סיבוכיות- תרגול 2

<u>הגדרה:</u> יחס R נקרא <u>חסום פולינומית</u> אם קיים פולינום $p(\cdot)$ כך שלכל $(x,y) \in R$ מתקיים $|y| \le p(|x|)$.

<u>בעיות חיפוש הניתנות לפתרון פולינומי</u>

עבור יחס R, נאמר כי $R \in PF$ אם:

1. R חסום פולינומית.
2. קיים אלגוריתם פולינומי כך שבהנתן x מחזיר y כך ש-$(x,y) \in R$, או $\perp$ אם לא קיים y כזה.

<u>בעיות חיפוש הניתנות לבדיקה פולינומית</u>

עבור יחס R, נאמר כי $R \in PC$ אם:

1. R חסום פולינומית.
2. קיים אלגוריתם פולינומי כך שבהנתן זוג (x,y) מחזיר 1 אם"ם $(x,y) \in R$.

<u>בעיות הכרעה הניתנות לפתרון פולינומי</u>

עבור קבוצה S, נאמר כי $S \in P$ אם קיים אלגוריתם פולינומי כך שבהנתן x מחזיר 1 אם"ם $x \in S$.

<u>בעיות הכרעה בעלות מערכת הוכחה פולינומית</u>

עבור קבוצה S, נאמר כי $S \in NP$ אם קיים פולינום $p(\cdot)$ ואלגוריתם פולינומי V המקיים:

1. לכל $x \in S$ קיים y כך ש-$|y| \le p(|x|)$ ו-$V(x,y) = 1$.
2. לכל $x \notin S$ ולכל y מתקיים $V(x,y) = 0$.

<u>הגדרה:</u> עבור יחס R, נגדיר את הקבוצה המתאימה $S_R = \{x \mid \exists y, (x,y) \in R\}$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו או הפריכו:

א. לכל יחס R מתקיים $R \in PC \Longleftarrow S_R \in NP$.
ב. לכל יחס R חסום פולינומית מתקיים $S_R \in NP \Longleftarrow R \in PC$.

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה: $R \in PC$ ולכן קיים פולינום $p(\cdot)$ החוסם את R וקיים אלגוריתם פולינומי A המקיים $A(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in R$. נשים לב כי:
   1. $x \in S_R \Longleftarrow$ לפי הגדרת הקבוצה קיים y, $|y| \le p(|x|)$, כך ש-$(x,y) \in R$, ולכן $A(x,y) = 1$.
   2. $x \notin S_R \Longleftarrow$ לכל y מתקיים $(x,y) \notin R$ ולכן $A(x,y) = 0$.

ב. הפרכה: נגדיר את היחס $R = \{(x,y) \mid (x \in \Sigma^* \wedge y = 0) \vee (x \in A_{TM} \wedge y = 1)\}$.
$S_R = \Sigma^* \in NP$ אבל $R \notin PC$ מכיוון שעבור קלטים מהצורה $(x,1)$ לא קיים אלגוריתם המכריע שייכות ל-R.

<u>רדוקצית קוק:</u> רדוקצית קוק מבעיה A לבעיה B הינה אלגוריתם פולינומי הפותר את בעיה A בהנתן קופסה שחורה הפותרת את בעיה B.

<u>רדוקצית קארפ:</u> רדוקצית קארפ מבעית הכרעה S לבעית הכרעה S' הינה פונקציה f הניתנת לחישוב בזמן פולינומי ומקיימת $x \in S \Leftrightarrow f(x) \in S'$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו או הפריכו: לכל שתי בעיות הכרעה S, S' אם קיימת רדוקצית קוק מ-S ל-S', אז קיימת רדוקצית קארפ מ-S ל-S'.

<u>פתרון:</u> נגדיר $S = \emptyset, S' = \Sigma^*$. קיימת רדוקצית קוק ע"י האלגוריתם שמחזיר 0 לכל קלט (אינו משתמש כלל בקופסה השחורה המכריעה את S'). אבל לא קיימת רדוקצית קארפ מ-S ל-S'.

<u>הגדרה:</u> עבור בעית הכרעה S, נאמר כי S היא NP-קשה אם לכל בעיה $S' \in NP$ קיימת רדוקצית קארפ מ-S' ל-S. נאמר כי S היא NP-שלמה אם בנוסף מתקיים $S \in NP$.

<u>תרגיל:</u> תחת ההנחה כי $P \neq NP$, הוכיחו או הפריכו:

א. תהי $S \in NPC$ ותהי S' המקיימת $S \subseteq S'$. אזי $S' \in NPC$.
ב. המחלקה NPC סגורה תחת איחוד.
ג. נגדיר את $\text{BIG-CLIQUE} = \{G \mid G \; contains \; a \; clique \; of \; size \; n-4\}$. מתקיים כי BIG-CLIQUE ∈ NPC.

<u>פתרון:</u>

א. הפרכה: $S = SAT$ ו-S' תהיה כל הנוסחאות בצורת CNF.
ב. הפרכה: נגדיר $S_1 = \{(\phi, k) \mid \phi \in SAT \vee k \; is \; odd\}$, $S_2 = \{(\phi, k) \mid \phi \in SAT \vee k \; is \; even\}$.
ג. הפרכה: ניתן להראות כי BIG-CLIQUE ∈ P ע"י בדיקת כל קבוצות הקודקודים בגודל $n-4$.