1. Шпорцы к экзу по диффурам by Rexhaif

1.1. Автономные системы. Основные свойства автономных систем. Положения равновесия.

Автономные системы: Сиситема обыкновенных ДУ называется **автономной**, когда переменная t явно не входит в систему. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$; (1). Иначе, в координатном виде: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$.
Свойства автономных систем: 1. Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1), то $\forall C : x = \varphi(t + C)$ - тоже решение системы. Док-во: $\frac{d\varphi(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi(t+C}{d(t+C)} = f(\varphi(t + C))$.
2. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Док-во: Пусть ρ_1, ρ_2 - фазовые траектории. Им отвечает интервал решения $x = \varphi(t), \dots, x = \psi(x)$. И пусть $\varphi(t_1) = x_0 = \psi(t_2)$ (есть общая точка). Рассмотрим вектор-функцию $x = \psi(t + (t_2 - t_1)) = X(t)$. В силу св-ва (1) это тоже решение, притом: $X(t_1) = \varphi(t_1) \Rightarrow X(t) = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t+(t_2-t_1))$, т.е кривые совпадают.
3. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая. Док-во: Пусть $X^0 = \varphi(t_0) = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}$. Этот вектор - касательная и в каждой точке он не равен нулю. ЧТД.
Положение равновесия: Точка $a \in \mathbb{R}^4$ называется точкой равновесия авт. системы, если $f(a) = 0 (\dot{x}(a) = 0)$.

1.2. Классификация фазовых траекторий автономных систем.

Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из трех типов(классов): 1. Гладкая кривая без самопересечений. 2. Замкнутая гладкая кривая (цикл). 3. Точка.
Теорема: Если фаз. траектория решения $x = \varphi(t)$ есть гладская замкн. кривая, то это решение есть периодическая ф-я t с периодом $T > 0$. NEED SOME PROOFS FOR THAT SHIT, BUT I'm TOO LAZY.

1.3. Групповые свойства решений автономной системы уравнений.

Пусть $x(t, x^0)|_{t=0} = x^0$ - решение системы (1), т.е $x^0 \neq 0$ - нач. условие для системы (1). Тогда $x(t_1 + t_2, x^0) = x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1, x(t_2, x^0))$.
Док-во: Пусть вект.функции: $\varphi_1(t) = x(t, x(t_1, x^0)); \varphi_2(t) = x(t + t_1, x^0)$ - это решение для системы 1. При $t = 0$: $\varphi_1(0) = x(t_1, x^0); \varphi_2(0) = x(t_1, x^0)$. Т.е $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. В силу теор. о единственности $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t$. Отсюда следует оба уравнения из условия. Из предыдущег оследует: $x(-t, x(t, x^0)) = x_0$.

1.4. Структура решений автономной системы в окрестности неособой точки.

Дано: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ в нек-й окрестности точки V точки a; $f(a) \neq 0$. Фазовые траектории в окрестности V будут кривыми и гладкой заменой переменных их можно сделать прямыми.
Теорема о выпрямлении: пусть $f(a) \neq 0$. Тогда в малой окрестности точки a систему (1) путем гладкой замены переменных можно привести к виду: (2) $\frac{dy_1}{dt} = 0; \frac{dy_2}{dt} = 0; \dots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Траектории для (2) - прямые линии: $y_1 = C_1; \dots; y_n = t + C_n$.
Док-во: Т.к $f(a) \neq 0$ - без огр. общн. говорим, что : $f_n(a) \neq 0$. Пров. гиперплоск. $P : x_n = a_n$. Её точки имеют вид: (ξ, a_n). Пусть: $x = \varphi(t, \xi)$ - решение (1), такое, что $\varphi(0, \xi) = (\xi, a_n)$ - нач. точка лежит на P. Формула: $x = \varphi(t, \xi)$ - и дает искомую замену. Обознач. $y_1 = \xi_1; \dots; y_n = t$. В новых переменных траектории будут прямыми линиями, т.к из опред. решения имеем, что $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ лежат вдоль траектории $x = \varphi(t, \xi^0)$ и её уравн. в перем. y им. вид: $y_1 = \xi_1^0; \dots; y_n = t$.

1.5. Производная в силу системы. Геометрическая интерпретация.

Дано : $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ (1). Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-я $\vec{f}$ непр. дифф. по всем аргументам.
Конструкция : Рассм. произв. ф-ю $u = (t, \vec{x})$. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение сист. (1) $\Rightarrow$ Вдоль реш. системы имеем $u(t, \vec{\varphi}(t)) = \mathbb{W}(t)$. Дифференцируем $\mathbb{W}(t)$ по t: $\frac{d\mathbb{W}}{dt} = (\frac{\partial u(x, \vec{t})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial x_j} \cdot f_j(t, \vec{x})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}$ (2). Полученное в (2) выражение - производной ф-ии u в силу системы (1). Обозн. $\dot{u}$ или $\frac{du}{dt}$.
Геом. интерпретация : Пусть $u(x)$ - гладкая и $\nabla u(x) \neq 0$ в уч. обл. D. $\Rightarrow$ ур-е $u(x) = 0$ опр. гладкую поверхность S, а вектор $\nabla u(x)$ ортогонален к S в точке x и направлен в сторону возр. ф-ии $u(x)$. Если $\dot{u}(x) \leq 0$, то участок ф-ии $f(x)$ образует прямой или тупой угол с вектором $\nabla u(x)$.

1.6. Первые интегралы. Теорема о первых интегралах. Независимые интегралы.

Определение: Ф-я $u(x)$ называется первым интегралом автономной системы (1) если она постоянна вдоль каждой траектории этой системы.
(1) Теорема опервых интегралах : Для того, чтобы ф-я $u(x)$ была перв. интег. системы (1) необх. и достаточно, чтобы она удовл. соотн в области D: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cdot f_j(x) = 0$ (#)
Док-во (1) : Пусть $u(x)$ - непр. интегрируемо в обл. D. $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) $\Rightarrow$ $\mathbb{W}(t) = u(\varphi(t))$ - постоянна $\forall t \Rightarrow \dot{u}(x) = 0$ в D. Обратно: Пусть # - в области $D \Rightarrow$ пусть $x = \varphi(t)$ - решение для (1) $\Rightarrow \frac{d}{dt} u(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x)|_{x=\varphi(t)} = 0$ $\Rightarrow u(\varphi(t))$ - не зависит от $t \Rightarrow$ - явл. первым интегралом. ЧТД.
(2) Теорема о независимых интегралы : Пусть т. a не есть положение равновесия. Тогда в её некоторой окрестности $\exists n-1$ независимых интегралов первых интегралов $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ и любой иной первый интеграл выражается через них.
Док-во (2) : Пусть окр. a дост. мала $\Rightarrow \exists$ окр. V точки $y = 0$ и гладкая обратимая замена $x = \varphi(y)$ приводящая систему к виду $\frac{dy_1}{dt} = 0; \dots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Полученная система имеет $n - 1$ незав. первых интегралов $u_1(y) = y_1; \dots; u_{n-1}(y) = y_{n-1}$ и всякий иной первый интеграл выражается через них.

1.7. Устойчивость положения равновесия по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Устойчивость по Ляпунову : Положение равновесия a называется устойчивым по Ляпунову, если:
1. $\exists \delta_0 > 0$, такое, что если $|x^0 - a| < \delta_0$, то решение $x(t, x_0)$ - существует и единств. при $0 \leq t \leq \infty$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $|x^0 - a| \leq \delta$, то $|x(t, x^0) - a| \leq \varepsilon$, при всех $0 \leq t \leq \infty$
Асимптотическая устойчивость : Положение равновесия a назыв. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и если $\lim_{t \to +\infty} x(t, x^0) = a$, при достаточно малом $|x^0 - a|$.
Проще : Если точку сдвинуть из положения равновесия, то она будет стремиться туда вернуться.

1.8. Линейные автономные системы. Структура общего решения в случае различных корней. Случай вещественной матрицы.

(1) Вид : $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$
Собственные значения : Вектор $e \neq 0$ на-

зыв. собств. вектором матрицы A(в нашем случае - матрицы из a_{ij}), если $Ae = \lambda e$. Притом λ - назыв. собств. значением матрицы и $det(A - \lambda E) = 0$. Если собственные значения матрицы A различны, то существует невырожд. матрица T, приводящая матрицу A к диагональному виду.

Случай различных корней : Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собств. значения матрицы $A \Rightarrow$ всякое решение уравнения $\frac{dy}{dt} = A\dot{x}$ имеет вид: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{e}_n$, где $\vec{e}_i$ - собств. вектор матрицы A.

Случай вещественной матрицы : Пусть A - вещ. λ - вещ. e - собств. вектор. $\Rightarrow \vec{\lambda}$ - собств. знач. с собств. вектором $\vec{e}$. Док-во: $Ae = \lambda e \Rightarrow \vec{A}\vec{e} = \vec{\lambda}\vec{e}; \vec{A} = A \Rightarrow A\vec{e} = \vec{\lambda}\vec{e}$. ЧТД. Если λ - вещ. собств. знач. $\Rightarrow$ собств. вектор тоже веществ. и решение берем как $x = e^{\lambda t}\vec{e}$.

1.9. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Вещественные корни.

Дано : $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots \\ \dot{x}_1 = a_{21}x_1 + \ldots \end{cases}$, λ_1, λ_2 - собств значения.

Корни вещественны, различны, не нулевые : $\Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2$. $\vec{e}_i$ - базис на плоскости. Пусть ξ_1, ξ_2 - коорд. вектора x в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: Узел. При $C_1 = C_2 = 0$ - точка покоя $(0, 0)$. Траектории направлены в центр.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: Устойчивый узел. Траектории направлены из центра.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Седло. Траектории образуют гиперболы во всех четвертях. В нижних четвертях направлены вниз, в верхних - вверх.

1.10. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Комплексные корни.

Оба корня чисто мнимые : Центр. $\xi_1 = \rho_0 cos(\beta t + \psi); \xi_2 = \rho_0 sin(\beta t + \psi), \rho_0 = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. Фазовые траектории - эллипсы, направление зависит от знака β : $\beta > 0$ против часовой.

$\alpha < 0$: Устойчивый фокус. $\xi_1 = \rho_0 e^{\alpha t} cos(\beta t + \psi); \xi_2 = \rho_0 e^{\alpha t} sin(\beta t + \psi)$. Траектории - спирали, закручивающиеся в центр, направление зависит от знака β.

$\alpha > 0$: Неустойчивый фокус. Спираль раскручивается.

1.11. Функции Ляпунова. Лемма об оценке квадратичной формы.

Положительно и отрицательно определенные ф-ии : Пусть есть $x \in \mathbb{R}^4$, $V(a) \in C(V)$. Ф-я $V(x)$ называется положительно определенной в области V, если есть т. a, такая что в её окрестности $V(x) > 0 \forall x \in U(a)$ и $V(a) = 0$. И отрицательн определенной иначе.

Функция Ляпунова : Положительно определенная в окр. точки a функция $V(x)$ называется ф-ей Ляпунова системы $\dot{x} = f(x)$ (1), если $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in V$. $\dot{V}(x)$ - производная в силу системы (1). $\dot{V}(x) = \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x) \leq 0$.

Лемма о квадр. форме : Если A - веществ. симм. матрица (n x n) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^4$ верно: $\alpha|x|^2 \leq |(Ax, x)| \leq \beta|x|^2$, где $\alpha = min(A); \beta = max(A)$.

Док-во : Приведем A к диаг. виду с помощью орт. преобразования матрицей T, т.е $T^{-1}AT = \mathcal{L}$ - диаг. матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Сделаем замену $x = TY \Rightarrow$ в силу ортогональности $(Ax, x) = (ATY, TY) = (T^{-1}ATY, y) = (T^{-1}ATY, Y) = (\mathcal{L}Y, Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, так что $\alpha|x|^2 = |(Ax, x)| = \beta|x|^2$. Т.к ортогон. преобр. сохраняет длину вектора то $|x| = |y|$. Лемма доказана.