12.1.17

בס"ד

אלגוריתמים - הרצאה 9

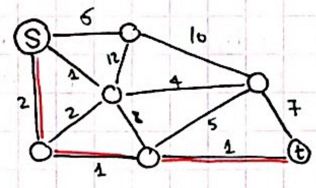
⇐ מציאת מסלול מינימלי - קצר:

קלט: גרף $G=(V,E)$ מכוון/לא מכוון ממושקל עם $w:E\to\mathbb{R}^{+}$ וקודקוד מקור $s\in V$

וקודקוד יעד $t\in V$

פלט: המסלול ה"זול" ביותר מ-s ל-t = מסלול שסכום משקל הקשתות במסלול מינימלי.

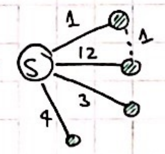
לדוגמה -



רעיונות?

← היינו אולי רוצים לעבור על העץ לרוחב BFS ולבחור בצורה חמדנית כל פעם את הקשת הזולה ביותר.

בעיה:

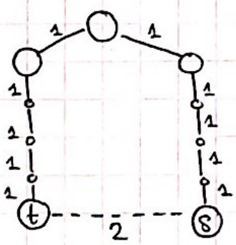


⇐ היינו עוברים על 4 הקודקודים הראשונים ודי - BFS לא ניתן לעבור על קודקוד שכבר עברנו כבר ולכן יש דרך זולה יותר להגיע לקודקוד השני (במקום 12 יש לנו 1 ו-1) איך לא היינו מקבלים אותה.

← היינו אולי רוצים לבדוק כל פעם את הקודקודים שעברנו דרכם אך הבעיה שזה יוצא משהו אקספוננציאלי (אפילו לסדירות [illegible])

← אולי נמצא עץ פורש מינימלי וכך נמצא את המסלול הזול ביותר.

בעיה:



נניח שזה העץ הפורש המינימלי:

לכאורה המסלול המינימלי הוא 10

אך ייתכן שהייתה קשת ירוקה רגילה

הקודם שלא הייתה נכנסת לעץ הפורש כי משקלה = 2 אך היא המסלול הזול ביותר.

אוקי, הפיתרון:

נסמן קבוצה S = קבוצת הקודקודים שעבורם חישבנו את המרחק מ-s אליהם (מרחק = המשקל של המסלול הזול ביותר) כאשר בתחילת האלגוריתם $S=\{s\}$

סימון - נסמן ב- $d(u,v)$ את המשקל של המסלול הזול ביותר מ-u ל-v.

כלומר - $S=\{v \mid d(s,v)$ חושב $\}$

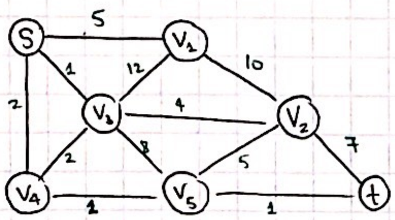
מסלול מיוחד מ-s ל-v $<s,u_1,u_2,\dots,u_k,v>$ כך שלכל i $u_i\in S$ (כל הקודקודים למעט v במסלול ב-S) ו- $v\notin S$.

נסמן פונקציה $D(v)$:

לכל $v \in S$: $D(v) = d(s,v)$

לכל $v \notin S$, $D(v) =$ משקלו של המסלול המיוחד הזול ביותר מ-s ל-v

(אם אין מסלול מיוחד מ-s ל-v אז $D(v) = \infty$)



נסתכל על הדוגמה מהעמוד הקודם :
(נסמן את הקודקודים כ- v_i)

D	s	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	t
$S=\{s\}$	0	5	∞	1	2	∞	∞
$S=\{s,v_3\}$	0	5	5	1	2	9	∞
$S=\{s,v_3,v_4\}$	0	5	5	1	2	3	∞
$S=\{s,v_3,v_4,v_5\}$	0	5	5	1	2	3	$\boxed{4}$

האלגוריתם של דייקסטרה :

אתחול $O(V)$

```
S ← {s}
D(s) ← 0
for all v∈V-{s} = { D(v) = { w(s,v)   , (s,v)∈E
                            { ∞        . אחרת
                  { p(v) ← s
```

לולאה של $|V|$ פעמים כפול $O(|V|)$ ~~[illegible]~~ סה"כ $O(|V|^2)$

```
while S ≠ V
    let v₀ ∈ V\S such that D(v₀) minimal
    S ← S ∪ {v₀}
    for x ∈ V\S                                   O(|V|+|E|)
        D(x) ← min{D(x), D(v₀) + w(v₀,x)}
        if D(x) changed
            p(x) ← v₀
```

לצורך שחזור מסלול.

סה"כ זמן ריצה - $O((|V|+|E|)\log V)$

12.1.17 בס"ד.

הוכחת נכונות:

משפט: האלגוריתם של דייקסטרה מחזיר את מחיר של המסלול הזול ביותר מ-s ל-t.

טענה: א. לכל שלב: עבור $x \in S$, $D(x)$ הוא המשקל של המסלול הזול ביותר מ-s ל-x. כל המסלול הזה נמצא ב-S.

ב. לכל שלב: עבור $x \in V-S$, $D(x)$ הוא המשקל של המסלול המיוחד הזול ביותר מ-s ל-x

הוכחה - באינדוקציה על $|S|$.

בסיס: $|S|=1 \Rightarrow S=\{s\}$

$D(s) \leftarrow 0$ (דייקסטרה) וכמובן $D(s)=0$ לכל $x \in V-S$ אם $(s,x) \in E$ דייקסטרה מעדכן $D(x)=w(s,x)$ ואחרת $D(x)=\infty$ כפי שצריך להיות.

הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור $|S|=k$ ונוכיח עבור $|S|=k+1$.

צעד האינדוקציה - עבור $x \in S-\{v_0\}$ לפי הנחת האינדוקציה טענה א. מתקיימת עבור $|S|=k$ כלומר עבור $S-\{v_0\}$ ולכן מתקיים גם ל-$|S|=k+1$.

נתמקד ב-v_0.

לפי הנחת האינדוקציה, בשלב הקודם $|S|=k$, $D(v_0)=$ המשקל של המסלול המיוחד הזול ביותר מ-s ל-v_0.

נניח בשלילה ש-$D(v_0)$ אינו המרחק מ-s ל-v_0. כלומר יש מסלול p מ-s ל-v_0 כך ש-$D(v_0)>w(p)$. p חייב להיות מסלול לא מיוחד בשלב $|S|=k$

נסמן ב-x את הקודקוד הראשון ב-p $\notin S$.

נחלק את המסלול p ל- $p_1=$ המסלול מ-s ל-x ו- $p_2=$ המסלול מ-x עד v_0.

p_1 - מסלול מיוחד ולכן $D(x) \le w(p_1)$

ידוע ש-$w(p_2)$ חיובי (כי כל המשקלות חיוביים) ולכן, $D(x) \le w(p_1) < w(p_1)+w(p_2) = w(p) < D(v_0)$

בסתירה לבחירה v_0.

לכן $D(v_0)=$ המרחק מ-s ל-v_0 וכל המסלול נמצא ב-S (נובע מהנחת האינדוקציה)

טענה ב. יש 3 מקרים, נשלים בבית.