	שם	סימון ופרמטרים	סיפור (מהו X)	P (X = k)	P (X ≤ k)	E(X)	Var(X)	הערות
רציף	**אחידה**	$X\sim Uni(\{a,..,b\}$	מספר שלם הנבחר באקראי בין a ל- b ההתפלגות סימטרית	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	$F(x)=\frac{k-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
בדיד	**אחידה**	$X\sim Uni(\{a,..,b\}$		$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{k-a+1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	
בדיד	**בינומית**	$X\sim Bin(n,p)$	מספר ההצלחות ב- n ניסויים ב"ת שסיכוי ההצלחה בכל אחד מהם הוא p ההתפלגות סימטרית $\Longleftarrow$ $p=0.5$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$	$X\sim Bin(n,p)$ $Y\sim Bin(m,p)$ X , Y ב"ת $X+Y\sim Bin(n+m,p)$
בדיד	**גאומטרית מ- 1** **חסר זיכרון**	$X\sim Geo(p)$	מספר הנסויים עד להצלחה הראשונה, כשהניסוים ב"ת והסיכוי להצלחה בכל ניסוי הוא p	$(1-p)^{k-1}p$	$1-(1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$X_i\sim Geo(p)$ $X_1,\dots,X_k$ ב"ת $X_1+\cdots+X_k\sim NB(k,p)$
בדיד	**בינומית-שלילית**	$X\sim NB(n,p)$	מספר הנסיונות עד להצלחה ה- n, כשהניסוים ב"ת והסיכוי להצלחה בכל ניסוי הוא p	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$		$\frac{n}{p}$	$n\frac{(1-p)}{p^2}$	$X\sim NB(n,p)$ $Y\sim NB(m,p)$ X , Y ב"ת $X+Y\sim NB(n+m,p)$
בדיד	**פואסונית**	$X\sim Pois(\lambda)$	גבול של תהליך בינומי כאשר p שואף ל- 0, n שואף לאינסוף, והמכפלה נותרת קבועה: $\lambda=np$ או שאומרים במפורש שזה פואסוני.	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$		λ	λ	$X\sim Pois(\lambda)$ $Y\sim Pois(\mu)$ X , Y ב"ת $X+Y\sim Pois(\lambda+\mu)$
רציף **חסר זיכרון**	**מעריכי**	$X\sim Exp(\lambda)$	התפלגות אקספוננסציאלית	$f(k)=\lambda e^{-\lambda k}$	$F(k)=1-e^{-\lambda k}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	מוגדר רק עבור x אי שלילי עבור שלילי 0

<u>תוחלת:</u> $E(X)=\sum_{K\in Y(\Omega)}k\cdot p(X=k)$, $E(X^2)=\sum_{K\in Y(\Omega)}k^2\cdot p(X=k)$

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)\cdot x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$, **<u>פונק':</u>** $E_g(X)=\sum_{K\in Y(\Omega)}g(k)\cdot p(X=k)$

- **<u>ליניאריות:</u>** $E(c)=c$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE$, $E(aX+b)=aE(X)+b$
- אם X ו-Y <u>ב"ת</u> $\Longleftarrow E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$
- $E(f(X))=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot p_i$, אם X ו-Y ב"ת $\Longleftarrow E(X|Y)=E(X)$

<u>אם X,Y באותו מרחב הסתברות:</u> $E(X\cdot Y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}k\cdot l\cdot p(X=k,Y=l)$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, $\sigma=\sqrt{E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)}=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}$

<u>שונות (ממוצע המרחק הריבועי מהתוחלת:</u>

$Var(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=E(X^2)-E^2(X)$, $0\le Var(X)$

- **<u>ליניאריות:</u>** $Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$, $Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2cov(X,Y)$
- אם X ו-Y <u>ב"ת</u> $\Longleftarrow Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$
- $Var(X)=0 \Leftrightarrow$ המ"מ קבוע $(X=Const)$, כלומר: $\exists_c.P(X=c)=1$

<u>סטיית תקן:</u> $\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$ $\sigma(aX+b)=|a|\cdot\sigma(X)$

<u>ברנולי:</u> $X_i=\begin{cases}1, & p\\ 0, & 1-p\end{cases}$ **או** $Bin(1,P(A))\sim X_A=\begin{cases}1, & \text{התרחש } A\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$, $A\subseteq\Omega$

$E(X_i)=p$ $Var(X_i)=p(1-p)=p-p^2$, $X_i^k=X_i$, $E(X_A\cdot X_B)=X_{A\cap B}$

$Cov(X_i,X_j)=E(X_i\cdot X_j)-E(X_i)E(X_j)=P(X_i=1,X_j=1)-P(X_i=1)\cdot P(X_j=1)$

$X_A\cdot X_B=\begin{cases}1, & \text{התרחש } A\cap B\\ 0. & \text{אחרת}\end{cases}=X_{A\cap B}$, $A,B\subseteq\Omega$

תכונות תוחלת(המשך):

- $E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y$
- $E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y$
- $E(X\cdot Y|Y=y)=y\cdot E(X|Y=y)$
- $E(X\cdot Y|Y)=Y\cdot E(X|Y)$
- $E(X^2)=E(E(X^2|Y=y))$
- $E(X\cdot Y)=E(E(X|Y=y))$
- $E(X^2|Y=y)=V(X|Y=y)+E^2(X|Y=y)$
- $E(E(X|Y))=E(X)$, $E(|X|)\ge|E(X)|$

תוחלת מותנה: $E(X|A)=\sum x_i\cdot P(X=x_i|A)$

נוסחת התוחלת השלמה: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot E(X|B_i)$

שונות מותנה: $Var(Y)=E_X(V_Y(Y|X))+V_X(E_Y(Y|X))$

<u>שונות שלמה</u>: $V(X|Y=l)=E(X^2|Y=l)-[E(X|Y=l)]^2$.

<u>השונות המותנה של X ב- Y היא:</u>

$V(X|Y)$ הינו המ"מ אשר מקבל את הערכים $V(X|Y=l)$ בהסתברויות $P(Y=l)$.

יהיו X,Y מ"מ, אז: $V(X)=V[E(X|Y]+E[V(X|Y)]$

יהיו $N,x_1,x_2,\dots$ ב"ת, כך ש $\{x_i\}$ ש"ה, N מ"מ המקבל ערכים טבעיים אז:

$V(\sum_{I=1}^{N}x_i)=[E(x_i)]^2\cdot V(N)+V(x_1)\cdot E(N)$

<u>טענה</u>: $E(g(X)\cdot Y|X)=g(X)\cdot E(Y|X)$, $(X=E(X|X))$

עוזר כאשר מחשבים שונות משותפת (cov), יש לחשב $E(X\cdot Y)$:

E[X·E(Y|X)] = (טענה) = E[E(X·Y|X)] = (התוחלת השלמה) = E(X·Y)

<u>שונות משותפת:</u> $Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)E(Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

- <u>סימטריות:</u> $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
- $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
- $Cov(aX,Y)=a\cdot Cov(X,Y)$
- $Cov(X,a)=0$
- $Cov(X,X)=Var(X)$
- אם X ו-Y <u>ב"ת</u> $\Longleftarrow E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ ומכאן $Cov(X,Y)=0$, **ההיפך לא בהכרח נכון!**
- $Cov(X,Y)\neq 0 \Longleftarrow$ X ו-Y <u>תלויים</u>
- $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$
- $Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+\sum_i\sum_{j\neq i}Cov(X_i,X_j)$
- $Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}X_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,X_j)$
- $Cov(X,Y)>0 \Longleftarrow$ יש תלות <u>חיובית</u> בין X ל-Y. אם X התרחש אז <u>גדל</u> הסיכוי ש-Y התרחש ולהיפך.
- $Cov(X,Y)<0 \Longleftarrow$ יש תלות <u>שלילית</u> בין X ל-Y. אם X התרחש אז <u>קטן</u> הסיכוי ש-Y התרחש ולהיפך.

<u>מקדם מתאם(קורולציה):</u> $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$ $(-1\le\rho\le1)$

- <u>סימטריות:</u> $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$
- $\rho(X,Y)=1\Leftrightarrow a>0,\ Y=aX+b$
- $\rho(X,Y)=-1\Leftrightarrow a<0,\ Y=aX+b$
- $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)\Longleftarrow a,c>0$
- $\rho(aX+b,Y)=\frac{a}{|a|}\cdot\rho(X,Y)$
- X ו-Y <u>בלתי מתואמים</u> $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow\rho(X,Y)=0$
- אם X ו-Y <u>ב"ת</u> $\Longleftarrow Cov(X,Y)=0\Longleftarrow\rho(X,Y)=0\Longleftarrow$ X ו-Y <u>בלתי מתואמים</u>

<u>א"ש מרקוב:</u> $P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$, $(a,X>0)$

<u>א"ש צ'ביצ'ב:</u> $P(|X-E(X)|\ge a)\le\frac{Var(X)}{a^2}$, $(a>0)$

<u>א"ש צ'ביצ'ב המורחב</u>: $P\left(\left|\frac{x_1+x_2\dots+x_n}{n}-\mu\right|\ge\epsilon\right)\le\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

<u>החוק החלש של המספרים הגדולים:</u> $n\to\infty$ ו σ^2 סופי

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2\dots+x_n}{n}-\mu\right|\ge\epsilon\right)=0$$

משפט הגבול המרכזי:

$\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת ש"ה , $P(\sum_{i=1}^{n} x_i \le a) \cong \Phi\left(\frac{a-n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)$

כאשר $\mu = E(x_i)$, $\sigma x_i = \sigma$, $\begin{pmatrix} n\cdot\mu=\sum_{i=1}^{n} E(x_i) \\ \sqrt{n}\cdot\sigma=\sigma_{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{pmatrix}$

- בשביל ממוצע צריך לחשב עם $n * a$

בחישוב עבור משתנים בדידים – תיקון רציפות:

$P(a \le x \le b) \Rightarrow P(a - 0.5 \le x \le b + 0.5)$

$P(a < x < b) \Rightarrow P(a + 0.5 < x < b - 0.5)$

ב"ת

$A,B\ ind. \Leftrightarrow A^c,B\ ind. \Leftrightarrow A,B^c ind. \Leftrightarrow A^c,B^c\ ind.$

$P(X\cdot Y) = P(X)\cdot P(Y)$

$P(X|Y) = P(X)$

<u>התפלגות נורמאלית (N):</u>

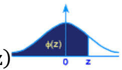
$N\sim N(\mu,\sigma)$ (μ-תוחלת , σ-סטיית תקן)

התפלגות Z $Z\sim N(0,1)$, $P(Z \le a) = \Phi(a)$, (Φ - לפי הטבלה של התפלגות נורמאלית)

<u>מ"מ נורמאלי סטנדרטי:</u>

$P(N \le a) = P\left(\frac{N-M}{\sigma} \le \frac{a-M}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-M}{\sigma}\right)$

$\Phi(-X) = 1 - \Phi(X)$



$\Phi(z)$ הוא השטח מ-z עד (-∞)

בחירה K איברים מ-N איברים:

	ללא החזרה	עם החזרה
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
	סידורים באורך R מתוך N $n\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$	פרמו' עם זהים $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$

<u>תוחלת התפלגות משותפת:</u>

<u>בדיד:</u> $E[g(x,y)] = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} g(x,y)P(x,y)$

<u>רציף:</u> $E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) * f_{xy}(x,y)dx\,dy$

<u>נוסחת הקונבולוציה לחישוב התפלגות סכום מ"מ:</u>

- $P(X+Y=m) = \sum_{k+l=m} P(X=k, Y=l)$
- $P(X+Y=m) = \sum_k P(X=k, Y=m-k)$

<u>התפלגות משותפת:</u>

- $P(X=k, Y=l) = P(X=k)\cdot P(Y=l|X=k)$
- X ו-Y <u>ב"ת</u> $\Leftrightarrow P(X=k, Y=l) = P(X=k)\cdot P(Y=l)$

<u>אי - תלות:</u>

- <u>הערה:</u> אם $P(X=k \mid Y=l) = 0$, $P(X=k) > 0$, $P(Y=l) > 0$ אז המ"מ <u>תלויים</u>.

<u>הכלה והפרדה:</u>

$A, B \subseteq \Omega$:מקרה בסיס $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

n קבוצות: $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ אז $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot [\sum_{1\le i\le n} P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i,j})]$

<u>מקרה סימטרי:</u> $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n)$ וגם בכל שורה כל ההסתברויות באותה השורה שוות.

או בקיצור $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

<u>נוסחת בייס כללי:</u>

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

סכום טור הנדסי: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

<u>הסתברות מותנית</u>

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

<u>דוגמה לחישוב תוחלת מותנה:</u>

מבצעים סדרה של n הטלות מטבע הוגן. יהיה X מספר ה-H שהתקבלו. לאחר מכן מבצעים סדרה של X הטלות מטבע עם הסתברות $\frac{1}{n}$ ל-H. יהי Y מספר ה-H בסדרת ההטלות השנייה.

צ"ל: E(Y)=? $X\sim Bin\left(n,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow E(X) = \frac{n}{2}, Y|X\sim Bin\left(X,\frac{1}{n}\right) \Rightarrow E(Y|X) = \frac{X}{n}$

$E(Y) = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2}$

<u>חיזוי מותנה:</u>

כאשר Y,X קורלטיבים ניתן להשתמש בX כדי לחזות את Y. החיזוי הכי טוב לפי מדד מינימיזציה של $E[Y - g(x)^2]$ הוא $Y^* = E[Y|X]$

ברגע שX נתון הוא משפיע על Y. אין טעם להסתכל על התפלגות Y אלא על התפלגותו בהינתן הX.

כלל השרשרת: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$

נוסחת ההסתברות השלמה (עץ): $P(A) = P(B_1)\cdot P(A|B_1) + \cdots + P(B_n)\cdot P(A|B_n)$ $(\Omega = B_1 \uplus B_2 \uplus \ldots \uplus B_n)$

<u>נוסחאות בסיסיות וכלליות:</u>

- $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B)$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- $P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)$, $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$
- $P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $C \subseteq B \subseteq A \Rightarrow P(C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|B)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- סכום סדרה הנדסית: $\frac{a_1 * q^n - 1}{q-1}$

	משתנים בדידים	משתנים רציפים
	סט בן מניה של ערכים	ערכים רציפים
הסתברות	$0 \le P(X=i) \le 1$	$P(X=i) = 0$
סכום כל ההסתברויות	$\sum_{i\in X} P(x=i) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
חישוב הסתברות בקטע מסוים פונ' הצפיפות $f(x)$	$P(x_1 \le x \le x_2) = \sum_{x_1\le x\le x_2} P(x)$	$0 \le \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \le 1$
פונ ההצטברות עבור $X \le a$	$F(a) = p(x \le a) = \sum_{x_i\le a} p(x_i)$	$F(a) = p(x \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
פונ הצפיפות	$p(a) = F(a) - F(a-1)$	$\frac{dF(a)}{da} = f(x)$
עבור שניהם $Var = E[(x-\mu)^2]$	$E[x] = \sum_{x\in X} xp(x)$	$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

<u>התפלגות משותפת רציפה:</u>

$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b\int_c^d f_{xy}(x,y)dy\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy\,dx = 1$

$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$

$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx$

<u>אינטגרל מיוחד של קשת</u>

$\int_a^b cxe^{-cx}dx = -e^{-cx}\left(x + \frac{1}{c}\right)$

<u>אינטגרל עם הגבלה משותפת</u>

$a < Y < b, c < X < d$

$P(X+Y < l) = P(Y < l - X)$

$= \int_c^d\int_a^{l-x} f(x,y)\,dy\,dx$

<u>מ"מ דו-ממדי:</u>

X\Y	Y_1	Y_2	..	Y_m	
X_1	P(1,1)	P(1,2)	..	P(1,m)	$\sum_{j=1}^{m} P(1,j)$
X_2	P(2,1)	P(2,2)	..	P(2,m)	$\sum_{j=1}^{m} P(2,j)$
..	..	..	..	..	..
X_n	P(n,1)	P(n,2)	..	P(n,m)	$\sum_{j=1}^{m} P(n,j)$
	$\sum_{i=1}^{n} P(i,1)$	$\sum_{i=1}^{n} P(i,2)$	..	$\sum_{i=1}^{n} P(i,m)$	1

$P(i,j) = P(X=i, Y=j) = P(x = i \cap Y = j)$

ההתפלגות השולית של X: $\sum_{j=1}^{m} P(i,j) = P(X=i)$

ההתפלגות השולית של Y: $\sum_{i=1}^{n} P(i,j) = P(Y=j)$

סכום ההתפלגות המשותפת: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(i,j) = 1$

<u>התפלגות משותפת</u>: יהיו X,Y מ"מ אזי ההתפלגות המשותפת שלהם: $P(X=k, Y=l)$ (חיתוך של שני המאורעות)

<u>התפלגות שולית</u>: "ההתפלגות" הרגילה שאנחנו מכירים. $P(X=k) = \sum_{l\in Y(\Omega)} P(X=k, Y=l)$

<u>התפלגות מותנית</u>: חוק ההתפלגות של X|Y=l מקיים ש: $P(X=k|Y=l) = \frac{P(X=k,Y=l)}{P(Y=l)}$ (הערכים בתאים, חלקי השולית)

<u>מ"מ בלתי תלויים</u>: X,Y ב"ת אם **לכל** $k \in X(\Omega)$, $l \in Y(\Omega)$ $P(X=k, Y=l) = P(X=k)P(Y=l)$

<u>הגדרה שקולה</u>: **לכל** $l \in Y(\Omega)$ ההתפלגות המותנה של X זהה לשולית: $P(X=k|Y=l) = P(X=k)$ $\forall k \in X(\Omega)$.

אם מופיע 0 בחוק התפלגות המשותפת (0 בטבלה) אזי המ"מ תלויים