בס״ד

<u>משפט היררכיית המקום</u>

תהי $G(n)\geq \log n$ כך ש-$G(n)$ היא space constructible, ותהי $g(n)$ כך ש-$g(n)=o(G(n))$. מתקיים – $SPACE(g(n))$ היא תת-קבוצה ממש של $SPACE(G(n))$.

<u>הוכחה</u>:

מספיק להראות כי קיימת שפה L, כך ש-$L\in SPACE(G(n))$ אבל $L\notin SPACE(g(n))$. נגדיר את השפה L ע״י מכונה M_L המכריעה אותה תוך שימוש ב- $O(G(n))$ מקום.

בהינתן קלט $w=<M, y>$, כך ש-$|w|=n$ המכונה M_L תפעל באופן הבא:

1. הרץ את $M(w)$ למשך לכל היותר $2^{2G(n)}$ עם לכל היותר $G(n)$ מקום לרשותה (אלה מגבלות שאנו מטילים על M).
2. אם $M(w)$ מקבלת במסגרת מגבלות הזמן והמקום של צעד 1 - דחה. אחרת – קבל.

בצעד מס׳ 1, אנו יכולים לנצל את העובדה ש-G היא space constructible ולסמן את ה-$G(n)$ תאים בסרט העבודה בהם יכולה המכונה M להשתמש. באופן דומה, ניתן לסמן עוד $2G(n)$ תאים בסרט העבודה שישמשו כמונה לספירת הצעדים ש-M מבצעת ע״מ שנוכל להגביל את זמן ריצתה. קבוצה נוספת של $G(n)$ תאים בסרט העבודה תספיק לביצוע יתר החישובים. בהתאם לכך, M_L רצה ע״י שימוש במקום בגודל $4G(n)$.

כעת, נדרש להראות שאף מכונה המשתמשת ב-$O(g(n))$ מקום אינה יכולה להכריע את L. נניח בשלילה כי קיימת מכונה M'_L המכריעה את L תוך שימוש ה-$g'(n)$ מקום כך ש-$g'(n)=O(g(n))$.

נבחר k גדול מספיק, כך שיתקיימו הדברים הבאים:

1. $g'(k)<G(k)$.
2. M'_L מבצעת פחות מ-$2^{G(k)}$ צעדים על קלטים מאורך k (התנאי בר השגה, כיוון ש-M'_L רצה למשך לכל היותר $2^{O(g(n))}$ צעדים).
3. הסימולציה של M'_L על קלטים באורך k יכולה להתבצע תוך שימוש ב-$G(k)$ מקום (התנאי בר השגה, כיוון שניתן לבצע סימולציה אוניברסלית ע״י תקורה של מקום בגודל קבוע).

נתבונן בקלט $w=(M'_L,1^k)$. מתקיים:

1. אם נריץ $M_L(w)$ הרי של-M_L יש די מקום וזמן לסמלץ את הריצה המלאה של M'_L על w.
2. M_L תחזיר על הקלט w תוצאה הפוכה לזו שמחזירה M'_L על w.

לאור זאת נסיק כי M'_L ו-M_L אינן מכריעות את אותה השפה. כלומר, M'_L אינה מכריעה את L.