1. Шпорцы к экзу по диффурам by Rexhaif

1.1. Автономные системы. Основные свойства автономных систем. Положения равновесия.

Автономные системы: Сиситема обыкновенных ДУ называется **автономной**, когда переменная t явно не входит в систему. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$; (1). Иначе, в координатном виде: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), i = \overline{1, n}$.

Свойства автономных систем: 1. Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1), то $\forall C : x = \varphi(t + C)$ - тоже решение системы. Док-во: $\frac{d\varphi(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi(t+C}{d(t+C)} = f(\varphi(t + C))$.
2. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Док-во: Пусть ρ_1, ρ_2 - фазовые траектории. Им отвечает интервал решения $x = \varphi(t), \ldots, x = \psi(x)$. И пусть $\varphi(t_1) = x_0 = \psi(t_2)$ (есть общая точка). Рассмотрим вектор-функцию $x = \psi(t+(t_2-t_1)) = X(t)$. В силу св-ва (1) это тоже решение, притом: $X(t_1) = \varphi(t_1) \Rightarrow X(t) = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t+(t_2-t_1))$, т.е кривые совпадают.
3. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая. Док-во: Пусть $X^0 = \varphi(t_0) = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}$. Этот вектор - касательная и в каждой точке он не равен нулю. ЧТД.

Положение равновесия: Точка $a \in \mathbb{R}^4$ называется точкой равновесия авт. системы, если $f(a) = 0(\dot{x}(a) = 0)$.

1.2. Классификация фазовых траекторий автономных систем.

Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из трех типов(классов): 1. Гладкая кривая без самопересечений. 2. Замкнутая гладкая кривая (цикл). 3. Точка.

Теорема: Если фаз. траектория решения $x = \varphi(t)$ есть гладская замкн. кривая, то это решение есть периодическая ф-я t с периодом $T > 0$. NEED SOME PROOFS FOR THAT SHIT, BUT I'm TOO LAZY.

1.3. Групповые свойства решений автономной системы уравнений.

Пусть $x(t, x^0)|_{t=0} = x^0$ - решение системы (1), т.е $x^0 \neq 0$ - нач. условие для системы (1). Тогда $x(t_1+t_2, x^0) = x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1, x(t_2, x^0))$. Док-во: Пусть вект.функции: $\varphi_1(t) = x(t, x(t_1, x^0)); \varphi_2(t) = x(t+t_1, x^0)$ - это решение для системы 1. При $t = 0$: $\varphi_1(0) = x(t_1, x^0); \varphi_2(0) = x(t_1, x^0)$. Т.е $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. В силу теор. о единственности $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t$. Отсюда следует оба уравнения из условия. Из предыдущег оследует: $x(-t, x(t, x^0)) = x_0$.