Шпоры по математическому анализу.

1. Разбиения множеств в $\mathbb{R}^n$ (определение, свойства)

Опр. 1 *Разбиением τ мн-ва $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ назыв. семейство мн-в $\mathcal{S}_\alpha$, таких что:*

- *$\forall \alpha, \beta : \mu(\mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}_\beta) = 0$, где μ - мера Жордана.*
- *$\bigcup_\tau \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$ Обознач. : $\{\tau_k\}, \tau_k = \{\mathcal{S}_{k,1}, \mathcal{S}_{k,2}, \ldots, \mathcal{S}_{k,j_k}\}$*

2. Измеримые множества в $\mathbb{R}^n$ (определение, критерий)

Определение

Опр. 2 *Множество $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют измеримым (по Жордану), если $\lim_{k\to\infty} \mu(\mathcal{S}_k) < +\infty$, где μ - мера Жордана. При этом полагают, что $\mu(\mathcal{S}) = \lim_{k\to\infty} \mu(\mathcal{S}_k)$.*

Критерий

Теор. 1 *Мн-во $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ измеримо $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}$ - огранич. и $\exists \mu(\delta\mathcal{S}) = 0$.*

3. Интегральные суммы и суммы Дарбу в $\mathbb{R}^n$

Опр. 3 *Пусть $b : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тогда величина $\mathcal{I}(b, \tau_k, \xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \ldots, \xi_{k,j_k}) = \sum_{j=1}^{j_k} b(\xi_{k,j})\mu(\mathcal{S}_{k,j})$ называется интегральной суммой(Римана) для функции b, соотв. разбиению τ_k.*

Опр. 4 *Обозначим $\tau = \{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\mathcal{M}_k = sup_{x\in\mathcal{S}_k} b(x)$; $m_k = inf_{x\in\mathcal{S}_k} b(x)$; Тогда величины: $\overline{\overline{\mathbb{S}}}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_k \mu(\mathcal{S}_k)$ и $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(\mathcal{S}_k)$ называют соответственно верхней нижней суммой Дарбу для ф-ии $b(x)$, соотв. разбиению τ.*

4. Кратный интеграл Римана(определение, свойства)

Опр. 5 *Если $\exists \mathcal{I} = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}(b, \tau_k, \xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \ldots, \xi_{k,j_k})$, не зависящий:*

- *От выбора $\{\tau_k\}$ с $|\tau_k| \to 0$*
- *От выбора $\xi_{k,j}$*

То ф-ю b называютинтегрируемой по Риману на мн-ве $\mathcal{S}$, а величину $\mathcal{I}$ назыв. интегралом Римана от ф-ии b по мн-ву $\mathcal{S}$. Обозн. : $\int_{\mathcal{S}} b(x)dx$ или $\int \int \ldots \int b(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$.

Свойства кратного интеграла Римана:

- 1) Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо. Тогда $\int_{\mathcal{S}} dx = \mu(\mathcal{S})$.
- 2) Линейность. $\int_{\mathcal{S}} (\alpha b(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_{\mathcal{S}} b(x)dx + \beta \int_{\mathcal{S}} g(x)dx$; $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$; $b, g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 3) $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо. $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ - ограничено, где $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ - мн-во всех функций инегрируемых по Риману на $\mathcal{S}$. Тогда $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S}')$.
- 4) Аддитивность по мн-ву. Пусть $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$ - измеримы.; $\mu(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = 0$; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_1) \cap \mathcal{R}(\mathcal{S}_2)$ - ограничено. Тогда $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$ и $\int_{\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} b(x)dx = \int_{\mathcal{S}_1} b(x)dx + \int_{\mathcal{S}_2} b(x)dx$.
- 5) Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $b, g \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$; Если $inf_{x\in\mathcal{S}} |g(x)| > 0$, то $\frac{b}{g} \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$.
- 6) Монотонность. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $b, g \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$; $\forall x \in \mathcal{S} b(x) \geq g(x)$; Тогда $\int_{\mathcal{S}} b(x)dx \geq \int_{\mathcal{S}} g(x)dx$.
- 7) Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ - огр.; Тогда $|b| \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$, причем $|\int_{\mathcal{S}} b(x)dx| = \int_{\mathcal{S}} |b(x)|dx$.
- 8) Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ - огр.; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ - огр.; $\forall x \in \mathcal{S} b(x) \geq 0$; $\exists x_0 \in \mathcal{S} : b(x_0) > 0$ и b непрерывно в x_0. Тогда $\int_{\mathcal{S}} b(x)dx > 0$.
- 9) Полная аддитивность. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $\{\mathcal{S}_k\}_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$; Тогда $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{S}_n} b(x)dx = \int_{\mathcal{S}} b(x)dx$.
- 10) Теорема о среднем. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; b - непр. и огр. в $\mathcal{S}$; Тогда $\exists x_0 \in \mathcal{S} : \int_{\mathcal{S}} b(x_0)dx = b(x_0)\mu(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} b(x)dx$.

5. Критерии интегрируемости ф-й в $\mathbb{R}^n$

Критерий Дарбу.

Теор. 2 *Если $\exists \mathcal{I} = inf_\tau \overline{\overline{\mathbb{S}}}(\tau) = sup_\tau \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\tau) < \infty$ по всем разбиениям τ измеримого мн-ва $\mathcal{S}$ для ф-ии $b : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \Leftrightarrow b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ и $\int_{\mathcal{S}} b(x)dx = \mathcal{I}$.*

Критерий Лебега.

Теор. 3 *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ - измеримо; $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ - огр.; $\exists \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S} : \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \phi; \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$; b - непрерывно на $\mathcal{S}_1, \mu(\mathcal{S}_2) = 0$. Тогда и только тогда $b \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$.*

6. Сведение кратного интеграла к повторному

Теор. 4 *Пусть $\mathcal{S}-$ стандартная область относительно O_y; $b : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ - непр; Тогда (1) $\int\int_{\mathcal{S}} b(x,y)dxdy = \int_a^b dx(2) \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} b(x,y)dy$, где (1) - существует по крит. Лебега, а (2) - $F(x)$ - непр.*

7. Замена переменных в кратном интеграле (2 теоремы)

Теор. 5 *Если X измеримое мн-во со своим замыканием $G : \overline{X} \subset G \subset \mathbb{R}_x^n$, $F : G \to \mathbb{R}_x^n$ - непр. диффер. отображение с якобианом $\mathcal{J}_F \neq 0$, а функция f непр. на мн-ве $\overline{F(X)}$, то: то: $\int_{\overline{F(X)}} b(y)dy = \int_{\overline{X}} b(F(x)|\mathcal{J}_F(x)|dx$.*

$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} b(y)dy = \{y = \phi(x)\} = \int_a^b b(\phi(x))\phi'(x)dx$

Теор. 6 *Пусть $F : G \subset \mathbb{R}_x^n \to \mathbb{R}_y^n$:*

- *Взаимно однозначно.*
- *Непр. дифф.*
- *якобиана $\mathcal{J}_F \neq 0 G$.*
- *F и $\mathcal{J}_F$ непр. продолжены на $\overline{G}$.*
- *f непр. непрерывна на $G* := F(G)$ и непр. продолжаема на $\overline{G*}$*

Тогда $\int_{G*} f(y)dy = \int_G f(F(x))|\mathbb{J}_F(x)|dx$

Док-во: Так как $G*$ измеримо, то $\overline{G*}$ - измеримый компакт, и продолжение $f*$ ф-ии f интегр. на нём в силу непр., а след., и f интегр на $G*$. Аналог. док. интегр. $f(F(x))|\mathbb{J}_F(x)|$ на G. Представим G в виде объед. монотонной послед. измеримых открытых мн-ств $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$, где $\overline{G_k} \in G_{k+1}, k \in \mathbb{N}$. Применяя предыдущую теор. получим $\int_{F(G_k)} f(y)dy = \int_{G_k} f(F(x))|\mathbb{J}_F(x)|dx$ В силу полной аддаптивности интеграла имеем $\lim_{k\to\infty} \int_{G_k} f(F(x))|\mathbb{J}_F(x)|dx = \int_G f(F(x))|\mathbb{J}_F(x)|dx$. Так как мн-ва $F(G_k)$ также открыты и $G* = \bigcup_{k=1}^n F(G_k), \overline{F(G_k)} \in F(G_{k+1}), k \in (N)$, то аналог. получаем $\lim_{k\to\infty} \int_{F(G_k)} f(y)dy = \int_{G*} f(y)dy$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в 1 равенстве получаем равенство теоремы. ■

8. Криволинейный интеграл 1-го рода (определение, свойства)

Опр. 6 *Пусть - $\mathcal{L} = \{M(s) : 0 \leq s \leq S\}$, где $M(s) = (x(s), y(s), z(s))$ - уравнение линии.; $b(x,y,z)$ - ф-я. Тогда $\int_{\mathcal{L}} bds := \int_0^S b(x(s), y(s), z(s))ds$ - криволинейный интеграл 1-го рода, а $\mathcal{L}$ - путь интегрирования.*

Св-ва:

- Если b - непр. на $[0, S]$, т.е на $\mathcal{L}$, тогда $\exists \int_{\mathcal{L}} bds$;
- $\int_{\mathcal{L}} bds$ не зависит от направления обхода.
- Пусть ϕ, ψ, ξ - непр. дифф на $[a, b]$; $\exists [\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2 \neq 0 \forall t \in [a, b]$; Тогда $\int_{\mathcal{L}} bds = \int_a^b b(\phi(t), \psi(t), \xi(t))\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2}d$

9. Криволинейный интеграл 2-го рода (определение, свойства)

Опр. 7 *Пусть $L = AB$ - гладкая ориентированная кривая; $\overline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), 0 \leq s \leq S$ - её векторное представление, $A = r(0), B = r(S)$; $\overline{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ - вектор функция. Тогда $\int_{AB} \overline{a}d\overline{r} = \int_{AB} \overline{ar}ds$ - криволинейный интеграл 2-го рода.*

Св-ва:

- Если ф-ии P, Q, R - непрерывны, то интеграл существует.
- При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак.
- Пусть $x(t), y(t), z(t), a \leq t \leq b$ - векторное представление гладкой кривой L. Тогда $\int_L \overline{a}d\overline{r} = \int_a^b \overline{ar}dt$.

10. Формула Грина и её следствие

Теор. 7 *Пусть G - элемент. область; $P, Q : G \to \mathbb{R}$; $P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ - непрерывны в G. Тогда для крив. инт. 2-го рода вида $\oint Pdx + Qdy$ имеет место формула Грина: $\oint_G Pdx + Qdy = \int\int_G (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y})dxdy$.*

Следствие: Пусть G - обл. огр. простым замкн. контуром, кот. можно разбить на конечн. число элем. областей. $P, Q : G \to \mathbb{R}; P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ - непрерывны в G. Тогда имеет место формула Грина.

11. Поверхности и их ориентация. Площадь поверхности

Поверхность.

Опр. 8 *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$. *Тогда поверхностью* $\mathbb{S}$ *называют отображение* $\overline{r}: G \to \mathbb{R}^3_{x,y,z}$. *Обозн.* $\overline{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$.

Ориентация.

Опр. 9 *Если на поверхн.* $\mathbb{S}$ *можно задать непрерывное поле нормали* $\overline{\delta}(u,v)$, *то такую поверхность называют ориентированной, а само такое поле - ориентацией.*

Площадь поверхности $\mathbb{S}$ можно вычислить по формуле Грина: $S(\mathbb{S}) = \frac{1}{2}\int_{\delta\mathbb{S}} xdy - ydx$.

12. Поверхностный интеграл 1-го рода

Опр. 10 *Поверхностным интегралом первого рода от ф-ии* b *по поверхности* $\mathbb{S}$ *называется интеграл вида:* $\int\int_{(\mathbb{S})} bds = \int\int_D b(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) * \sqrt{g_{11}(u,v)g_{22}(u,v) - g_{12}^2} dvdu$, *где* $g_{11}(u,v) = |\overline{r}_u|^2, g_{22}(u,v) = |\overline{r}_v|^2, g_{12} = |\overline{r}_u * \overline{r}_v|$.

13. Поверхностный интеграл 2-го рода

Опр. 11 *Поверхностным интегралом второго рода называется интеграл вида:* $\int\int_{\mathbb{S}+} \overline{a\delta}ds = \int\int_{\mathbb{S}+}(Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds = \int\int_{\mathbb{S}+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$.

14. Формула Гаусса-Остроградского

Теор. 8 *Пусть* $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ *- область, элементарная относительно* Ox, Oy, Oz; $\mathbb{S} = \delta\mathcal{S}$ *- замкнутая кусочно-гладкая поверхность;* $\mathcal{S} = (x,y) \in D, \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)$, *где* $\phi, \psi : D \to \mathbb{R}$ *- непрерывн. ф-ии и* $\forall (x,y) \in D : \phi(x,y) \le \psi(x,y)$ *- элем. обл. отн. оси* Oz. *Тогда* $\int\int_{\mathbb{S}+}(Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS = \int\int\int_{\mathcal{S}} div\overline{a}dxdydz$, *где* $div\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

15. Формула Стокса

Теор. 9 *Пусть* $\overline{a} \in C^1(s), b \in C^2(\overline{G})$. *Тогда имеет место формула Стокса* $\oint_{T+} \overline{a}ds = \int\int_S \overline{\delta}rot\overline{a}ds$.

16. Градиент, дивергенция, ротор

Градиент

Опр. 12 $\nabla b(x,y,z) = grad\ b(x,y,z) = \{\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial z}\} = \frac{\partial b}{\partial x}i + \frac{\partial b}{\partial y}j + \frac{\partial b}{\partial y}k$ *- градиент скалярного поля* b.

Дивергенция

Опр. 13 *div* $\overline{a}(x,y,z) = \nabla\overline{a}(x,y,z) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial y}$ *- дивергенция скалярного поля* $\overline{a}$.

Ротор

Опр. 14 *Пусть* $\overline{a}(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) + R(x,y,z)$, *тогда rot*
$$\overline{a}(x,y,z) = \nabla \times \overline{a}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})i - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})j + (\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y})k$$
- ротор (вихрь) векторного поля $\overline{a}$

17.Потенциальные и Соленоидальные поля (определения, условия)

Соленоидальные:

Опр. 15 *Вект. поле* $a : G \to \mathbb{R}^3$ *наз. соленоидальным, если поток этого поля через любую кусочно-гладкую пов-сть.* S, *ограничивающую область* $G' \subset G$ *равен 0.*

Условие соленоидальности

Теор. 10 *Непр. дифф. поле* $a : G \to \mathbb{R}^3$ *соленоидально тогда и только тогда, когда* $\forall M \in G : div\ a(M) = 0$.

Док-во: *Необходимость: пусть поле a соленоидально. Тогда по Th. о геом. смысле дивергенц.:* $\forall M \in G$ *div* $a(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{\iint_{S_n = G_n} ad\overline{s}}{\mu(G_n)} = 0$, *где* $\iint_{S_n = G_n} ad\overline{s} = 0$ *по опр. соленоидальности. Доказательство достаточности следует из ф-лы Гаусса-Остроградского.* ■

Потенциальные:

Опр. 16 *Поле* $\overline{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \overline{a} : D \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *назыв. потенциальным если* $\exists U : D \to \mathbb{R}$ *- потенциальная ф-я, такая что* $\nabla U(x,y,z) = \overline{a}(x,y,z)$, *т.е* $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z)$ *и т.д*

1-й критерий потенциальности

Теор. 11 *Неп. дифф. вект. поле* $\overline{a} : D \to \mathbb{R}^3$ *явл. потенциальным если криволинейный инт. второго рода* $\int_{\mathcal{L}} \overline{a}d\overline{s}$ *- не зависит от напр. пути* $\mathcal{L} \in D$, *а зависит только от его начальнойи конечной точки. При этом* $\int_{\mathcal{L}} \overline{a}d\overline{s} = U(M) - U(M_0)$.

2-й критерий потенциальности

Теор. 12 *Неп. дифф. вект. поле* $\overline{a} : D \to \mathbb{R}^3$, *где D - односвязно, явл. потенциальным если* $\forall M \in D : rot\ \overline{a}(M) = 0$.

Док-во: *Необходимость: Расписать ротор от поля* $\overline{a}$ *как градиента потенциальной ф-ии, т.е ротор от вектор-функции, составленной из записей частных производных потенциальной ф-ии* $\overline{a}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$. *Далее необходимо показать, что в силу равенства частных проиводных второго порядка, ротор становится равен* $0i + 0j + 0k$ *т.е нулю. Достаточность следует из формулы Стокса.* ■

18. Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток.

Пусть: $(1)\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность; $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; \ldots; S_n = a_1 + \ldots + a_n; (2)\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда пара числовых последовательностей (1) и (2) наз. числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При том S_n - наз. част. суммой. Если $S = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ то говорят, что ряд сходится(иначе расходится. S - называют суммой ряда. Ряд вида $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ называют остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$.

19. Необходимое условие сходимости числового ряда.

Теор. 13 *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- сходится, то* $lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

Док-во: $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}; \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$; ■

20. Расходимость гармонического ряда.

Теор. 14 *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *- расходится.*

Док-во: *По критерию коши, для сходимости этого ряда необходимо и достаточно:* $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon, \forall p > 0 :$ $\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right| < \varepsilon$. *Возьмем* $\varepsilon = \frac{1}{2}; p = n$. *Тогда:* $\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2} = \varepsilon$. *Критерий не выполняется, следовательно ряд расходится.* ■

21. Признаки сходимости числовых рядов

Признак сравнения:

Теор. 15 *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...(A)$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...(B)$; *Если, начиная с некоторого номера* $N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ *вып. неравенство вида:* $0 \le a_n \le b_n$. *Тогда: если сходится (B) то сходится и (A), если расходится (A) то расходится и (B);*

Док-во: $S_n^{(A)} \le S_n^{(B)}$ *следует из усл.* $0 \le a_n \le b_n$. *Пусть (B) - сход. Тогда* $S_n^{(B)}$ *- огранич. а значит и* $S_n^{(A)}$ *- ограничено. Следовательно ряд (A) - сход. 2-е можно доказать от противного к первому.* ■

Предельный признак:

Теор. 16 *Пусть даны два ряда с неот. членами:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...(A)$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...(B)$; *Если существует предел:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K 0 < K < +\infty$, *тогда ряды (A) и (B) сходятся или расходятся одновременно.*

Док-во: *Докажем для сходимости в одну сторону: Пусть ряд (B) сходится. Из опр. предела:* $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \Leftrightarrow K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$. *Из неравенства получим:* $a_n < b_n(K + \varepsilon)$.*Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(K + \varepsilon)$ *сходится, так как это ряд полученный умножением членов ряда (B) на постоянное число* $K + \varepsilon$. *Тогда по признаку сравнения ряд (A) сходится.* ■

22. Признак Даламбера сходимости числового ряда.

Теор. 17 *Пусть дан ряд с неот. членами:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... a_n > 0$ *Если начин. с нек. номера* $n_0 \epsilon \mathbb{N} \forall n > n_0$ *вып. нерав.* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 q \epsilon \mathbb{R}$, *то ряд сходится. Если* $\exists n_0 \epsilon \mathbb{N} : \forall n > n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *то ряд расходится.*

Док-во: *Рассм. нерав.* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ *для n=1 и n=2.* $n = 1 : \frac{a_2}{a_1} \leq q \Leftrightarrow a_2 \leq q * a_1$; $n = 2 : \frac{a_3}{a_2} \leq q \Leftrightarrow a_3 \leq q * a_2 \leq q^2 * a_1$; *След.* $\forall n$ *будет справ. нерав.* $a_n \leq q^{n-1} * a_1$. *При этом ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} * a_1$ *явл. сход., значит по признаку сравнения ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже сход. Если* $fraca_{n+1}a_n \geq 1$, *то справ. нерав.* $a_{n+1} \geq a_n > 0$, *что против. необх. усл. сходимости ряда* $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$. *Значит ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.* ■

23. Радикальный признак Коши

Теор. 18 *Пусть дан ряд с неотрицательными слагаемыми:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... a_n \geq 0$; *Если начиная с номера* $n_0 \epsilon \mathbb{N} \forall n > n_0$ *вып. нерав.* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 q \epsilon \mathbb{R}$, *то ряд сход. Если* $\exists n_0 \epsilon \mathbb{N} : \forall n > n_0 \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *то ряд расход.*

Док-во: *Пусть* $\exists n_0 \epsilon \mathbb{N} : \forall n > n_0 \sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n$. *Так как* $0 < q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ *будет сход., а значит по призн. сравнения ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *так же сход. Если* $\exists n_0 \epsilon \mathbb{N} : \forall n > n_0 \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1$, *что против. необх. условию сходимости* $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$. *Значит ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.* ■

24. Интегральный признак сходимости. Сходимость обощенного ряда Дирихле.

Интегральный признак.

Теор. 19 *Пусть функция f определенная при всех* $x \geq 1$, *неотриц. и убыв., тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Док-во: *Т.к ф-я монотонна на* $(1, +\infty)$ *то она инт. по Риману. Если* $k \leq x \leq k+1$, *тогда* $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), k = 1, 2, ...$ *(функция убыв.). Проинт. это нерав.* $[k, k+1]$ *имеем:*

$f(k) \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), k = 1, 2, ...;$

Суммируя от $k = 1$ *до* $k = n$ *получим:*

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k+1);$

Положим $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, *будем иметь*

$s_n \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \geq s_{n+1} - f(1) n = 1, 2, ...;$

Если интеграл сход, то в силу неотрици f справ. неравенство:

$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$. *Отсюда следует:*

$s_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, *следовательно, т.к последовательность частичных сумм ограничена сверху, то ряд сходится.* ■

Сходимость обощенного гарм. ряда(ряда Дирихле):

Теор. 20 *Ряд вида* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *расходится при всех* $\alpha \leq 1$ *и сходится при всех* $\alpha > 1$.

Док-во: *При* $\alpha = 1$ *получаем гарм. ряд, а он расходится. При* $0 < \alpha < 1$ *имеем:* $S_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} \geq n \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} = n^{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$; *Из этого следует, что* $S_n(\alpha) \to +\infty$, *а из этого следует расходимость ряда. Рассмотрим случай* $\alpha > 1$. *Выберем такое натуральное m, что* $n < 2^m$. *Тогда имеем:* $S_n(\alpha) \leq S_{2^m-1}(\alpha) = 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^{\alpha}} + \frac{1}{(2^{m-1}+1)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^{\alpha}}\right) \leq 1 + 2^{1-\alpha} + (2^2)^{1-\alpha} + \cdots + (2^{m-1})^{1-\alpha} = 1 + 2^{1-\alpha} + (2^{1-\alpha})^2 + \cdots + (2^{1-\alpha})^{m-1} = \frac{1-(2^{1-\alpha})^m}{1-2^{1-\alpha}}$. *Отсюда следует, что при* $\alpha > 1$ *имеем* $S_n(\alpha) \leq \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}$, *т.е. посл. частич. сумм ограниченна сверху, и по теореме о сходимости рядов с неот. членами ряд сход. при* $\alpha > 1$. ■

25. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остаточного члена.

Опр. 17 *Числовой ряд вида* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1}u_n + ...$, *где* u_n *- это модуль члена ряда, называется знакочередующимся числовым рядом.*

Теор. 21 *Если для знакочеред. ряда* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1}u_n + ...(*)$ *Выполняются два условия: 1) Члены ряда монот. убыв. по модулю* $u_1 > u_2 > ... > u_n > ...$ *2)*$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *то ряд (*) сходится, при этом сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.*

Док-во: *Част. сумму чётного порядка запишем так:* $S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n})$. *По условию* $u_1 > u_2 > ... > u_{2n-1} > u_{2n}$, *след. все разн. в скобках положительны, значит,* S_{2n} *увелич. с возрастанием n и* $S_{2n} > 0$ *при любом n.Если переписать так* $S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + ... + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}]$. *Выраж. в скобках положю. и* $S_{2n} > 0$, *поэтому* $S_{2n} < u_1 \forall n$. *След. посл. частичных сумм* S_{2n} *ограничена и возрастает, след., существует конечный* $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. *При этом* $0 < S_{2n} \leq u_1$.*Переходя к частичной сумме нечётн порядка, имеем* $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$. *Перейдём в посл. равенстве к пределу при* $n \to \infty : \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$. *Таким образом, частичные суммы как чётного, так и нечётного порядка имеют один и тот же предел S, поэтому* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, *следовательно данный ряд сходится.* ■

Остаток знакочередующегося ряда по модулю всегда меньше первого отброш. члена.

26.Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Теорема о связи абсолютной и обычной сходимости.

Опр. 18 *Пусть ряд вида* $(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- знакопеременный, т.е количество отрицательных и неотрицательных* a_n *бесконечно. Тогда гооврят, что если сходится ряд вида* $(1) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *- то ряд сходится абсолютно. А если (1) - расходится, но сходится ряд (2), то ряд сходится условно.*

Связь абсолютной и условной сходимости:

Теор. 22 *Если сходится ряд (1), то сходится и ряд (2).*

Док-во: *Пусть* S_n *- частичная сумма ряда (2), а* α_n *- част. сумм. ряда (1); По условию, существует конеч. пред.* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, *при этом:* $(3) \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \alpha$; *Пусть* $S*_n$ *- сумма положительных, а* $S\&_n$ *- сумма отрицательных членов. Тогда:* $(4) : S_n = S*_n - S\&_n$; $(5) : \alpha_n = S*_n + S\&_n$. *Видн. что посл. не убывают. Из (5) след. что они огран.* $S*_n \leq \alpha_n \leq \alpha$ *и* $S\&_n \leq \alpha_n \leq \alpha$. *След. сущ.* $\lim_{n\to\infty} S*_n = S*$ *и* $\lim_{n\to\infty} S\&_n = S\&$. *Отсюда, в силу (4):* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S*_n - S\&_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S*_n - \lim\limits_{n\to\infty} S\&_n = S* - S\&$. *Значит ряд сходится.* ■

27. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов (без доказательства).

Дан ряд вида:

$(1) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$, где соотв. a_n и b_n - две числовых последовательности. Признак Дирихле:

Теор. 23 *Ряд (1) сходится, если: 1)Посл. част. сумм ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничена(т.е ряд сходится); 2) Последовательность* a_n *монотонно стремится к нулю.*

Признак Абеля:

Теор. 24 *Ряд (1) сходится, если: 1)Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится; 2) Последовательность* $\{a_n\}$ *- монотонна и ограничена.*

28. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость.

Опр. 19 *Пусть каждому* $n \in \mathbb{N}$ *ставится в соотв. ф-я* $f_n(x) : E \to \mathbb{R}$. *Тогда говорят, что* $\{f_n(x)\}$ *- функциональная последовательность. Выражение вида* $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *называют функциональным рядом.*

Поточечная сходимость:

Опр. 20 *Если в нек. точке* $x_0 \in E$ *(или некотором конечном числе таких точек) числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится, то говорят, что ряд сходится поточечно.*

Равномерная сходимость:

Опр. 21 *Ряд называется равномерно сходящимся на мн-ве E если последовательноть его частичных сумм* $S_n(x)$ *сходится на E. Иначе говоря:* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_{\varepsilon} \ \forall x \in E \Rightarrow |r_n(x)| < \varepsilon$, *где* $S_n(x) - S(x) = r_n(x)$ *- n-й остаток ряда.* $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

29. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

Теор. 25 *Если для функ. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно указать такой сход. числ. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что $\forall n \geq n_0$ и $\forall x \in \varepsilon$ вып. условие $|u_n(x)| \leq a_n$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E.*

Док-во: *Согласно условию $|u_n(x)| \leq a_n$ - $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in N$ и $\forall x \in \varepsilon$ вып. нерав. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Из сход. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что для него вып. условие Коши, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in N \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in N \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in N \forall x \in E \to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$, и в силу критерия Коши равн. сход. ряда этот ряд сход. равн. на множестве E. Абс. сход. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $\forall x \in \varepsilon$ следует из правого нерав. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$.* ■

30. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда (без доказательства).

Теор. 26 *Пусть все члены функ. ряда $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, а сам ряд равномерно сходится на этом отрезке. Тогда сумма ряда $S(x)$ будет непрерывной функцией на этом сегменте;*

31. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных рядов (без доказательства).

Почленное дифференцирование:

Теор. 27 *Пусть на $[a; b]$ задана посл. непрерывно дифф. ф-й $\{u_n\}$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход. в $x \in [a; b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сход. равномерно на $[a; b]$. Тогда исходный $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равном. сход. на всем $[a; b]$, его сумма явл. непрерывно дифф. ф-й и справ. равенство $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ $(x \in [a; b])$.*

Почленное интегрирование:

Теор. 28 *Пусть $\{u_n\}$ — послед. непрерыв. на $[a; b]$ ф-й такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход. равномерно на $[a; b]$. Тогда справ. равенство: $\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx;$*

32. Степенные ряды. Теорема Абеля.

Опр. 22 *Ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, называется степенным рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. Так-же имеет место степ. ряд сл. вида: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$*

Теорема Абеля:

Теор. 29 *Если степ. ряд: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0 \neq 0$, то он абс. сход. $\forall z : |z| < |z_0|$.*

Док-во: *Пусть: $K = \{z : |z| < |z_0|\}$; $\rho = \frac{|z|}{|z_0|}, \rho < 1$; Из сходимости ряда (1) в точке z_0 следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n$, отюсда по небх. усл. $lim_{n \to \infty} a_n z_0^n = 0$; Тогда посл. $a_n z_0^n$ - огр., т.е $\exists M > 0 \; \forall n : \left|a_n z_0^n\right| < M$. Имеем: $|a_n z^n| = |a_n z^n| \cdot \left|\frac{z_0^n}{z_0^n}\right| = \left|a_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n}\right| = \left|a_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| = \left|a_n z_0^n\right| \rho^n < M \rho^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \rho^n$ сходится, т.к $\rho < 1$. Отсюда по призн. сравнения ряд (1) сходится в поставленных границах.* ■

33. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

Опр. 23 *Областью называют область определения ф-ии $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, т.е мн-во таких точек, в которых ряд сходится. Если эта область представима в виде $[x_0 - R, x_0 + R], R > 0$, то такую область называют интервалом сходимости, а R - радиусом сходимости. Притом сходимость в граничных точках должна быть проверена отдельно.*

Вычисление радиуса: 1)По формуле из рад. призн. Коши $R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$; 2)По форм. из призн. Даламбера: $R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

34. Ряды Тейлора и Маклорена. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора (без доказательства).

Опр. 24 *Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ - беск. дифф в т. x_0. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называют рядом Тейлора(при x_0 рядом маклорена) ф-ии $f(x)$ в т.x_0.*

Дост. усл. разложимости в ряд Тейлора.

Теор. 30 *Если ф-я f имеет произв. всех порядков на пром. $(1)(x_0 - R, x_0 + R)$ и все произв. огр. т.е $\exists L > 0 : \forall x \in (1)$ и $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$ вып.: $|f^{(n)}(x)| \leq L$, где L не зав. от n, то ф-я представима в виде ряда тейлора.*

35. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}(2);$

$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}(3);$

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}(4);$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}(5);$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}(6);$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, (8)$ при $x \in (-1, 1];$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, (10)$ при $x \in (-1, 1);$ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in \mathbb{R}(11);$

36. Тригонометрические ряды Фурье.

Опр. 25 *Тригонометрический ряд Фурье есть представление нек-й ф-ии f с периодом τ в виде сл. ряда: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(x)sin(nx)dx;$*

37. Достаточное условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке (без доказательства).

Теор. 31 *Ряд фурье ф-ии $f(x)$ сходится, если интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x + z) - f(x))D_n(z)dz = 0$, где $D_n(z)$ - n-е ядро дирихле. $D_n(z) = \frac{sin(n+\frac{1}{2})z}{sin\frac{z}{2}} = 2(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} cosnz)$*