמיים של $A^{-1}$ הם מספרים הופכיים לע"ע של מטריצה A.
- במקום חישוב $A^{-1}z = w$ למציאת קירוב הבא של ו"ע, אנחנו נפתור $Aw = z$ עבור $w$ . זה בדיוק מצב בו פיוק LU שימושי מאוד.

# Shifted power method

- **משפט :** אם $A$ בעלת ע"ע וו""ע $\lambda_i, v_i$ בהתאמה אזי ע"ע של $A - bI$

  הוא $\mu_i = \lambda_i - b$ , הזזה לא משפיע על ו"ע.

**הוכחה :** $Av = \lambda v \Leftarrow Av - bv = \lambda v - bv, \; (A - bI)v = (\lambda - b)v \Leftarrow$

לפי הגדרה $(\lambda - b), v$ ו"ע וע"ע בהתאמה של .

מ.ש.ל.

- **משפט :** בתנאים של המשפט הקודם, אפשר למצוא קבוע $\beta$ , כך

  ש $\mu_i = 1/\lambda_i - \beta$ יהיה ערך עצמי הגדול ביותר בערך מוחלט של

  מטריצה $(A - \beta I)^{-1}$ .

# דוגמא : נחזור לדוגמא שראינו

נגדיר

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-4 & 11 & -5\\ -2 & 13 & -7\\ -4 & 26 & -14\end{bmatrix}$$

נבצע Power method :

$$\begin{bmatrix}-4 & 11 & -5\\ -2 & 13 & -7\\ -4 & 26 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}0.25\\0.5\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-4 & 11 & -5\\ -2 & 13 & -7\\ -4 & 26 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.25\\0.5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5\\-1\\-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}0.25\\0.5\\1\end{bmatrix}$$

$$8\begin{bmatrix}0.25\\0.5\\1\end{bmatrix},\ 115\begin{bmatrix}0.4261\\0.5\\1\end{bmatrix},\ -2.7043\begin{bmatrix}0.4453\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.7814\begin{bmatrix}0.4607\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.8428\begin{bmatrix}0.4723\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},$$

$$-2.8894\begin{bmatrix}0.4809\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.9234\begin{bmatrix}0.4869\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.9476\begin{bmatrix}0.4911\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.9645\begin{bmatrix}0.4940\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix},\ -2.9760\begin{bmatrix}0.4960\\0.5000\\1.0000\end{bmatrix}$$

אם נבצע עוד מספר איטרציות, נראה כי ע"ע מתכנס ל

$$\mu_{\boldsymbol{i}} = \lambda_{\boldsymbol{i}} - 4 = -3$$

מכאן,

$$\lambda_{\boldsymbol{i}} = 1$$

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

# מערכת משוואות לא ליניאריות

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad \Longleftarrow \quad (2)\quad \begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

**הגדרה :** נקודת שבת של מערכת (2) היא נקודה $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ המקיימת

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_1 = g_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \alpha_2 = g_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \vdots \\ \alpha_m = g_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{cases}$$

# איטרציית נקודת שבת

$$(4)\quad \begin{cases} x_1^{(n+1)} = g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} = g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \\ \vdots \\ x_m^{(n+1)} = g_m(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \end{cases}$$

עבור $n = 0,1,\ldots$

**משפט :** נניח כי פונקציות $g_i$ ונגזרות החלקיות מסדר ראשון שלהן רציפות בסביבת נקודת השבת $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. אם לבחור נקודה התחלתית קרוב מספיק לנקודת שבת, אזי יתקיים

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \right| < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \right| < 1, \quad \cdots, \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \right| < 1$$

# שיטת ניוטון – רפסון רב-מימדי

בהינתן מערכת

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

נסמן $\bar{x}^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_m{}^0)^T$ קירוב התחלתי

$\bar{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_m{}^*)^T$ שורש אמיתי

$$\begin{cases} 0 = f_1(\bar{x}^*) \approx f_1(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j^{\,*} - \bar{x}_j^{\,0}\right)\dfrac{df_1}{dx_j}(\bar{x}^0) \\[2ex] 0 = f_2(\bar{x}^*) \approx f_2(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j^{\,*} - \bar{x}_j^{\,0}\right)\dfrac{df_2}{dx_j}(\bar{x}^0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ 0 = f_m(\bar{x}^*) \approx f_m(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j^{\,*} - \bar{x}_j^{\,0}\right)\dfrac{df_m}{dx_j}(\bar{x}^0) \end{cases}$$

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}^*) \\ f_2(\bar{x}^*) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}^*) \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\bar{x}^0) \\ f_2(\bar{x}^0) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}^0) \end{bmatrix}}_{\bar{f}(\bar{x}^0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \vdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \end{bmatrix}}_{\color{red}{J(\bar{x}^0)}} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{\,*} - \bar{x}_1^{\,0} \\ \bar{x}_2^{\,*} - \bar{x}_2^{\,0} \\ \vdots \\ \bar{x}_m^{\,*} - \bar{x}_m^{\,0} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}^0)+\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^0)\left(\bar{\boldsymbol{x}}^*-\bar{\boldsymbol{x}}^0\right)\approx 0$$

או

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}}^* \approx -\boldsymbol{J}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}^0)\,\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}^0)+\bar{\boldsymbol{x}}^0}$$

נוסחת איטרציה :

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{n}+1)} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{n})} \underbrace{-\boldsymbol{J}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{n})}\right)\bar{\boldsymbol{f}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{n})}\right)}_{\boxed{\Delta \boldsymbol{x}}}}$$

**דוגמא :** בהינתן מערכת

$$\boxed{\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ x + y^2 - 0.5 = 0 \end{cases}}$$

עם קירוב ראשון $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

בניית איטרציה : $J = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $J^{-1} = \frac{1}{4xy+1}\begin{pmatrix} 2y & 1 \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \frac{1}{4x^{(n)}y^{(n)}+1}\begin{pmatrix} 2y^{(n)} & 1 \\ -1 & 2x^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(x^{(n)}\right)^2 - y^{(n)} - 1 \\ x^{(n)} + \left(y^{(n)}\right)^2 - 0.5 \end{pmatrix}$$

| number of iteration | $J^{-1}\left(\overline{x}^{(n-1)}\right)$ | $\overline{x}^{(n)}$ | $\left\Vert \overline{x}^{(n)} - \overline{x}^{(n-1)} \right\Vert_2$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ | 0.8062 |
| **2** | $\begin{pmatrix} 0.2128 & 0.5319 \\ -0.5319 & 1.1702 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.7574 \\ -0.5436 \end{pmatrix}$ | 0.8187 |
| **3** | $\begin{pmatrix} 1.6803 & -1.5455 \\ 1.5455 & -2.3413 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.4149 \\ 0.5697 \end{pmatrix}$ | 1.2929 |
| **4** | $\begin{pmatrix} 0.2697 & 0.2367 \\ -0.2367 & 0.6699 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.0049 \\ -0.1583 \end{pmatrix}$ | 0.8355 |

עבור ניחוש התחלתי $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ :

| number of iteration | $\overline{x}^{(n)}$ | $\left\| \overline{x}^{(n)} - \overline{x}^{(n-1)} \right\|_2$ |
|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$ | 0.5 |
| **2** | $\begin{pmatrix} -0.3333 \\ -0.9167 \end{pmatrix}$ | 0.1863 |
| **3** | $\begin{pmatrix} -0.3135 \\ -0.9021 \end{pmatrix}$ | 0.0246 |
| **4** | $\begin{pmatrix} -0.3133 \\ -0.9018 \end{pmatrix}$ | 0.00033826 |