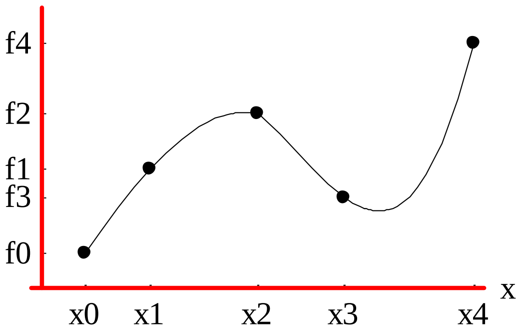
אינטרפולציה

INTERPOLATION

הגדרת בעיית אינטרפולציה כללית

יהיו *n+1* תצפיות $(x_i, y_i);\ \ i = 0,1,\ldots,n$

נגדיר פונקצית אינטרפולציה כצירוף ליניארי של פונקציות $\Phi_j(x)$:



$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \Phi_j(x)$$

$\Phi_j(x)$ נקראות *פונקצית הבסיס*

מטרה : למצוא וקטור מקדמים $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ עבורו

$$f(x_i) = y_i;\ \ i = 0,1,\ldots,n$$

Slide 3

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\Phi_j(x) \quad\Rightarrow\quad (x_i, y_i);\quad i=0,1,\ldots,n$$

$$\begin{cases} f(x_0)=\alpha_0\Phi_0(x_0)+\alpha_1\Phi_1(x_0)+\ldots+\alpha_n\Phi_n(x_0)=y_0\\ f(x_1)=\alpha_0\Phi_0(x_1)+\alpha_1\Phi_1(x_1)+\ldots+\alpha_n\Phi_n(x_1)=y_1\\ \vdots\\ f(x_n)=\alpha_0\Phi_0(x_n)+\alpha_1\Phi_1(x_n)+\ldots+\alpha_n\Phi_n(x_n)=y_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \ldots & \Phi_n(x_0)\\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

פתרון הבעיה : בעיית אינטרפולציה יכולה להיות מוגדרת כבעיה אלגברית

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

כאשר $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{(\boldsymbol{n}+1)\times(\boldsymbol{n}+1)}$ ובה $\boldsymbol{a}_{ij} = \Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \Phi_0(\boldsymbol{x}_0) & \Phi_1(\boldsymbol{x}_0) & \ldots & \Phi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0) \\ \Phi_0(\boldsymbol{x}_1) & \Phi_1(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \Phi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) & \Phi_1(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) & \cdots & \Phi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) \end{bmatrix}$$

פתרון הבעיה : $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{j}} \Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})$

כלומר $\boldsymbol{A}\alpha = \boldsymbol{y}$

פולינומים

פולינום $P(x)$ מדרגה n:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,\quad a_n\neq 0$$

תכונות של פולינומים

- לפולינום מדרגה n ישנם n+1 מקדמים $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$
- (אפס) שורש של פולינום: $z_i:\quad P_n(z_i)=0$
- לפולינום אלגברי מדרגה n יש בדיוק n שורשים.
- ניתן לרשום את הפולינום כ: $p_n(x)=a_n(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)$

מטרות אינטרפולציה

1. נניח כי קיימות n+1 נקודות **שונות** $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$

וקיימת פונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $I=[a, b]$ כאשר הקטע מכיל את הנקודות הנ"ל.

מטרה : לבנות ***פולינום אינטרפולציה*** ל $f(x)$ מדרגה $\leq n$ שיעבור דרך הנקודות

$$\boxed{p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

2. ישנן n+1 תצפיות

x_0	x_1	. . ..	x_n
y_0	y_1	. . ..	y_n

מטרה : לבנות ***פולינום אינטרפולציה*** בעל תכונות המפורטות במקרה הראשון העובר דרך נקודות התצפית

משפט

קיים לכל היותר פולינום יחיד ממעלה הקטנה שווה ל-n, העובר דרך $n+1$ הנקודות: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

הוכחה

נתונות לנו $n+1$ נקודות: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. יהי $p(x)$ פולינום האינטרפולציה ממעלה לכל היותר n העובר ב- $n+1$ הנקודות ומקיים $p(x_i) = y_i \quad 0 \le i \le n$.

נניח בשלילה כי קיים פולינום נוסף $q(x)$ ממעלה לכל היותר n השונה מהפולינום $p(x)$ וגם הוא מקיים את הדרישה של האינטרפולציה, כלומר: $q(x_i) = y_i \quad 0 \le i \le n$.

נגדיר פולינום חדש: $r(x) = p(x) - q(x)$. לכן מתקיים:

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0 \qquad 0 \le i \le n$$

הפולינום $r(x)$ חייב להיות פולינום ממעלה n לכל היותר (טריוויאלי). לפיכך, הפולינום היחידי ממעלה לכל היותר n וקיימים לו $n+1$ שורשים חייב להיות פולינום ה-0!

$$r(x) = p(x) - q(x) \;\Rightarrow\; 0 = p(x) - q(x) \;\Rightarrow\; p(x) = q(x)$$

וזה בסתירה להנחה ש-$q(x) \ne p(x)$.

שיטות בניית פולינומים

<u>אינטרפולציה ישירה</u>

- בסיס ישיר : $\Phi_i(x) = x^i$

- מטריצת A כאן נקראת מטריצת Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \cdots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

- פולינום ישיר: $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$

- $\det(A) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

A - ill-conditioned

אינטרפולצית Lagrange

- המטרה : הצגת A כמטריצת יחידה (מקדמים $\alpha_i = y_i$)

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \cdots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi_1(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

- בניית בסיס לגרנז' :

$$A = \begin{cases} \Phi_j(x_i) = 0, & i \neq j \\ \Phi_j(x_i) = 1, & i = j \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \Phi_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \doteq L_j$$

- פולינום לגרנז':

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)}$$

אינטרפולצית ניוטון

- המטרה : הצגת A כמטריצה משולשת (מקדמים α_i נמצא ע"י חילוץ לפנים)

$$A=\begin{bmatrix}\Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0)\\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n)\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\Phi_0(x_0) & 0 & \dots & 0\\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n)\end{bmatrix}$$

- בניית בסיס ניטון:

$$\Phi_j(x)=\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i) \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix}\Phi_j(x_i)\neq 0,\ i\geq j\\ \Phi_j(x_i)=0,\ i<j\end{matrix}$$

- פולינום ניוטון :

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

- **תכונות של פולינום ניוטון** $\Phi_j(x)=\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$:

- $\Phi_0(x)=1 \quad \Leftarrow$ **עמודה ראשונה של מטריצה A היא אחדים**

- פונקציות הבסיס אפשר לקבל רקורסיבית :

$$\Phi_0(x)=1$$
$$\Phi_{i+1}(x)=\Phi_i(x)(x-x_i)$$

- מקדמים α_i אפשר לחשב בצורה רקורסיבית

$$\alpha_0=y_0 \quad (=P(x_0))$$
$$\alpha_{k+1}=\frac{y_{k+1}-P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

- הוספת נקודת אינטרפולציה מביאה להוספת איבר לפולינום הקיים בלי לשנות את האיברים הקודמים

Slide 12

- **הוכחת**

$$\alpha_0 = y_0 \quad (= P(x_0))$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

נסמן

$$P_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \alpha_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

אזי

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \alpha_{k+1}\Phi_{k+1}(x)$$

כיוון שנוספה תצפית $\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right)$ אפשר לחשב את α_{k+1} :

$$y_{k+1} = P_{k+1}(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}) + \alpha_{k+1}\Phi_{k+1}(x_{k+1})$$

מכאן

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

מ.ש.ל.

$P(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)(x-x_1)$: נתבונן בפולינום ניוטון ריבועי

$$y_0=P(x_0)=\alpha_0$$
$$y_1=P(x_1)=\alpha_0+\alpha_1(x_1-x_0)$$
$$y_2=P(x_2)=\alpha_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0=\alpha_0 \doteq f[x_0] \\ y_1=\alpha_0+\alpha_1(x_1-x_0) \end{array}\right\rangle \alpha_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\doteq f[x_1,x_0]$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\alpha_0+\alpha_1(x_1-x_0) \\ y_2=\alpha_0+\boldsymbol{\alpha}_1(x_2-x_0)+\boldsymbol{\alpha}_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \end{array}\right\rangle \alpha_2=\frac{(y_2-y_1)-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{\overbrace{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}^{f[x_2,x_1]}-\overbrace{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}^{f[x_1,x_0]}}{x_2-x_0}\doteq f[x_2,x_1,x_0]$$

שיטת חישוב מקדמי פולינום ניוטון : הפרשים מחולקים (Divided differences)

באופן כללי :

הפרשים מחולקים מסדר ראשון :

$$f[x_i]=f(x_i)$$

הפרשים מחולקים מסדר שני :

$$f[x_{i+1},x_i]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$$

הפרשים מחולקים מסדר k:

$$f[x_{i+k},\dots,x_{i+1},x_i]=\frac{f[x_{i+k},\dots,x_{i+1}]-f[x_{i+k-1},\dots,x_i]}{x_{i+k}-x_i}$$

אפשר להראות כי

$$\boxed{\alpha_i=f\left[x_i,x_{i-1},\dots,x_0\right]}$$

הפרשים מחולקים

קל לארגן חישובים ידניים באמצעות טבלה. נדגים כאן הסכימה

המתאימה לקבוצה של חמש נקודות אינטרפולציה $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

x_0	$y_0 = \alpha_0$				
		$f_{10} = \alpha_1$			
x_1	y_1		$f_{210} = \alpha_2$		
		f_{21}		$f_{3210} = \alpha_3$	
x_2	y_2		f_{321}		$f_{43210} = \alpha_4$
		f_{32}		f_{4321}	
x_3	y_3		f_{432}		
		f_{43}			
x_4	y_4				

$$f[x_{i+k},\ldots,x_{i+1},x_i] = \frac{f[x_{i+k},\ldots,x_{i+1}] - f[x_{i+k-1},\ldots,x_i]}{x_{i+k} - x_i}$$

דוגמא

עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ ונקודות האינטרפולציה

$$x_0=1,\quad x_1=4,\quad x_2=16$$

מצאו את פולינום האינטרפולציה בצורת ניוטון.

פתרון

נבנה טבלה של הפרשים מחולקים

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & & \\
 & & \frac{2-1}{4-1}=\frac{1}{3} & & \\
4 & 2 & & \frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}{16-1}=-\frac{1}{90} & \\
 & & \frac{4-2}{16-4}=\frac{1}{6} & & \\
16 & 4 & & &
\end{array}$$

ונקבל

$$\boxed{P_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{90}(x-1)(x-4)}$$

שגיאת אינטרפולציה

שגיאת האינטרפולציה של הפונקציה $f(x)$ ע"י הפולינום $p_n(x)$ בכל נקודה x
מוגדרת כ $e_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$

משפט השארית: תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על הקטע $[a, b]$ וגזירה n+1 פעמים. אם $p_n(x)$ פולינום האינטרפולציה מדרגה $n \geq$ בנקודות $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ השונות, אזי לכל x קיים $\xi \in [a, b]$, $\xi = \xi(x)$, כך ש

$$\boxed{e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}$$

בד"כ $f^{(n+1)}(\xi)$ אינו ידוע! אבל לפעמים ניתן לחסום אותו: $\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| < M$

דוגמה:

מצא ביטוי לשגיאת אינטרפולציה של $f(x)$ ע"י פולינום מסדר ראשון.

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0)$$

$$e_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

משפט רול:

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) . אם $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודת ביניים $a<\xi<b$ כך ש- $f'(\xi)=0$.

משפט רול המוכלל:

(עבור $n\geq 2$) תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ נניח כי הנגזרת

$f^{(n-1)}(x)$ קיימת בכל נקודה בקטע (a,b) .

כמו כן נניח כי $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=0$

עבור $a\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq b$ אזי קיימת נקודת ביניים $x_1<\xi<x_n$

כך ש- $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

הוכחת משפט : יהי z משתנה חדש ונגדיר

$$\Phi(z) = (z - x_0)(z - x_1)...(z - x_m)$$

$$G(z) = f(z) - p(z) - R(x)\Phi(z)$$

כאשר $R(x)$ מוגדר כך שמתקיים $G(z) = 0$. אזי, מתקיים כי

$$G(z) = 0 \quad for \quad z = x, x_0, x_1, ..., x_m$$

לפי משפט Rolle המוכלל , קיימת נקודה $\xi \in \mathrm{int}(x, x_0, ..., x_m)$

שבה $G^{(m+1)}(\xi) = 0$. אבל

$$\Phi^{(m+1)}(z) = (m+1)! \ , \quad p^{(m+1)}(z) = 0 \quad for \ \ all \ \ z$$

$\Leftarrow$ $G^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - R(x)(m+1)!$. נציב $z = \xi$ ונקבל

$$R(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

נציב את הביטוי בהגדרה של G(z) , ו z=x . כיוון ש- G(x)=0 נקבל

$$f(x)-p(x)-\Phi(x)\cdot\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}=0$$

מ.ש.ל

אינטרפולציה פולינומית – שיטת ניוטון

אפשר להוכיח כי $$f[x_{i+m},\dots,x_{i+1},x_i]=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

עבור $\xi\in\mathrm{int}(x_{i+m},\dots,x_{i+1},x_i)$ כלשהו

שגיאת אינטרפולציה (המשך)

נניח ש $\left| f''(\xi) \right| \le M$

אזי $\left| e_1(x) \right| \le \frac{M}{2} \left| (x - x_0)(x - x_1) \right|$

מהו מקסימום של $\left| (x - x_0)(x - x_1) \right|$?

$$g(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1$$

נגזור כדי למצוא מקסימום: $g'(x) = 2x - (x_0 + x_1) = 0$

נקבל $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$

נציב לנוסחת השגיאה: $\left| e_1(x) \right| \le \frac{M}{2} \max \left| (x - x_0)(x - x_1) \right|$

$$\le \frac{M}{2} \left| \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0 \right) \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 \right) \right|$$

התוצאה הסופית היא: $\left| e_1(x) \right| \le \frac{M}{8} (x_0 - x_1)^2$

שגיאת אינטרפולציה (המשך)

נניח כי הנקודות $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ במרחק אחיד אחת מהשנייה:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$$

אזי

$$\max\left|(x-x_0)(x-x_1)\right| = \frac{h^2}{4}$$

$$\max\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right| = \frac{2\sqrt{3}h^3}{9}$$

השגיאה פרופורציונית ל h^{n+1}

האם שגיאת האינטרפולציה קטנה ככל ש n גדל? (יותר נקודות)?

לא בהכרח! לפעמים אפילו הפוך!

הסיבה: הפונקציה לא חייבת להתנהג כפולינום. למשל, לפולינום מדרגת

n תמיד יש n שורשים.לפונקציה אחרת – לא בהכרח.

השגיאה פרופורציונית לנגזרת $f^{(n+1)}(\xi)$ שיכולה לגדול עם n.

שגיאות אינטרפולציה עם הגדלת מס' נקודות (דוגמה)

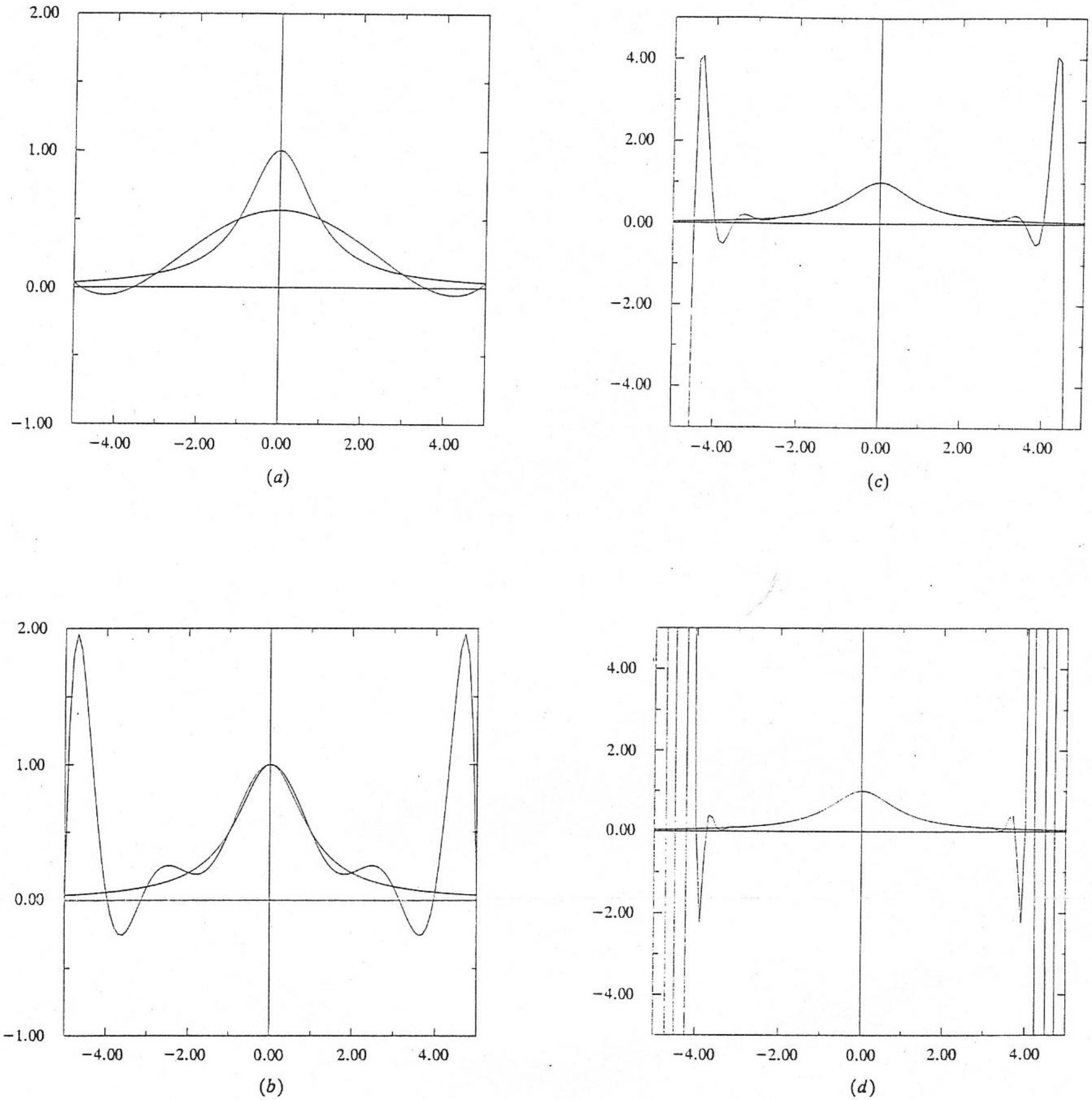
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$a)\ \ n=6$

$b)\ \ n=11$

$c)\ \ n=21$

$d)\ \ n=41$



בחירה אופטימאלית של נקודות האינטרפולציה

נזכר בנוסחת חסם השגיאה של האינטרפולציה בקטע סגור $[a,b]$ **:**

$$\boxed{\left|f(x)-p_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|}$$

אנו רואים כי גודל החסם לשגיאה תלוי בשני גורמים:

<u>הראשון</u> $\boxed{\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}}$ התלוי בפונקציה $f(x)$ עבורה מבצעים אינטרפולציה אולם אינו תלוי בנקודות עליהן מבוצעת האינטרפולציה.

<u>השני</u> $\boxed{\max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|}$ שאינו תלוי בפונקציה $f(x)$ אולם תלוי בנקודות האינטרפולציה.

בחירה אופטימאלית של נקודות האינטרפולציה

נתבונן כעת על הגורם השני המשפיע על החסם לשגיאה.

הערכת שגיאה קטנה יכולה להתקבל אם **<u>מקטינים</u>** את הגודל:

$$\boxed{\max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|}$$

גודל זה תלוי בנקודות האינטרפולציה $x_0, x_1, \cdots, x_n$.
עובדה זו מובילה אותנו לשאלה החשובה והמעניינת הבאה:

כיצד נבחר את נקודת האינטרפולציה $x_0, x_1, \cdots, x_n$ בקטע $[a,b]$
כך שהגודל $\max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|$

יהיה מינימלי?

בחירה אופטימאלית של נקודות האינטרפולציה

- ע"מ לענות על שאלה זו נחפש **<u>פולינום מתוקן</u>** (פולינום שמקדם המוביל שלו הוא 1), שעבורו תתקיים התכונה הדרושה ונשתמש בשורשיו בתור נק' האינטרפולציה.

- קבוצת נקודות האינטרפולציה האופטימלית במובן הנ"ל היא קבוצת נקודות אינטרפולציה שידועה בשם **<u>נקודות צ'בישב.</u>** למעשה זוהי קבוצת השורשים של **<u>פולינומי צ'בישב</u>**.

Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894)

פולינומי צ'בישב

<u>הגדרה:</u> **<u>פולינום צ’בישב ממעלה n</u>** :

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos \ x) \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots$$

כאשר

$$x = \cos\theta$$
$$\theta = \arccos x$$

הצגה שקולה:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \theta), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

אנו למעשה מעבירים את הפונקציה $\cos(n \cdot \theta)$ מהקטע $[0,\pi]$
להיות מותאמת לקטע $[-1,1]$ ע”י פונקצית המעבר $x = \cos\theta$.

פולינומי צ'בישב

ע"י שימוש בנוסחת דה- מואבר ובבינום של ניוטון, אפשר לקבל

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\theta) = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}\left(x^2-1\right) + \binom{n}{4} x^{n-4}\left(x^2-1\right)^2 + \cdots\cdots$$

קל לחשב מספר פולינומי צ'בישב ראשונים ולהציגם באופן מפורש:

$$\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{x}) = 1$$

$$\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^2 - 1$$

$$\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{x}^3 - 3\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{x}) = 8\boldsymbol{x}^4 - 8\boldsymbol{x}^2 + 1$$

פולינומי צ'בישב

<u>לחישוב מעשי</u> של פולינומי צ'בישב משתמשים בנוסחת הנסיגה הבאה:

$$\boxed{T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad , \quad n=1,2,\cdots} \qquad \boxed{\left(T_0(x)\equiv 1, T_1(x)=x\right)}$$

הוכחה :

לפי זהויות טריגונומטריות

$$\cos((n+1)\theta)=\cos(n\theta)\cos\theta-\sin(n\theta)\sin\theta$$

$$\cos((n-1)\theta)=\cos(n\theta)\cos\theta+\sin(n\theta)\sin\theta$$

$$\boxed{\cos((n+1)\theta)=2\cos(n\theta)\cos\theta-\cos((n-1)\theta)}$$

כלומר: $\boxed{T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)}$

מ.ש.ל

$$T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos\ x)\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

משפט:

לפולינום צ'בישב $T_n(x)$ יש n **שורשים פשוטים** הנתונים ע"י

$$\left\{\xi_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right\}_{k=1}^{n}$$

הוכחה: לכל $k=1,2,\cdots,n$ מתקיים :

$$T_n(\xi_k)=\cos\left(n\cdot\arccos\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)=\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)=0$$

מתקיים גם כי

$$T_n'(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\mathrm{n}\cdot\arccos x)$$

ולכן,

$$T_n'(\xi_k)=\frac{n}{\sqrt{1-x_k^{\;2}}}\underbrace{\sin\left(\frac{2\mathrm{k}-1}{2}\pi\right)}_{(-1)^{k+1}}\neq 0$$

כלומר, השורשים חייבים להיות פשוטים. *מ.ש.ל*

- אפשר לראות כי פולינומי צ'בישב מקיימים :

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\boldsymbol{T_n}(\boldsymbol{x})\right|=1\ (\boldsymbol{n}=0,1,\ldots)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

דוגמא:

נחשב את שורשי פולינום צ'בישב $T_3(x)$:

$$\boxed{\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{6}\pi\right) \quad , \quad k = 1,2,3}$$

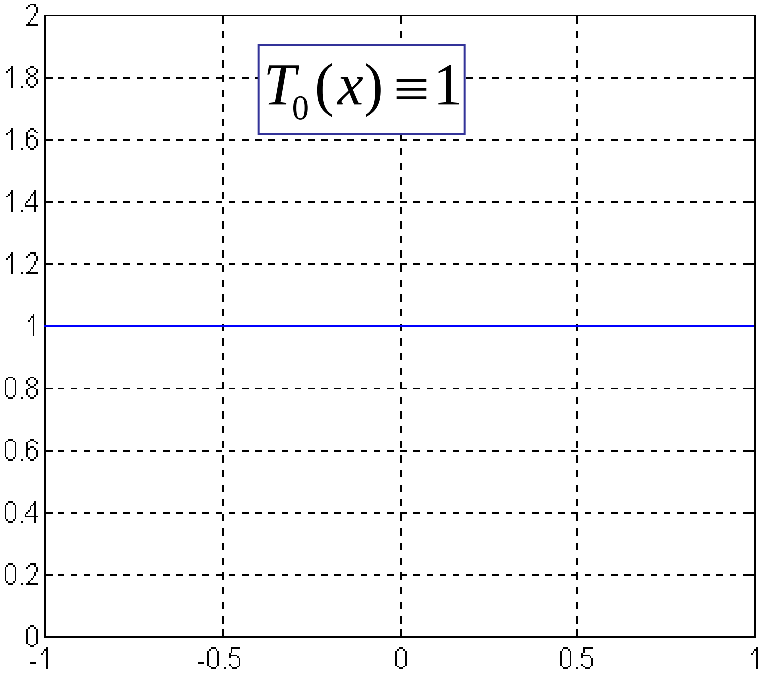
$k = 1 \qquad \xi_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

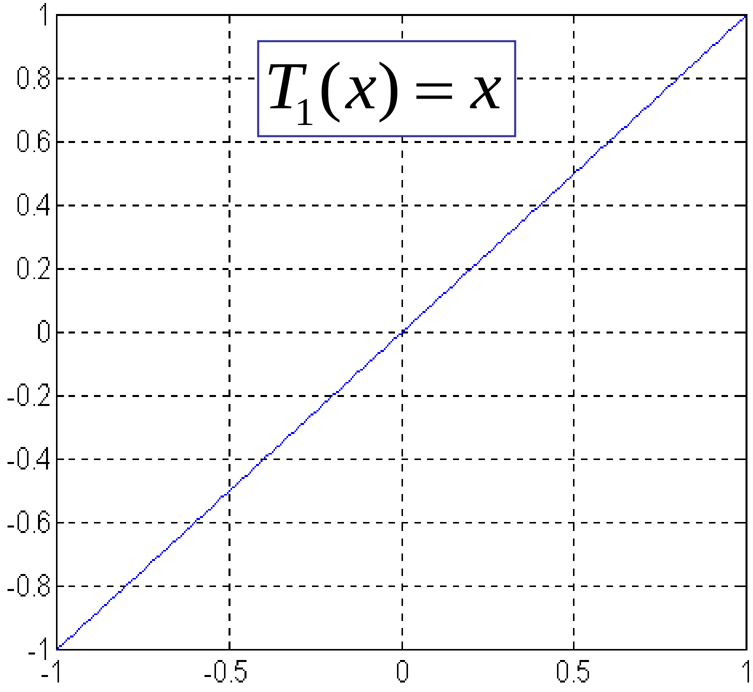
$k = 2 \qquad \xi_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$k = 3 \qquad \xi_3 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

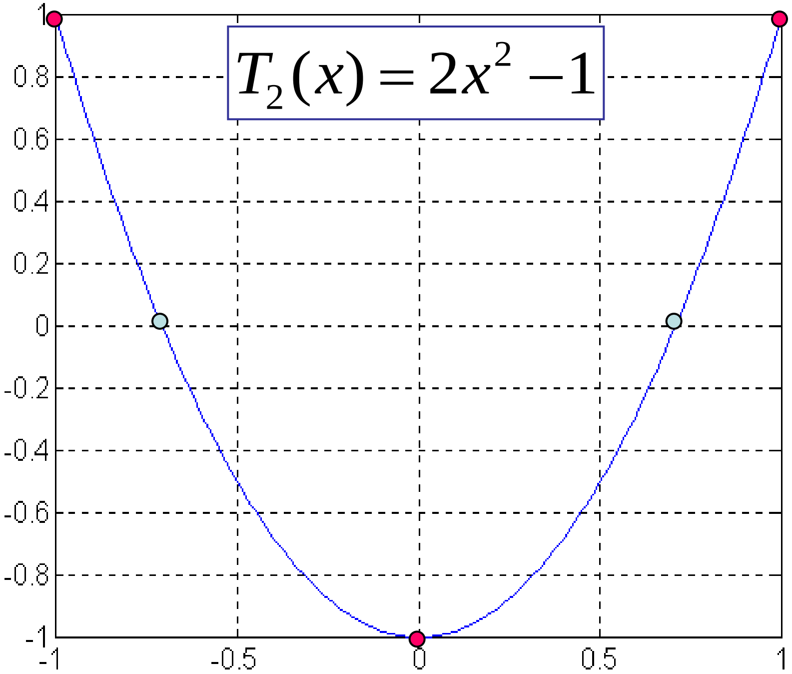
גרפים של פולינומי צ'בישב

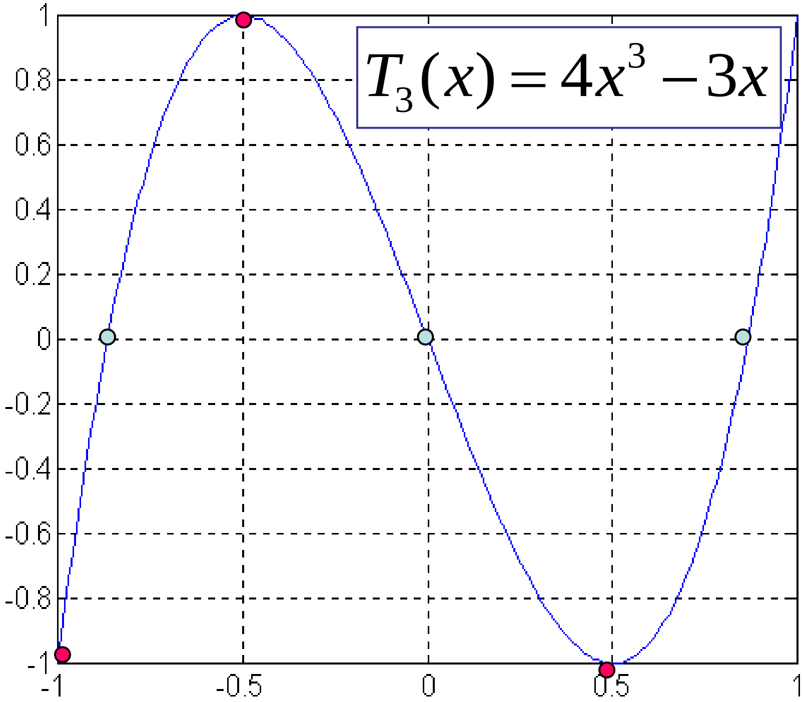
נראה כעת מספר גרפים של פולינומי צ'בישב:



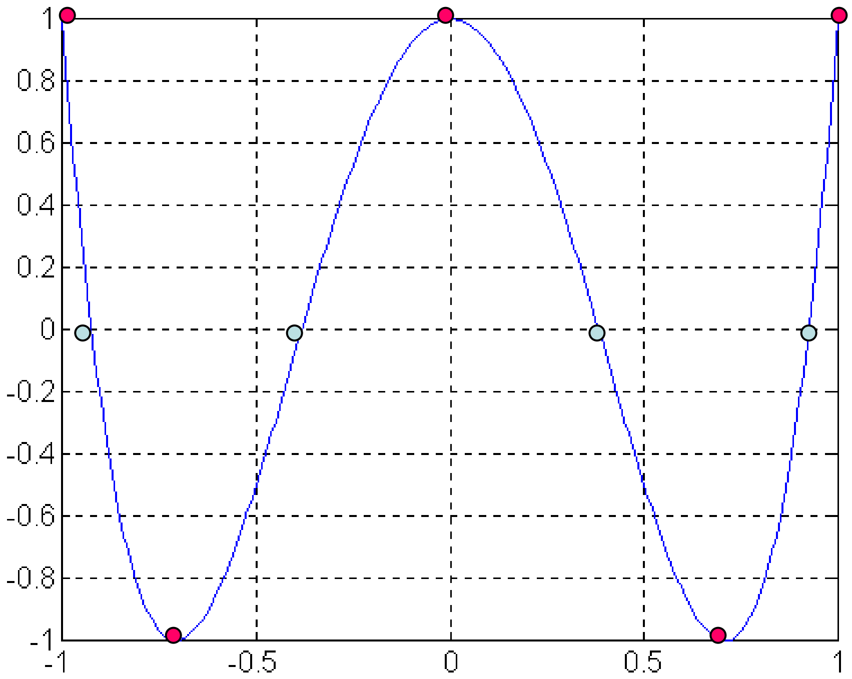


גרפים של פולינומי צ'בישב

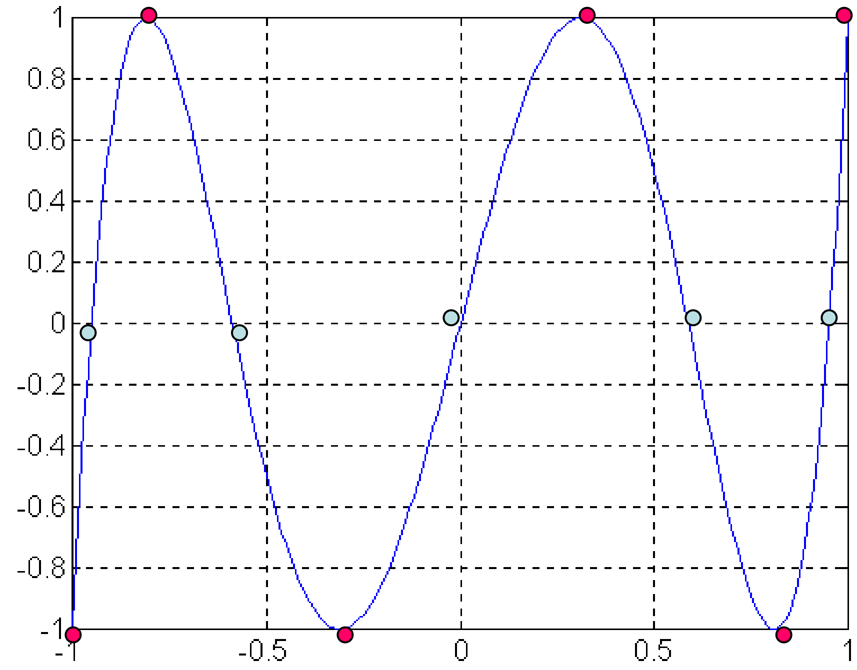




גרפים של פולינומי צ'בישב



$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$



$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

מעבר לקטע [a,b]

ניתן להכליל את התוצאות שקבלנו עבור אינטרפולציה בקטע [a,b] (במקום הקטע [-1,1])

לצורך כך נגדיר פונקציה אשר ממפה את הקטע [a,b] לקטע [-1,1]:

$$t=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x \quad , \quad -1\le x\le 1$$

ההעתקה ההפוכה נתונה ע"י

$$x=\frac{2}{b-a}t-\frac{b+a}{b-a} \quad , \quad a\le t\le b$$

דוגמא

מצאו את הקירוב הליניארי בנק' צ'בישב לפונקציה x^3 בקטע $[1,3]$.

פתרון

הטרנספורמציה המתאימה המעבירה את הקטע $[-1,1]$
לקטע $[1,3]$ היא

$$\boxed{t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x = 2 + x \quad , \quad -1 \le x \le 1}$$

אנו מעונינים בקירוב לינארי, לכן זקוקים לשתי נקודות צ'בישב
בקטע $[1,3]$.

ראשית נחשב את שורשי פולינום צ'בישב המתאים $T_2(x)$
בקטע $[-1,1]$

מתקיים $$x_k = \cos\frac{2k-1}{4}\pi\,, \quad k = 1,2$$

כלומר, שורשי פולינום צ'בישב מסדר 2 בקטע $[-1,1]$ הם:

$$\boldsymbol{x}_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

נשתמש בנוסחת המעבר לקטע $[1,3]$
ונסיק כי שורשי פולינום צ'בישב בקטע הנוכחי הם:

$$\boxed{t = 2 + x \quad , \quad -1 \le x \le 1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t}_0 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \boldsymbol{t}_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

כעת נחשב פולינום האינטרפולציה מסדר 1 הבנוי על נק' צ'בישב בקטע $[1,3]$ בעזרת פולינומים של לגרנז':

$$\boxed{L_1(t) = f(t_0)\cdot\varphi_0(t) + f(t_1)\cdot\varphi_1(t)}$$

מתקיים:

$$f(t_0) = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 11 + \frac{25}{2\sqrt{2}}$$

$$f(t_1) = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 11 - \frac{25}{2\sqrt{2}}$$

הפולינומים היסודיים של לגרנג':

$$\varphi_0(\boldsymbol{t})=\frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_1}{\boldsymbol{t}_0-\boldsymbol{t}_1}=\left(\frac{\boldsymbol{t}-\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t}-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\varphi_1(\boldsymbol{t})=\frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0}{\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0}=\left(\frac{\boldsymbol{t}-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{t}\right)$$

לכן,

$$L_1(t)=\left(11+\frac{25}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(11-\frac{25}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}-t\right)$$

כלומר,

$$\boxed{L_1(t)=12.5t-14}$$

נקודות קיצון של פולינומי צ'בישב

משפט:

לפולינום צ'בישב $T_n(x)$ יש $(n+1)$ **נקודות קיצון מוחלט** בקטע $[-1,1]$

הנתונות ע"י:

$$\boxed{\left\{\eta_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}}$$

ומתקיים:

$$\boxed{T_n(\eta_k) = (-1)^k}$$

הוכחה: נשתמש בנגזרת $T_n'(x)$ שחישבנו קודם ונציב $x = \eta_k$

עבור הנקודות הפנימיות בקטע מתקיים:

$$T_n'(\eta_k) = n\left(1-\cos^2\frac{k\pi}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} = 0 \quad , \quad k = 1,2,\cdots,n-1$$

$$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\mathrm{n}\cdot\arccos x)$$

כמו כן,

$$T_n(\eta_k) = \cos\left(n \cdot \arccos\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

מאחר ו- $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ לכל $-1 \le x \le 1$

נובע כי $|T_n(x)| \le 1, \quad \forall x \in [-1,1]$

לכן הנקודות $\{\eta_k\}$ הן נקודות קיצון מוחלט בקטע נתון

מ.ש.ל

המקדם המוביל של פולינומי צ'בישב

טענה: המקדם המוביל של פולינום צ'בישב $T_{n+1}(x)$ הוא 2^n

הוכחת הטענה: באינדוקציה על n

עבור n=0 : $T_1(x)=x$ ואכן המקדם המוביל שלו הוא $1=2^0$.

נניח כי המקדם המוביל של $T_n(x)$ הוא 2^{n-1}

צ"ל : המקדם המוביל של $T_{n+1}(x)$ הוא 2^n

הוכחה : נוסחת הנסיגה $\boxed{T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)}$

ממנה נובע ש x^{n+1} מתקבל רק מתוך החלק $2xT_n(x)$.

המקדם המוביל של $\boldsymbol{x^n}$ ב $T_n(x)$ הוא 2^{n-1}. נכפילו ב –

2 ונקבל את המבוקש.

מ.ש.ל

פולינומי צ'בישב מתוקנים

הגדרה:

הפולינום $\boxed{\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)}$ נקרא **פולינום צ'בישב מתוקן**

הגדרה: **הנורמה** של הפולינום $\tilde{T}_n(x)$ מוגדרת להיות $\boxed{\left\|\tilde{T}_n\right\|=\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right|}$

(הנורמה "מודדת" את הסטייה של הפולינום $\tilde{T}_n(x)$ מאפס)

$$\boxed{\begin{gathered}-1\le T_n(x)\le 1\\ -1\le x\le 1\end{gathered}} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered}-\frac{1}{2^{n-1}}\le \tilde{T}_n(x)\le \frac{1}{2^{n-1}}\\ -1\le x\le 1\end{gathered}} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\left\|\tilde{T}_n\right\|=\frac{1}{2^{n-1}}\\ n\ge 1\end{gathered}}$$

פולינומי צ'בישב מתוקנים : דוגמאות

$T_0(x)=1$	$\tilde{T}_0(x)=1$	$\left\Vert\tilde{T}_0\right\Vert=1$
$T_1(x)=x$	$\tilde{T}_1(x)=x$	$\left\Vert\tilde{T}_1\right\Vert=1$
$T_2(x)=2x^2-1$	$\tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$	$\left\Vert\tilde{T}_2\right\Vert=\frac{1}{2}$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\tilde{T}_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$	$\left\Vert\tilde{T}_3\right\Vert=\frac{1}{4}$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$\tilde{T}_4(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8}$	$\left\Vert\tilde{T}_4\right\Vert=\frac{1}{8}$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$\tilde{T}_5(x)=x^5-\frac{5}{4}x^3+\frac{5}{16}x$	$\left\Vert\tilde{T}_5\right\Vert=\frac{1}{16}$

מסקנות חשובות.

- לפולינום צ'בישב ולפולינום צ'בישב מתוקן יש אותם שורשים ונקודות קיצון
- פולינום צ'בישב מתוקן מקיים $$\tilde{T}_n(\eta_k)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(\eta_k)=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

משפט (אופטימליות של פולינומי צ'בישב)

תהי **A** מחלקת הפולינומים המתוקנים ממעלה n+1.

אזי לכל פולינום $\tilde{P}_{n+1}(x) \in A$ מתקיים

$$\left\|\tilde{T}_{n+1}\right\| = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right| \le \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{P}_{n+1}(x)\right| = \left\|\tilde{P}_{n+1}\right\|$$

ניסוח שקול: מבין כל הפולינומים המתוקנים ממעלה n+1,

פולינום צ'בישב $\tilde{T}_{n+1}(x)$ הוא בעל הסטייה המינימאלית מאפס בקטע

$[-1,1]$, כלומר, לכל פולינום מתוקן $\tilde{P}_{n+1}(x)$ ממעלה n+1 מתקיים

$$\left\|\tilde{P}_{n+1}\right\| \ge \left\|\tilde{T}_{n+1}\right\| = \frac{1}{2^n}$$

הוכחת משפט האופטימאליות :

נניח בשלילה כי הטענה לא נכונה.

אזי קיים פולינום מתוקן $\tilde{Q}_{n+1}(x)$ ממעלה n+1 **<u>שונה</u>** מ- $\tilde{T}_{n+1}(x)$

כך ש-
$$\left\|\tilde{Q}_{n+1}\right\| = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{Q}_{n+1}(x)\right| < \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n}$$

כלומר,
$$-\frac{1}{2^n} < \tilde{Q}_{n+1}(x) < \frac{1}{2^n} \quad , \quad \forall x\in[-1,1]$$

נתבונן בהפרש $R_n(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) - \tilde{Q}_{n+1}(x)$

- פולינום $R_n(x)$ ממעלה $n \ge$ (שני הפולינומים מתוקנים ולכן x^{n+1} מצטמצם)
- בנקודות קיצון : $R_n(\eta_k) = \tilde{T}_{n+1}(\eta_k) - \tilde{Q}_{n+1}(\eta_k) = \frac{(-1)^k}{2^n} - \tilde{Q}_{n+1}(\eta_k)$

$$\Leftarrow \quad \boldsymbol{sign(R_n(\eta_k)) = sign(\tilde{T}_{n+1}(\eta_k))}$$

מסקנה:

הפולינום $R_n(x)$ מחליף סימן ב- (n+2) נקודות $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n+1}$

ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לו (n+1) שורשים .לפי המשפט היסודי

של האלגברה לפולינום ממעלה $n \geq$ יש לכל היותר n שורשים

אלא אם זהו פולינום האפס, כלומר $R_n(x) \equiv 0$ ובאופן שקול $\tilde{T}_{n+1}(x) \equiv \tilde{Q}_{n+1}(x)$

בסתירה להנחה.

מ.ש.ל

מסקנות ממשפט האופטימאליות

מסקנה 1:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\omega_{n+1}(x)\right| = \max_{-1\le x\le 1}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)\right| \ge \frac{1}{2^n} = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right|$$

כלומר, הביטוי $\left\|\omega_{n+1}\right\| = \max_{-1\le x\le 1}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)\right|$

מקבל ערך מינימאלי כאשר נקודות האינטרפולציה הן שורשים של

פולינום צ'בישב $\tilde{T}_{n+1}(x)$. הערך המינימאלי הנ"ל הוא $\boxed{2^{-n}}$.

מסקנה 2:

בחירת נקודות צ'בישב כנקודות אינטרפולציה מבטיחה כי

$$\left\|\omega_{n+1}\right\| = \max_{-1\le x\le 1}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)\right| = \frac{1}{2^n}, \quad \left(x_k = \xi_k, \forall k\right)$$

חסם לשגיאת האינטרפולציה הבנויה על (n+1) נקודות צ'בישב בקטע [-1,1]

$$\left|f(x)-P_n(\tilde{T};x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}$$

חסם לשגיאת האינטרפולציה בקטע [a,b]

ע"י שימוש בנוסחת המעבר נקבל:

$$\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right| = \max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)\right| \ge \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

כלומר,

$$\left|f(x)-P_n(\tilde{T};x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$M_{n+1} = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$