# אלגוריתם בלמן-פורד

```
Bellman-Ford(G,w,s)
    Initialize-Single-Source(G,s)
    For i←1 to |V[G]| - 1 do
        For each edge (u,v)∈E[G]
            Relax(u,v,w)
    For each edge (u,v)∈E[G] do
        If d[v]>d[u]+w(u,v)
            Return false
    Return true
```

<u>סיבוכיות</u>: $O(VE)$.

<u>למה</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$, יהי $s\in V$ קדקוד מקור, ונניח ש-G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s. אזי עם עצירת האלגוריתם מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$ לכל קדקוד v שנגיש מ-s.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באמצעות תכונת הקלת המסלול. יהי v קדקוד כלשהו ב-G הנגיש מ-s, ויהי $p=(v0,\ldots,vk)$, כאשר $v0=s$ ו-$vk=v$, מסלול קצר ביותר כלשהו מ-s ל-v. כיוון שמסלולים קצרים ביותר הם פשוטים (לא מכילים מעגלים), הרי שב-p יש לכל היותר $|V|-1$ קשתות, כלומר $k\leq|V|-1$. כל אחת מ-$|V|-1$ האיטרציות של האלגוריתם מבצעת הקלה על כל קשתות הגרף, ולכן באיטרציה ה-i תבוצע הקלה על הקשת $(vi-1,vi)$ עבור $i=1,2,..,k$. מכאן נקבל לפי תכונת הקלת המסלול ש-$d[v]=d[vk]=\delta(s,vk)=\delta(s,v)$.

<u>מסקנה</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$, יהי $s\in V$ קדקוד מקור, ונניח ש-G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s. אזי לכל קדקוד $v\in V$ קיים מסלול מ-s ל-v אםם האלגוריתם עוצר עם $d[v]<\infty$ כשהוא מורץ על G.

<u>משפט (נכונות אלגוריתם בלמן-פורד)</u>

נניח שמריצים את אלגוריתם בלמן פורד על גרף $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$ מקדקוד מקור $s\in V$. אם G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s, אזי האלגוריתם מחזיר TRUE, מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$ לכל $v\in V$, ותת גרף הקודמים $G\pi$ הוא עץ המסלולים הקצרים המושרש ב-s. אם G מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s האלגוריתם יחזיר FALSE.

<u>הוכחה</u>:

נניח ש-G אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s. נוכיח תחילה כי בסוף ריצת האלגוריתם $d[v]=\delta(s,v)$ לכל הקדקודים $v\in V$. אם הקדקוד v נגיש מ-s הלמה הקודמת מוכיחה טענה זו. אם v לא נגיש מ-s הטענה מתקיימת בגלל תכונת האין מסלול. כלומר, בכל מקרה הטענה נכונה. נכונות טענה זו, גוררת לפי תכונת תת-גרף הקודמים ש-$G\pi$ הוא עץ המסלולים הקצרים המושרש ב-s.

כעת, נשתמש בטענה כדי להראות שהאלגוריתם מחזיר TRUE במצב זה. בסיום ריצת האלגוריתם מתקיים לכל קשת $(u,v)\in E$: $d[v]=\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+w(u,v)=d[u]+w(u,v)$, לכן בלולאת הבדיקה באלגוריתם לא יוחזר FALSE בבדיקה של אף קשת, ואם כן יוחזר לבסוף TRUE.

כעת, נניח שב-G יש מעגלים בעלי משקל שלילי הנגישים מ-s. יהי c=(v0,v1,…,vk) מעגל שכזה, כאשר v0=vk. מתקיים $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$
נניח בשלילה שהאלגוריתם החזיר TRUE במצב זה, כלומר, d[vi]≤d[vi-1]+w(vi-1,vi) עבור i=1,…,k. נסכום את כל האי שוויונים מסביב למעגל ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \le \sum_{i=1}^{k} \left(d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} (d[v_{i-1}]) + \sum_{i=1}^{k} \left(w(v_{i-1}, v_i)\right) =$$

מכיוון ש-v0=vk הרי שכל קדקוד ב-c מופיע בדיוק פעם אחת בסכומים $\sum_{i=1}^{k} d[v_i]$ ו-$\sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$, לכן: $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$
יתרה מכך, המסקנה הקודמת מבטיחה ש-d[vi] סופי עבור i=1,..k, לכן נקבל $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \ge 0$ בסתירה לכך שמדובר במעגל בעל משקל שלילי. מש״ל.