1. Шпорцы к экзу по диффурам by Rexhaif

1.1. Автономные системы. Основные свойства автономных систем. Положения равновесия.

Автономные системы: Сиситема обыкновенных ДУ называется **автономной**, когда переменная t явно не входит в систему. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$; (1). Иначе, в координатном виде: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$.
Свойства автономных систем: 1. Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1), то $\forall C : x = \varphi(t + C)$ - тоже решение системы. Док-во: $\frac{d\varphi(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi(t+C}{d(t+C)} = f(\varphi(t + C))$.
2. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Док-во: Пусть ρ_1, ρ_2 - фазовые траектории. Им отвечает интервал решения $x = \varphi(t), \dots, x = \psi(x)$. И пусть $\varphi(t_1) = x_0 = \psi(t_2)$ (есть общая точка). Рассмотрим вектор-функцию $x = \psi(t + (t_2 - t_1)) = X(t)$. В силу св-ва (1) это тоже решение, притом: $X(t_1) = \varphi(t_1) \Rightarrow X(t) = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t + (t_2 - t_1))$, т.е кривые совпадают.
3. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая. Док-во: Пусть $X^0 = \varphi(t_0) = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}$. Этот вектор - касательная и в каждой точке он не равен нулю. ЧТД.
Положение равновесия: Точка $a \in \mathbb{R}^4$ называется точкой равновесия авт. системы, если $f(a) = 0(\dot{x}(a) = 0)$.

1.2. Классификация фазовых траекторий автономных систем.

Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из трех типов(классов): 1. Гладкая кривая без самопересечений. 2. Замкнутая гладкая кривая (цикл). 3. Точка.
Теорема: Если фаз. траектория решения $x = \varphi(t)$ есть гладская замкн. кривая, то это решение есть периодическая ф-я t с периодом $T > 0$. NEED SOME PROOFS FOR THAT SHIT, BUT I'm TOO LAZY.

1.3. Групповые свойства решений автономной системы уравнений.

Пусть $x(t, x^0)|_{t=0} = x^0$ - решение системы (1), т.е $x^0 \neq 0$ - нач. условие для системы (1). Тогда $x(t_1 + t_2, x^0) = x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1, x(t_2, x^0))$.
Док-во: Пусть вект.функции: $\varphi_1(t) = x(t, x(t_1, x^0)); \varphi_2(t) = x(t + t_1, x^0)$ - это решение для системы 1. При $t = 0$: $\varphi_1(0) = x(t_1, x^0); \varphi_2(0) = x(t_1, x^0)$. Т.е $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. В силу теор. о единственности $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t$. Отсюда следует оба уравнения из условия. Из предыдущег оследует: $x(-t, x(t, x^0)) = x_0$.

1.4. Структура решений автономной системы в окрестности неособой точки.

Дано: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ в нек-й окрестности точки V точки a; $f(a) \neq 0$. Фазовые траектории в окрестности V будут кривыми и гладкой заменой переменных их можно сделать прямыми.
Теорема о выпрямлении: пусть $f(a) \neq 0$. Тогда в малой окрестности точки a систему (1) путем гладкой замены переменных можно привести к виду: (2) $\frac{dy_1}{dt} = 0; \frac{dy_2}{dt} = 0; \dots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Траектории для (2) - прямые линии: $y_1 = C_1; \dots; y_n = t + C_n$.
Док-во: Т.к $f(a) \neq 0$ - без огр. общн. говорим, что : $f_n(a) \neq 0$. Пров. гиперплоск. $P : x_n = a_n$. Её точки имеют вид: (ξ, a_n). Пусть: $x = \varphi(t, \xi)$ - решение (1), такое, что $\varphi(0, \xi) = (\xi, a_n)$ - нач. точка лежит на P. Формула: $x = \varphi(t, \xi)$ - и дает искомую замену. Обознач. $y_1 = \xi_1; \dots; y_n = t$. В новых переменных траектории будут прямыми линиями, т.к из опред. решения имеем, что $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ лежат вдоль траектории $x = \varphi(t, \xi^0)$ и её уравн. в перем. y им. вид: $y_1 = \xi_1^0; \dots; y_n = t$.

1.5. Производная в силу системы. Геометрическая интерпретация.

Дано : $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ (1). Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-я $\vec{f}$ непр. дифф. по всем аргументам.
Конструкция : Рассм. произв. ф-ю $u = (t, \vec{x})$. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение сист. (1) $\Rightarrow$ Вдоль реш. системы имеем $u(t, \vec{\varphi}(t)) = \mathbb{W}(t)$. Дифференцируем $\mathbb{W}(t)$ по t: $\frac{d\mathbb{W}}{dt} = (\frac{\partial u(x,\vec{t})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial x_j} \cdot f_j(t, \vec{x})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}$ (2). Полученное в (2) выражение - производной ф-ии u в силу системы (1). Обозн. $\dot{u}$ или $\frac{du}{dt}$.
Геом. интерпретация : Пусть $u(x)$ - гладкая и $\nabla u(x) \neq 0$ в уч. обл. D. $\Rightarrow$ ур-е $u(x) = 0$ опр. гладкую поверхность S, а вектор $\nabla u(x)$ ортогонален к S в точке x и направлен в сторону возр. ф-ии $u(x)$. Если $\dot{u}(x) \leq 0$, то участок ф-ии $f(x)$ образует прямой или тупой угол с вектором $\nabla u(x)$.

1.6. Первые интегралы. Теорема о первых интегралах. Независимые интегралы.

Определение: Ф-я $u(x)$ называется первым интегралом автономной системы (1) если она постоянна вдоль каждой траектории этой системы.
(1) Теорема опервых интегралах : Для того, чтобы ф-я $u(x)$ была перв. интег. системы (1) необх. и достаточно, чтобы она удовл. соотн в области D: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cdot f_j(x) = 0$ (#)
Док-во (1) : Пусть $u(x)$ - непр. интегрируемо в обл. D. $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) $\Rightarrow$ $\mathbb{W}(t) = u(\varphi(t))$ - постоянна $\forall t \Rightarrow \dot{u}(x) = 0$ в D. Обратно: Пусть # - в области $D \Rightarrow$ пусть $x = \varphi(t)$ - решение для (1) $\Rightarrow \frac{d}{dt}u(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x)|_{x=\varphi(t)} = 0$ $\Rightarrow u(\varphi(t))$ - не зависит от $t \Rightarrow$ - явл. первым интегралом. ЧТД.
(2) Теорема о независимых интегралы : Пусть т. a не есть положение равновесия. Тогда в её некоторой окрестности $\exists n{-}1$ независимых интегралов первых интегралов $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ и любой иной первый интеграл выражается через них.
Док-во (2) : Пусть окр. a дост. мала $\Rightarrow \exists$ окр. V точки $y = 0$ и гладкая обратимая замена $x = \varphi(y)$ приводящая систему к виду $\frac{dy_1}{dt} = 0; \dots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Полученная система имеет $n - 1$ незав. первых интегралов $u_1(y) = y_1; \dots; u_{n-1}(y) = y_{n-1}$ и всякий иной первый интеграл выражается через них.

1.7. Устойчивость положения равновесия по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Устойчивость по Ляпунову : Положение равновесия a называется устойчивым по Ляпунову, если:
1. $\exists \delta_0 > 0$, такое, что если $|x^0 - a| < \delta_0$, то решение $x(t, x_0)$ - существует и единств. при $0 \leq t \leq \infty$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $|x^0 - a| \leq \delta$, то $|x(t, x^0) - a| \leq \varepsilon$, при всех $0 \leq t \leq \infty$
Асимптотическая устойчивость : Положение равновесия a назыв. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпу-

нову и если $\lim_{t\to+\infty} x(t,x^0)=a$, при достаточно малом $|x^0-a|$.
Проще : Если точку сдвинуть из положения равновесия, то она будет стремиться туда вернуться.

1.8. Линейные автономные системы. Структура общего решения в случае различных корней. Случай вещественной матрицы.

(1) Вид : $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}=a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n \\ \ldots \\ \frac{dy_n}{dt}=a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n \end{cases}$
Собственные значения : Вектор $e\neq 0$ назыв. собств. вектором матрицы A(в нашем случае - матрицы из a_{ij}), если $Ae=\lambda e$. Притом λ - назыв. собств. значением матрицы и $det(A-\lambda E)=0$. Если собственные значения матрицы A различны, то существует невырожд. матрица T, приводящая матрицу A к диагональному виду.
Случай различных корней : Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - собств. значения матрицы $A\Rightarrow$ всякое решение уравнения $\frac{dy}{dt}=A\dot{x}$ имеет вид: $x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}\vec{e}_n$, где $\vec{e}_i$ - собств. вектор матрицы A.
Случай вещественной матрицы : Пусть A - вещ. λ - вещ. e - собств. вектор. $\Rightarrow\vec{\lambda}$ - собств. знач. с собств. вектором $\vec{e}$. Док-во: $Ae=\lambda e\Rightarrow\vec{A}\vec{e}=\vec{\lambda}\vec{e};\vec{A}=A\Rightarrow A\vec{e}=\vec{\lambda}\vec{e}$. ЧТД. Если λ - вещ. собств. знач. $\Rightarrow$ собств. вектор тоже веществ. и решение берем как $x=e^{\lambda t}\vec{e}$.

1.9. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Вещественные корни.

Дано : $\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+\ldots \\ \dot{x}_1=a_{21}x_1+\ldots\end{cases}$, λ_1,λ_2 - собств значения.
Корни вещественны, различны, не нулевые : $\Rightarrow x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1+C_2e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2$. $\vec{e}_i$ - базис на плоскости. Пусть ξ_1,ξ_2 - коорд. вектора x в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. $\xi_1=C_1e^{\lambda_1 t};\xi_2=C_2e^{\lambda_2 t}$.
$\lambda_1<0,\lambda_2<0$: Узел. При $C_1=C_2=0$ - точка покоя $(0,0)$. Траектории направлены в центр.
$\lambda_1>0,\lambda_2>0$: Устойчивый узел. Траектории направлены из центра.
$\lambda_1>0,\lambda_2<0$: Седло. Траектории образуют гиперболы во всех четвертях. В нижних четвертях направлены вниз, в верхних - вверх.

1.10. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Комплексные корни.

Оба корня чисто мнимые : Центр. $\xi_1=\rho_0 cos(\beta t+\psi);\xi_2=\rho_0 sin(\beta t+\psi),\rho_0=2\sqrt{a^2+b^2}$. Фазовые траектории - эллипсы, направление зависит от знака β : $\beta>0$ против часовой.
$\alpha<0$: Устойчивый фокус. $\xi_1=\rho_0e^{\alpha t}cos(\beta t+\psi);\xi_2=\rho_0e^{\alpha t}sin(\beta t+\psi)$. Траектории - спирали, закручивающиеся в центр, направление зависит от знака β.
$\alpha>0$: Неустойчивый фокус. Спираль раскручивается.

1.11. Функции Ляпунова. Лемма об оценке квадратичной формы.

Положительно и отрицательно определенные ф-ии : Пусть есть $x\in\mathbb{R}^4$, $V(a)\in C(V)$. Ф-я $V(x)$ называется положительно определенной в области V, если есть т. a, такая что в её окрестности $V(x)>0\forall x\in U(a)$ и $V(a)=0$. И отрицательн определенной иначе.
Функция Ляпунова : Положительно определенная в окр. точки a функция $V(x)$ называется ф-ей Ляпунова системы $\dot{x}=f(x)$ (1), если $\dot{V}(x)\leq 0,\forall x\in V$. $\dot{V}(x)$ - производная в силу системы (1). $\dot{V}(x)=\sum_j\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j(x)\leq 0$.
Лемма о квадр. форме : Если A - веществ. симм. матрица (n x n) $\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}^4$ верно: $\alpha|x|^2\leq|(Ax,x)|\leq\beta|x|^2$, где $\alpha=min(A);\beta=max(A)$.
Док-во : Приведем A к диаг. виду с помощью орт. преобразования матрицей T, т.е $T^{-1}AT=\mathcal{L}$ - диаг. матрица с элементами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Сделаем замену $x=TY\Rightarrow$ в силу ортогональности $(Ax,x)=(ATY,TY)=(T^{-1}ATY,y)=(T^{-1}ATY,Y)=(\mathcal{L}Y,Y)=\sum_{i=1}^n\lambda_iy_i$, так что $\alpha|x|^2=|(Ax,x)|=\beta|x|^2$. Т.к ортогон. преобр. сохраняет длину вектора то $|x|=|y|$. Лемма доказана.

1.12. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Теорема : Если в некоторой окрестности V полож. равнов. a существует ф-я Ляпунова $V(x)$ - то это положение устойчиво по Ляпунову.
Док-во : Пусть $a=0$. Выберем $\varepsilon>0$, такой, что шар $K_\varepsilon:|x|\leq\varepsilon$ лежит в окрестности V точки a. Пусть S_ε - сфера, $|x|=\varepsilon$ - гран. шара K_ε. S_ε - замкнутое, огр. мн-во. Ф-я $V(x)$ - непрерывн. и $V(x)>0$ на $S_\varepsilon\Rightarrow$ $min_{x\in S_\varepsilon}V(x)=k>0$. Рассм. Шар $K_\delta:|x|\leq\delta$, содержащийся в V. Т.к $V(0)=0$, то $\delta>0$ можно выбрать настолько малым, что бы выполнялось неравенство $V(x)<k,x\in K_\delta$. в силу непр. ф-ии $V(x)$. Покажем, что если $|x^0|\leq\delta$, то $|x(t,x^0)\leq\varepsilon$ при $0\leq t\leq\infty$. Тем самым теорема будет доказана. Т.к $\dot{V}(x)\leq 0$ в V и $V(x^0)<k$, то $V(x)<k$ при $t\geq 0$ вдоль фазовой траектории $x=x(t,x^0)\Rightarrow$ фазовая траектория начинается в шаре K_δ и не может пересечь границы шара $K_\varepsilon\Rightarrow V(x)\geq k$ на S_ε и $V(x)<k$ на траектории. ЧТД.

1.13. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема : Пусть в нек. окр. V положения равн. a сущ. ф-я Ляпунова $V(x)$ такая что $\dot{V}(x)$ - отриц. опр. в V $\Rightarrow$ полож. равн. a асимпт. устойчиво.
Док-во : Выберем шары K_ε,K_δ как в пред. теор. По Ляпунову если $|x^0|\leq\delta\Rightarrow|x(t,x^0)|\leq\varepsilon$ при $t\geq 0$. Рассм. ф-ю $W(t)=V(x(t,x^0))$ при $t\geq 0$. Т.к $\dot{V}(x)\leq 0\Rightarrow$ ф-я $W(t)$ невозраст. $\Rightarrow\exists\lim_{t\to\infty}W(t)=A$. При этом $A\geq 0$ поскольку $V(x)\geq 0$. Если $A=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}x(t,x^0)=0$ т.к $V(x)>0$ при $x\neq 0$. $V(0)=0$ след. теорема доказана. Для случая $A>0$ доказать через противоречие.

1.14. Теорема Четаева о неустойчивости.

Теорема : Пусть a - пол. равн. V - окр-ть пол. равн. V_1 - область в V и V_1 имеет т.a своей границей. Тогда если в V_1 $\begin{cases}V(x)>0\\ \dot{V}(x)>0\end{cases}$ и $V(x)=0$ в тех. гран. точках области V_1, которые лежат внутри области $V\Rightarrow$ положение равновесия $x=a$ неустойчиво.
Док-во : Пусть $x^0\in V$, ρ - фаз. траект. вы-

ходящая из $x^0 \Rightarrow \rho = x(t, x^0)$. Покажем, что траектория ρ не может пересечь часть границы области V_1, которая лежит в V. Рассм. ф-ю $V(x)$ вдоль ρ. $W(t) = V(x(t, x^0))$. Т.к $W(0) > 0; W'(t) = \dot{V}(x) > 0$. Пока ρ содерж. в V_1, то $W(t) > 0$, пока ρ содерж. в V_1 и не может пересечь часть границы V_1, на которой $V(x) = 0 \Rightarrow$ траектория должна покинуть V_1, т.к V_1 содержит точки, сколь угодно близкие к $a \Rightarrow$ это положение равновесия неустойчиво. ЧТД.

1.15. Теорема о устойчивости положения равновесия линейной системы.

Дано : система (1) $\frac{dx}{dt} = Ax, A \leftrightarrow [n \times n]$
Теорема : Положение равн. системы (1) асимптотически устойчиво $\Leftrightarrow$ веществ. части всех собств. значений матрицы A - отрицательные.
Док-во : Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собств. знач. и $Re\lambda_j \leq -\alpha < 0 \forall j = \overline{1, n}$. Пост. ф-ю ляпунова $V(x)$. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon = (b_{ij}) : |b_{ij}| \leq \varepsilon$. Подставим это и $x = T(y)$ в (1): $\frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y$ (2). Ф-ю Ляпунова возьмем в виде: $V(x) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = (y, \vec{y})$. Эта ф-я положительно определена в любой окр. $y = 0$. Имеем: $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(y, \vec{y}) = (\frac{dy}{dt}, \vec{y}) + (y, \frac{d\vec{y}}{dt}) = ((\mathcal{L} + \vec{\mathcal{L}})y, \vec{y}) + [(B_\varepsilon y, \vec{y}) + (y, \vec{B_\varepsilon}\vec{y})]$. Первое из слагаемых равн: $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \vec{\lambda_i})|y_i|^2 = 2\sum_{i=1}^n Re\lambda_i |y_i|^2 \leq -2\alpha \sum |y_i|^2$, т.к $Re\lambda_i \leq -\alpha$. Далее, т.к $|b_{ij}| \leq \varepsilon \Rightarrow |(B_\varepsilon y, \vec{y})| \leq \sum |b_{jk}| \cdot |y_j| \cdot |y_k| \leq \varepsilon \sum |y_j| \cdot |y_k| = \sum (\sum |y_i|^2) = n\varepsilon \sum |y_j|^2$, т.к $(\sum |y_i|)^2 \leq n \sum |y_i|^2$. Такая же оценка для второго слагаемого $\Rightarrow \dot{V}(x) \leq -2(\alpha - n\varepsilon)\sum |y_i|^2 = -2(\alpha - n\varepsilon)V(x)$. Выберем ε : $0 < \varepsilon < \frac{a}{n} \Rightarrow \dot{V}(x)$ - отрицательно определена $\Rightarrow$ положение равновесия асимпт. устойчиво. ЧТД.

1.16. Устойчивость по линейному приближению. Теорема об устойчивости по лин. прибл.

Дано : $\frac{dx}{dt} = f(x)$ (1). a - положение равновесия. $f(a) = 0$. $a \in V; f \in C^2(V)$. Разложим $f(x)$ по ф.тейлора: $f(x) = f'(a)(x-a) + g(x)$, где $f'(a)$ - якобиан в т.a. Кроме того $|g(x)| \leq C|x-a|^2$. Отбрасыв. $g(x)$ получим лин. систему (2) $\frac{dy}{dt} = Ay; y = x - a; A = f'(a)$.
Теорема : Пусть $f(x) \in C^2(V), V = U(a)$. Если веществ. части всех собств. значений $f'(a)$ - отрицательны, то положение a асимпт. устойчиво. Кроме того: $|x(t, x^0) - a| \leq Ce^{-\alpha t}|x^0 - a|; 0 \leq t < \infty$.
Док-во : a $= 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A(x) + g(x); |g(x)| \leq C_1|x|^2$. Для док-ва построим полож. опр. в окр т.a ф-ю Ляпунова. Пусть $x = Ty \Rightarrow \frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y + h(y)$, где $h(y) = T^{-1}g(Ty)$. Ф-ю Ляпунова возьмем в виде $V(x) = \sum |y_i|^2 = (y, \vec{y})$. Аналогично пред. теор. $\dot{V}(x) = [((\mathcal{L} + B_\varepsilon)y, \vec{y}) + (y, (\vec{\mathcal{V}} + \vec{B_\varepsilon})\vec{y})] + [(h(y), \vec{y}) + (y, \vec{h(y)})] + A_1 + A_2$. A_1 - произв. в силу системы $\frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y \Rightarrow$ справедлива оценка из пред. теор: $A_1 \leq \rho|x|^2$. $|A_2| \leq 2|y||h(y)| \leq C_3|x|^2$. Таким образом $\dot{V}(x) \leq -|x|^2 \cdot (\rho - C_3|x|)$. Выберем окр. $W \subset V$, такую что $|x| < \frac{\rho}{2C_3}$, тогда $\dot{V}(x) \leq -\frac{\rho}{2}|x|^2$ $\Rightarrow$ ф-я $\dot{V}(x)$ отриц. опред. в W и след. положение a асимпт. устойчиво.ЧТД.

1.17. Устойчивость произвольных решений автономных систем. Устойчивость нулевых решений неавтономных систем.

Дано : Система (1) $\frac{dx}{dt} = f(t, x); f \in C^2(\sigma)$, считаем что $f(t, 0) = 0, t \geq 0 \Rightarrow$ система имеет решение $X(t) = 0$. Для неавтономных систем формулировки те же, что и для автономных.
Устойчивость решений авт. систем : Дана система (2) $\frac{dx}{dt} = g(x)$. Сделаем подстановку $x(t) = \varphi(t) + y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g(\varphi(t) + y(y))$ - (3). Решение $\varphi(t)$ системы (2) назыв. устойчивым по Ляпунову (асимпт.) если таковым является нулевое решение $y(t) = 0$ для системы (3).

1.18. Функции Ляпунова для неавтономных систем. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению для неавтономных систем.

Ф-ии Ляпунова для неавтономных систем : Ф-я $V(t, x)$ называется ф-ей Ляпунова для неавтоновной системы (1) если: 1) Эта ф-я определена и непр. дифф. при $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$. 2) $V(t, 0) = 0$ при $t \geq 0$. 3)$\exists W(x)$б положительно определенная в области Σ, такая что $V(t, x) \geq W(x)$ при всех $x \in \Sigma, t \geq 0$. 4) $\dot{V}(t, x) \leq 0 \forall x \in \Sigma, t \geq 0$.
Теорема : Рассм. систему: $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x)$ (1). Пусть A - матрица, веществ. части собств. значений которой отрицательны. $f(t, x)$ - непр. дифф. при $|x| < p_1, t \geq 0$ и $f(t, x) = o(|x|), |x| \to 0$. Тогда нулевое решение системы (1) асимпт. устойчиво и справ. оценка: $|x(t)| \leq C|x(0)|e^{\alpha t}, t \geq 0$, где $\alpha > 0, C > 0$ если $|x(0)|$ дост. мало. ДАНО БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

1.19. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Связь первых интегралов и линейных уравнений. Характеристики. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения. Примеры.

Классификация - Линейные уравнения : Ур-е называется линейным если неизв. ф-я $u(x)$ и $\frac{du}{dx_i}$ входят линейно. Общий вид: $\sum_{j=1}^n u_j(x)\frac{du}{dx_j} + b(x)u = f(x)$ (1).
Классификация - Квазилинейные : Ур-е называется квазилинейным если частные $\frac{du}{dx_i}$ пр-е входят линейно. Общий вид: $\sum_{j=1}^n a_j(x, u)\frac{du}{dx_j} = b(x, u)$.
Связь первых интегралов и линейных уравнений : Рассм. систему (a) : $\frac{dx}{dt} = f(x)$. По теор. первых интегралов - гладкая ф-я $u(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда является первым интегралом системы (a), когда u удовл. ур-ю с частн. производными первого порядка $\sum_{j=1}^n f_j(x)\frac{du}{dx_j} = 0$ (b).
Теорема об общем решении : Пусть V дост. малая окрестность точки $a \Rightarrow$ в обл. V всякое решение ур-я (b) имеет вид $u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$, где $u_i(x)$ - незав. первые интегралы, а F - произвольная гладк. ф-я.
Характеристики для лин. систем : Система (a) назыв. характеристической для (b). Фазовые траектории для (a) назыв. характеристиками для (b). Пример: $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$. Ур-е характеристик - $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = dt \Rightarrow$ характеристика - окружность $x^2 + y^2 = C$.

1.20. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система для таких уравнений. Общий вид решения квазилинейных уравнений.

Дано : Квазилинейное ур-е $\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{du}{dx_j} = b(x,u)$ - (1). Её характеристическая система: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x,u); \ldots; \frac{dx_n}{dt} = a_n(x,u) \\ \frac{du}{dt} = b(x,u) \end{cases}$.

Общий вид решения : Гладкая ф-я n независисмых первых интегралов u_i : $u(x) = F(u_1(x),\ldots,u_n(x))$.

1.21. Характеристики квазилинейных уравнений и интегральные поверхности решений. Структура интегральной поверхности решения. Примеры.

Кваз.Ур-е для трехмерного пр-ва : (1) $a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z)$. Коэфф. (1) задают в $\mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{l}(p) = (a(p),b(p),c(p))$: $p = (x,y,z)$. График решения - поверхность $z = z(x,y,z)$ в пр-ве (x, y, z) называется интегральной поверхностью ур-я (1).

Теорема о характеристиках : Если интег. поверхность содержит точку $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ то она содержит и характеристику, проходящую через эту точку.

Док-во : Рассм. систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,z) \end{cases}$, где $z = \varphi(x,y)$. Поставим задачу Коши: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. И пусть $x(t), y(t)$ - решения этой задачи $\Rightarrow$ кривая $\mathcal{G}$: $x = x(t); y = y(t); z = z(t) = \varphi(x(t),y(t))$ - лежит на инт. поверхности. Действительно $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{c} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} = C$, т.к φ - решение.ЧТД.

Пример : $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = C, a^2+b^2 \neq 0$. Характеристики: $\frac{dx}{dt} = a$; $\frac{dy}{dt} = b$; $\frac{dz}{dt} = c \Rightarrow x = at + x_0; y = bt + y_0; z = ct + z_0$.

1.22. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных для двух независимых переменных. Определение характеристической системы. Теорема о существовании и единственности построения решения задачи Коши. Схема решения задачи Коши.

Задача Коши : Имеем систему (1): $a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z = f(x,y)$. Пусть на пов-ти (x,y) задана кривая ρ : $x = \varphi(s); y = \psi(s).s \in I = (s_1,s_2)$. Ф-ии φ,ψ - непр. дифф. при $s \in I$, и $(\varphi'(s),\psi'(s)) \neq (0,0), s \in I$. Зададим на ρ значение ф-ии z: (2) $Z|_\rho = h(s) = z(\varphi(s),\psi(s)), s \in I$. $h(s)$ - непр. дифф при $s \in I$. Итого требуется найти решение системы (1), удовл условиям (2). Решение - центр. поверхность, проходящая через кривую $x = \psi(s), y = \psi(s), z = h(s)$.

Характ. система : Характерист. системой для (1) наз. систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y) \end{cases}$, а её фаз. траектории - характеристиками.

Теорема о существ. и единственности : Пусть кривая ρ - не касается хар-к. Тогда задача коши однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой ρ.

NEED PROOFS, BUT i'm LAZY:c

Схема решения???? : Если хар-ки решения касаются $\rho \Rightarrow$ решение может не существовать ли быть не единственным.

1.23. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных с любым числом независимых переменных. Определение характеристической системы для этого случая. Теорема о существовании и единственности решения для задачи Коши.

Дано : (1) $\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)U = f(x), x = (x_1,\ldots,x_n)$. Данные коши ставятся в виде поверхности размерности (n-1).

Харк. система : Система вида $\frac{dx}{dt} = a(x), a(x) = (a_1(x),\ldots,a_n(x))$ называется характеристической для (1)

Теорема : Пусть поверхность ρ не касается характеристик, тогда задача коши для такой системы однозначно разрешима в не-й окрестности ρ

PROOFS ALSO REQUIRED:c

1.24. Задача Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. Примеры решения уравнений.

Задача Коши : $a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z)$ - (1). Рассм. харк. сист. для (1): $\frac{dx}{dt} = a(x,y,z)$; $\frac{dy}{dt} = b(x,y,z)$; $\frac{dz}{dt} = c(x,y,z)$ - (2). Задача Коши ставится так жеб как и для линейного ур-я, т.е $\exists\rho$ на плскости (x, y), $Z|_\rho = h(s)$ - (3). Так же, мы предполагаем, что $a,b,c \in C_1(D), a^2+b^2 \neq 0$ в D.

Теорема : Пусть кривая ρ не касается проекций характеристик на плоскость (x,y). Тогда задача коши (1), (3) однозначно разрешима в нек. окрестности кривой ρ.

PROOOOOOOFS:c

Пример : (1): $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 : c > 0$. (2): $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. $u|_{t=0} = f(x)$. (1) имеет решение $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{t} \Rightarrow C_1 = u; F(x-ct,u) = 0 \Rightarrow u = g(x-ct) \Rightarrow u_{t=0} = g(x) = f(x) \Rightarrow u = f(x-ct)$ - бегущая волна. $u = f(x-ut)$, u = скорость волны.

1.25. Примеры построения частных решений линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Уравнения Хопфа, Бюргерса, Кортевега-де-Фриза,синус-Гордона.

Уравнение Хопфа : $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$: $-cf' + ff' = 0 \Rightarrow f'(-c+f) = 0 \Rightarrow f - const, f(\xi) = f(x-ct) - const$.

Уравнение Sin-Gordon : $u_{tt} - u_{xx} = sin(u)$; $(1+c^2)f'' + sin(f) = 0$ - уравнение колебаний маятника.

НУЖНО БОЛЬШЕ ПРИМЕРОВ - СМОТРИМ СТР.60 ЛЕКЦИЙ

1.26. Теорема о непрерывной зависимости решения О.Д.У. первого порядка от параметров. Теорема о дифференцируемости решения того же уравнения по параметру.

Теорема (a) : Рассм. задачу коши для одного ур-я (1) $\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu); x(t_0,\mu) = x_0$. G - область в пр-ве (t,x,μ). Если ф-ии $f(x,t,\mu); \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\mu)$ непрерывны в области G по совокуп. переменных, то решение задаче коши (1) $x(t,\mu)$ непрерывно по совокуп. переменных в области $\begin{cases} |t-t_0| \le \delta \\ |\mu-\mu_0| \le \delta_1 \end{cases}$.

Док-во (a) : Сведем задачу коши к экв. интегральному ур-ю (2) $x(t,\mu) = x_0 + \in_{\tau_0}^{t} f(\tau, x(\tau,\mu),\mu)d\tau$. В символической форме $x = A(x)$. Далее, применяя к (2) те же методы, что и для сущ. решения без μ, получим док-во теоремы.

Теорема (b) : Пусть в G f имеет непр. продолжение до порядка $\rho \ge 1$ включительно по параметрам $t,x,\mu \Rightarrow$ решение $x(t,\mu)$ имеет ρ непр. продолж. по параметрам t,μ.