1.12.16 | בס"ד

אלגוריתמים - הרצאה 3

מכפלת פולינומים:

תזכורת: פולינום מוגדר כך: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ (פולינום מדרגה n)

כאשר המקדמים הם: $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$

דוגמא: $P(x) = 2x^2 - 3x + 4 \Leftarrow$ המקדמים הם: $\langle 4, -3, 2 \rangle$

בעיה:

קלט: $P(x), Q(x)$ כאשר: $P \rightarrow \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$

$Q \rightarrow \langle b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$

הנחה: n חזקה של 2.

פלט: נרצה את כפל המטריצות $P \cdot Q = \langle c_0, c_1, \dots, c_{2n-2} \rangle$

דוגמא: $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $Q(x) = 3x^2 + x - 5$

$PQ(x) = 6x^4 + (2\cdot1 - 3\cdot3)x^3 + (2\cdot(-5) + (-3)\cdot1 + 3\cdot4)x^2 + (3\cdot5 + 4)x - 20$

$= 6x^4 - 7x^3 - x^2 + 19x - 20$

$\Leftarrow$ לכן ניתן לראות שיהיו למכפלה איברים מ- c_0 עד c_{2n-2}. (לכן הדרגה שלו היא 2n-2)

נראה שלכל c_i ניתן להגדיר את ערכו כך: $c_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j$

הצעות אלגוריתמיות:

1) אלגוריתם נאיבי - להכפיל לפי ההגדרה יהיה ב- $O(n^2)$

2) למדנו שניתן לייצג פולינום ע"י נקודות.

ייצוג פולינום $P(x)$ מדרגה $n-1$:

n נקודות מייצגות את $P(x)$ כלומר, עבור $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ שונים זה מזה.

$P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_{n-1})$ מגדירות את הפולינום.

(כמו למדנו פונקציה לעזרת נקודה שעליה, מגדירים ומוצאים)

דוגמא: $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$

ונראה שניתן להגדיר אותו גם כך: $P(0) = 4,\ P(1) = 3,\ P(-1) = 9$

$Q(x) = 3x^2 + x - 5$

וגם אותו ניתן להגדיר כך: $Q(0) = -5,\ Q(1) = -1,\ Q(-1) = -3$

בס"ד

בעזרת שני הייצוגים של הפולינומים נוכל למצוא את הפולינום של המכפלה

אם נכפיל את הערכים שיצאו לנו כך:

$PQ(0) = -20$

$PQ(1) = -3$

$PQ(-1) = -27$

כמובן שאם נציב את המספרים למכפלה שקיבלנו בעמוד הקודם נקבל את אותם ערכים.
ונוכל לקבל את הפונקציה חזרה של המכפלה.

← דיוק - הדרגה של $PQ(x)$ היא 4 לכן נצטרך $4+1$ נקודות כדי למצוא אותו

← פתרון - נוסיף עוד 2 ערכים כשחישבנו את $P(x)$ ו- $Q(x)$.

בעצם, אם היה נתון לנו ייצוג ע"י נקודות במקום ייצוג ע"י מקדמים היינו יכולים לחשב את המכפלה ב- $O(n)$ כי כפל זו פעולה $O(1)$ ויש n נקודות.

$P = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$

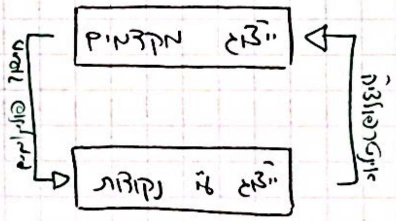
$Q = \langle b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$

$P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_{n-1})$

$Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_{n-1})$

$\Downarrow$

$PQ(x_0), PQ(x_1), \dots, PQ(x_{n-1})$



<u>הערה</u>: ראינו שדג. $PQ(x)$ צריך עוד 2 מקדמים לכן נוכל להפוך את P ואת Q לפולינומים מדרגה $2n$ רק "שנרפד" אותם בעוד מקדמים שיהיו $= 0$.

כמה זמן לוקח לחשב נקודה בתוך פולינום?

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x_i)^k \longrightarrow O(n^2)$$

אך ניתן לראות את זה גם כך:

$$P(x_i) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots + x(a_{n-1})))))$$

וזאו כבר $O(n)$, אך אנו צריכים לבצע חישוב זה על n נקודות ← $O(n^2)$

כלומר, לא התקדמנו מהפתרון הנאיבי.

1.12.16

מטרה: לחשב את $P(X)$ עבור $X_0, \dots, X_{n-1}$ "טובים" במיוחד.

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i} X^{2i} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1} X^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i} X^{2i} + X \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1} X^{2i}$$

נחלק לזוגיים
ואי-זוגיים.

נגדיר: $PE(y) = \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i} y^i$ ו- $PO(y) = \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1} y^i$

וכך קיבלנו: $P(x) = PE(x^2) + xPO(x^2)$

ניתן לראות שכך קיבלנו "מתנה" גם חישוב של X שלילי כי:

~~[illegible]~~

$$P(-x) = PE(x^2) - X\,PO(x^2)$$

ולכן נבחר רק $\frac{n}{2}$ נקודות ואת ה- $\frac{n}{2}$ נקודות האחרות ניקח את ה-X השלילי של כל נקודה.

מכאן שתהליך האלגוריתם יהיה:

$PE(X_0^2)$ $\quad$ $PO(X_0^2)$
$PE(X_1^2)$ $\quad$ $PO(X_1^2)$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
$PE(X_{\frac{n}{2}-1}^2)$ $\quad$ $PO(X_{\frac{n}{2}-1}^2)$

$P(X_0) = \square + X_0 \square$

$P(-X_0) = \square - X_0 \square$

$\vdots$

$P(-X_{\frac{n}{2}-1}) =$

נרצה לחשב את $PE(Y)$:

$$PE(Y) = \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i} X^{2i} = \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i} Y^i = \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i} Y^{2i} + Y \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2} Y^{2i}$$

$$\Rightarrow PE(X^2) = \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i} X^{4i} + X^2 \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2} X^{4i} = PEE(X^4) + X^2 PEO(X^4)$$

כמובן נעשה בצורה סימטרית.

$$\Rightarrow PE(X^2) = PEE(X^4) + X^2 PEO(X^4)$$

$PE(-(X^2)) = \dots$ בעיה!

Scanned by CamScanner

בס"ד

בעיה! איך נמצא x כך שקיים לו x אחר ששווה לריבוע שלו כפול -1.

$$(x_{\frac{n}{4}})^2 = -(x_0^2)$$

רוצים למצוא $x_{\frac{n}{4}}$ שמקיים ←

או באופן כללי, לכל $0 \le j < \frac{n}{4}-1$:

$$(x_{\frac{n}{4}+j})^2 = -(x_j^2)$$

נשתמש ב- i: $x_{\frac{n}{4}} = i x_0 \Rightarrow (x_{\frac{n}{4}})^2 = i^2 \cdot x_0^2$

או באופן כללי, לכל $0 \le j < \frac{n}{4}-1$:

$$(x_{\frac{n}{4}+j}) = i x_j$$

שוב ניתקל באותה בעיה בשלב הבא של הרקורסיה:

נרצה למצוא $x_{\frac{n}{8}}$ שמקיים: $(x_{\frac{n}{8}})^4 = -(x_0^4)$

פתרון - ניקח $\sqrt{i}$, כלומר בכל סיבוב ניקח כך: $-1, i, \sqrt{i}, \ldots$

מספרים אלו נקראים שורשי היחידה.

שורשי היחידה ה- n:

1) $\omega_n^n = 1$

2) $\omega_n^j \ne 1$ לכל $0 < j < n$.

לכן נגדיר x_i כך: $x_i = \omega_n^i$, כלומר,

$$\boxed{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\omega^0}}, \omega^1, \ldots, \omega^{\frac{n}{2}-1}}, \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{\omega^{\frac{n}{2}}}}, \ldots, \omega^{n-1}$$

$$\Rightarrow \omega^{\frac{n}{2}+j} = \omega^{\frac{n}{2}} \cdot \omega^j = -\omega^j$$

$$\boxed{\omega^0, \omega^2, \ldots, \omega^{n-2}}$$

הצעד הבא ברקורסיה $(\omega_n^2)^{\frac{n}{2}} = \omega_n^n = 1 \Rightarrow$ יהיה עם בסיס $\frac{n}{2}$ כך:

כי $\omega_n^2 = \omega_{\frac{n}{2}}$ $\quad \omega_{\frac{n}{2}}^2, \omega_{\frac{n}{2}}^3, \ldots$

וכך נמשיך לרדת ברקורסיה ונקבל $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + cn = O(n\log(n))$

ולכן כל הרעיון הוא לבחור נקודות כך ש- $x_i = \omega^i$ ומכאן נקבל ש-

$$P(\omega^0), P(\omega^1), \ldots, P(\omega^{n-1})$$

1.12.16

בס"ד

נכתוב את האלגוריתם:

```
FFT(n, a_0, a_1, ..., a_{n-1}, ω)
    if n=1 then P[0] ← a_0
    else
        PE ← FFT(n/2, a_0, a_2, ..., a_{n-2}, ω^2)
        PO ← FFT(n/2, a_1, a_3, ..., a_{n-1}, ω^2)
        for j=1 to n/2
            P[j] ← PE[j] + ω^j · PO[j]
            P[n/2+j] ← PE[j] − ω^j · PO[j]
```

כלומר בעצם האלגוריתם מעביר את P מייצוג של מקדמים לייצוג ע"י נקודות, ובנוסף נמצא גם ל-Q ייצוג של נקודות כאשר כל הסיפור הזה הוא $O(n\log n)$ נחזר אותם איבר איבר וכך נגיע לייצוג ע"י נקודות של המכפלה PQ ב-$O(n)$ ולכן בסה"כ אנחנו עדיין ב-$O(n\log(n))$.

עכשיו, איך נבצע את האינטרפולציה? (נחזיר את PQ מייצוג ע"י נקודות לייצוג ע"י מקדמים) מכפלה של מטריצות!

נכפול את המקדמים בנקודות כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^{00} & \omega^{01} & \omega^{02} & \cdots & \omega^{0(n-1)} \\ \omega^{10} & \omega^{11} & \omega^{12} & \cdots & \omega^{1\cdot(n-1)} \\ & & \ddots & & \\ & & \boxed{\omega^{ij}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(\omega^0) \\ P(\omega^1) \\ \vdots \\ P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}}_{\vec{P}}$$

$$\Rightarrow a_0\omega^{i0} + a_1\omega^{i1} + a_2\omega^{i2} + \cdots + a_{n-1}\omega^{i(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\omega^i)^j = P(\omega^i)$$

$$F\vec{a} = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}F\cdot F^{-1} = \vec{P}F^{-1}$$

בס"ד.

משפט: $F^{-1} = \frac{1}{n}\left(\omega^{-ij}\right)$

הוכחה -

צריך להראות $F\cdot F^{-1} = I$

$$F\cdot F^{-1}_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik}\cdot \frac{1}{n}\omega^{-kj} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k(i-j)}$$

האלכסון זה המצב בו $i=j$: $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1 = 1$

כאשר אנו לא באלכסון, $i\neq j$:

נסמן $c=i-j$ ונקבל

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kc} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^c)^k = \frac{1}{n}\cdot\frac{(\omega^c)^n-1}{\underbrace{\omega^c-1}_{\neq 1}} \rightarrow (\omega^c)^n=(\omega^n)^c=1 \quad = 0$$

ω שורש יחידה n $\Leftarrow$ $1\neq\omega^c$ $\Leftarrow$ $\omega^c-1\neq 0$

ולכן F^{-1} זו בדיוק המטריצה $F^{-1} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{\omega}\right)^{ij}\right)$

לסיכום: