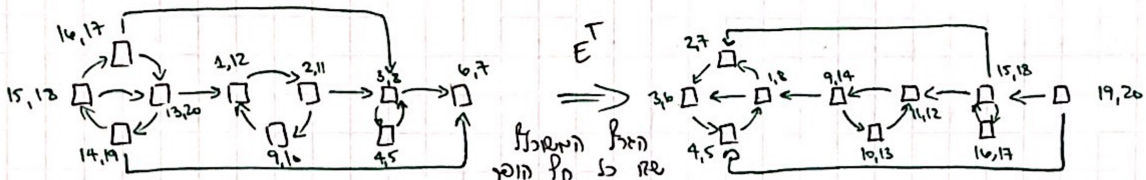
אלגוריתמים - תרגול 9

רכיבים קשירים היטב. (קבוצה מקסימלית של קודקודים כאשר לכל אחד יש מסלול לכל קודקוד אחר באותה קבוצה)



הגרף המשוחלף שבו כל חץ הופך את כיוונו.

משפט 1: יהיו C ו-C' שני רכיבים קשירים היטב שונים בגרף מכוון $G=(V,E)$
יהיו $u,v\in C$ ו- $v',u'\in C'$. נניח ש- G מכיל מסלול מ-u ל-u' אזי G
לא יכול להכיל מסלול מ-v' ל-v.

(*) נראה כי בחינת קודקודי הגרף לפי סדר יורד של זמני סיום היא למעשה סריקת קודקודי גרף הרכיבים הקשירים היטב בסדר מיון טופולוגי.

(*) נסמן בהמשך את $f(u)$ כזמן הסיום של הטיפול בקודקוד u בסריקת ה-DFS הראשונה באלגוריתם.

(*) נרחיב את הסימון של זמן הגילוי וסיום הטיפול בקודקודים לקבוצות.

אם $U\subseteq V$ אזי נגדיר את $d(U)=\min_{u\in U}\{d[u]\}$ ואת $f(U)=\max_{u\in U}\{f[u]\}$

משפט 2: יהיו C ו-C' רכיבים קשירים היטב שונים בגרף מכוון $G=(V,E)$.
תהי $(u,v)\in E$ כאשר $u\in C$ ו- $v\in C'$ מתקיים $f(C)>f(C')$

משפט 3: (מסקנה ממשפט 2) יהיו C ו-C' רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון $G=(V,E)$
ותהי $(u,v)\in E^T$ כאשר $u\in C$ ו- $v\in C'$ אזי $f(C)<f(C')$

משפט 4: הפרוצדורה Strongly-Connected-Components מחשבת נכונה את הרכיבים הקשירים היטב של גרף G הנתון כקלט.

(אמרנו שבשלב 4 באלגוריתם כל פעם נדפיס את רכיב הקשירות בעומק הבא)

עץ פורש מינימלי:

(*) נתון גרף קלתי מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם פונק' משקל $w: E \to \mathbb{R}$ (על הקשתות)

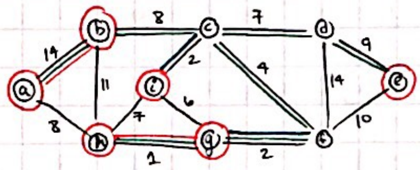
(*) עץ = גרף קשיר ללא מעגלים.

(*) עץ פורש = עץ פורש של גרף G הוא עץ שקבוצת קודקודיו היא V וקבוצת קשתותיו $T \subseteq E$.

(*) משקל של עץ שקשתותיו הן T הוא $w(T) = \sum_{e \in} w(e)$

(*) עץ פורש מינימלי = עץ פורש של G שמשקלו מינימלי מבין כלל העצים הפורשים של G.

— עץ פורש מינימלי.
— קשת קלה
○ חתך של קודקודים $(S, V-S)$



נכתוב אלגוריתם חמדני כללי הבונה עץ פורש מינימלי ע"י הוספת קשת אחת בכל פעם.

האלגוריתם מנהל קבוצת קשתות A שנבחרו עד כה.

אינווריאנטה: A תמיד מוכלת בעץ מינימלי של G.

הגדרה: קשת בטוחה היא קשת $(u,v) \in E$ שניתן להוסיף ל- A כך שהאינווריאנטה תישמר.

כלומר, $A \cup \{(u,v)\}$ מוכלת בעץ פורש מינימלי של G.

עץ פורש מינימלי גנרי (G,w):

1. $A \leftarrow \emptyset$

2. כל עוד A אינה עץ פורש

(1) מצא קשת בטוחה (u,v) עבור A

(2) $A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$

3. החזר A.

נכונות:

* אחרי שורה 1. האינווריאנטה נשמרת באופן טריוויאלי.

* בשלב 2. אני מוסיפים ל-A רק קשתות בטוחות עבורה ולכן עפ"י ההגדרה האינווריאנטה שוב תישמר.

* בשלב 3. קבוצת הקשתות היא עץ פורש כיוון שיצאנו מהלולאה של שלב 2. רק כאשר A עץ פורש והוא מינימלי כיוון שבכל שלב עד כה האינווריאנטה נשמרה.

הגדרות:

(*) חתך - בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא חלוקה של V ל- $(S,V-S)$ כאשר $S\subseteq V$.

(*) נאמר שהקשת $(u,v)\in E$ היא קשת החוצה את החתך $(S,V-S)$ אם u ו-v שייכים לשני חלקים שונים של החתך, כלומר אחד שייך ל-S והאחר ל-$V-S$.

(*) קשת בגרף תיקרא קשת קלה החוצה את החתך אם היא הקשת קלת המשקל המינימלי מבין הקשתות החוצות את החתך.

← באופן כללי, נאמר שקשת היא קלה ומקיימת תכונה כלשהי אם היא הקשת קלת המשקל המינימלי מבין הקשתות המקיימות את התכונה.

(*) נאמר שחתך מכבד קבוצת קשתות אם בקבוצה אין אף קשת שחוצה את החתך.

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר, עם פונק' משקל $w:E\to\mathbb{R}$.
תהי A קבוצת קשתות המוכלת בעץ פורש מינימלי של G.
יהי $(S,V-S)$ חתך ~~[illegible]~~ המכבד את הקבוצה A, ותהי $(u,v)\in E$ קשת קלה החוצה את החתך $(S,V-S)$, אזי (u,v) היא קשת בטוחה עבור A.

הוכחה -

תהי T קבוצת קשתות של עץ פורש מינימלי שמכילה את A.

← אם $(u,v)\in T$ סיימנו.

← אם $(u,v)\notin T$ נגדיר T' להיות $T\cup\{(u,v)\}$. מכיוון ש-T עץ פורש, הוספת קשת (u,v) יצרה מעגל הכולל את (u,v).

מכיוון ש-(u,v) היא קשת החוצה את החתך $(S,V-S)$ אזי קיימת לפחות קשת אחת $(x,y)\in T$ במעגל שחוצה את החתך אף היא.

(T הוא עץ ולכן קשיר, כלומר חייב להיות מסלול מ-u ל-v ב-T ולכן חייבת להיות קשת שחוצה את החתך שמפריד ביניהם)

נגדיר $T''=T'-\{(x,y)\}$, הוא קבוצת קשתות של עץ פורש מינימלי של G, מכיוון ש-(x,y) נמצא על המסלול היחיד ב-T מ-u ל-v.

לכן סילוקה מפרק את העץ לשני רכיבי קשירות וההוספה של (u,v) מחברת אותם.
כלומר, קיבלנו שוב גרף קשיר שבו קבוצת הקשתות לא השתנה לכן מדובר בעץ.
הוא פורש כיוון שקבוצת הקודקודים כוללת את כל V.

T'' מכילה את A, כיוון שהחתך $(S,V-S)$ מכבד את A והקשת (x,y) חוצה אותו.

נראה ש- T^{-1} הוא קבוצת קשתות של עץ פורש מינימלי

$$\omega(T'') = \omega(T) - \omega(x,y) + \omega(u,v)$$

אך, מכיוון ש- (u,v) היא קשת קלה החוצה את החתך $(S,V-S)$ אזי בהכרח

מתקיים $\omega(u,v) \le \omega(x,y)$

$\Leftarrow$ $\omega(T'') \le \omega(T)$

לכן T'' הוא קבוצת קשתות של עץ פורש מינימלי של G המכילה את A

מכיוון ש- $(u,v) \in T''$ הרי ש- (u,v) היא קשת בטוחה עבור A.