1. Шпорцы к экзу по дифурам by Rexhaif

1.1. Автономные системы. Основные свойства автономных систем. Положения равновесия.

Автономные системы: Сиситема обыкновенных ДУ называется **автономной**, когда переменная t явно не входит в систему. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$; (1). Иначе, в координатном виде: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), i = \overline{1, n}$.
Свойства автономных систем: 1. Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1), то $\forall C : x = \varphi(t + C)$ - тоже решение системы. Док-во: $\frac{d\varphi(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi(t+C}{d(t+C)} = f(\varphi(t + C))$.
2. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Док-во: Пусть ρ_1, ρ_2 - фазовые траектории. Им отвечает интервал решения $x = \varphi(t), \ldots, x = \psi(x)$. И пусть $\varphi(t_1) = x_0 = \psi(t_2)$ (есть общая точка). Рассмотрим вектор-функцию $x = \psi(t + (t_2 - t_1)) = X(t)$. В силу св-ва (1) это тоже решение, притом: $X(t_1) = \varphi(t_1) \Rightarrow X(t) = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t+(t_2-t_1))$, т.е кривые совпадают.
3. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая. Док-во: Пусть $X^0 = \varphi(t_0) = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}$. Этот вектор - касательная и в каждой точке он не равен нулю. ЧТД.
Положение равновесия: Точка $a \in \mathbb{R}^4$ называется точкой равновесия авт. системы, если $f(a) = 0(\dot{x}(a) = 0)$.

1.2. Классификация фазовых траекторий автономных систем.

Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из трех типов(классов): 1. Гладкая кривая без самопересечений. 2. Замкнутая гладкая кривая (цикл). 3. Точка.
Теорема: Если фаз. траектория решения $x = \varphi(t)$ есть гладская замкн. кривая, то это решение есть периодическая ф-я t с периодом $T > 0$. NEED SOME PROOFS FOR THAT SHIT, BUT I'm TOO LAZY.

1.3. Групповые свойства решений автономной системы уравнений.

Пусть $x(t, x^0)|_{t=0} = x^0$ - решение системы (1), т.е $x^0 \neq 0$ - нач. условие для системы (1). Тогда $x(t_1 + t_2, x^0) = x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1, x(t_2, x^0))$.
Док-во: Пусть вект.функции: $\varphi_1(t) = x(t, x(t_1, x^0)); \varphi_2(t) = x(t + t_1, x^0)$ - это решение для системы 1. При $t = 0$: $\varphi_1(0) = x(t_1, x^0); \varphi_2(0) = x(t_1, x^0)$. Т.е $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. В силу теор. о единственности $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t$. Отсюда следует оба уравнения из условия. Из предыдущег оследует: $x(-t, x(t, x^0)) = x_0$.

1.4. Структура решений автономной системы в окрестности неособой точки.

Дано: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ в нек-й окрестности точки V точки a; $f(a) \neq 0$. Фазовые траектории в окрестности V будут кривыми и гладкой заменой переменных их можно сделать прямыми.
Теорема о выпрямлении: пусть $f(a) \neq 0$. Тогда в малой окрестности точки a систему (1) путем гладкой замены переменных можно привести к виду: (2) $\frac{dy_1}{dt} = 0; \frac{dy_2}{dt} = 0; \ldots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Траектории для (2) - прямые линии: $y_1 = C_1; \ldots; y_n = t + C_n$.
Док-во: Т.к $f(a) \neq 0$ - без огр. общн. говорим, что : $f_n(a) \neq 0$. Пров. гиперплоск. $P : x_n = a_n$. Её точки имеют вид: (ξ, a_n). Пусть: $x = \varphi(t, \xi)$ - решение (1), такое, что $\varphi(0, \xi) = (\xi, a_n)$ - нач. точка лежит на P. Формула: $x = \varphi(t, \xi)$ - и дает искомую замену. Обознач. $y_1 = \xi_1; \ldots; y_n = t$. В новых переменных траектории будут прямыми линиями, т.к из опред. решения имеем, что $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ лежат вдоль траектории $x = \varphi(t, \xi^0)$ и её уравн. в перем. y им. вид: $y_1 = \xi_1^0; \ldots; y_n = t$.

1.5. Производная в силу системы. Геометрическая интерпретация.

Дано : $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ (1). Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-я $\vec{f}$ непр. дифф. по всем аргументам.
Конструкция : Рассм. произв. ф-ю $u = (t, \vec{x})$. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение сист. (1) $\Rightarrow$ Вдоль реш. системы имеем $u(t, \vec{\varphi}(t)) = \mathbb{W}(t)$. Дифференцируем $\mathbb{W}(t)$ по t: $\frac{d\mathbb{W}}{dt} = (\frac{\partial u(x,\vec{t})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial x_j} \cdot f_j(t, \vec{x})|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}$ (2). Полученное в (2) выражение - производной ф-ии u в силу системы (1). Обозн. $\dot{u}$ или $\frac{du}{dt}$.
Геом. интерпретация : Пусть $u(x)$ - гладкая и $\nabla u(x) \neq 0$ в уч. обл. D. $\Rightarrow$ ур-е $u(x) = 0$ опр. гладкую поверхность S, а вектор $\nabla u(x)$ ортогонален к S в точке x и направлен в сторону возр. ф-ии $u(x)$. Если $\dot{u}(x) \leq 0$, то участок ф-ии $f(x)$ образует прямой или тупой угол с вектором $\nabla u(x)$.

1.6. Первые интегралы. Теорема о первых интегралах. Независимые интегралы.

Определение: Ф-я $u(x)$ называется первым интегралом автономной системы (1) если она постоянна вдоль каждой траектории этой системы.
(1) Теорема опервых интегралах : Для того, чтобы ф-я $u(x)$ была перв. интег. системы (1) необх. и достаточно, чтобы она удовл. соотн в области D: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cdot f_j(x) = 0$ (#)
Док-во (1) : Пусть $u(x)$ - непр. интегрируемо в обл. D. $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) $\Rightarrow$ $\mathbb{W}(t) = u(\varphi(t))$ - постоянна $\forall t \Rightarrow \dot{u}(x) = 0$ в D. Обратно: Пусть # - в области $D \Rightarrow$ пусть $x = \varphi(t)$ - решение для (1) $\Rightarrow \frac{d}{dt} u(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x)|_{x=\varphi(t)} = 0$ $\Rightarrow u(\varphi(t))$ - не зависит от $t \Rightarrow$ - явл. первым интегралом. ЧТД.
(2) Теорема о независимых интегралы : Пусть т. a не есть положение равновесия. Тогда в её некоторой окрестности $\exists n{-}1$ независимых интегралов первых интегралов $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ и любой иной первый интеграл выражается через них.
Док-во (2) : Пусть окр. a дост. мала $\Rightarrow \exists$ окр. V точки $y = 0$ и гладкая обратимая замена $x = \varphi(y)$ приводящая систему к виду $\frac{dy_1}{dt} = 0; \ldots; \frac{dy_n}{dt} = 1$. Полученная система имеет $n - 1$ незав. первых интегралов $u_1(y) = y_1; \ldots; u_{n-1}(y) = y_{n-1}$ и всякий иной первый интеграл выражается через них.

1.7. Устойчивость положения равновесия по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Устойчивость по Ляпунову : Положение равновесия a называется устойчивым по Ляпунову, если:
1. $\exists \delta_0 > 0$, такое, что если $|x^0 - a| < \delta_0$, то решение $x(t, x_0)$ - существует и единств. при $0 \leq t \leq \infty$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $|x^0 - a| \leq \delta$, то $|x(t, x^0) - a| \leq \varepsilon$, при всех $0 \leq t \leq \infty$
Асимптотическая устойчивость : Положение равновесия a назыв. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и если $\lim_{t \to +\infty} x(t, x^0) = a$, при достаточно малом $|x^0 - a|$.
Проще : Если точку сдвинуть из положения равновесия, то она будет стремиться туда вернуться.

1.8. Линейные автономные системы. Структура общего решения в случае различных корней. Случай вещественной матрицы.

(1) Вид : $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$
Собственные значения : Вектор $e \neq 0$ на-

зыв. собств. вектором матрицы A(в нашем случае - матрицы из a_{ij}), если $Ae = \lambda e$. Притом λ - назыв. собств. значением матрицы и $det(A-\lambda E) = 0$. Если собственные значения матрицы A различны, то существует невырожд. матрица T, приводящая матрицу A к диагональному виду.

Случай различных корней : Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собств. значения матрицы $A \Rightarrow$ всякое решение уравнения $\frac{dy}{dt} = A\dot{x}$ имеет вид: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{e}_n$, где $\vec{e}_i$ - собств. вектор матрицы A.

Случай вещественной матрицы : Пусть A - вещ. λ - вещ. e - собств. вектор. $\Rightarrow \vec{\lambda}$ - собств. знач. с собств. вектором $\vec{e}$. Док-во: $Ae = \lambda e \Rightarrow \vec{A}\vec{e} = \vec{\lambda}\vec{e}; \vec{A} = A \Rightarrow A\vec{e} = \vec{\lambda}\vec{e}$. ЧТД. Если λ - вещ. собств. знач. $\Rightarrow$ собств. вектор тоже веществ. и решение берем как $x = e^{\lambda t}\vec{e}$.

1.9. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Вещественные корни.

Дано : $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots \\ \dot{x}_1 = a_{21}x_1 + \ldots \end{cases}$, λ_1, λ_2 - собств значения.

Корни вещественны, различны, не нулевые : $\Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2$. $\vec{e}_i$ - базис на плоскости. Пусть ξ_1, ξ_2 - коорд. вектора x в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: Узел. При $C_1 = C_2 = 0$ - точка покоя $(0, 0)$. Траектории направлены в центр.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: Устойчивый узел. Траектории направлены из центра.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Седло. Траектории образуют гиперболы во всех четвертях. В нижних четвертях направлены вниз, в верхних - вверх.

1.10. Анализ плоской фазовой системы. Разбор различных случаев. Комплексные корни.

Оба корня чисто мнимые : Центр. $\xi_1 = \rho_0 cos(\beta t + \psi); \xi_2 = \rho_0 sin(\beta t + \psi), \rho_0 = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. Фазовые траектории - эллипсы, направление зависит от знака $\beta : \beta > 0$ против часовой.

$\alpha < 0$: Устойчивый фокус. $\xi_1 = \rho_0 e^{\alpha t} cos(\beta t + \psi); \xi_2 = \rho_0 e^{\alpha t} sin(\beta t + \psi)$. Траектории - спирали, закручивающиеся в центр, направление зависит от знака β.

$\alpha > 0$: Неустойчивый фокус. Спираль раскручивается.

1.11. Функции Ляпунова. Лемма об оценке квадратичной формы.

Положительно и отрицательно определенные ф-ии : Пусть есть $x \in \mathbb{R}^4$, $V(a) \in C(V)$. Ф-я $V(x)$ называется положительно определенной в области V, если есть т. a, такая что в её окрестности $V(x) > 0 \forall x \in U(a)$ и $V(a) = 0$. И отрицательн определенной иначе.

Функция Ляпунова : Положительно определенная в окр. точки a функция $V(x)$ называется ф-ей Ляпунова системы $\dot{x} = f(x)$ (1), если $\dot{V}(x) \le 0, \forall x \in V$. $\dot{V}(x)$ - производная в силу системы (1). $\dot{V}(x) = \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x) \le 0$.

Лемма о квадр. форме : Если A - веществ. симм. матрица (n x n) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^4$ верно: $\alpha|x|^2 \le |(Ax, x)| \le \beta|x|^2$, где $\alpha = min(A); \beta = max(A)$.

Док-во : Приведем A к диаг. виду с помощью орт. преобразования матрицей T, т.е $T^{-1}AT = \mathcal{L}$ - диаг. матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Сделаем замену $x = TY \Rightarrow$ в силу ортогональности $(Ax, x) = (ATY, TY) = (T^{-1}ATY, y) = (T^{-1}ATY, Y) = (\mathcal{L}Y, Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, так что $\alpha|x|^2 = |(Ax, x)| = \beta|x|^2$. Т.к ортогон. преобр. сохраняет длину вектора то $|x| = |y|$. Лемма доказана.

1.12. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Теорема : Если в некоторой окрестности V полож. равнов. a существует ф-я Ляпунова $V(x)$ - то это положение устойчиво по Ляпунову.

Док-во : Пусть $a = 0$. Выберем $\varepsilon > 0$, такой, что шар $K_\varepsilon : |x| \le \varepsilon$ лежит в окрестности V точки a. Пусть S_ε - сфера, $|x| = \varepsilon$ - гран. шара K_ε. S_ε - замкнутое, огр. мн-во. Ф-я $V(x)$ - непрерывн. и $V(x) > 0$ на $S_\varepsilon \Rightarrow min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = k > 0$. Рассм. Шар $K_\delta : |x| \le \delta$, содержащийся в V. Т.к $V(0) = 0$, то $\delta > 0$ можно выбрать настолько малым, что бы выполнялось неравенство $V(x) < k, x \in K_\delta$. в силу непр. ф-ии $V(x)$. Покажем, что если $|x^0| \le \delta$, то $|x(t, x^0) \le \varepsilon$ при $0 \le t \le \infty$. Тем самым теорема будет доказана. Т.к $\dot{V}(x) \le 0$ в V и $V(x^0) < k$, то $V(x) < k$ при $t \ge 0$ вдоль фазовой траектории $x = x(t, x^0) \Rightarrow$ фазовая траектория начинается в шаре K_δ и не может пересечь границы шара $K_\varepsilon \Rightarrow V(x) \ge k$ на S_ε и $V(x) < k$ на траектории. ЧТД.

1.13. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема : Пусть в нек. окр. V положения равн. a сущ. ф-я Ляпунова $V(x)$ такая что $\dot{V}(x)$ - отриц. опр. в $V \Rightarrow$ полож. равн. a асимпт. устойчиво.

Док-во : Выберем шары K_ε, K_δ как в пред. теор. По Ляпунову если $|x^0| \le \delta \Rightarrow |x(t, x^0)| \le \varepsilon$ при $t \ge 0$. Рассм. ф-ю $W(t) = V(x(t, x^0))$ при $t \ge 0$. Т.к $\dot{V}(x) \le 0 \Rightarrow$ ф-я $W(t)$ невозраст. $\Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty} W(t) = A$. При этом $A \ge 0$ поскольку $V(x) \ge 0$. Если $A = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t, x^0) = 0$ т.к $V(x) > 0$ при $x \ne 0$. $V(0) = 0$ след. теорема доказана. Для случая $A > 0$ доказать через противоречие.

1.14. Теорема Четаева о неустойчивости.

Теорема : Пусть a - пол. равн. V - окр-ть пол. равн. V_1 - область в V и V_1 имеет т.a своей границей. Тогда если в V_1 $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) > 0 \end{cases}$ и $V(x) = 0$ в тех. гран. точках области V_1, которые лежат внутри области $V \Rightarrow$ положение равновесия $x = a$ неустойчиво.

Док-во : Пусть $x^0 \in V$, ρ - фаз. траект. выходящая из $x^0 \Rightarrow \rho = x(t, x^0)$. Покажем, что траектория ρ не может пересечь часть границы области V_1, которая лежит в V. Рассм. ф-ю $V(x)$ вдоль ρ. $W(t) = V(x(t, x^0))$. Т.к $W(0) > 0; W'(t) = \dot{V}(x) > 0$. Пока ρ содерж. в V_1, то $W(t) > 0$, пока ρ содерж. в V_1 и не может пересечь часть границы V_1, на которой $V(x) = 0 \Rightarrow$ траектория должна покинуть V_1, т.к V_1 содержит точки, сколь угодно близкие к $a \Rightarrow$ это положение равновесия неустойчиво. ЧТД.

1.15. Теорема о устойчивости положения равновесия линейной системы.

Дано : система (1) $\frac{dx}{dt} = Ax, A \leftrightarrow [n \times n]$

Теорема : Положение равн. системы (1) асимптотически устойчиво $\Leftrightarrow$ веществ. части всех собств. значений матрицы A - отрицательные.

Док-во : Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собств. знач. и $Re\lambda_j \le -\alpha < 0 \forall j = \overline{1, n}$. Пост. ф-ю ляпунова $V(x)$. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon = (b_{ij}) : |b_{ij}| \le \varepsilon$. Подставим это и $x = T(y)$ в (1): $\frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y$ (2). Ф-ю Ляпунова возьмем в виде: $V(x) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = (y, \vec{y})$. Эта ф-я положительно определена в любой окр. $y = 0$. Имеем: $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(y, \vec{y}) = (\frac{dy}{dt}, \vec{y}) + (y, \frac{d\vec{y}}{dt}) = ((\mathcal{L} + \vec{\mathcal{L}})y, \vec{y}) + [(B_\varepsilon y, \vec{y}) + (y, \vec{B_\varepsilon}\vec{y})]$. Первое из слагаемых равн: $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \vec{\lambda_i})|y_i|^2 = 2\sum_{i=1}^n Re\lambda_i |y_i|^2 \le -2\alpha \sum |y_i|^2$, т.к $Re\lambda_i \le -\alpha$. Далее, т.к $|b_{ij}| \le \varepsilon \Rightarrow |(B_\varepsilon y, \vec{y})| \le \sum |b_{jk}| \cdot |y_j| \cdot |y_k| \le \varepsilon \sum |y_j| \cdot |y_k| = \sum(\sum |y_i|^2) = n\varepsilon \sum |y_j|^2$, т.к $(\sum |y_i|)^2 \le n \sum |y_i|^2$. Такая же оценка для второго слагаемого $\Rightarrow \dot{V}(x) \le -2(\alpha - n\varepsilon)\sum |y_i|^2 = -2(\alpha - n\varepsilon)V(x)$. Выберем ε : $0 < \varepsilon < \frac{a}{n} \Rightarrow \dot{V}(x)$ - отрицательно определена $\Rightarrow$ положение равновесия асимпт. устойчиво. ЧТД.

1.16. Устойчивость по линейному приближению. Теорема об устойчивости по лин. прибл.

Дано : $\frac{dx}{dt} = f(x)$ (1). a - положение равновесия. $f(a) = 0$. $a \in V; f \in C^2(V)$. Разложим $f(x)$ по ф.тейлора: $f(x) = f'(a)(x-a) + g(x)$, где $f'(a)$ - якобиан в т.a. Кроме того $|g(x)| \le C|x-a|^2$. Отбрасыв. $g(x)$ получим лин. систему (2) $\frac{dy}{dt} = Ay; y = x - a; A = f'(a)$.
Теорема : Пусть $f(x) \in C^2(V), V = U(a)$. Если веществ. части всех собств. значений $f'(a)$ - отрицательны, то положение a асимпт. устойчиво. Кроме того: $|x(t, x^0) - a| \le Ce^{-\alpha t}|x^0 - a|; 0 \le t < \infty$.
Док-во : a $= 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A(x) + g(x); |g(x)| \le C_1|x|^2$. Для док-ва построим полож. опр. в окр т.a ф-ю Ляпунова. Пусть $x = Ty \Rightarrow \frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y + h(y)$, где $h(y) = T^{-1}g(Ty)$. Ф-ю Ляпунова возьмем в виде $V(x) = \sum |y_i|^2 = (y, \vec{y})$. Аналогично пред. теор. $\dot{V}(x) = [((\mathcal{L} + B_\varepsilon)y, \vec{y}) + (y, (\vec{\mathcal{V}} + \vec{B}_\varepsilon)\vec{y})] + [(h(y), \vec{y}) + (y, \vec{h(y)})] + A_1 + A_2$. A_1 - произв. в силу системы $\frac{dy}{dt} = (\mathcal{L} + B_\varepsilon)y \Rightarrow$ справедлива оценка из пред. теор: $A_1 \le \rho|x|^2$. $|A_2| \le 2|y||h(y)| \le C_3|x|^2$. Таким образом $\dot{V}(x) \le -|x|^2 \cdot (\rho - C_3|x|)$. Выберем окр. $W \subset V$, такую что $|x| < \frac{\rho}{2C_3}$, тогда $\dot{V}(x) \le -\frac{\rho}{2}|x|^2 \Rightarrow$ ф-я $\dot{V}(x)$ отриц. опред. в W и след. положение a асимпт. устойчиво.ЧТД.

1.17. Устойчивость произвольных решений автономных систем. Устойчивость нулевых решений неавтономных систем.

Дано : Система (1) $\frac{dx}{dt} = f(t, x); f \in C^2(\sigma)$, считаем что $f(t, 0) = 0, t \ge 0 \Rightarrow$ система имеет решение $X(t) = 0$. Для неавтономных систем формулировки те же, что и для автономных.
Устойчивость решений авт. систем : Дана система (2) $\frac{dx}{dt} = g(x)$. Сделаем подстановку $x(t) = \varphi(t) + y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g(\varphi(t) + y(y))$ - (3). Решение $\varphi(t)$ системы (2) называв. устойчивым по Ляпунову (асимпт.) если таковым является нулевое решение $y(t) = 0$ для системы (3).

1.18. Функции Ляпунова для неавтономных систем. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению для неавтономных систем.

Ф-ии Ляпунова для неавтономных систем : Ф-я $V(t, x)$ называется ф-ей Ляпунова для неавтоновной системы (1) если: 1) Эта ф-я определена и непр. дифф. при $x \in \mathbb{R}, t \ge 0$. 2) $V(t, 0) = 0$ при $t \ge 0$. 3)$\exists W(x)$б положительно определенная в области Σ, такая что $V(t, x) \ge W(x)$ при всех $x \in \Sigma, t \ge 0$. 4) $\dot{V}(t, x) \le 0 \forall x \in \Sigma, t \ge 0$.
Теорема : Рассм. систему: $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x)$ (1). Пусть A - матрица, веществ. части собств. значений которой отрицательны. $f(t, x)$ - непр. дифф. при $|x| < p_1, t \ge 0$ и $f(t, x) = o(|x|), |x| \to 0$. Тогда нулевое решение системы (1) асимпт. устойчиво и справ. оценка: $|x(t)| \le C|x(0)|e^{\alpha t}, t \ge 0$, где $\alpha > 0, C > 0$ если $|x(0)|$ дост. мало. ДАНО БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

1.19. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Связь первых интегралов и линейных уравнений в частных производных первого порядка. Характеристики для линейных систем. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Примеры.

Классификация - Линейные уравнения : Ур-е называется линейным если неизв. ф-я $u(x)$ и $\frac{du}{dx_i}$ входят линейно. Общий вид: $\sum_{j=1}^n u_j(x)\frac{du}{dx_j} + b(x)u = f(x)$ (1).
Классификация - Квазилинейные : Ур-е называется квазилинейным если частные $\frac{du}{dx_i}$ пр-е входят линейно. Общий вид: $\sum_{j=1}^n a_j(x, u)\frac{du}{dx_j} = b(x, u)$.
Связь первых интегралов и линейных уравнений : Рассм. систему (a) : $\frac{dx}{dt} = f(x)$. По теор. первых интегралов - гладкая ф-я $u(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда является первым интегралом системы (a), когда u удовл. ур-ю с частн. производными первого порядка $\sum_{j=1}^n f_j(x)\frac{du}{dx_j} = 0$ (b).
Теорема об общем решении : Пусть V дост. малая окрестность точки $a \Rightarrow$ в обл. V всякое решение ур-я (b) имеет вид $u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$, где $u_i(x)$ - незав. первые интегралы, а F - произвольная гладк. ф-я.
Характеристики для лин. систем : Система (a) назыв. характеристической для (b). Фазовые траектории для (a) назыв. характеристиками для (b). Пример: $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$. Ур-е характеристик - $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = dt \Rightarrow$ характеристика - окружность $x^2 + y^2 = C$.

1.20. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система для таких уравнений. Общий вид решения квазилинейных уравнений.

Дано : Квазилинейное ур-е $\sum_{j=1}^n a_j(x, u)\frac{du}{dx_j} = b(x, u)$ - (1). Её характеристическая система:
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x, u); \ldots ; \frac{dx_n}{dt} = a_n(x, u) \\ \frac{du}{dt} = b(x, u) \end{cases}.$$
Общий вид решения : Гладкая ф-я n независисмых первых интегралов u_i : $u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_n(x))$.