השלמה לתרגול 12

תרגיל. הוכיחו כי $\mathcal{P}^{\#\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{PSPACE}$.

פתרון. תהי $S \in \mathcal{P}^{\#\mathcal{P}}$. לכן קיימת מ"ט פולינומית M עם גישת אורקל ל־$f_R \in \#\mathcal{P}$ המכריעה את S. נסמן ב־p את הפולינום החוסם את זמן הריצה של M, ב־V את המוודא עבור היחס R, וב־q את הפולינום החוסם אותו.

נבנה מכונה M' המכריעה את S ללא גישת אורקל ובסיבוכיות מקום פולינומית. בהנתן קלט x, M' תפעל בדיוק כמו M למעט המקרים בהם M פונה לאורקל שלה. עבור כל גישת אורקל מהצורה $f_R(a)$, M' תעבור על כל המחרוזות $y \in \{0,1\}^{q(|a|)}$, ותספור עבור כמה y־ים מתקיים $V(a,y) = 1$.

ברור ש־M' מכריעה את S ללא גישת אורקל. נותר רק להראות שסיבוכיות המקום היא פולינומית:

1. המכונה M רצה בזמן פולינומי ולכן גם סיבוכיות המקום שלה פולינומית.
2. עבור כל גישת אורקל מהצורה $f_R(a)$, לכל $y \in \{0,1\}^{q(|a|)}$ מתקיים $|y| = q(|a|) \le q(p(|x|))$. כלומר, המקום הנדרש לשמירת כל מחרוזת y הוא פולינומי באורך הקלט. כל בדיקה האם $V(a,y) = 1$ מתבצעת בזמן פולינומי ולכן גם במקום פולינומי. בנוסף יש לאחסן מונה של מספר ה־y־ים המקיימים $V(a,y) = 1$. לכל a, $f_R(a) \le 2^{q(p(|x|))}$ ולכן מספיק מונה באורך $q(p(|x|))$. סה"כ, כל גישת אורקל של M ניתנת לחישוב ע"י M' בסיבוכיות מקום פולינומית.

סה"כ הראנו כי M' הינה מכונה דטר' בעלת סיבוכיות מקום פולינומית המכריעה את S, ולכן $S \in \mathrm{PSPACE}$.