ההיררכיה הפולינומית

תרגיל

MIN-CNF מכילה את כל הנוסחאות הבוליאניות בפורמט CNF כך שאין נוסחה בוליאנית בפורמט CNF קצרה יותר השקולה לה.

טענה

$MIN\text{-}CNF \in \Pi_2$

הוכחה

באמצעות הגדרה 1:

$$\phi \in MIN\text{-}CNF \Leftrightarrow \forall \phi' \exists v \text{ s.t } V(\phi, \phi', v) = 1$$

כאשר המוודא V מקבל נוסחה ϕ, ונוסחה ϕ' והשמה אחת v ומחזיר 1 אם מתקיימים התנאים הבאים (0 - אחרת):

1. ϕ היא בפורמט CNF.
2. ϕ' לא בפורמט CNF. או ϕ' בפורמט CNF וגם $|\phi'| < |\phi|$ וגם * $\phi'(v) \neq \phi(v)$.

• קל לראות שהמוודא רץ בזמן פולינומי.

אם MIN-CNF אז לכל ϕ' או שהיא לא בפורמט התקין או שהיא בפורמט תקין אבל אם היא קצרה יותר היא לא שקולה ל-ϕ.
עבור כוון, אם $\phi \in MIN\text{-}CNF$ אז קיימת נוסחה β בפורמט CNF קצרה יותר שקולה ל-ϕ ולכן לא תהיה עבורה אף השמה v שאם נציב אותה ב-ϕ' וב-ϕ נקבל ערך אמת שונה.

באמצעות הגדרה 2:

נשים לב שכדי להוכיח את הטענה די להראות ש $\overline{MIN\text{-}CNF} \in \Sigma_2 = NP^{NP}$
נגדיר את השפה NOT-EQVI להיות השפה שמכילה את כל הזוגות של נוסחאות בוליאניות (Q_1, Q_2) שאינן שקולות זו לזו.

• קל לראות ש $NOT\text{-}EQVI \in NP$, העד יהיה השמה אחת שהן לא נותנות ערך אמת זהה עבורה.

כעת נראה ש $\overline{MIN\text{-}CNF} \in \Sigma_2$.

$\overline{MIN\text{-}CNF} = \{\phi \mid$ כל הנוסחאות הבוליאניות שאינן בפורמט CNF או- שהן בפורמט CNF ויש נוסחה בוליאנית בפורמט CNF קצרה יותר השקולה להן. $\}$

נבנה מ"ט פולינומית עם גישה אורקל ל NOT-EQVI המכריעה את $\overline{MIN\text{-}CNF}$ באופן הבא:

בהינתן קלט ϕ

1. אם ϕ לא בפורמט CNF - החזר 1
2. ננחש נוסחה ϕ' בפורמט CNF קצרה יותר מ ϕ.
3. אם $(\phi, \phi') \in NOT\text{-}EQVI$ - החזר 0. → שאילת האורקל.
4. החזר 1.

המשך
קל לראות כי המכונה שבנינו היא פולינומית ז"ר.

<u>נכונה</u> (כיוון אחד)

אם ϕ היא בפורמט CNF וקיימת נוסחה בפורמט CNF קצרה יותר השקולה לה,
אז קיים ניחוש שעבורו נחזיר 1 בהתאם לתשובת האורקל (שתהיה שלילית).

הוכח בהרצאה: עבור $k \geq 1$ אם $\Pi_k = \Sigma_k$ אז $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k$ באמצעות הגדרה 1.

<u>תרגיל</u>

הוכח באמצעות הגדרה 2 שאם $co\text{-}NP = NP$ אז $NP = NP^{NP}$.

<u>הוכחה</u>

כיוון אחד ברור, תמיד מתקיים $NP \subseteq NP^{NP}$.
נוכיח כי $NP^{NP} \subseteq NP$.

תהי $S \in NP^{NP}$, לכן קיימת מ"ט לד פולינומית m^A עם גישה אורקל ל $A \in NP$ המכריעה את S.

המכונה m^A היא מהצורה הבאה: בצע...
בצע..
נחש..
⋮
שאילתת אורקל ← אם $y \in A$ אז בצע..
נחש...

אחרת בצע..
בצע..
⋮

מכיוון ש $A \in NP$, אז קיימת מ"ט לד פולינומית m' שמכריעה את A.
כמו כן מכיוון ש $NP = co\text{-}NP$ אז $\bar{A} \in NP$ ולכן קיימת מ"ט לד פולינומית m'' שמכריעה את $\bar{A}$.

נבנה מ"ט פולינומית לד m שמכריעה את S באופן הבא:

בהינתן קלט x, המכונה m תסמלץ את ריצה של m^A על x
כאשר m^A מבצעת שאילתת אורקל עם מחרוזת y:
המכונה m מריצה את m' עם y במידה ו-m' החזירה 1 נבצע את מה ש-m^A מבצעת אם התקבלה תשובה חיובית מהאורקל עבור y.
אחרת, m מריצה את m'' על y ואם קיבלנו חזרה 1, m תבצע את מה ש m^A מבצעת אם התקבלה תשובה שלילית מהאורקל.
אם שתי המכונות החזירו 0 נחזיר מיד 0 ונעצור את הסימולציה.