סיכום

שבת 09 ינואר 2016   21:44

- הפרד ומשול:

אלגוריתמים בשיטת הפרד ומשול פועלים לפי שלושת השלבים הבאים:

1) הפרד- חלוקת הבעיה לתתי בעיות
2) משול- פתרון כל אחת מתתי הבעיות באופן רקורסיבי
3) צרף- איחוד הפתרונות של תתי הבעיות לפתרון כולל לבעיה השלימה.

דוגמאות הרצאה:

- מיון מיזוג- merge sort
- בעיית מכפלת מחרוזות
- מיון מהיר
- עץ החלטות T_A
- מכפלת פולינומים-
  - אפשר לעשות בשיטת FFT(Fast Fourier Transform) שמקצרת את התהליך

דוגמאות תרגול:

- חיפוש בינארי
- פיבונצ'י
- שיכון VLSI
- בעיית סכום תת-המערך המקסימלי.
- נתונות n נקודות צריך למצוא מרחק קטן ביותר בין 2 נקודות.
- התאמת מחרוזות עם don't cares

- תכנות דינאמי:

חישוב בעיה ע"י פירוק לתתי בעיות ותוך כדי שמירה של ערכים לניצול מאוחר יותר בתהליך.

בהרצאה:

- פיבונצ'י
- בעיית מכפלת שרשרת מטריצות
- בעיית התת סדרה המשותפת המקסימלית- Longest Common Subequence(LCS)
  - הגדרה: יהי $x = x_1, \dots, x_n$ סדרה(מחרוזת) מעל הא"ב Σ, אז $z = z_1, \dots, z_k$ היא תת סדרה של x אם קיימים $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq i_n$ כך ש $\forall\ 1 \leq j \leq k: z_j = x_{ij}$
    דוגמא:
    $x = abbacdcab$
    $z = bdb$ תת סדרה
    $z = daa$ לא תת סדרה.
- Orthogonal vectors

בתרגול:

- בעיית פס היצור הנע
- בעיית המסיבה- הקבוצה הבלתי תלויה המינימלית בעץ.
- בעיית התרמיל בשלמים(0/1 knapsack)
- בעיית הסטודנטים

- אלגוריתמים חמדניים

אלגוריתם חמדני הוא אלגוריתם המבצע פעולות לפי האופטימיזציה הלוקאלית(המקומית) על מנת לקבל פתרון אופטימלי כולל.

הרצאה:

- קידוד דחיסה
  - הגדרות:
  - קוד- פונקציה מא"ב למחרוזת בינארית $C: \Sigma \to \{0,1\}^*$
  - מחרוזת- $S = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$
  - מחרוזת מקודדת $C(S) = c(\sigma_1) \dots c(\sigma_n)$
  - קוד רישות-(Prefix code)
    קוד שלכל $\sigma, \tau \in \Sigma$: $c(\sigma)$ אינה רישא שך $c(\tau)$
    - קלט- אם $a_1, \dots, a_n$ עם תדירויות(משקולות) $w_1, \dots, w_n$ (תדירות = עבור w_1, a_1, מסמן כמה פעמים a_1 מופיע במחרוזת)
    - פלט

- האלגוריתם של הופמן(1952)

תרגול:

- בעיית בחירת הפעילויות

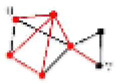
- גרפים:

הגדרה:

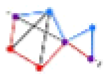
הרצאה:

- גרף: הגרף $G=(V,E)$ הוא אוסף של קודקודים המסומנים ע"י $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ ואוסף של קשתות שהן זוגות של קודקודים שמסומן ע"י $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ (כלומר $e_i=\{v_j,v_k\}$)
- גרף מכוון- הגרף המכוון $G=(V,E)$ הוא אוסף של קודקודים המסומנים ע"י $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ ואוסף של קשתות שהן זוגות סדורים של קודקודים שמסומן ע"י $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ (כלומר $e_i=(v_j,v_k)$ הקשת הולכת מv_j ל v_k)
- מקסימום קשתות
- גרף ממושקל: גרף $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $w\colon E\to R$
- משקל עץ פורש T(של גרף ממושקל): $\sum_{e\in T} w(e)$
- ייצוג של גרפים:
  - רשימה מקושרת
    - גודל: $O(|V|+|E|)$
    - יתרון בגרף דליל הייצוג שלו יצרוך פחות מקום ברשימה
    - חסרון לוקח זמן לגשת לקודקודים
  - מטריצה
    - גודל: $O(|V|^2)$
    - יתרון גישה ישירה ב-$O(1)$ לדעת מה הקשת, מה המשקל וכו'
    - חסרון הרבה מקום בשביל גרפים דלילים

- **מסלול** סדרת קדקודים $v_1,\dots v_k$ כך שלכל $1\le i\le k-1$ יש קשת $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$

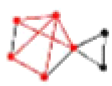


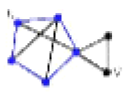
- **מסלול פשוט** מסלול $v_1,\dots,v_k$ כך שלכל $1\le i\ne j\le k$: $v_i\ne v_j$
  - (פה יש שני מסלולים מ-u ל-v, מסלול כחול ומסלול אדום)



-

- **מעגל** מסלול $v_1,\dots,v_k,v_1$





- **מעגל פשוט** מעגל $v_1,\dots,v_k,v_1$ כך ש-$v_1,\dots,v_k$ מסלול פשוט
- גרף G הוא **קשיר** אם לכל $u,v\in V$ יש מסלול מ-u ל-v
- יער- גרף ללא מעגלים
- עץ- יער קשיר

הרצאה:

- קרוסקל - עץ פורש מינימלי
  - ממיינים קשתות לפי משקל. בוחרים את הקשת הזולה ביותר ומוסיפים אותה לT אם היא משלימה מעגל אז לא נוסיף אותה וכן הלאה.. עובד עם שליליים
  - סיבוכיות: $O(|E|\log|V|)$ אם משתמשים במבנה נתונים איחוד חיפוש.
  - מבנה נתונים איחוד-חיפוש
    1. מערך בגודל n
       a. זמן: חיפוש $O(1)$
       איחוד $O(n)$
    2. רשימה מקושרת
       a. זמן: חיפוש $O(n)$
       איחוד $O(1)$

הגדרה: $\log^*(n)$ - מס' הפעמים שמפעילים ⬚ $\log$ על מס' עד שנהיה ≤ 1

- <u>דוגמאות:</u>
  - $\log(2)=1 \leftarrow \log^*(2)=1$
  - $\log(4)=2$
    - $\log(4)=1 \leftarrow \log^*(4)=2$
  - $\log(16)=4 \leftarrow \log^*(16)=3$
  - $\log(2^{16})=16 \leftarrow \log^*(65,535)=4$

<u>הגדרה:</u> **פונקציית אקרמן:** $T(i)=2^{T(i-1)}$

- $\log^*(T(i))=i$ $\quad T(\log^* n)=n$
  - <u>דוגמאות:</u>
    - $T(0)=1$
    - $T(1)=2$
    - $T(2)=4$
    - $T(3)=2^4=16$
    - $T(4)=2^{16}=65,536$

- האלגוריתם של דייקסטרה - מציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד נתון.
  - עובד על גרף מכוון/לא מכוון, רק על אי שלילי. שדות $d[v]$ - מרחק, $\pi[v]$ - אבא. מתחילים מהקודקוד הנתון ומבצעים הקלות על השכנים ואז בוחרים את המינימלי מבין השכנים ועושים אותו דבר.
  סיבוכיות: $O(E+V\log V)$

תרגול:

- BFS
  - זמן: $O(|V|+|E|)$ עבור גרף $G=(V,E)$, ופורש את עץ הרוחב של הגרף החל מקדקוד מקור נתון S (מימוש בעזרת תור)
  - בתמונה- סדר סריקת הקדקודים בעזרת BFS

- DFS
  - זמן: $O(|V|+|E|)$ עבור גרף $G=(V,E)$, ופורש את יער העומק של הגרף (מימוש בעזרת מחסנית)
  - בתמונה- סדר סריקת הקדקודים בעזרת DFS

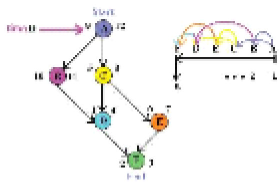
<u>משפט:</u> **משפט המסלול הלבן:**

- ביער העומק של הגרף $G=(V,E)$ (מכוון או לא מכוון), קדקוד v הוא צאצא של קדקוד u אם"ם בזמן $d[u]$ כל הקדקודים על המסלול מ-u ל-v לבנים

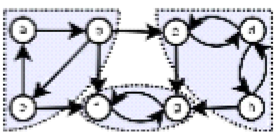
משפט הסוגריים:

- ביער העומק של הגרף $G=(V,E)$ (מכוון או לא מכוון), עבור כל זוג קדקודים u,v מתקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:
  1. הקטעים $[d[u],f[u]]$ ו-$[d[v],f[v]]$ זרים לחלוטין
  2. הקטע $[d[u],f[u]]$ מוכל ב-$[d[v],f[v]]$, ואז u הוא צאצא של v ביער העומק
  3. קטע $[d[v],f[v]]$ מוכל ב-$[d[u],f[u]]$, ואז v הוא צאצא של u ביער העומק

<u>מסקנה:</u> קדקוד v הוא צאצא ממש של קדקוד u ביער העומק של גרף $G=(V,E)$ (מכוון או לא מכוון) אם"ם $d[u]<d[v]<f[v]<f[u]$



<u>הגדרה:</u> **מיון טופולוגי** של גרף $G=(V,E)$ (מכוון וללא מעגלים\ גמ"ל\ DAG) הוא סידור ליניארי של קדקודי הגרף כך שאם קיימת קשת $(u,v)\in E$ אז u מופיע לפני v במיון.
ניתן לממש מיון טופולוגי בזמן לינארי בגודל הגרף ע"י סריקת DFS של הגרף וסימון ערכי $f[u]$ לכל קדקוד u. כל קדקוד שנסתיימה סריקתו, מוכנס לתחילת הרשימה במיון הטופולוגי



<u>הגדרה:</u> **רכיב קשיר היטב בגרף מכוון** $G=(V,E)$ הוא תת-קבוצה מקסימלית $C\subseteq V$ כך שלכל $v,u\in C$ קיים מסלול מ-v ל-u וקיים מסלול מ-u ל-v

- קבוצות הקדקודים המסומנות בתמונה הן רכיבים קשירים היטב (כל קבוצה בפני עצמה)

נגדיר את **גרף הרכיבים הקשירים היטב** (G_{SCC}) שבו כל רכיב קשיר היטב מיוצג ע"י קדקוד יחיד וקיימת קשת בין זוג נציגים שכאלה אם קיימת קשת בגרף המקורי בין קדקוד אחד מרכיב קשיר היטב למשנה (כיוון הקשת הוא כמו בגרף המקורי)

- בתמונה זה גרף הרכיבים הקשירים היטב

- אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב $O(V+E)$
- אלגוריתם לינארי למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף נתון.

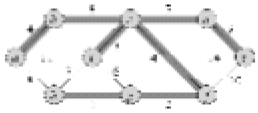
משפט: יהיו C, C' רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון $G=(V,E)$, ויהיו $u,v \in C$ ו-$u',v' \in C'$
- אם קיימת קשת $(u',u) \in E$ אז לא קיימת קשת (v,v') ($(v,v') \notin E$)
- באופן כללי- אם קיים מסלול מ-u' ל-u אז לא קיים מסלול מ-v ל-v' (כי אז זה גורם לזה ש-C ו-C' יהיו אותו רכיב קשירות

משפט: יהיו C, C' רכיבים קשירים היטב של G ותהי (u,v) קשת מ-$u \in C$ ל-$v \in C'$ אזי $f(C) > f(C')$

משפט: יהיו C, C' רכיבים קשירים היטב ב-G^T ותהי $(u,v) \in E^T$ כאשר $u \in C$ ו-$v \in C'$ אזי $f(C) < f(C')$

הגדרה: נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $w : E \to R$,

עץ פורש מינימלי T של G, הוא עץ שקדקודיו V וקבוצת הקשתות שלו- E' מוכלת ב-E, שסכום הקשתות שלו: $w(T) = \sum_{(u,v)\in E'} w(u,v)$, הוא מינימלי מבין כל העצים שקדקודיהם V, וקבוצת קשתותיהם הן תת-קבוצה של E



- האלגוריתם הגנרי החמדני למציאת עץ פורש מינימלי, יוסיף בכל פעם קשת אחת לעץ המתהווה, קבוצת הקשתות שהוא יְתַחזק תיקרא A
- האינויריאנטה: (הכלל/התכונה) A היא תת-קבוצה של קשתות בעץ פורש מינימלי של G (גרף הקלט)

הגדרה: קשת (u,v) תיקרא **קשת בטוחה** עבור A, אם ניתן להוסיף אותה ל-A כך שהאינויריאנטה תישמר (כלומר $A \cup \{(u,v)\}$ מוכלת בקבוצת קשתות של עץ פורש מינימלי)

- אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימלי
  - **חתך** בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא חלוקה של הקדקודים ל-S ו-$V-S$ כאשר $S \subseteq V$, תסומן ע"י $(S, V-S)$
  - ▪
    - נאמר שקשת $(u,v) \in E$ היא **קשת החוצה את החתך** $(V-S,S)$ אם $u \in S$ ו-$v \in V-S$ או $v \in S$ ו-$u \in V-S$
    - קשת $(u,v) \in E$ תיקרא **קשת קלה החוצה את החתך** $(V-S,S)$ אם היא הקשת בעלת המשקל המינימלי מבין הקשתות החוצות את החתך הזה
  - ▪
    - באופן כללי, קשת קלה המקיימת תכונה כלשהי, היא קשת בעלת המשקל המינימלי מבין כל הקשתות המקיימות את התכונה
    - נאמר שחתך $(V-S,S)$ **מכבד** קבוצת קשתות A אם אף קשת ב-A אינה חוצה את החתך
  - **משפט:** יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר עם פונקציית משקל $w : E \to R$, תהי A קבוצת קשתות המוכלת בעץ פורש מינימלי של G, יהי $(V-S,S)$ חתך המכבד את A, ותהי $(u,v) \in E$ קשת קלה החוצה את החתך, אזי (u,v) קשת בטוחה עבור A *(המשפט בא בשביל להקל עלינו למציאת הקשתות באלגוריתם הגנרי)*
- האלגוריתם של פרים למציאת עץ פורש מינימלי -
  - בוחרים קודקוד אקראי ואת הקשת המינימלית נוסיף את הקודקוד החדש לקבוצה ונבדוק מי הקשת המינימלית בחתך וכן הלאה עד שכל הקודקודים יהיו בקבוצה.
  - סיבוכיות: $O(E + V\log V)$
- שיטת סולין
- האלגוריתם של בלמן פורד
  - מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד
  - גרף מכוון, מוצא מעגלים עם משקל שלילי
  - הקלות על כל הקשתות $V-1$ פעמים.
  - סיבוכיות: $O(|E||V|)$
- האלגוריתם של פלויד וורשל - מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות.
  - פתרון תכנות דינאמי עם n מטריצות
  - סיבוכיות: $O(|V|^3)$
  - הגדרה: קדקודי ביניים במסלול מ- v_i ל- v_j. $p=(v_i, \dots v_j)$ הם כל הקודקדים בp שאינם v_i או v_j

סגור טרנזטיבי של גרף מכוון

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, עבור כל זוג קדקודים $i,j \in V$ נרצה לדעת האם קיים מסלול מ-i ל-j

- ה-**סגור הטרנזטיבי** של גרף מכוון G, יוגדר כגרף $G^*=(V,E^*)$ כאשר: $E^* = \{ (i,j) \mid$ אם קיים מסלול מקדקוד i לקדקוד j $\}$

נגדיר t_{ij}^{k}: להיות 1 אם קיים מסלול מ-i ל-j כשקדקודי הביניים מ-$\{1,\dots,k\}$, אחרת- 0

בסגור הטרנזטיבי, תהיה קשת $(i,j) \in E^*$ אם"ם $t_{ij}^{|V|} = 1$

- האלגוריתם של ג'ונסון- מסלולים קצרים ביותר בין זוגות.
  - מריצים דייקסטרה מכל קודקוד כמקור לאחר שטיפלנו במשקולות השליליים.

- סיבוביות: $O(|V|^2 \log V + |V||E|)$ מהיר אסימפטוטית מפלויד וורשל עבור גרפים דלילים.

- זרימה ברשתות:

הרצאה:

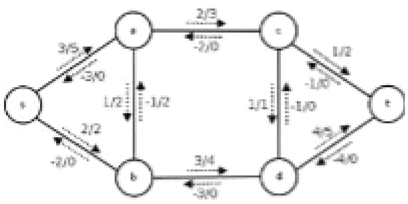
הגדרה:

- רשת זרימה- גרף מכוון $G = (V,E)$ שלכל קשת $(u,v) \in E$ יש קיבולת $c(u,v) > 0$ (אם $(u,v) \notin E$ אז $c(u,v) = 0$) וקודקוד מקור s וקודקוד יעד t. C היא פונ' $C: V \times V \to R^+$
- זרימה ב- G היא פונקציה $f: V \times V \to R$ המקיימת:

1. <u>אילוצי הקיבולת:</u> $f(u,v) \le c(u,v)$
2. <u>סימטריה נגדית:</u> $f(u,v) = -f(v,u)$
3. <u>שימור הזרימה:</u> לכל $u \in \{V - \{s,t\}\}$: $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$

<u>דוגמא:</u>

(עבור כל קשת מתוארים קיבול הקשת וגודל הזרם שמועבר)



- קל לראות שהזרימה קטנה\שווה מהקיבולת עבור כל קדקוד
- כל קדקוד מוציא בדיוק את הסכום של שנכנס אליו (מה שנכנס הוא מה שיוצא)

- ערך הזרימה: מוגדר $|f| = \Sigma_{v \in V} f(s,v)$ (הכמות שיוצאת מs-)

  - האלגוריתם של פורד-פולקסון - פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית
    - רק ערכי זרימה טבעיים. כל זמן שיש מסלול שיפור ברשת השיורית, נשפר את הקשתות במסלול השיפור את הקיבול השיורי בגרף המקורי ונפחית עבור קשתות הפוכות.
    - סיבוכיות: $O(|E||f^*|)$

<u>הגדרה:</u>

- **הקיבולת השיורית** של $(u,v) \in V \times V$ מוגדרת $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$
- **הקיבולת השיורית של מסלול** p מוגדרת $c_f(p) = min_{(u,v) \in p} c_f(u,v)$
- **הרשת השיורית** מוגדרת $G_f = (V, E_f)$, $E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$

  - אלגוריתם אדמונדס קארפ - בעיית הזרימה המקסימלית
    - נריץ פורד-פלקרסון עם BFS
    - סיבוכיות: $O(|V||E|^2)$ (קיימים $O(|V||E|)$ סיבובי זרימה)

תרגול:

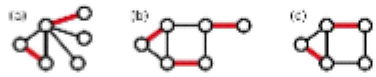
  - בעיית ההסרה בבייסבול(Baseball Elimination)
  - יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון, **כיסוי מעגלים זרים בגרף** G הוא קבוצת קשתות המהווה אוסף של מעגלים בהם כל קדקוד מופיע פעם אחת בדיוק

- התאמות/זיווגים

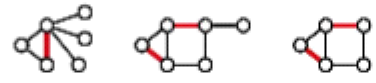
הגדרה: התאמה: התאמה בגרף $G = (V,E)$ לא מכוון, היא תת קבוצה של E(נסמן אותה M כך ש $M \subseteq E$ כך שלכל $v \in V$ יש לכל היותר קשת אחת $e \in M$ כך ש- $v \in e$)

<u>סימון:</u> $|M|$ גודל ההתאמה

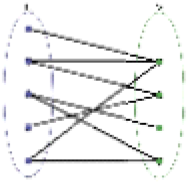
<u>דוגמא להתאמת מקסימום:</u> *התאמה שגדולה לפחות כמו כל התאמה אחרת בגרף*



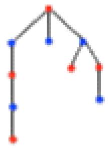
<u>דוגמא להתאמה מקסימלית:</u> *התאמה שלא ניתן להגדיל אותה על ידי הוספת קשתות נוספות. התאמת מקסימום היא התאמה מקסימלית, אך ההפך אינו בהכרח נכון*



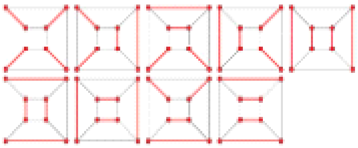
  - בעיית ההתאמה



<u>הגדרה:</u> גרף $G=(V,E)$ הוא **דו-חלקי** אם ניתן לחלק את V ל- V_1,V_2 (כלומר $V_1 \cup V_2 = V$, וגם $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), כך שכל קשת $(u,v)\in E$ - $u\in V_1$ ו- $v \in V_2$, או $u\in V_2$ ו- $v\in V_1$, *(ניתן לחלק את הגרף לשני קבוצות של קדקודים כך שלא קיימת קשת בין שני קדקודים השייכים לאותה קבוצה)*



עץ הוא גרף דו חלקי, נחלק את הקבוצות לפי הרמות:



<u>הגדרה:</u> התאמה M היא **התאמה מושלמת** אם לכל $v\in V$ יש קשת $e\in M$ כך ש- $v\in e$

- בשביל שלגרף תהיה התאמה מושלמת חייב להיות לו מספר זוגי של קדקודים

<u>משפט הול ($Hall$):</u> עבור גרף דו חלקי $B=(U,V,E)$ כך ש- $|V|=|U|$, יש התאמה מושלמת אם"ם לכל $A\subseteq U$ מתקיים $|A| \le |N(A)|$ (כאשר $N(A)$ זה כל השכנים של A)