29.12.16 בס״ד.

אלגוריתמים - הרצאה

<u>הגדרה</u>: גרף G הוא אוסף קודקודים (צמתים) שנסמנם $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$

ואוסף של צלעות (קשתות) שהם זוגות לא סדורים של קודקודים ונסמנם:

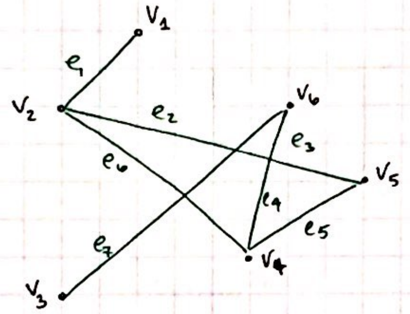
(כלומר $e_i=(u,v)$ כאשר $u,v\in V(G)$) ← $E(G)=\{e_1,\dots,e_m\}$

סימון: $G=(V,E)$

<u>הגדרה</u>: גרף מכוון = גרף עם צלעות שהן הזוגות סדורים. (כלומר $e=(u,v)\neq(v,u)$)

דוגמה:

<u>G:</u> גרף לא מכוון.

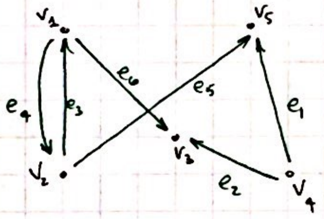


$V(G)=\{v_1,\dots,v_6\}$

$E(G)=\{e_1,\dots,e_7\}$

כאשר,
$e_1=\{v_1,v_2\}$
$e_2=\{v_2,v_5\}$
$\vdots$
$e_7=\{v_3,v_6\}$

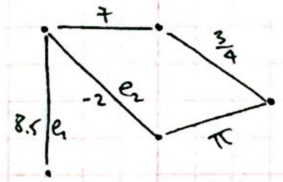
<u>G:</u> גרף מכוון.



$e_3=(v_2,v_1)\neq(v_1,v_2)=e_4$

<u>הגדרה</u>: גרף $G=(V,E)$ הוא ממושקל אם קיימת פונקציית משקל $\omega: E\to\mathbb{R}$

דוגמה:



$\omega(e_1)=8.5$
$\omega(e_2)=-2$

ייצוגים של גרפים:

1) מטריצות שכנויות. (נוח לייצג כך: $M(v_i,v_j)=1\Leftrightarrow(v_i,v_j)\in E$)

← זכרון הייצוג - $n^2=|V|^2$

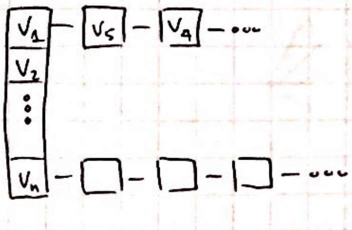
$$\begin{array}{c|ccccc} M & v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \\ \hline v_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ v_i & & & \boxed{M(v_i,v_j)=1\Leftrightarrow(v_i,v_j)\in E} & & \\ \vdots & & & & & \\ v_n & & & & & \end{array}$$

2) רשימות שכנויות

$0\le|E|\le|V|^2$

$|E|\le\frac{|V|(|V|-1)}{2}$ גרף לא מכוון.

$|E|\le|V|(|V|-1)$ גרף מכוון.

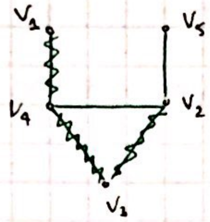


זכרון הייצוג: מכוון - $|V|+|E|$, לא מכוון - $|V|+2|E|$

הגדרה: מסלול = סדרת קודקודים $\langle V_1,\dots,V_k\rangle$ כך שלכל $1\le i\le k-1$ מתקיים $(V_i,V_{i+1})\in E$

נאמר ש- $\langle V_1,\dots,V_k\rangle$ הוא מסלול מ- V_1 אל V_k.

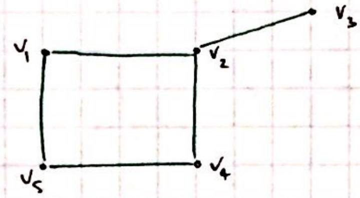
דוגמה:



$\langle V_1,V_4,V_3,V_2\rangle$

הגדרה: מסלול $\langle V_1,\dots,V_k\rangle$ הוא פשוט אם לכל $1\le i\ne j\le k$ מתקיים $V_i\ne V_j$

דוגמה:



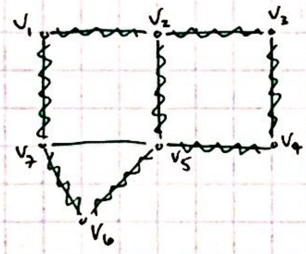
$\langle \underline{V_2},V_4,V_5,V_1,\underline{V_2},V_3\rangle$

מסלול לא פשוט.

הגדרה: מעגל הוא מסלול $\langle V_1,\dots,V_k,V_1\rangle$

הגדרה: מעגל פשוט הוא מעגל כך ש- $\langle V_1,\dots,V_k\rangle$ מסלול פשוט.

דוגמה:



$\langle V_1,V_2,V_5,V_4,V_3,V_2,V_5,V_6,V_7,V_1\rangle$

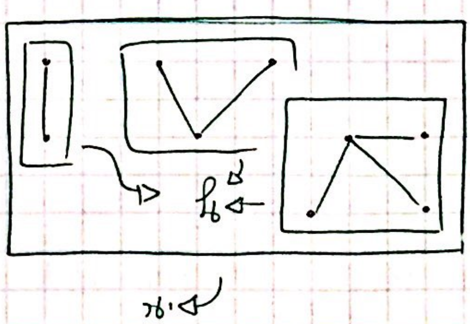
מעגל לא פשוט.

הגדרה: גרף $G=(V,E)$, נאמר שהוא קשיר אם לכל $u,v\in V$ יש מסלול מ- u ל- V.

הגדרה: יער = גרף ללא מעגלים.

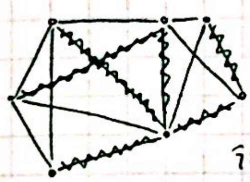
הגדרה: עץ = יער קשיר.

דוגמה:



הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. אזי נאמר ש- $G'=(V,E')$ עץ פורש אם $E'\subseteq E$ וגם G' עץ.

דוגמה:



נראה שהגרף אכן קשיר, קבוצת הצלעות המסומנות ב- ~~~ היא תת קבוצה של קב' הצלעות המקורית וקבוצת הקודקודים נשארה זהה.

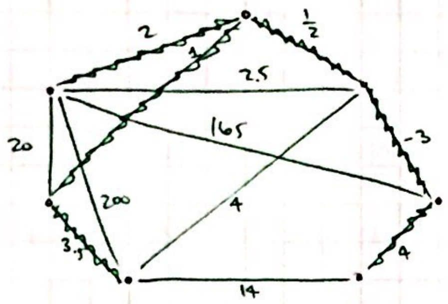
29.12.16

טענה: אם $G=(V,E)$ הוא עץ אזי לכל $u,v\in V$ יש לכל היותר מסלול אחד מ-u ל-v.

טענה: אם $G'=(V,E')$ הוא עץ אז לכל $u,v\in V$ יש בדיוק מסלול אחד מ-u ל-v.

(בקלות ניתן להוכיח באינדוקציה)

דוגמא לגרף קשיר עם משקלות, נמצא לו עץ פורש מינימלי:



העץ הפורש מינימלי מבחינת מינימום משקלות שלו.

בעיה: מציאת עץ פורש מינימלי (עפ"מ) Minimum Spaning Tree (MST)

קלט: $G=(V,E)$ ממושקל וקשיר.

פלט: עץ פורש $T(V,E')$ מינימלי (כלומר הסכום- $\sum_{e\in E'}(\omega(e))$ מינימלי)

אלגוריתם של קרוסקל -

1) נמיין את הקשתות ונקבל $e_1,\dots,e_m$ (כלומר $\omega(e_1)<\dots<\omega(e_m)$)

2) $E'\leftarrow\phi$

for $i=1$ to n

if $(V, E'\cup\{e_i\})$ אינו סוגר מעגל:

$E'\leftarrow E'\cup\{e_i\}$

טענה: האלגוריתם של קרוסקל מחזיר עץ פורש מינימלי.

הוכחה -

נוכיח קודם כל שזהו עץ פורש.

ברור ש- $E'\subseteq E$.

עץ = יער קשיר.

קרוסקל מחזיר יער ← נובע מהבחירה של הקשתות של קרוסקל

קרוסקל מחזיר יער קשיר.

המשך בעמוד הבא...

קרוסקל מחזיר עץ קשיר, נניח בשלילה ש- $G'=(V,E')$ שקרוסקל מחזיר אינו קשיר.

לכן, ניתן לחלק את הקודקודים ל- V_1 ו- V_2 כך ש- $V=V_1\uplus V_2$
איחוד זר.

כך שאין קשת בקרוסקל בין קודקודי V_1 ו- V_2.

כיוון ש- G קשיר יש קשת $(u,v)\in E$ כך ש- $u\in V_1$ ו- $v\in V_2$, בריצת קרוסקל עבור (u,v) וכיוון ש- (u,v) לא יסגור מעגל קרוסקל בוחר את הקשת בסתירה לחלוקה שהגדרנו ולכן קרוסקל קשיר $\Rightarrow$ עץ פורש.

כעת, נוכיח שהעץ הפורש של קרוסקל מינימלי, כלומר (משקל $\omega(T)=\sum_{e\in T}\omega(e)$ מינימלי. (T)

נניח שיש עץ T' (בשלילה) כך ש- $\omega(T')<\omega(T)$. (ו- $\omega(T')$ קטן ביותר מכל העצים)

נמיין בקשתות בסדר המיון (של קרוסקל)

$T'\neq T$, לכן יש לפחות קשת אחת שנמצאת ב-T ולא ב-T'.

ובנוסף יש לפחות קשת אחת שנמצאת ב-T' ולא ב-T.

נסמן ב- $\bar{e}$ את הקשת הראשונה במיון ששייכת לבדיוק אחד מבין T ו- T'.

טענה: הקשת $\bar{e}$ שייכת ל-T ולא ל-T'.

רעיון ההוכחה: מהחמדנות של קרוסקל.

נסמן קשת $\bar{e}=(u,v)$ ונסמן $<u,v_1,\dots,v_k,v>$ (יש בדיוק מסלול אחד כזה כי T' עץ). כיוון ש- $\bar{e}=(u,v)\in T$ ולכן $<u,v_1,\dots,v_k,v,u>$ מעגל ב- $T'\cup\{\bar{e}\}$ ולכן יש לפחות קשת אחת שנסמן אותה $\bar{\bar{e}}$ במעגל שאינו ב- T.

$\bar{\bar{e}}\in T'$ ו- $\bar{\bar{e}}\notin T$ לכן $\omega(\bar{e})<\omega(\bar{\bar{e}})$

נגדיר T'' מ- T' ע"י הורדת $\bar{\bar{e}}$ והוספת $\bar{e}$. T'' עץ פורש.

$$\omega(T'')=\omega(T')+\omega(\bar{e})-\omega(\bar{\bar{e}})<\omega(T')$$

בסתירה למינימליות של T'.

ולכן קרוסקל מחזיר עץ מינימלי פורש.