סיבוכיות- תרגול 9

סיבוכיות מקום

נרצה למדוד את המקום הדרוש על מנת לבצע חישוב כלשהו. מכיוון שנעסוק גם בסיבוכיות מקום תת-לינארי באורך הקלט, נרצה להפריד בין המקום הנדרש לאחסון את הקלט/פלט, לבין המקום הנדרש לביצוע החישובים. לשם כך נעסוק במ"ט בעלת 3 סרטים:

1) סרט קלט- קריאה בלבד.
2) סרט פלט- כתיבה בלבד.
3) סרט עבודה- קריאה וכתיבה.

<u>הגדרה:</u> תהי M מ"ט דטר'. נאמר כי M בעלת סיבוכיות מקום $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, אם לכל $n \in \mathbb{N}$, M משתמשת בלכל היותר $s(n)$ תאים מסרט העבודה עבור קלטים באורך n.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי בעית הכרעה כלשהי שייכת למחלקה $DSPACE(s)$, אם קיימת מ"ט דטר' בעלת סיבוכיות מקום $O\big(s(n)\big)$ המכריעה את הבעיה.

<u>משפטים שראינו:</u>

1) $DSPACE\big(s(n)\big) \subseteq DTIME\big(n \cdot 2^{O(s(n))}\big)$.
2) $NL \subseteq DSPACE((\log n)^2)$, ולכל $s(n) \geq \log n$, $NSPACE\big(s(n)\big) \subseteq DSPACE(s(n)^2)$.
בפרט, $PSPACE = NPSPACE$.
3) $NL = coNL$, ולכל $s(n) \geq \log n$, $NSPACE\big(s(n)\big) = coNSPACE\big(s(n)\big)$.
4) $PH \subseteq PSPACE \subseteq EXP$.

משפט היררכית המקום

לכל שתי פונקציות $s_1, s_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, כך ש-$s_1(n) \geq \log n$ ו-$s_1(n) = o\big(s_2(n)\big)$, מתקיים כי $DSPACE(s_1) \subset DSPACE(s_2)$ (מוכל ממש).

<u>הוכחה:</u> צריך להראות שפה L המקיימת $L \in DSPACE(s_2)$ וגם $L \notin DSPACE(s_1)$. נגדיר את השפה L ע"י הגדרת מ"ט M_L המכריעה אותה. נרצה ש-M_L תקיים את התכונות הבאות:

1) סיבוכיות המקום של M_L היא $O\big(s_2(n)\big)$.
2) לכל מ"ט M בעלת סיבוכיות מקום $O\big(s_1(n)\big)$ שעוצרת לכל קלט, קיים קלט w עבורו $M_L(w) \neq M(w)$.

אם נצליח לבנות M_L כנ"ל, ונגדיר $L = \{w \mid M_L(w) = 1\}$, מתכונה 1 נקבל כי $L \in DSPACE(s_2)$, ומתכונה 2 נקבל כי $L \neq DSPACE(s_1)$.

נגדיר את M_L באופן הבא:

<u>$M_L(w)$</u>:

1) בדוק ש-w מהצורה $\langle M \rangle 10^*$ ($\langle M \rangle$ הינו קידוד של מ"ט כלשהי), אם לא- דחה.
2) סמלץ את $M(w)$ למשך $2^{s_2(|w|)}$ צעדים. אם M לא עצרה, או M ניסתה להשתמש ביותר מ-$s_2(|w|)$ מקום- דחה.
3) החזר תשובה הפוכה מ-$M(w)$.

ברור כי M_L עוצרת לכל קלט. נראה כי התכונות לעיל מתקיימות ובכך נסיים את ההוכחה:

1) שלב 1 ניתן לביצוע במקום לוגריתמי (נניח כי אם $\langle M\rangle$ אינו תיאור חוקי של מ"ט, נדחה בניסיון לסמלץ את $M(w)$). בשלב 2, לצורך ספירת הצעדים מספיק לשמור מונה בגודל $\log 2^{s_2(|w|)} = s_2(|w|)$ מקום, ובשביל הגבלת המקום מספיק להקצות $s_2(|w|)$ תאים על סרט העבודה. סה"כ M_L בעלת סיבוכיות מקום s_2.

2) תהי M מ"ט בעלת סיבוכיות מקום $O\big(s_1(n)\big)$ שעוצרת לכל קלט. כלומר, M משתמשת בלכל היותר $O\big(s_1(n)\big)$ תאים מסרט העבודה, וזמן הריצה שלה חסום ע"י $2^{O(s_1(n))}$. מכיוון ש-$s_1(n) = o\big(s_2(n)\big)$, קיים קבוע n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, M משתמשת בלכל היותר $s_2(n)$ תאים מסרט העבודה, וזמן הריצה שלה חסום ע"י $2^{s_2(n)}$. נגדיר $w = \langle M\rangle 10^{n_0}$. נשים לב כי $M_L(w)$ בהכרח תגיע לשלב 3 ולכן $M_L(w) \neq M(w)$.

<u>מסקנה:</u> לכל פונקציה $s(n) \geq \log n$ ולכל $c \in \mathbb{N}$ מתקיים $DSPACE(s^c) \subset DSPACE(s^{c+1})$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי $P \neq DSPACE(n)$.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה כי $P = DSPACE(n)$ ונראה כי $DSPACE(n^2) \subseteq DSPACE(n)$ בסתירה למשפט היררכית המקום. תהי $S \in DSPACE(n^2)$. לכן קיימת מ"ט M המכריעה את S תוך שימוש בלכל היותר $O(n^2)$ מקום.

נגדיר שפה חדשה $S' = \left\{x10^{|x|^2} \mid x \in S\right\}$. נשים לב כי $S' \in DSPACE(n)$, כי בהנתן קלט y, ניתן לבדוק אם הוא מהצורה $y = x10^{|x|^2}$, ואם כן, לסמלץ את את $M(x)$ ולהחזיר את תשובתה. המקום הנדרש סה"כ הוא $O(|x|^2) = O(|y|)$.

לפי ההנחה, מתקיים כי $S' \in P$. לכן קיימת מ"ט פולינומית M' המכריעה את S'. כעת, נראה כי $S \in P$. נבנה מ"ט M'' הפועלת באופן הבא: בהנתן קלט x, M'' יוצרת את המחרוזת $y = x10^{|x|^2}$ ומסמלצת את $M'(y)$. זמן הריצה של M'' פולינומי ב-$O(|x|^2) = |y|$ ולכן גם פולינומי ב-$|x|$. לכן $S \in P$.

לפי ההנחה נקבל כי $S \in DSPACE(n)$. כלומר, $DSPACE(n^2) \subseteq DSPACE(n)$ בסתירה.