26.4.17 בס"ד

סיבוכיות - תרגול 5

ההירכיה הפולינומית:

הגדרות:

1) $S\in\Sigma_k \iff$ קיימים פולינום p ומוודא פולינומי דט V כך שמתקיים:

$$x\in S \iff \exists y_1\in\{0,1\}^{p(|x|)}\ \forall y_2\in\{0,1\}^{p(|x|)}\ \exists y_3\in\{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q\, y_k\in\{0,1\}^{p(|x|)}$$

$$Q=\begin{cases}\exists - & k \text{ אי זוגי}\\ \forall - & k \text{ זוגי}\end{cases}$$

כך ש: $V(x,y_1,\dots,y_k)=1$

הערה: $\Sigma_0=P$ ו- $\Sigma_1=NP$.

2) $S\in\Pi_k \iff$ קיימים פולינום p ומוודא פולינומי דט V כך שמתקיים:

$$x\in S \iff \forall y_1\in\{0,1\}^{p(|x|)}\ \exists y_2\in\{0,1\}^{p(|x|)}\ \forall y_3\in\{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q\, y_k\in\{0,1\}^{p(|x|)}$$

$$Q=\begin{cases}\exists - & k \text{ זוגי}\\ \forall - & k \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

כך ש: $V(x,y_1,\dots,y_k)=1$

נשים ♡!

מההגדרות נקבל שמתקיים $\Pi_k=co\text{-}\Sigma_k$.

כלומר $S\in\Pi_k \iff \bar{S}\in\Sigma_k$ ולכן מתקיים:

$$x\in S \iff x\notin\bar{S} \iff \neg(\exists y_1,\forall y_2,\dots Q y_k,\ V(x,y_1,\dots,y_k)=1) \iff \forall y_1\exists y_2,\dots,Q y_k,\ V(x,y..y)=0$$

ולכן $\Pi_k=co\text{-}\Sigma_k$ כדרוש.

הערה: $\Pi_1=co\text{-}NP$. נסמן $PH=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Sigma_k$

הגדרה באמצעות מ"ט עם גישה אורקל: תהי $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}^*$ פונקציית אורקל. מ"ט עם גישה אורקל ל-f (נסמן: M^f) היא מכונת טיורינג בעלת סרט נוסף המכונה "סרט אורקל" כאשר M יכולה לכתוב על סרט זה מחרוזת z ולקבל תשובה את $f(z)$.

פעולה זו נקראת שאילתת אורקל והיא מתבצעת בצעד יחיד (מרגע הפעלת השאילתה ועד חזרת התשובה)

(*) עבור בעיית הכרעה A, מ"ט עם גישה אורקל ל-A (סימון: M^A) היא מ"ט שיכולה לכתוב על סרט האורקל שלה מחרוזת a ולקבל תשובה תוך צעד אחד, האם $a\in A$ או לא. (פונקציה בוליאנית)

(*) המחלקה של השפות המתקבלות ע"י מ"ט פולי' דט עם גישה אורקל ל-F היא P^F ובאופן דומה המחלקה של השפות שמתקבלות ע"י מ"ט פולינומית לא"ד עם גישה אורקל ל-F היא NP^F.

(*) כמו כן, נגדיר עבור מחלקה של בעיות הכרעה C: $P^C=\bigcup_{F\in C}P^F$ וגם $NP^C=\bigcup_{F\in C}NP^F$

הקשר בין הגדרות 1 ו- 2 ומשפט מההרצאה:

לכל $k\geq 0$ מתקיים - $\Sigma_{k+1} = NP^{\Sigma_k}$. (נוכיח בהרצאה)

דוגמה:

Min-CNF - מכילה את כל הנוסחאות הבוליאניות ϕ בפורמט CNF כך שלא קיימת קצרה יותר השקולה ל- ϕ.

← נוסחאות נקראות שקולות אם לכל הצבה שתיהן מחזירות אמת או שתיהן מחזירות שקר. ...

טענה: $\text{Min-CNF} \in \Pi_2$.

הוכחה -

$$\phi \in \text{Min-CNF} \iff \forall \phi' \exists \omega : V(\phi,\phi',\omega)=1$$

כאשר המוודא V מקבל נוסחה בוליאנית ϕ, נוסחה בוליאנית ϕ' והשמה ω ומחזיר 1 כאשר:

1) ϕ בצורת CNF, ϕ' בצורת CNF.

2) אם $|\phi'|<|\phi| \Rightarrow \phi(\omega)\neq\phi'(\omega)$

קל לראות שכל הבדיקות מתבצעות בזמן פולינומי וכן שכל ϕ פולינומי באורך הקלט ניתן למצוא השמה אחת ω פולינומית באורך הקלט כך שמתקיים ש- ϕ' ארוכה יותר מ- ϕ או שהשמה הזאת ω מחזירה ערך אמת שונה עבור ϕ' ו- ϕ.