בס״ד

רכיבים קשירים היטב

רכיב קשיר היטב בגרף מכוון G=(V,E) הוא קבוצה מקסימלית C⊆V כך שלכל זוג קדקודים ב-C מתקיים גם u->v וגם v->u, כלומר u ו-v נגישים האחד מהשני.

ניתן להגדיר את גרף הרכיבים הקשירים היטב של גרף מכוון G, כגרף שבו כל קדקוד מייצג רכיב קשיר היטב, וקיימת קשת בין קדקודים המייצגים רכיבים קשירים היטב C ו-C' אם קיימים v∈C ו-u∈C', שיש ביניהם קשת ב-G.

אלגוריתם למציאת הרכיבים הקשירים בגרף משתמש בגרף המוחלף של G המוגדר כ-$G^T=(V,E^T)$, כאשר $E^T=\{(u,v)|(v,u)\in E\}$. ניתן ליצור את הגרף המוחלף של G מ-G הנתון כרשימת סמיכויות בזמן O(V+E). נשים לב, שלשני הגרפים אותם רכיבים קשירים היטב.

אלגוריתם לינארי לחישוב רכיבים קשירים היטב בגרף G נראה כך:

SRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS(G)

1. Call DFS(G) to compute finishing times f[u] for each vertex u.
2. Compute G^T.
3. Call DFS(G^T), but in the main loop of DFS, consider the vertices in order of decreasing f[u] (as computed in line 1)
4. Output the vertices of each tree in the depth-first forest of step 3 as a separate strongly connected component.

<u>משפט 1</u>:

יהיו C ו-C' רכיבים קשירים היטב שונים בגרף מכוון G=(V,E), יהיו v,u∈C ויהיו u',v'∈C' ונניח ש-G מכיל מסלול מ-u ל-u', אזי G לא יכול גם להכיל מסלול מ-v' ל-v.

<u>הוכחה</u>:

אם G מכיל מסלול v'->v אז הוא מכיל את המסלולים: u->u'->v' ו-v'->v->u. לפיכך, u ו-v' נגישים האחד מהשני, בסתירה לנתון ש-C ו-C' הם רכיבים קשירים היטב שונים.

- נראה כי בחינת הקדקודים לפי סדר של זמני סיום היא למעשה סריקת קדקודי גרף הרכיבים הקשירים בסדר ממוין טופולוגית.
- נסמן בהוכחות בהמשך את f[u] כזמן סיום הטיפול ב-u בסריקת ה-DFS הראשונה של האלגוריתם.
- נרחיב את סימון זמן הגילוי וסיום הטיפול של קדקודים לקבוצות של קדקודים. אם U⊆V, אזי נגדיר את $d(U) = min_{u\in U}\{d[u]\}$ ואת $f(U) = max_{u\in U}\{f[u]\}$.

<u>משפט 2</u>:

יהיו C ו-C' רכיבים קשירים היטב שונים בגרף מכוון G=(V,E). תהי (u,v)∈E, כאשר u∈C ו-v∈C' מתקיים f(C)>f(C').

<u>הוכחה</u>:

נפריד לשני מקרים בהתאם לזהות הרכיב הקשיר היטב, C או C', שנתגלה בו קדקוד לראשונה במהלך סריקת DFS.

אם d(C)<d(C'), יהי x הקדקוד הראשון שנתגלה ב-C. בזמן d[x] כל הקדקודים ב-C וב-C' לבנים. בזמן זה, G מכיל מסלול מ-x לכל קדקוד ב-C המורכב מקדקודים לבנים בלבד. בגלל ש-(u,v)∈E לכל קדקוד w∈C' ישנו מסלול ב-G בזמן d[x] המורכב מקדקודים לבנים בלבד: x->u-v->w>. לפי משפט המסלול הלבן, כל הקדקודים ב-C וב-'C יהפכו לצאצאים של x בעץ עומק. בהתאם למסקנה מתכונת הסוגריים של חיפוש לעומק ל-x יהיה זמן הסיום המאוחר ביותר מבין כל צאצאיו, ולכן $f[x]=f(C)>f(C')$.

אם לעומת זאת מתקיים $d(C)>d(C')$, יהי y הקדקוד הראשון שמתגלה ב-'C. בזמן $d[y]$, כל קדקודי 'C לבנים ו-G מכיל מסלול מ-y לכל קדקוד ב-'C הכולל קדקודים לבנים בלבד. לפי משפט המסלול הלבן, כל קדקודי 'C יהפכו לצאצאים של y בעץ העומק, ובהתאם למסקנה מתכונת הסוגריים $f[y]=f(C')$. בזמן $d[y]$ כל קדקודי C לבנים. מאחר וישנה קשת (u,v) מ-C ל-'C הרי שלפי משפט 1 לא ייתכן מסלול מ-'C ל-C. לפיכך, אף קדקוד ב-C אינו נגיש מ-y. לכן לכל קדקוד $w \in C$, מתקיים $f[w]>f[y]$, ומכאן שמתקיים $f(C)>f(C')$.

<u>משפט 3 (מסקנה ממשפט 2)</u>:

יהיו C ו-'C רכיבים קשירים היטב שונים בגרף מכוון $G=(V,E)$. תהי הקשת $(u,v) \in E^T$, כאשר $u \in C$ ו-$v \in C'$, מתקיים $f(C)<f(C')$.

<u>הוכחה</u>:

מאחר ש- $(u,v) \in E^T$, הרי ש-$(v,u) \in E$. בגלל שהרכיבים הקשירים של G ו-G^T זהים הרי שהמשפט הקודם מחייב ש-$f(C)<f(C')$.

המשפט האחרון נותן את האינטואיציה מאחורי אופן פעולת האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב. למעשה בכל שלב האלגוריתם "מקלף" רכיב קשיר היטב, שכן מובטח שתתבצע סריקה מלאה של עץ עומק של הרכיב הקשיר. יחד עם זאת, בגלל סדר הסריקה והמשפט הקודם מובטח שהסריקה "תקלף" רכיב קשיר היטב יחיד.

<u>משפט 4</u>:

הפרוצדורה STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS מחשבת נכונה את הרכיבים הקשירים היטב של גרף מכוון G הניתן לה כקלט.

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה על מס' עצי העומק שנמצאים במהלך סריקת ה-DFS על הגרף G^T בשורה 3 של הפרוצדורה, שהקדקודים בכל עץ עומק שכזה יוצרים רכיב קשיר היטב.

בסיס האינדוקציה עבור $k=0$ טריוויאלי.

נניח באינדוקציה ש-k העצים הראשונים שיוצרת שורה 3 של האלגוריתם הם רכיבים קשירים היטב.

נוכיח את צעד האינדוקציה. נתבונן בעץ העומק ה-k+1 שיוצרת שורה 3. יהי u שורש העץ, ויהי C הרכיב הקשיר היטב בו נמצא u. בגלל האופן בו אנו בוחרים את שורשי עצי העומק בשורה 3 $f[u]=f(C)>f(C')$, עבור כל רכיב קשיר היטב 'C השונה מ-C שטרם ביקרנו בו. לפי הנחת האינדוקציה בזמן שהסריקה מבקרת ב-u, כל יתר הקדקודים ב-C הם לבנים (כל הקדקודים שסומנו שויכו כבר לרכיבים קשירים היטב). לפי משפט המסלול הלבן, כל הקדקודים האחרים ב-C הם צאצאים של u בעץ העומק. יתר על כן, לפי הנחת האינדוקציה והמשפט הקודם, כל הקשתות ב-G^T שעוזבות את C חייבות להגיע לרכיבים קשירים היטב שכבר נסרקו. לפיכך, אף קדקוד ברכיב קשיר היטב שאינו C לא יהיה צאצא של u במהלך הסריקה לעומק של G^T. אשר על כן, הקדקודים בעץ העומק ב-G^T המושרש ב-u ייצרו רכיב קשיר היטב יחיד, והוכח צעד האינדוקציה.