# אינטגרציה נומרית

כיצד מקרבים $\int_a^b f\left(x\right)dx$ ?

אופרטור ליניארי מוצג לרוב כך : $L\left(xf+\mu g\right)=\lambda Lf+\mu Lg$ . אינטגרל הוא גם פונקציונל ליניארי.

כיצד שומרים אופרטור ליניארי? $Lf\left(x\right)\sim\sum_{i=1}^{n}w_i f\left(x_i\right)$

משקולות

צמתים

<u>לדוגמא :</u> חישוב נומרי של נגזרת :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\sim\ f_h(x):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$x_1=x+h,\ w_1=\frac{1}{h},\ x_2=x,\ w_2=-\frac{1}{h},$$

ואז הנוסחה של האובייקט תהיה :

$$I\left(f\right)=\int_a^b f\left(x\right)\mu\left(x\right)dx=\sum_{i=1}^{n}w_i f\left(x_i\right)=I^h\left(f\right)$$

$I^h\left(f\right)$ היא מדרגת דיוק אלגברי $m$ אם :

$$I_1=I_h\left(1\right)$$
$$I_x=I_x\left(1\right)$$
$$\vdots$$
$$I\left(x^m\right)=I_h\left(x^m\right)$$
$$I\left(x^{m+1}\right)\neq I_h\left(x^{m+1}\right)$$

(כלומר במעלה $m+1$ כבר שתי נוסחאות לא זהות).

ישנן שיטות קירוב שונות, כגון $\frac{1}{2h}\left[f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right]$. נבדוק את רמת הדיוק של שני האלגוריתמים שראינו :

| $f\left(x\right)$ | $f'\left(x\right)$ | $\frac{1}{h}\left[f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right]$ | $\frac{1}{2h}\left[f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x$ | 1 | $\frac{1}{h}\left[\left(x+h\right)-x\right]=1$ | 1 |
| $x^2$ | $2x$ | $\frac{1}{h}\left(\left(x+h\right)^2-x^2\right)=2x+h$ | $\frac{1}{2h}\left[\left(x+h\right)^2-\left(x-h\right)^2\right]=2x$ |

אין דיוק אלגברי של 2

ומכאן שתמיד עדיף את הקירוב $\frac{1}{2h}\left[f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right]$ עבור דרגת קירוב גבוהה.

## שיטת תרבעה של גאוס

**משפט גאוס:** כדי לקבל נוסחה ברמת דיוק אלגברי מקסימאלית באינטגרציה נפעל באופן הבא:

- יש למצוא שורשים $x_i$ של פולינום אורתוגונאלי ממעלה $n$ ( $x_i$ הם צמתים)
- נמצא את $w_i$ ע"פ מערכת המשוואות ( $w_i$ הן משקולות).

זוהי השיטה הטובה ביותר\ כי היא מדויקת לפולינומים עד מעלה לפחות $n$. כדאי להשתמש בשיטת תרבועי גאוס אם לפונקציה יש קירוב פולינומאלי טוב (כלומר: $R_n\left(x\right) \sim 0$ )
אין טעם להשתמש בגישה זו כאשר מקבלים פונקציה רנדומאלית, למשל.

דוגמא: $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = w_1 f\left(x_1\right) + w_2 f\left(x_2\right)$ . נפתור זאת בעזרת *Legendere*. מכוון שכאן $\mu\left(x\right)=1$ נתחיל עם פולינומים אורתוגונאליים. ניקח $1, x, x^2$ ונבדוק אם הם אורתוגונאליים.

$$\left(x,1\right) = \int_{-1}^{1} x \cdot 1dx = 0$$

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = x$$

$$\left(x^2,1\right) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = 2/3$$

$$\left(x^2,x\right) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$\left(x^2\right)^* = \frac{\left(x^2,x\right)}{\left(x,x\right)} \cdot x + \frac{\left(x^2,1\right)}{\left(1,1\right)} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P_2\left(x\right) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\left(P_2\left(x\right),1\right) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = 0$$

$$\left(P_2\left(x\right),x\right) = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = w_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + w_2 f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

נסכם את כל הנתונים:

| $f(x)$ | $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ | $w_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+w_2 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ |
|---|---|---|
| $1$ | $2=$ | $w_1+w_2$ |
| $x$ | $0=$ | $(w_1-w_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $x^2$ | $\frac{2}{3}=$ | $\frac{w_1+w_2}{3}$ |
| $x^3$ | $0=$ | $(w_1-w_2)\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}$ |
| $x^4$ | $\frac{2}{5}\neq$ | |

ולכן גם לכל פונקציה
ממעלה גבוהה יותר
יהיה אי-שוויון

הערה : ברוב המקרים, דרגת הדיוק המקסימאלית היא $2n-1$. במקרה זה, $n=2$ ולכן דרגת הדיוק היא 3.

## **קירוב אינטגרל**

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = ?$$

ניקח קטע קטן $[x_1,x_2]$. בקטע זה $f(x)\sim L_1[f](x)$ .

$$f(x)\sim L_1[f]=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_2}f_2+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$

השגיאה

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\ L_1[f]=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x-x_1-h}{-h}f_1+\frac{x-x_1}{h}f_2\right)dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_1)(x-x_2)\,dx$$

$$\text{השגיאה} \underset{\substack{x-x_1=y\\ dx=dy}}{=} \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\int_0^h y(y-h)\,dy=\frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}\right)=\frac{f''(\xi)}{12}h^3$$

דרגת הקירוב היא $I(f)-I_h(f)=O(h^3)$ .

אם מקטינים את $h$, השגיאה תקטן פי $h^3$ !

$$I_h(f)\underset{\substack{x-x_1=y\\ dx=dy}}{=}\int_0^h\left[-\frac{y-h}{h}f_1+\frac{y}{h}f_2\right]dy=\frac{f_1-f_2}{h}\int_0^h y\,dy+f_1\int_0^h dy$$

$$I_h(f)=h^2\left(\frac{f_1-f_2}{2h}\right)+f_1h=\frac{h}{2}[f_1+f_2]$$

קירוב האינטגרל ע״י כלל הטרפז

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{x_2-x_1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{f''(\xi)}{12}(x_2-x_1)^3$$

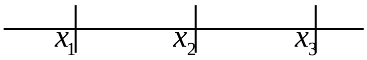
כדאי להשתמש בנוסחה רק כאשר $h$ קטן.

כעת, במקום אינטרפולציה ליניארית אפשר לעשות אינטגרציה פרבולית (ע״י סימפסון).

$x_1$

$x_2 = x_1 + h$

$x_3 = x_1 + 2h$




$f(x) \sim L_2[f](x)$

$$simpson: \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{6}\left[f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)\right] - \frac{f^{(4)}}{90}\cdot h^5$$

**נשווה בין האלגוריתמים:**

טרפז- דרגת קירוב: 3, דרגת דיוק אלגברי: 1

סימפסון- דרגת קירוב: 5, דרגת דיוק אלגברי: 2

בקטעים גדולים, לעומת זאת, נחלק את הקטע למספר קטעים, ונשתמש בנוסחאות גלובליות.

**טרפז גלובלי:**

$$\frac{h}{2}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

דיוק אלגברי: 1

דרגת קירוב: השגיאה היא $\frac{f''(\xi)}{12}\cdot\sum_{i=1}^{n} h^3 = \frac{f''(\xi)}{12}\cdot nh^3 = \frac{f''(\xi)}{12}\cdot(b-a)h^2$

ולכן דרגת הקירוב היא 2.

סימפסון גלובלי:

$$S = \frac{h}{6}\left[f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \ldots + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

פקודות לחישוב אינטגרלים ב-*Maple* וב-*Matlab*:

***Matlab:***

$quad('\_\_\_', a, b)$

$quadl('\_\_\_', a, b)$

$integral('\_\_\_', a, b)$

(מכוון ש-*Matlab* עובדת רק עם חישובים נומריים, אין אפשרות לחשב אינטגרל לא מסוים).

***Maple:***

$\text{int}(\_\_\_, x = a..b)$

$\text{int}(\_\_\_, x)$

(הפקודה הראשונה היא חישוב אינטגרל מסוים, והשנייה היא חישוב אינטגרל לא מסוים).