בס״ד

רשתות זרימה

רשתות עם מקורות ובורות מרובים

נניח שבמקום מקור יחיד s ובור יחיד t, נתונה קבוצת מקורות $\{s_1,s_2,\ldots,s_m\}$ וקבוצת בורות $\{t_1,\ldots,t_n\}$. נדרש למצוא את הזרימה המקסימלית שניתן להזרים מכלל המקורות לכלל הבורות.

פתרון: ניצור מקור-על s, ונוסיף קשת מכוונת (s,s_i) לכל $1\le i\le m$ שקיבולה ∞. כמו כן, ניצור בור-על חדש t ונוסיף קשת מכוונת (t_i,t) לכל $1\le i\le n$ שקיבולה ∞.

נפתור את הבעיה הנתונה כבעיית זרימה מקסימלית ברשת החדשה שיצרנו עם מקור יחיד s ובור יחיד t.

יישומים של רשתות זרימה

מציאת מס׳ מקסימלי של מסלולים זרים בקשתות בגרף

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, וזוג קדקודים $s,t\in V$ נרצה למצוא את הכמות המקסימלית של מסלולים **זרים בקשתות** מ-s ל-t. המסלולים יקראו **זרים בקשתות** אם בכולם מופיעה קשת מסוימת לכל היותר פעם אחת.

פתרון: נבנה רשת זרימה על הגרף הנתון, כאשר s הוא קדקוד המקור ו-t הוא קדקוד היעד. לכל קשת נגדיר קיבול שערכו 1. נפעיל אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית מ-s ל-t. גודל הזרימה שיתקבל הוא מס׳ המסלולים הזרים בקשתות בגרף.

מדוע?
לכל מסלול זר בקשתות מ-s ל-t ניתן להזרים לאורכו זרימה שערכה 1 בהתאם לבנייה שיצרנו. לכן הכמות המקסימלית של מסלולים חסומה מלמעלה ע״י ערך הזרימה המקסימלית בגרף. כמו כן, בגלל שלכל הקשתות בגרף קיבול 1 ומתקיים חוק שימור הזרימה, הרי שניתן להפריד את הזרימה המקסימלית למסלולים מ-s ל-t (תמיד יש קשת כניסה וכנגדה קשת יציאה מקדקוד ביניים) כך שכל קשת תשויך למסלול אחר (ניתן להתעלם ממעגלים). כלומר, ערך הזרימה המקסימלית חסום מלמטה ע״י כמות המסלולים הזרים בקשתות.

שחזור המסלולים
בכל צעד נלך בנתיב מסוים מהמקור s לאורך קשתות רוויות, וכך נשחזר את קשתות המסלול עד שנגיע ליעד t. כל קשת שעברנו בה נמחק מהגרף, וכך ניתן יהיה בצעד הבא לשחזר מסלול אחר.

זמן ריצה: $O(VE)$ (אין יותר מאשר $|V|-1$ קדקודים הנגישים מהמקור).

מה נעשה כאשר הגרף הנתון הוא בלתי-מכוון?
נחליף כל קשת בלתי מכוונת (u,v) בשתי קשתות מכוונות (u,v) ו-(v,u) עם קיבול 1, ונריץ את האלגוריתם של פורד-פלקרסון למציאת זרימה מקסימלית.
נשים לב, שאם שתי קשתות בכיוונים מנוגדים הינן רוויות ניתן למחוק את שתיהן והזרימה המקסימלית לא תשתנה.

שחזור המסלולים יתבצע כמקודם – כל קשת מכוונת רוויה ברשת הזרימה תהיה קשת לא מכוונת על מסלול מ-s ל-t.

מציאת מס׳ מקסימלי של מסלולים זרים בקדקודים בגרף

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, וזוג קדקודים $s,t\in V$ נרצה למצוא את הכמות המקסימלית של מסלולים **זרים בקדקודים** מ-s ל-t. המסלולים יקראו **זרים בקדקודים** אם בכולם מופיע קדקוד מסוים לכל היותר פעם אחת פרט למקור ולבור.

<u>פתרון</u> :
נפצל כל קדקוד $v \in V$ לשני קדקודים v_{in} ו-v_{out} ונחבר ביניהם בקשת מכוונת (v_{in},v_{out}) עם קיבול 1.
בנוסף, לכל קשת (u,v) בגרף נגדיר קשת (u_{out},v_{in}) עם קיבול 1 ברשת הזרימה.

נחשב את הזרימה המקסימלית מ-s_{out} ל-t_{in}, וכך נקבל את מס׳ המסלולים המקסימלי הזרים בקדקודים.

<u>בעיית ההסרה בבייסבול (Baseball Elimination)</u>

בליגת הבייסבול האמריקנית על מנת שקבוצה תשתתף בפלייאוף היא צריכה לסיים עם מאזן הניצחונות הטוב ביותר באזור שלה. לעיתים, זמן רב לפני תום העונה הסדירה ניתן כבר לקבוע בוודאות שקבוצה מסוימת לא תוכל להגיע לפלייאוף. המצב בטבלה לא תמיד מאפשר לדעת זאת בקלות. נתבונן בדוגמה הבאה :

קבוצה	הפסדים-נצחונות	משחקים שנותרו	*NY*	*BAL*	*BOS*	*TOR*	*DET*
ניו יורק	75-59	28		3	8	7	3
בולטימור	71-63	28	3		2	7	4
בוסטון	69-66	27	8	2		0	0
טורונטו	63-72	27	7	7	0		0
דטרויט	49-86	27	3	4	0	0	

מה יקרה אם דטרויט תנצח את כל משחקיה הנותרים? האם ייתכן שתסיים במקום הראשון?

<u>תשובה</u> : לא.

כיצד ניתן לוודא זאת באופן יעיל?

<u>נגדיר את הבעיה באופן פורמלי</u> : נתונים זוג מערכים – $W[1...n]$ ו-$G[1..n,1..n]$, כאשר האיבר $W[i]$ מייצג את מספר המשחקים שהקבוצה ה-i ניצחה עד כה, ו-$G[i,j]$ מציין את מספר המשחקים שנותר לשחק בין הקבוצות i ו-j.

נניח שהמערך W ממוין בסדר לא-עולה, אנו רוצים לדעת האם הקבוצה ה-n יכולה לסיים את העונה הסדירה עם הכמות הגדולה ביותר של ניצחונות בליגה (מותר שיהיו מס׳ קבוצות עם מספר ניצחונות זה).

<u>פתרון</u> :
נסמן ב-$R[i]$ את כמות המשחקים שנותרו לקבוצה i עד לסוף העונה הסדירה. כלומר, $R[i] = \sum_j G[i,j]$. נניח כי הקבוצה ה-n תנצח את כלל $R[n]$ המשחקים שנותרו לה (במידה ויש משחקים מול קבוצות אחרות מ-n הקבוצות הנתונות נוסיף גם את מספר המשחקים מולן ל-$R[n]$). במצב זה, הקבוצה ה-n תסיים במקום הראשון אםם כל קבוצה אחרת i תנצח לכל היותר $W[n]+R[n]-W[i]$ של $R[i]$ המשחקים שנותרו לה.

נבנה *רשת זרימה* לפתרון הבעיה. נגדיר קדקוד $g_{i,j}$ לכל זוג קבוצות i ו-j כך ש-$1 \le i<j<n$ (יש $O(n^2)$ זוגות כאלו). כמו כן, נגדיר קדקוד t_i עבור כל קבוצה i שאינה הקבוצה ה-n.
לכל זוג קבוצות i ו-j נגדיר קשת מכוונת עם קיבול אינסוף מ-$g_{i,j}$ ל-t_i ומ-$g_{i,j}$ ל-t_j. נוסיף קדקוד מקור s לרשת ונגדיר לכל זוג קבוצות i ו-j את הקשת מ-s ל-$g_{i,j}$ עם קיבול $G[i,j]$. לבסוף, נוסיף קדקוד יעד t עם קשת מ- t_i ל-t עבור כל קבוצה i. קיבולה יהיה $W[n]+R[n]-W[i]$.

<u>משפט</u>
הקבוצה ה-n יכולה לסיים במקום הראשון אםם יש זרימה חוקית בגרף שבה כל הקשתות היוצאות מ-s רוויות.

הוכחה:
נניח שהקבוצה ה-n יכולה לסיים במקום הראשון בסוף העונה הסדירה. אזי כל קבוצה אחרת i יכולה תנצח עד סוף העונה לכל היותר $W[n]+R[n]-W[i]$ מהמשחקים שנותרו. לכל משחק בין הקבוצה ה-i לקבוצה ה-j שבו הקבוצה ה-i ניצחה נזרים זרימה בעלת ערך 1 לאורך המסלול $s\rightarrow g_{i,j}\rightarrow t_i\rightarrow t$. מכיוון שיש בדיוק $G[i,j]$ משחקים בין הקבוצות i ו-j הרי שכל קשת היוצאת מ-s תהיה רוויה. בנוסף, בגלל שכל קבוצה i מנצחת לכל היותר $W[n]+R[n]-W[i]$ משחקים מובטח שהזרימה המתקבלת חוקית.

בכיוון ההפוך, תהי f זרימה חוקית שבה כל קשת היוצאת מ-s רוויה. נניח שהקבוצה ה-i מנצחת בדיוק $f(g_{i,j},t_i)$ משחקים מול הקבוצה ה-j, לכל i ו-j. אזי הקבוצות i ו-j משחקות $f(gij\rightarrow ti)+f(gij\rightarrow tj)=f(s\rightarrow gij)=G[i,j]$ משחקים. יתר על כן, כל קבוצה i מנצחת בסך הכול $\sum_j f\left(g_{i,j}\rightarrow t_i\right)=f(t_i\rightarrow t)\le W[n]+R[n]-W[i]$ מהמשחקים שנותרו, ולכן לכל היותר היא תנצח $R[n]+W[n]$ משחקים. לפיכך, אם הקבוצה ה-n תנצח את כלל המשחקים שנותרו לה היא תסיים את העונה הסדירה במקום הראשון.

לאור זאת, ניתן לבדוק האם יש לקבוצה ה-n סיכוי לסיים את העונה במקום הראשון ע"י יצירת רשת זרימה וחישוב הזרימה המקסימלית בה. אם הזרימה המקסימלית מרווה את כלל הקשתות היוצאות מ-s אזי התשובה לשאלתנו חיובית אחרת לא קיים סיכוי.
מס' הקדקודים $O(n2)$ וכך גם מס' הקשתות. בשימוש בשיטת אדמונדס-קארפ נקבל זמן ריצה של $O(n6)$ (תרגיל: האם ניתן לנתח את זמן הריצה ולהראות שהוא נמוך מכך).

בעיית בחירת הפרויקטים (*Project Selection*)

נתונה קבוצה של n פרויקטים שניתן לבצע, נסמן כל פרויקט במספר מ-1 עד n. פרויקטים מסוימים לא יכולים להתבצע לפני שהושלם ביצועם של פרויקטים אחרים המהווים תנאי מקדים להם. סט התלויות הזה מוגדר ע"י גרף מכוון ללא מעגלים שבו הקשת (i,j) מציינת שהפרויקט ה-i לא יכול להתבצע לפני הפרויקט ה-j. לבסוף, לכל פרויקט i ישנו ערך רווח pi המשויך לו, הניתן בעת סיום הפרויקט. ייתכן והרווח יהיה שלילי ואז משמעותו עלות – כלומר מדובר בהשקעה שלאחריה ניתן לבצע פרויקטים שיניבו רווחים.

אנו יכולים לבחור כל תת-קבוצה X של פרויקטים הכוללת את כלל התלויות שלה. כלומר, לכל פרויקט $x\in X$, כל פרויקט ש-x תלוי בו גם נמצא בקבוצה.

המטרה: למצוא תת-קבוצה של פרויקטים שתביא לרווח כולל מקסימאלי.

הרעיון: למדל את הבעיה כבעיה של מציאת חתך מינימאלי, כך שקבוצה אחת של פרויקטים תייצג את הפרויקטים שנבחרו והשנייה את אלה שלא נבצע.

כיצד נבנה את הרשת? איך נאכוף את הדרישות? מה נעשה עם המשקולות השליליים?

נגדיר גרף G ע"י הוספת קדקוד מקור s וקדקוד יעד t לגרף התלויות. לכל פרויקט רווחי j נגדיר קשת מ-s אליו עם קיבול pj. לכל פרויקט i שיש לו עלות ולא רווח $(pi<0)$ נגדיר קשת מ-i ל-t שקיבולה $-pi$. כל הקשתות של גרף התלויות המקורי יקבלו קיבולת אינסופית.

נשים לב, שלכל הקשתות ניתנה קיבולת חיובית.

נתבונן בחתך (S,T) בגרף G (כאשר $s\in S$ ו-$t\in T$).

ביחס לחתך זה מתקיים:
- אם הקיבולת של החתך היא סופית, אזי לכל קשת המייצגת תלות בין i ל-j ב-S נמצאת באותו צד של החתך. כלומר, הקבוצה S מהווה קבוצה חוקית.
- אם קיבולת החתך היא סופית, בחירת הפרויקטים ב-S נותנת רווח כולל של $C-c(S,T)$, כאשר C הוא הסכום של כל הרווחים החיוביים.

מדוע?

לכל תת-קבוצה של פרויקטים A נגדיר:

$$cost(A) \coloneqq \sum_{i\in A:p_i<0} -p_i = \sum_{i\in A} c(i,t)$$

$$benefit(A) \coloneqq \sum_{i\in A:p_i>0} p_i = \sum_{i\in A} c(s,i)$$

$$profit(A) \coloneqq \sum_{i\in A} p_i = benefit(A) - cost(A)$$

לפי ההגדרה *C=benefit(S)+benefit(T)*. מכיוון שלחתך *(S,T)* יש קיבולת סופית, רק קשתות מהצורה *(s,j)* או *(i,t)* יכולות לחצות אותו. לפי הבנייה כל הקשתות *(s,j)* מצביעות על פרויקטים רווחיים וכל הקשתות *(i,t)* מצביעות על פרויקטים בעלי עלות. לפיכך, *c(S,T)=cost(S)+benefit(T)*. מכאן נסיק באופן מיידי כי *C-c(S,T)=benefit(S)-cost(S)=profit(S)* בהתאם למה שנטען.

לאור כל זאת, אנו יכולים למקסם את הרווח שלנו ע"י מציאת החתך המינימלי. בהתאם למשפט זרימה מקסימלית-חתך מינימלי – נוכל להפעיל אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית בגרף ונקבל את ערך החתך המינימלי.