סיבוכיות תרגול מס' 2
09.03

P, NP, PF, PC - רדוקציות

<u>יחס חסום פולינומי</u> - יחס $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ נקרא יחס חסום פולינומי אם קיים פולינום $P(\cdot)$ כך שלכל $(x,y) \in R$ מתקיים $|y| \le P(|x|)$.

<u>המחלקה PF</u> - $R \in PF$ אם:
1. R הוא יחס חסום פולינומי.
2. קיים אלגוריתם פולינומי דטרמיניסטי כך שבהינתן x הוא מוצא y כך ש $(x,y) \in R$ או מחזיר שלא קיים y כזה.

<u>המחלקה PC</u> - $R \in PC$ אם:
1. R הוא יחס חסום פולינומי
2. קיים אלגוריתם פולינומי דטרמיניסטי שבהינתן זוג (x,y), מחזיר 1 אם $(x,y) \in R$
ו-0 אחרת.

<u>המשך הגדרות</u>

<u>מחלקה P</u> - תהי $S \subseteq \{0,1\}^*$ בעיית הכרעה/שפה.
$S \in P$ אם קיים אלגוריתם פולינומי דטרמיניסטי שמחזיר 1 אם $x \in S$
ו-0 אחרת.

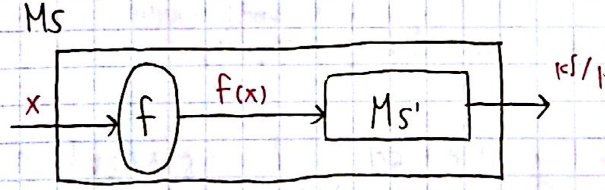
<u>מחלקה NP</u> - תהי $S \subseteq \{0,1\}^*$ בעיית הכרעה/שפה.
$S \in NP$ אם קיימת מערכת הוכחה מסוג NP ל-S.
כלומר, $S \in NP$ אם קיימים פולינום $P(\cdot)$ ומוודא V פולינומי דטרמיניסטי המקיימים:
1. שלמות - אם $x \in S$ אזי קיים "עד" y כך שמתקיים $|y| \le P(|x|)$ ו $V(x,y)=1$
2. נאותות - אם $x \notin S$ אזי לכל y $V(x,y)=0$

רדוקציית many-to-one (רדוקציית קארפ)

תהיינה S ו S' בעיות הכרעה. נאמר שקיימת רדוקציית קארפ מ-S ל-S' ונסמן ע"י $S \le_m^p S'$.
אם קיימת פונקציה f הניתנת לחישוב בזמן פולינומי כך ש:
$x \in S \Leftrightarrow f(x) \in S'$
כלומר, בהינתן מופע x של הבעיה S, ניתן לייצר בזמן פולינומי מופע $f(x)$ של S' כך ש: $x \in S \Leftrightarrow f(x) \in S'$.

נשים לב שאם $S \le_m^p S'$, אז בהינתן אלגוריתם $M_{S'}$ המכריע את S' בזמן פולינומי ניתן לייצר אלגוריתם M_S המכריע את S בזמן פולינומי באופן הבא:

בהינתן קלט x, M_S מחשב את f על x ומריץ את $M_{S'}$ על הפלט שהתקבל מ-f ומחזיר את תשובתה של $M_{S'}$.



- ניתן להריץ את $M_{S'}$ פעם אחת בלבד.
- לא ניתן לשחק עם הפלט.

NP - hardness - תהי S בעיית הכרעה.
S היא NP-hard / NP-קשה אם $S' \le_m^p S$ $\forall S' \in NP$

NP - Completaness - תהי S בעיית הכרעה.
S היא ב NPC (NP-שלמה, NP-complete) אם:
1. $S \in NP$
2. S היא NP-קשה.

משפט קוק-לוין

$SAT \in NPC$

הגדרה: $co\text{-}NP = \{S \mid \bar{S} \in NP\}$.

תרגיל

נניח ש $P \ne NP$ קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה / לא נכונה / תלויה בשאלה פתוחה.

א. תהי $S \in NPC$, ותהי S' בעיית הכרעה כך ש $S \le S'$ אזי $S' \in NPC$
לא נכון, תהי $S = SAT$ ו-S' קבוצת כל הנוסחאות בפורמט CNF
קל לראות $S = SAT \le S'$ אבל $SAT \in NPC$ ו $S' \in P$
מכיוון ש $P \ne NP$ בהכרח $S' \in NPC$

ב. המחלקה NPC היא סגורה תחת איחוד.
$S_1, S_2 \in NPC \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in NPC$
לא נכון,
$S_1 = \{(\phi,k) \mid \phi \in SAT \vee k \text{ is even}\}$
$S_2 = \{(\phi,k) \mid \phi \in SAT \vee k \text{ is odd}\}$
קל לראות $S_1, S_2 \in NPC$
$S_1 \cup S_2 = \{(\phi,k) \mid \phi \in SAT \vee k$ מס' שלם $\}$
$S_1 \cup S_2 \in P$
$S_1 \cup S_2 \notin NPC \Leftarrow P \ne NP$

ג. תהי השפה $BIG\text{-}CLIQUE = \{G \mid$ G מכיל קליק בגודל n-4 כאשר n הוא מס' הקודקודים ב-G $\}$
טענה: $BIG\text{-}CLIQUE \in NPC$
לא נכון, ישנן $\binom{n}{n-4} = O(n^4)$ אפשרויות לבחור קבוצה של n-4 קודקודים.
ניתן לבדוק עבור כל אפשרות אם באחת הבדיקות מצאנו קליק נחזיר 1 אחרת נחזיר 0.
כלומר, ישנו אלגו' פולינומי המכריע את BIG-CLIQUE תחת ההנחה $P \ne NP$
נקבל $BIG\text{-}CLIQUE \notin NPC \Leftarrow BIG\text{-}CLIQUE \in P$