עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. לכל בע"ה הכרעה S קיימת רדוקציה קוק למשלים שלה ($\bar{S}$).

פתרון: נכון. תהי $M_{\bar{S}}$ "קופסה שחורה" (אורקל) המכריעה את $\bar{S}$, ניתן לייצר מכונה M_S המכריעה את S באופן הבא:
בהינתן קלט x, M_S תריץ את $M_{\bar{S}}$ על x ותחזיר תשובה הפוכה לזו ש $M_{\bar{S}}$ מחזירה.

קל לראות שאמנם M_S מכריעה את S ועושה זו בזמן פולינומי ולכן זו רדוקציית קוק תקינה.

ב. לכל בע"ה הכרעה S קיימת רדוקציה קארפ למשלים שלה ($\bar{S}$)

פתרון: לא נכון. תהיינה $S=\emptyset$ ו $\bar{S}=\{0,1\}^*$
נניח בשלילה שקיימת רדוקציית קארפ מ-S ל-$\bar{S}$ אזי קיימת פונקציה f הניתנת לחישוב בזמן פולינומי כך שלכל $x\notin S$ בהכרח $f(x)\notin\bar{S}$.
אבל לא ייתכן שקיים $f(x)\notin\bar{S}$ כיוון ש $\bar{S}=\{0,1\}^*$.
קיבלנו סתירה ולכן הטענה לא נכונה.

ג. לכל בע"ה הכרעה $S\in P$ לא טריוויאלית (כלומר לא $\emptyset$ ולא $\{0,1\}^*$) קיימת רדוקציה קארפ למשלים שלה ($\bar{S}$).

פתרון: נכון. תהיינה $x_1\in\bar{S}$ ו $x_2\notin\bar{S}$ בהכרח יש כאלו כי S לא טריוויאלית.
נגדיר רדוקציית קארפ מ-S ל-$\bar{S}$ ע"י הגדרת פונקציה f באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases} x_1 & x\in S \\ x_2 & x\notin S \end{cases}$$

הפונקציה f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי כיוון ש $S\in P$ ולכן זו רדוקציית קארפ תקינה.

<u>יחס שלא ניתן לרדוקציה עצמית</u>

<u>טענה</u>

נניח ש $P\neq NP\cap coNP$ ונראה כי קיים יחס (בע"ח חיפוש) ב PC שלא ניתן לרדוקציה עצמית.

<u>הוכחה</u>

תהי $S\in(NP\cap coNP)\setminus P$.
לפיכך, קיים אלגוריתם מוודא פולינומי V_S כך שלכל $x\in S$ קיים y חסום פולינומית באורך של x כך ש $V_S(x,y)=1$ ולכל $x\notin S$ ולכל y $V_S(x,y)=0$.
כמו כן, קיים אלגו' מוודא פולינומי $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\in\bar{S}$ קיים y כך ש $V_{\bar{S}}(x,y)=1$ ולכל $x\notin\bar{S}$ ולכל y $V_{\bar{S}}(x,y)=0$. כלומר קיים אלגו' מוודא פולינומי $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\notin S$ קיים y כך ש $V(x,y)=1$ ולכל $x\in S$ ולכל y $V_{\bar{S}}(x,y)=0$.

נגדיר שני יחסים באופן הבא:

$$R_1=\{(x,y)\mid V_S(x,y)=1\}\qquad R_2=\{(x,y)\mid V_{\bar{S}}(x,y)=1\}$$

שני היחסים R_1 ו R_2 הם ב PC כיוון שניתן להשתמש כמוודאים עם V_S ו $V_{\bar{S}}$ לקבוע בזמן פולינומי שייכות ליחס.
כמו כן היחסים חסומים פולינומית כיוון ש S ו $\bar{S}$ הם ב NP.
נשים לב:

$$S=\{x\mid R_1(x)\neq\emptyset\}=\{x\mid R_2(x)=\emptyset\}$$

* עבור יחס R מוגדר:

$$R(x)=\{y\mid (x,y)\in R\}$$

הסבר: נגדיר את היחס R באופן הבא:

$$R=\{(x,1y)\mid (x,y)\in R_1\}\cup\{(x,0y)\mid (x,y)\in R_2\}$$

עבור היחס מתקיים: $S_R=\{x\mid R(x)\neq\emptyset\}=\{0,1\}^*$

• מדוע? נניח בשלילה שקיים $x\notin S_R$ לכן לכל y $(x,y)\notin R_1$
ולכל y $(x,y)\notin R_2$. כלומר לכל y $V_S(x,y)=0$
ולכל y $V_{\bar{S}}(x,y)=0$. אבל אם $V_S(x,y)=0$ לכל y
אז בהכרח $x\notin S$ וגם $V_{\bar{S}}(x,y)=0$ לכל y בהכרח
$x\notin\bar{S}\Leftarrow x\in S$. סתירה. ולכן $S_R=\{0,1\}^*$

כלומר קיבלנו ש $S_R\in P$.
היחס R נמצא ב PC כיוון שניתן להשתמש במוודאים V_S ו $V_{\bar{S}}$ לקביעת שייכות ליחס (לאחר הורדת הביט הראשון מ-y והתייחסות לערכו לבחירת המוודא המתאים).
כמו כן, R חסום פולינומית כיוון ש R_1 וR_2 חסומים פולינומית.
מנגד, $R\notin PF$.
נניח בשלילה ש $R\in PF$ אזי קיים אלגו' פולינומי M שבהינתן x מוצא y כך ש $(x,y)\in R$
ניתן ליצור אלגו' פולינומי דט' המכריע את S באופן הבא:

בהינתן קלט x, האלגו' יריץ את M על x ויקבל חזרה y אם הביט השמאלי ביותר ב-y הוא 1 אז נחזיר 1, אחרת נחזיר 0.

• קל לראות שאלגו' זה אכן מכריע את S ועושה זאת בזמן פולינומי.

כלומר קיבלנו $S\in P$ בסתירה להנחה: $S\in(NP\cap coNP)\setminus P$
מכאן ש $R\notin PF$.

כלומר קיבלנו $R\notin PF$ ו $S_R\in P$, לכן אם היתה רדוקציה עצמית מ R (בעיית החיפוש) ל S_R (בעיית ההכרעה) הרי שהיינו מקבלים ש $R\in PF$ וזה לא המצב.
כלומר אין רדוקציה עצמית ליחס R.

מ.ש.ל. ■