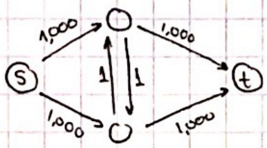
אלגוריתמים - הרצאה

רשת זרימה -



פורד - פלקרסון -
(צריך לבחור איזשהו מסלול ...)

אדמונדס - קארפ - האלגוריתם של פורד פלקרסון עם חיפוש מסלולים ב- BFS.

סימון: המרחק (מספר הקשתות במסלול הקצר ביותר) מ-s ל-v ב- G_f = $\delta_f(s,v)$

טענה: אם מריצים את אדמונדס - קארפ על רשת זרימה $<G=(V,E),c,s,t>$ אזי לכל $v\in V\setminus\{s,t\}$, $\delta_f(s,v)$ גדל מונוטונית עם כל שיפור זרימה.

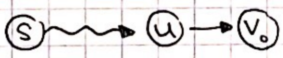
הוכחה -

נניח בשלילה שקיים $v\in V\setminus\{s,t\}$ כך שהמרחק מ-s ל-v מתקצר עם שיפור זרימה.

כלומר, קיים f זרימה ששיפרנו ל-f' כך ש- $\delta_{f'}(s,v)<\delta_f(s,v)$

נסמן: $X=\{u|\delta_{f'}(s,u)<\delta_f(s,u)\}$ ונסמן ב- v_0 קודקוד המקיים $\forall_{a\in X}: \delta_{f'}(s,v_0)\le\delta_{f'}(s,u)$

נתבונן במסלול הקצר ביותר מ-s ל- v_0 ב- $G_{f'}$.



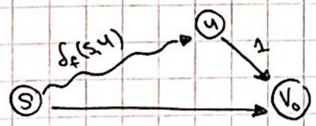
כיוון שהמרחק מ-s ל-u = למרחק מ-s ל- v_0 פחות 1,

כלומר מתקיים $\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v_0)-1$ ⇐ $u\notin X$ כי v_0 המינימלי.

⇐ $\delta_{f'}(s,u)\ge\delta_f(s,u)$

האם $(u,v_0)\in G_f$?

מקרה 1: $c(u,v_0)>f(u,v_0)$ ⇐ $(u,v_0)\in G_f$



לכן $\delta_f(s,u)+1\ge\delta_f(s,v_0)$ כי:

מכאן נקבל:

$$\delta_f(s,v_0)\le\delta_f(s,u)+1\le\delta_{f'}(s,u)+1=(\delta_{f'}(s,v_0)-1)+1=\delta_{f'}(s,v_0)$$

⇐ סתירה לכך ש- $v_0\in X$.

תזכורת:

$C_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$

$G_f=(V,E_f)$

$E_f=\{(u,v)\in V\times V|C_f(u,v)>0\}$

מקרה 2: $c(u,v_0)=f(u,v_0)$ ⇐ $(u,v_0)\notin G_f$.

כיוון ש- $(u,v_0)\notin G_f$ ו- $(u,v_0)\in G_{f'}$ ⇐ מסלול השיפור p ב- G_f (שמצאנו ב- BFS) עובר ב- (v_0,u) כלומר,

$$p = s \rightsquigarrow v_0 \to u \rightsquigarrow t$$

לכן, $\delta_f(s,u)-1=\delta_f(s,v_0)$.

$\delta_f(s,v_0)=\delta_f(s,u)-1\le\delta_{f'}(s,u)-1=(\delta_{f'}(s,v_0)-1)-1=\delta_{f'}(s,v_0)-2$ ⇐ סתירה לכך ש- $v_0\in X$ □

בס"ד

משפט: אם מריצים את אדמונדס-קארפ על רשת זרימה $\langle G=(V,E), c, s, t \rangle$

אזי המספר הכולל של סיבובים הוא $O(|V|\cdot|E|)$

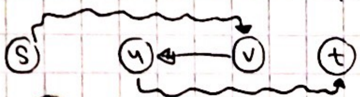
רעיון ההוכחה:

א. בכל סיבוב לפחות קשת אחת "נעלמת" (הקשת עם השארית המינימלית כאשר נעלה את הזרימה לכל הקשתות במסלול לגודל השארית. הקשת הזו ניצלה את מקסימום הקיבולת שלה ולכן נמחק אותה מהגרף)

ב. קשת יכולה להופיע שוב לאחר שהיא נעלמה.

(*) איך? נסתכל על המסלול: $s \rightsquigarrow u \xrightarrow{5/5} v \rightarrow t$

נשים לב שניתן להעלים את (u,v) כי היא מנצלת את כל הקיבולת שלה.



ייתכן מסלול אחר שיופיע שישפר זרימה מאוחר יותר מההגדרה:

וכך כדי לשמור את האיזון הורדנו את הזרימה שעוברת מ- u ל- v וכך הקשת (u,v) שוב לא מנצלת את כל הקיבולת שלה ונוכל להחזיר אותה לגרף.

לכן, כשקשת נעלמת ומופיעה שוב, המרחק מ- s גדל ב- ≥ 2. ($G_{f'''}$ הקשת מופיעה חזרה)

כי,

$$\delta_{f'''}(s,u) = \delta_{f'''}(s,v)+1 \geq \delta_f(s,v)+1 = (\delta_f(s,u)+1)+1 = \delta_f(s,u)+2$$

$\Leftarrow$ ג. מס' הפעמים שקשת מופיעה ונעלמת הוא $\frac{|V|}{2}$.

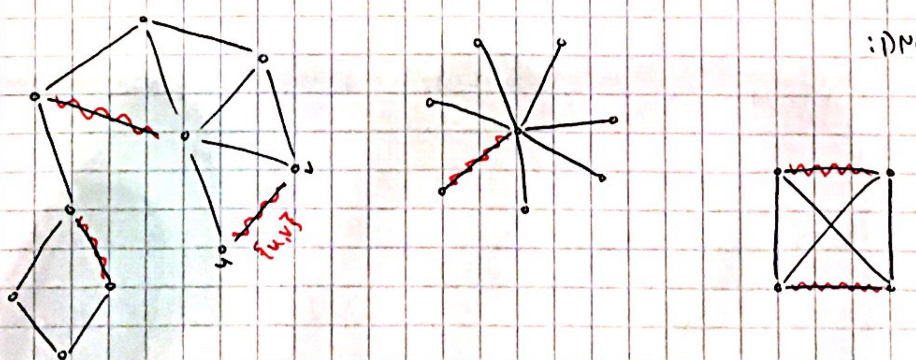
$\Leftarrow$ מס' הסיבובים - $O(|V|\cdot|E|)$

$\Leftarrow$ זמן ריצה: $O(|V|\cdot|E|^2)$

התאמות (זיווגים) - Matching :

הגדרה: זיווג בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא אוסף קשתות $M\subseteq E$ כך שלכל $v\in V$ יש לכל היותר קשת אחת $e\in M$ כך ש- $v\in e$.

דוגמה:



נסמן: מספר הקשתות ב- M - $|M|$

גרף מלא: זוגי: $\frac{|V|}{2}$, אי זוגי: $\frac{|V|-1}{2}$

2.2.17 קס"ג.

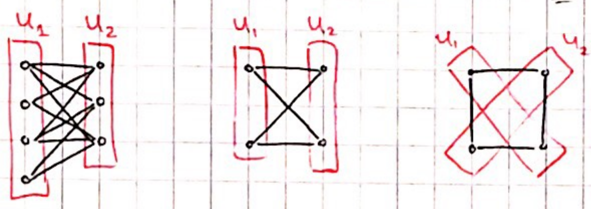
התאמה מקסימלית:

קלט: גרף $G=(V,E)$

פלט: $M\subseteq E$ כך ש- $|M|$ מקסימום.

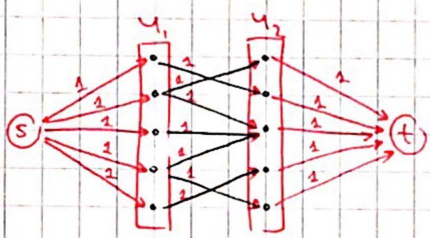
הגדרה: גרף דו חלקי (דו-צדדי) $G=(V,E)$ הוא גרף אשר ניתן לחלק את קבוצת קודקודיו לשתי קבוצות זרות U_1 ו- U_2 כך ש- $U_1\cup U_2=V$ כך שלכל $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in U_1$ ו- $v\in U_2$ או $u\in U_2$ ו- $v\in U_1$.

דוגמאות:



נניח שאנו מקבלים גרף דו צדדי $B=(U_1,U_2,E)$

נניח שהפכנו את הגרף B לרשת זרימה עם s ו- t כמתואר בציור הנ"ל. והפכנו את כל הקשתות ב- B לקשתות מכוונות בכיוון →



f^* = הזרימה המקסימלית בגרף, $M=\{e=\{u,v\}|f(u,v)=1\}$, $M^*=M$ מקסימלי.

$$\left.\begin{aligned}|f^*|=|M|\le|M^*|\\|M^*|=|f|\le|f^*|\end{aligned}\right\}\Longrightarrow |M^*|=|f^*|$$

הגדרה: התאמה הינה מושלמת אם לכל $v\in V$ קיים $e\in M$ כך ש- $v\in e$.

(במילים אחרות, יש $\frac{|V|}{2}$ קשתות ב- M)

משפט Hall: יהי $B=(U,V,E)$ גרף דו חלקי כך ש- $|U|=|V|$ אזי יש זיווג מושלם

$$\Longleftrightarrow \forall_{A\subseteq U}: |N(A)|\ge|A|$$

כאשר $N(A)$ = קבוצת השכנים של A.

הוכחה -

($\Leftarrow$): יש זיווג מושלם M ולכן לכל $u\in A$ קיים קודקוד "יחודי" $v\in N(A)$ כך ש- $M(u,v)\in M$

כי M זיווג מושלם.

לכן, $|A|=|\{v\in N(A)|\ u\in A,\ (u,v)\in M\}|$

ולכן $\Leftarrow$ $|A|\le|N(A)|$ כדרוש.

33 שני קצוות הכלו G

בס"ד.

(⇐) : נחלק למקרים: נוכיח באינדוקציה על $|U|$. (בסיס: $|U|=1$

נניח נכונות לכל $n<k$ ונוכיח ל-k)

מקרה 1: $\forall A\subset U: |N(A)|>|A|$

הוכחה - נבחר קשת שרירותית $(u,v)\in E$.

$G'=(U\setminus\{u\}, V\setminus\{v\}, E')$; $E'=\{(x,y)\in E \mid x\in U\setminus\{u\}, y\in V\setminus\{v\}\}$

טענה: לכל $A\subseteq U\setminus\{u\}$, מתקיים $|A|\le|N_{G'}(A)|$

הוכחה -

$$\left.\begin{cases} |A|<|N_G(A)| \\ |N_G(A)|-1\le|N_{G'}(A)|\le|N_G(A)| \end{cases}\right\} \Rightarrow |A|\le|N_{G'}(A)|$$

לכן, לפי הטענה ולפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם M' ב-G'.

⇐ $M=M'\cup\{(u,v)\}$ זיווג מושלם ב-G.

מקרה 2: $\exists A\subset U: |N(A)|=|A|$

הוכחה - לא הספיק לכתוב פורמלית.

כמה מילים על המבחן:

← שאלה אחת מהשיעורי בית.

← שאלה ראשונה בד"כ הגדרה של משהו.

← אם תישאל שאלה בתכנות דינמי, הוא מצפה לראות את הנוסחה הרקורסיבית ללא כתיבת קוד של הנוסחה, בנוסף צריך פסאודו קוד, אין צורך להוכיח נכונות אלא אם כן צוין אחרת.

+ ניתוח זמן ריצה, כדאי להוסיף הסבר קצר.