21.11.16

אלגוריתמים - תרגול 2

הפרד ומשול.

מספרים מרוכבים - מבוא.

הגדרות כלליות:

* מספר מרוכב הוא מספר מהצורה $z=a+bi$ כאשר a ו- b מספרים ממשיים ו- i הוא השורש הריבועי של -1 ($i^2=-1$)
* החלק הממשי של מספר מרוכב $z=a+bi$ הוא a, מסומן גם כ- $Re(z)=a$
* החלק המדומה של מספר מרוכב $z=a+bi$ הוא b, מסומן גם כ- $Im(z)=b$

ניתן לצבור כל מס' מרוכב $z=a+bi$ ע"י הנקודה (a,b) במישור האוקלידי.

פעולות אריתמטיות:

חיבור: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

כפל: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(cb+ad)i$

בנוסף מגדירים גם:

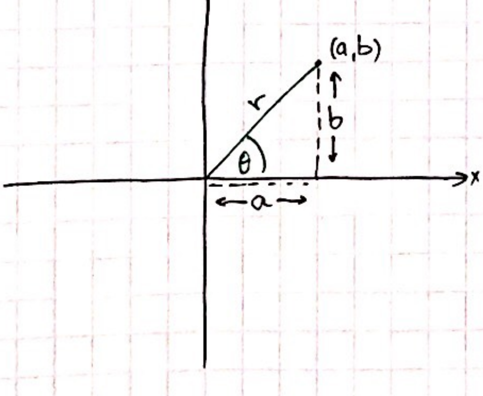
ערך מוחלט: $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ (מציין את מרחק הנק' (a,b) מראשית הצירים)

מספר צמוד: $z^*=\bar{z}=a-bi$

לפיכך פעולת החילוק מוגדרת כך: $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(a-bi)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

הצגה קוטבית: (פולארית)

(*) ניתן להציג כל מס' מרוכב $z=a+bi$ ע"י המרחק שלו מראשית הצירים (a,b) (r).
והזווית שיוצר הישר המחבר את (a,b) וראשית הצירים עם ציר ה- x (θ)



מתקיים:

$b=r\sin\theta$

$a=r\cos\theta$

$z=a+bi=r(\cos\theta+\sin\theta i)$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

נוסחת אוילר:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta i$$

← הוכחה באמצעות טורי טיילור

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

נציב במקום x: $i\theta$ ונקבל.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!}\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos\theta + \sin\theta i$$

← הוכחה באמצעות חדו"א.

נגדיר את הפונק' $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = (\cos x + \sin x i) \cdot e^{-ix}$$

נגזור לפי x:

$$f'(x) = (\cos x + \sin x i)\frac{de^{-ix}}{dx} + \frac{d(\cos x + \sin x i)}{dx} \cdot e^{-xi} = (\cos x + \sin x i) - ie^{-ix} + (-\sin x + \cos x i)e^{-ix}$$

$$= e^{-ix}(-i\cancel{\cos x} + \cancel{\sin x} - \cancel{\sin x} + \cancel{\cos x i}) = 0$$

הפונק' קבועה (כי הנגזרת מתאפסת) ולכן מתקיים:

$$e^{-ix}(\cos x + \sin x i) = f(x) = f(0) = (\cos 0 + \sin 0 i)e^{-i0} = 1$$

$\Leftarrow$ נכפול את שני האגפים ב- e^{ix} ונקבל:

$$\cos x + \sin x i = e^{ix}$$

באמצעות נוסחה זו ניתן להציג מס מרוכב באופן הבא:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + \sin\theta i) = re^{i\theta}$$

21.11.16 בס"ד

הצגה זו מאפשרת לנו להציג כפל וחילוק באופן הבא:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} = \boxed{r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \boxed{\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

בנוסף, נוח להיעזר בנוסחה זו לחישוב שורש של מספר מרוכב.

$$z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = (re^{i(\theta+2\pi k)})^{\frac{1}{n}} = \boxed{r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}}$$

עבור $k=0,1,2,\dots,n-1$

נשים ♡:

לכל מס' מרוכב מעל $\mathbb{C}$ יש n שורשים מסדר n.

שורשי היחידה:

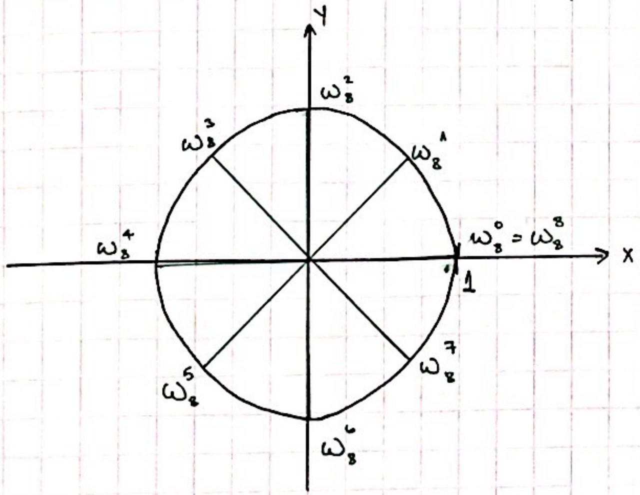
השורש המרוכב מסדר n של היחידה הוא המספר המרוכב ω המקיים $\omega^n=1$.

ולכן ישנם n שורשי יחידה מסדר n והם נתונים ע"י הנוסחה הבאה:

$$\boxed{\omega_n^k = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}} \qquad k=0,1,\dots,n-1$$

(*) נשים ♡: ה-n באמת סימון אך k באמת החזקה ב- ω_n^k

ניתן לראות את שורשי היחידה מסדר $n=8$ כך:



שורש היחידה הראשי מסדר n הוא

$$\omega_n = \omega_n^1 = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$$

כל שורשי היחידה המרוכבים מסדר n הם חזקות של שורש זה.

$$\omega_n^0, \underset{\omega_n}{\underset{\shortparallel}{\omega_n^1}}, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{k-1}$$

למת הצמצום: עבור שלמים כלשהם $n\geq 0$, $k\geq 0$ ו- $d>0$

מתקיים: $\omega_n^k = \omega_{dn}^{dk}$

הוכחה-

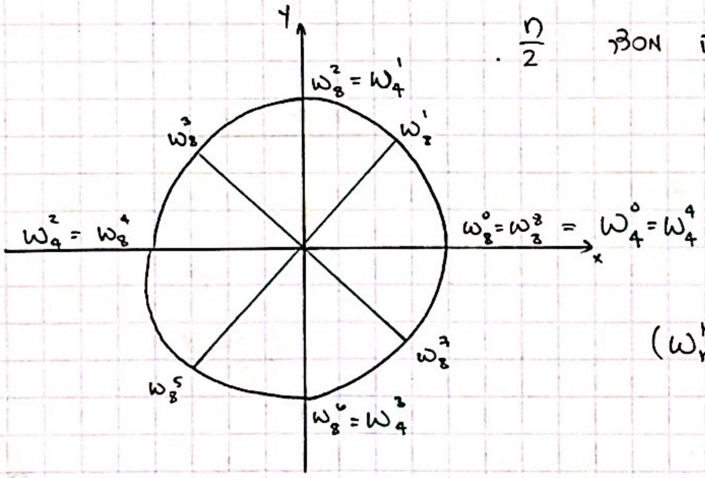
$$\omega_{dn}^{dk} = e^{\frac{i2\pi \cancel{d}k}{\cancel{d}n}} = e^{\frac{i2\pi k}{n}} = \omega_n^k$$

מסקנה: עבור כל שלם זוגי $n>0$ מתקיים $\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$

הוכחה-

$$\omega_n^{n/2} = \omega_{2\cdot\frac{n}{\cancel{2}}}^{1\cdot\frac{n}{\cancel{2}}} \underset{\text{למת הצמצום}}{=} \omega_2^1 = \omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin(\pi)i}_{0} = -1$$

למת החציה: אם $n>0$ מספר זוגי אזי הריבועים של n שורשי היחידה מסדר n הם $\frac{n}{2}$ שורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2}$.



הוכחה-

עפ"י למת הצמצום:

$$(\omega_n^k)^2 = \omega_n^{2k} = \omega_{\cancel{2}\frac{n}{2}}^{\cancel{2}k} = \omega_{\frac{n}{2}}^k$$

עבור כל שלם אי שלילי k:

נשים ♡: אם נעלה בריבוע את שורשי היחידה מסדר n, אזי כל שורש יחידה מסדר $n/2$ מתקבל בדיוק פעמיים.

$$\left(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}\right)^2 = \omega_n^{2k}\cdot\omega_n^{n} = \omega_n^{2k} = \left(\omega_n^k\right)^2$$

למת הסכום: עבור כל שלם $n\geq 1$ וכל שלם אי שלילי k שאינו מתחלק ב- n

מתקיים: $\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^k)^j = 0$

הוכחה-

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^k)^j \underset{\text{סדרה הנדסית}}{=} \frac{(\omega_n^k)^n - 1}{\omega_n^k - 1} = \frac{(\overbrace{\omega_n^n}^{1})^n - 1}{\omega_n^k - 1} = \frac{1-1}{\omega_n^k - 1} = 0$$

נשים ♡: שמכיוון ש- $n\geq 1$ ו- k לא מתחלק ב- n המכנה לא מתאפס.

21.11.16 בס"ד.

נחזור לבעיות אלגוריתמיות בשיטת הפרד ומשול:

בעיית סכום תת המערך המקסימלי:

קלט: מערך A בגודל n מספרים

פלט: אינדקס התחלה וסיום של תת מערך של A כך שסכום האיברים שלו מקסימלי מבין סכומי כל תת המערכים של A.

← max_3 →

A:

13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

← max_1 → ← max_2 →

הצעות אלגוריתמים:

1) הפתרון הנאיבי לבדוק את כל תתי המערכים אך זו ריצה של $O(n^3)$

2) נקבע את ה-i ולכל i נרוץ על כל ה-j-ים אך זו גם ריצה ארוכה של $O(n^2)$

3) הפרד ומשול:

נחלק את המערך לחצי, נמצא max_1 ו-max_2 בכל חצי.

אך צריך לבדוק אם המערך עובר באמצע.

נבדוק עם שני פוינטרים מהאמצע לצד ימין מה המערך המקסימלי ומהאמצע לצד שמאל מה המערך המקסימלי, נחבר את שניהם ל-max_3 ונחזיר את הגדול מבין max_1, max_2 ו-max_3.