Curso preparatorio de Matemáticas

Facultad de Ciencias Experimentales

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE HUELVA

Para aprender a bordar, primero hay que saber coser

Juan María Arzak

Índice general

Introducción

Queridos alumnos:

Estos apuntes, que no pretenden ser ni sustituir a ningún libro de texto, van dirigidos a aquellos de vosotros que por vez primera cursáis alguna asignatura de Matemáticas en la Facultad de Ciencias Experimentales; también a la mayoría de repetidores. Se pretende que sirvan de guía para el mini-curso que en este año académico 2007-2008 se ha implantado, por vez primera, en la Facultad. El origen de este mini-curso, cuáles son sus objetivos y cuál debería ser, a nuestro juicio, vuestra actitud ante el mismo son las cuestiones que motivan esta breve introducción.

En ocasiones, los profesores de Matemáticas nos quejamos de las dificultades que encontramos en nuestro trabajo y son muchas las veces que tenemos la sensación de predicar en el desierto. Recíprocamente, muchos de vosotros tenéis, de vez en cuando, la sensación de que el profesor habla para una especie de "super-alumno". Aunque entrar en un análisis pormenorizado de las causas que provocan estos desencuentros va más allá de las pretensiones de esta breve introducción, sí hay una cosa que está clara: por lo general, vuestra formación al acceder a los estudios universitarios de carácter matemático es francamente deficitaria. Así las cosas, el riesgo de fracaso es alto pues, como suele decir Juan María Arzak, "*para aprender a bordar, primero hay que saber coser*".

Si estamos de acuerdo en que hay un problema, la conclusión debería ser obvia: hay que intentar solucionarlo. Con este objetivo en mente se concibió este curso preparatorio. En él, intentaremos paliar la brecha existente entre el nivel teórico que deberíamos tener para cursar las asignaturas de matemáticas en la Facultad de Ciencias y el nivel que realmente tenemos. Estamos convencidos de que el camino que iniciáis, o continuáis, en la Facultad de Ciencias es un hermoso camino que merece ser hollado, de que aquí tendréis la oportunidad real de formaros como científicos y de que el esfuerzo merece la pena.

Es cierto que nuestro sistema educativo puede (y debe) ser criticado pero, al final, los problemas son nuestros y somos nosotros los que debemos solucionarlos. Endosar la causa de nuestras carencias a "*lo mal*" que lo hicieron nuestros educadores pasados puede ser cierto en muchos casos, pero no resuelve el problema. Este déficit inicial que padecemos puede y debe ser superado pero, para superarlo, sólo hay una receta: ¡TRABAJO!

Capítulo 1

Cálculo operacional

1.1. Potencia de un número real

Si a es un número real no nulo y $n \in \mathbb{N}$, se definen

$$a^n = a \overset{(n)}{\cdots} a \qquad , \qquad a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{nm}$

1.2. Raíces reales de un número real: Radicales

Si a es un número real y $n \in \mathbb{N}$, se llama ***raíz n-ésima*** de a a todo número real x tal que $x^n = a$ (así, en cierta forma, hablamos de invertir la potencia n-ésima).

¿Cuántas raíces n-ésimas tiene un número $a \in \mathbb{R}$?

- La única raíz n-ésima de 0 es 0. Escribimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

- Si n es par, todo $a > 0$ tiene dos raíces n-ésimas que son números opuestos. Las designaremos $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$.

- Si n es par y $a < 0$, no existe raíz n-ésima de a.
- Si n es impar, todo número real $a \neq 0$ tiene una única raíz n-ésima del mismo signo que a. Observemos que si n es impar y $a > 0$, entonces $(-\sqrt[n]{a})^n = -(\sqrt[n]{a})^n = -a$, lo que significa que $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Las consideraciones anteriores permiten en todos los cálculos que las raíces se puedan transformar en otras cuyo radicando es positivo por lo que en adelante sólo nos referimos a radicales $\sqrt[n]{a}$, con radicando $a > 0$ e índice $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p \cdot b^q}$ $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} \cdot b^{nq}}$

2) $\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p : b^q}$ $\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} : b^{nq}}$

3) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (sirve para extraer o introducir factores en un radical)

Los radicales se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, siéndoles de aplicación las propiedades de las potencias y, para los índices, la simplificación de fracciones produce radicales equivalentes y la reducción a común denominador radicales del mismo índice.

Las expresiones radicales $\alpha\sqrt[n]{a}$ y $\beta\sqrt[m]{b}$ se denominan semejantes si $n = m$ y $a = b$. Se pueden efectuar sumas y restas de expresiones radicales semejantes.

Ejemplo 1.2.1.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + 7\sqrt[3]{2^6 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^4} \\
&= 2\sqrt[3]{3} + 2^2 \cdot 7\sqrt[3]{3} - 2 \cdot 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\
&= (2 + 28 - 10 - 3)\sqrt[3]{3} \\
&= 17\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Racionalizar una expresión fraccionaria en la que aparecen radicales en el denominador es transformarla en otra equivalente cuyo denominador no contenga raíces. Los casos más habituales de racionalización son los siguientes:

- En el denominador aparece un factor radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$: Se multiplican numerador y denominador de la fracción por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplos 1.2.2.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{3} = 2\sqrt[5]{3^3}$$

- En el denominador aparece una suma o una diferencia con raíces cuadradas: Se multiplican numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador (el conjugado de la suma es la diferencia y viceversa).

Ejemplos 1.2.3.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$$

1.3. Logaritmos

Si $b > 0$ y $b \neq 1$ se llama ***logaritmo en base* b *de* a** $> \mathbf{0}$ al exponente $x \in \mathbb{R}$ al que se debe elevar b para que dé como resultado a. Es decir $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Propiedades

1) $\log_b b = 1$ y $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

3) $\log_b(a : c) = \log_b a - \log_b c$

4) $\log_b(a^p) = p\log_b a$

5) $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\log_b a$

6) $\log_b a = \log_d a \cdot \log_b d$ (Cambio de base).

1.4. Monomios y polinomios

Monomio en la ***indeterminada*** x es toda expresión de la forma ax^n donde el número real a es el ***coeficiente*** y el número natural n su ***grado.***

Los monomios ax^n y bx^m coinciden si $a = b$ y $n = m$.

Se pueden sumar o restar monomios del mismo grado: $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$.

Se pueden multiplicar monomios arbitrarios: $(ax^n) \cdot (bx^m) = (ab)x^{n+m}$.

Si $n \geq m$, $(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m}$.

Polinomio es una suma indicada de monomios. El grado del polinomio es el grado de su monomio de mayor grado. El polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$, es de grado n, su coeficiente principal es a_n y su término independiente es a_0.

División de polinomios: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $\text{gr}[P(x)] \geq \text{gr}[Q(x)]$, existen $C(x)$ y $R(x)$, únicos, tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \text{y} \quad \text{gr[R(x)]} < \text{gr[Q(x)]}$$

El grado de $C(x)$ siempre es igual a la diferencia entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

En el caso de ser $R(x) \equiv 0$, decimos que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$ ó que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$.

Teorema del resto

Si $a \in \mathbb{R}$, el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por el binomio $x - a$ es igual al valor numérico $P(a)$.

En particular, $P(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.

La regla de Ruffini permite hacer las divisiones del tipo $P(x) : (x - a)$ con comodidad.

Ejemplo: Si queremos dividir $-x^4 + 3x^3 - 15x + 7$ entre $x + 2$, por la regla de Ruffini procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 3 & 0 & -15 & 7 \\ -2 & \downarrow & 2 & -10 & 20 & -10 \\ \hline & -1 & 5 & -10 & 5 & \underline{|-3} \end{array}$$

de forma que el cociente de la división es $-x^3 + 5x^2 - 10x + 5$ y el resto es -3.

1.4.1. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es descomponerlo en factores irreducibles de alguna de las formas $(x - a)$ ó $(px^2 + qx + r)$ con $q^2 - 4pr < 0$. Para conseguirlo necesitamos hallar sus raíces reales.

Raíz (ó cero) de $P(x)$ es todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(a) = 0$ lo que, según hemos visto anteriormente, equivale a que $(x - a)$ es un divisor de $P(x)$.

Algunas pautas a seguir en la localización de raíces y la factorización de un polinomio:

- Las raíces enteras del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre los divisores de su término independiente a_0.
- Las raíces racionales de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre las fracciones $\dfrac{p}{q}$ tales que su numerador p es divisor de a_0 y su denominador q es divisor del coeficiente principal a_n.
- Cada vez que encontremos una raíz, a, del polinomio $P(x)$, podemos dividir $P(x)$ por $(x-a)$ y seguir con el polinomio cociente que tiene grado inferior en una unidad.
- El cálculo las raíces irracionales de un polinomio de grado superior a dos es un problema que no abordamos de momento. Las raíces irracionales de un polinomio de segundo grado se obtienen resolviendo la ecuación correspondiente.
- Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Ejemplo 1.4.1. Si consideramos el polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, sus posibles raíces enteras son 1 y -1. Como $P(1) = 8$, 1 no es raíz; al ser $P(-1) = 0$, -1 sí es raíz. Dividimos $P(x)$ entre $(x+1)$ obteniendo que $P(x) = (x+1)(2x^4+x^3+x^2+x-1)$. Como $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ vuelve a tener la raíz -1, volvemos a dividir por $(x + 1)$ obteniendo que $P(x) = (x + 1)^2(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$. Comprobamos que -1 no es raíz de $(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$ y obtenemos que sus posibles raíces racionales son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Al ser $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$ y $P(\frac{1}{2}) = 0$, tiene la raíz racional $\frac{1}{2}$ y podemos dividir por $(x-\frac{1}{2})$, obteniendo así que $P(x) = (x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2)$. Ya que el cociente resultante $2x^2 + 2$ no tiene raíces reales, la descomposición factorial de $P(x)$ es $P(x) = 2(x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)$.

1.4.2. Potencia n-ésima de un binomio (Binomio de Newton)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define el ***factorial de*** $k > 0$ como $k! = 1 \cdot 2 \cdot (k-1) \cdot k$. Se conviene que sea $0! = 1$.

Se verifica que $k! = (k-1)! \cdot k$.

Se define el ***número combinatorio*** de numerador n y orden k como $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ para cada $k = 0, 1, \cdots, n$.

Se puede comprobar con facilidad que son ciertas las siguientes identidades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \;\; ; \;\; \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \;\; ; \;\; \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y a y b son números reales, se verifica:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Algunos casos particulares:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $\qquad$ $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

1.5. Valor absoluto

Dado un número $x \in \mathbb{R}$, se define el ***valor absoluto*** de x como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Propiedades

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $-|x| \leq x \leq |x|$

4) $|x| = |-x|$, en particular $|x-y| = |y-x|$

5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, en particular $|x|^2 = |x^2| = x^2$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

7) Si $r > 0$ se tienen que $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (la equivalencia sigue siendo cierta si cambiamos $\leq$ por $<$)

8) $|x| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ó} \\ x \leq -k \end{cases}$ (la propiedad se mantiene considerando todas las desigualdades estrictas)

9) Desigualdad triangular $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

10) $|x-y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|$

11) $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$ en particular $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

Notas:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$, más general si $n \in \mathbb{N}$ es par, $|x| = \sqrt[n]{x^n}$.

(2) $|a-b| = |b-a|$ representa la distancia entre a y b. Por tanto el valor absoluto de un número representa la distancia del punto al origen. Observe que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, $|3| = 3$, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3, $|-3| = 3$.

1.6. Desigualdades. Propiedades

Las siguientes propiedades se deducen de los axiomas de orden. Éstas nos serán útiles a la hora de trabajar con números reales, en especial con inecuaciones.

1) Propiedad transitiva. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

2) Si $a < b$ se tiene que $a + c < b + c$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

3) Si $a < b$ y $c > 0$ se tiene que $a \cdot c < b \cdot c$.

4) Si $a < b$ y $c < 0$ se tiene que $a \cdot c > b \cdot c$.

5) Si $a < b$ es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.

6) Si $a \cdot b > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.

7) Si $a \cdot b < 0$ entonces a y b tienen signos opuestos.

1.7. Ecuaciones. Definiciones y propiedades básicas

- Una ***ecuación*** es una igualdad que contiene una o más incógnitas.
- Hay muchas formas de clasificar las ecuaciones, una de ellas consiste en expresar el número de incógnitas.

  Ejemplo: $3x - 2y = 5$ es una ecuación con dos incógnitas x e y.
- El ***grado*** de una ecuación con una incógnita y expresada a través de una igualdad polinómica coincide con el grado del polinomio.

  Ejemplo: $4x^3 + 7x^2 + 2 = 0$ es una ecuación de grado 3.

- Resolver una ecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la igualdad se cumpla.

  Ejemplo: $x^2 - 9 = 0$ es una ecuación con una incógnita x y dos soluciones, $x = -3; x = 3$.

- Debemos tener cuidado ya que no todas las ecuaciones tienen solución.

  Ejemplo: En el conjunto de los números reales no existe x tal que $x^2 + 1 = 0$ tenga solución.

- No debe confundirse ecuación con identidad.

  Ejemplo: La expresión $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ no es una ecuación sino una identidad, ya que ésta se cumple de forma universal para cualquier valor de x que tomemos.

  Una sencilla técnica para comprobar que estamos ante una identidad consiste en pasar todos los términos a un solo miembro de la igualdad y obtendremos $0 = 0$ (compruébese en el ejemplo).

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de ecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$, siendo a, b y c números reales.

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número real distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, siendo a, b, $c \neq 0$, números reales.

-> *Regla 3*: Si el producto de dos números reales es igual a cero, entonces al menos uno de los números debe ser igual a cero, esto es: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$, siendo a y b números reales.

1.7.1. Tipos de ecuación, técnicas de resolución y ejemplos

I) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes enteros.

Técnica: pasamos la incógnita a un miembro de la igualdad y los coeficientes al otro, usando las reglas vistas en la sección anterior.

Ejemplo: Resolver $3x - 44 = 2x - 35; \Rightarrow 3x - 2x = 44 - 35 \Rightarrow$ la solución es $x = 9$

II) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes racionales.

Técnica: Multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes y queda reducida al caso I).

Ejemplo: Resolver $\dfrac{x-3}{6}+\dfrac{2x-1}{3}=5(x-2)+5$; dado que m.c.m$(3,6)=6$, multiplicamos la ecuación por 6, tenemos $x-3+4x-2=30(x-2)+30 \Rightarrow x+4x-30x=3+2-60+30 \Rightarrow -25x=-25 \Rightarrow$ la solución es $x=1$.

iii) Ecuación con una incógnita, polinómica de segundo grado.

Técnica: Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, con $a\neq 0$.

Ejemplo: Resolver $4x^2+5x-9=0$.

iv) Ecuación con una incógnita, polinómica de grado mayor o igual a tres.

Técnica: Se pretende factorizar el polinomio, para ello podemos intentar hallar las raíces aplicando la regla de Ruffini.

v) Si la ecuación es bicuadrada, es decir de la forma $ax^4+bx^2+c=0$ entonces la fórmula de la ecuación de segundo grado nos permite hallar la solución, previo cambio de variable.

Ejemplo: $x^4-10x^2+9=0$, es una ecuación bicuadrada $\Rightarrow x^2=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow x^2=9; x^2=1 \Rightarrow$ las soluciones son: $x=-3, x=-1, x=1, x=3$.

vi) Ecuación con radicales y con una incógnita.

Técnica: Aunque no siempre es eficaz, se suele pasar la raíz a un miembro de la igualdad y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz. Hay que comprobar si las soluciones que se obtienen por este método son soluciones de la ecuación original.

Ejemplo: Resolver $x-2+\sqrt{x}=0$, dejamos la raíz sola $\sqrt{x}=2-x$, elevando al cuadrado $x=4-4x+x^2$, resolviendo $x=4; x=1$, pero la única solución es $x=1$ (compruébese).

vii) Ecuación logarítmica con una incógnita.

Técnica: Se utilizan las propiedades básicas de los logaritmos junto a que si $A>0; B>0$ se tiene que $\ln(A)=\ln(B) \Leftrightarrow A=B$.

Ejemplo: Resolver $\ln(x)+\ln(100)=2, \Rightarrow \ln(100x)=\ln(e^2) \Rightarrow x=\dfrac{e^2}{100}$.

viii) Ecuación exponencial con una incógnita.

Técnica: Se deben aplicar las propiedades de las exponenciales, teniendo además en cuenta que: Si $a>0$ se tiene que $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$.

Ejemplo: Resolver $2^{x+5}=16, \Rightarrow 2^{x+5}=2^4, \Rightarrow x+5=4, \Rightarrow$ la solución es $x=-1$.

Nota 1.7.1. Existen muchos otros tipos de ecuaciones, por ejemplo las trigonométricas para cuya resolución se han de tener presente las fórmulas de trigonometría. Además, cuando hay varias incógnitas y varias ecuaciones estamos ante lo que se denominan sistemas de ecuaciones (téngase en cuenta ahora que cada ecuación puede ser de algún tipo de las anteriores). Las técnicas de resolución son muy variadas y se adaptan a cada sistema en particular. Por ejemplo, los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas se suelen resolver mediante las famosas técnicas de: sustitución, igualación y reducción. Además se pueden resolver por métodos geométricos dibujando en el plano los puntos representados por cada una de las ecuaciones.

1.7.2. Ecuaciones con valores absolutos

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de ecuaciones.

Ejemplo 1.7.2. Resolver la ecuación $|x-3| = 5$. Como

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

quiere decir que tenemos dos ecuaciones

$$\begin{cases} x-3 = 5 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) = 5 & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $x = 8$ y satisface $x-3 \geq 0$, por tanto es solución de nuestra primitiva ecuación. De la segunda obtenemos que $x = -2$ y satisface $x-3 \leq 0$, por tanto también es solución de nuestra primitiva ecuación. Hemos obtenido dos soluciones de la ecuación planteada.

1.8. Inecuaciones

- Una ***inecuación*** es una desigualdad que contiene una o más incógnitas.
- Resolver una inecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la desigualdad se cumpla. Las soluciones de inecuaciones no tienen por qué ser ahora puntos aislados sino que nos podemos encontrar como solución la unión de intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos. El proceso de resolución es análogo al de resolución de ecuaciones salvo en algunos detalles.

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de inecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra inecuación equivalente, esto es: $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$, siendo a, b y c números reales. (ídem con $\leq$)

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real POSITIVO, se obtiene una inecuación equivalente, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c > 0 \text{ (ídem con } \leq)$$

-> *Regla 3*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real NEGATIVO, se obtiene otra inecuación equivalente, donde la desigualdad cambia de signo, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c < 0$$

(ídem si las desigualdades no son estrictas)

1.8.1. Inecuaciones con valores absolutos

Igual que en las ecuaciones con valor absoluto, para resolver inecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de inecuaciones. En particular, se usan las propiedades del valor absoluto:

7) $|x| < r$ si y sólo si $-r < x < r$, válido con $\leq$.

8) $|x| > k$ si y sólo si $x < -k$ ó $x > k$, válido con $\geq$.

Estas equivalencias nos permitirán resolver inecuaciones con valores absolutos al convertirlas en inecuaciones sin valor absoluto.

Ejercicios y problemas

1. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\dfrac{(4\cdot 3^2\cdot 6^{-2})^2\cdot(2^3\cdot 3^4)^{-1}}{(2^6\cdot 3^7)^{-3}\cdot(6^4)^3}$ *b*) $\left(-2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-2}$ *c*) $\dfrac{(a\cdot b)^2\cdot(a^{-3}\cdot b^3)^3}{(a\cdot b^2\cdot c^3)^{-5}}$

2. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[8]{81}$ *b*) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

c) $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\sqrt{45}$ *d*) $\dfrac{3^{-\frac{3}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{3})^{-3}\cdot\sqrt{81}}$

3. Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *b*) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *c*) $\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{4}}$ *d*) $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ *e*) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

4. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt[2]{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$ *b*) $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

c) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

5. Mediante la definición, calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ *b*) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ *c*) $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)$ *d*) $\log_{10} 0'001$ *e*) $\log_{\frac{1}{2}} 4$

f) $\log_{\frac{1}{10}} 10$ *g*) $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right)$

6. Calcular:

a) $\log_3 729-\log_2 128+\log_5 125-\log_{11} 121$ *b*) $\log_3\dfrac{1}{3}+\log_2\dfrac{1}{8}-\log_4\dfrac{1}{16}+\log_5\dfrac{1}{25}$

c) $\left(3^{\log_2 4}\right):\log_8 2$

7. Expresar como un solo logaritmo en base 10:

a) $3(\log 5+\log 2)-\log 2-\log 7$ *b*) $\dfrac{3}{2}(1-\log 5)+\dfrac{1}{2}\log 2$ *c*) $3\log 2-1+\dfrac{\log 5}{3}$

8. Efectuar las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(3x-2)^3$

b) $(-x^2+\sqrt{2}x)(x^2+\sqrt{2}x)$

c) $\left(\dfrac{2}{3}x+3x^2-5x^3+1\right)\cdot\left(5-2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$

d) $(3x^2-2)(5x-4)-[2x(x^2-1)-(3x+2)(5x^2+4)]$

e) $2x[(3x-4)-(2x+1)]-(5x+4)[2x(3x-1)+2x(x-3)]$

9. Hallar el cociente y el resto en las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(7x^5+4x^4-3x^3-12x^2+5):(x^3+2x)$

b) $(6x^3+2x-3):(x-5)$

c) $(x^4-5x^2+1):(x^2-1)$

10. Hallar el valor de m y n sabiendo que la división $(x^4-5x^3+4x^2+nx-m):(x^2-2x+3)$ es exacta.

11. Calcular $m \in \mathbb{R}$ para que

a) (x^3-3x+m) sea divisible por $(x-2)$.

b) $(2x^3+mx^2-x+3)$ sea divisible por $(2x+3)$

12. Calcular las raíces enteras y fraccionarias de los polinomios siguientes y descomponerlos en factores:

a) $4x^3-20x^2-x+5$ *b*) $x^4-2x^3-4x^2+8x$ *c*) x^5-x

d) $6x^3+13x^2+x-2$ *e*) $8x^3-62x^2-17x+8$ *f*) $64x^4-20x^2+1$

g) $x^4+x^3-x^2-11x+10$

13. ¿Qué sumando debemos añadir a $16x^4+40x^2$ para obtener un cuadrado perfecto?

14. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $(x-1)^5$ *b*) $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^3$ *c*) $(2x+3)^4$

d) $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ *e*) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^5$ *f*) $(2x-1)^2$

15. Determinar el coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{21}$. ¿Aparece x^7 en el desarrollo anterior?

16. En las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, factorizar los polinomios convenientes, efectuar las operaciones indicadas y simplificar al máximo el resultado:

a) $\dfrac{2}{x^3-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^+x+1}$ *b*) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-8x-5}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{4x^2}{x^4-1}-\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x+1}$ *d*) $\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$

e) $\left(x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2}\right)$ *f*) $\dfrac{x^2}{x+1}:\left[x-(x^2-1):\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

17. Convertir cada una de las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto:

a) $|2x-1|>1$ *b*) $|2-5x|\leq 3$ *c*) $4-|1-x|\leq 1$
d) $2|x-2|-1\leq 2$.

18. Escribir las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos:

a) x está a más de 3 unidades de -7.

b) x está al menos a 3 unidades de 5.

c) x dista de 7 en menos de 3 unidades.

d) El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, x, difiere de 12 en menos de 2 horas.

19. Describir y representar el conjunto determinado por cada una de las siguientes condiciones:

a) $|x|<1$ *b*) $|x|\leq 3$ *c*) $|x|\geq 1$ *d*) $|x|>12$
e) $|-x|\leq 2$ *f*) $|x|<-2$ *g*) $|x|\geq -2$ *f*) $|-x|\geq -2$

20. Determinar si cada una de las siguientes igualdades es una ecuación o una identidad:

a) $(x-2)^2=x^2-4x+4$

b) $(x-3)(x+3)=x^2-9+6x$

c) $(x-3)^2+5=x-4$

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones:

21. $\dfrac{x-5}{6}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{12}+\dfrac{x+2}{4}$

22. $x+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{2x-1}{18}=0$

23. $12x^2+15x-18=0$

24. $x^3-9x^2=15-23x$

25. $\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x-3}$

26. $\sqrt{-x+2}-1=0.5\sqrt{x+6}$

27. $2^x+2^{x+1}-24=0$

28. $25^x-305^x+5^3=0$

29. $\log_{10}(x)+\log_{10}(50)=3$

30. $2\log_{10}(x) - \log_{10}(x-16) = 2$

31. Resolver por igualación, sustitución y reducción. Comprueba el resultado gráficamente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ \quad x + 3y = 5; \end{cases}$$

32. Resolver:

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 3 = 0; \\ \qquad\quad x - y = 2; \end{cases}$$

33. Resolver:

a) $|x-4| = 3$ *b*) $3|5-4x| = 9$ *c*) $|x-5| = -2$

d) $|x| = x+1$ *e*) $|x| = x-1$

34. Encontrar todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

35. $|2x-1| \leq 3$

36. $10 - 3|2x-3| < 4$

37. $|x+4| \geq 7$

38. $|x-1| \leq -34$

39. $1 - |2x-3| < 4$

40. $|x-3| \leq 0$

41. $\dfrac{|6x-6|}{3} = 1$

42. $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| \leq 4$

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

43. $|2x-3| < 1$

44. $(x-2)^2 \geq 4$

45. $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

46. $|x| = x+5$

47. $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

48. $|x| = x-5$

49. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$

50. $|x^2-5x+6| = -(x^2-5x+6)$

51. $\Big||x|-2\Big| \leq 1$

52. $\Big||2-3x|-1\Big| > 2$

53. $|(x^2-4)-(x^2+2)| = |x^2-4|-|x^2+2|$

54. $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x + 3$

55. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2-5x+1=(x-1)^2$ *b*) $9x^2+30x+25=0$

c) $3x^2+5=4x^2$ *d*) $(x+\frac{1}{2})^2 = x-4$

56. Escribir una ecuación polinómica cuyas soluciones sean:

a) $x=0$, $x=-1$ y $x=2$ *b*) $x=0$ doble, $x=-4$ doble.

57. Escribir una ecuación polinómica de grado 2 cuyas soluciones sumen 3 y su producto sea 9.

58. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $6x^4-5x^2=0$ *b*) $x^4+5x^2+6=0$

59. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^4-10x^3+25x^2=0$ *b*) $4x^4-49=0$ *c*) $2x^3-5x^2+x+2=0$

60. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{2x^3+6x^2+8x+4}{x2+2x+1}=0$ *b*) $\dfrac{3x}{x^2-9}=\dfrac{5}{x-3}$

61. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $4x-5\sqrt{x}=0$ *b*) $\sqrt{x-2}=x-8$ *c*) $\sqrt[3]{2x-1}=x$

62. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{6x-5}-e=0$ *b*) $5\cdot 3^{x+1}-2\cdot 3^x=39$

63. Resolver las siguientes ecuaciones con dos incógnitas:

a) $y-\dfrac{\sqrt{x}}{3}=0$ *b*) $\ln x - y = 1$ *c*) $4x^2+4y^2+16x+12y+21=0$

64. Resolver las inecuaciones:

a) $3x - 1 \geq 7x + 7$ *b*) $\dfrac{6 - 2x}{9} > \dfrac{1 - x}{6}$

65. Resolver las inecuaciones:

a) $4x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 7x + 11$ *b*) $3x^3 + 36 \leq x^4 - 13x^2 + 51x$

66. Resolver la inecuación $\dfrac{4x}{(1+x)^2} \geq 1$

67. Resolver la inecuación $\sqrt{1+x} > \sqrt{1-2x}$

68. Resolver las inecuaciones:

a) $2y + x > 4 - x + 6y$ *b*) $2y \leq 1 - x + x^2$

69. Resolver las inecuaciones:

a) $2 - \ln y \leq x$ *b*) $\sqrt{x} < 2y + 2$

Capítulo 2

Trigonometría

2.1. Medida de ángulos: el radián

La Trigonometría es la parte de la Matemática que se ocupa de la medida de los lados y ángulos de un triángulo a partir del conocimiento de algunas de estas medidas (*trigonos* es una palabra griega que significa triángulo). Un ángulo es una porción del plano limitada por dos semirrectas que parten de un mismo punto O, llamado vértice. Las semirrectas que lo delimitan se denominan lados del ángulo (Figura 2.1).

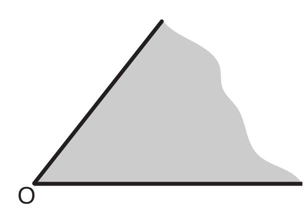


Figura 2.1: Un ejemplo de ángulo

Para medir ángulos usaremos una medida adimensional cuya unidad se denomina radián. Supongamos que se desea medir el ángulo representado en la Figura 2.1. Para ello, con centro en O, trazamos un arco de circunferencia de radio r que intercepta con los lados en los puntos A y B (ver Figura 2.2). Si ℓ denota la longitud del arco de extremos A y B, tomaremos el cociente $\alpha = \frac{\ell}{r}$ como medida del ángulo y diremos que el ángulo mide α radianes. Un ángulo cuya medida es un radián es aquel que tiene la propiedad de que el radio r coincide con la longitud ℓ del arco de extremos A y B.

Nótese que el radián es adimensional pues se trata de un cociente de dos longitudes. La medida de ángulos que acabamos de introducir no sería consistente si pudiera ocurrir que al escoger otro radio r', para trazar el arco de circunferencia con centro V, el cociente ℓ'/r' no coincidiera con ℓ/r, donde ℓ' denota la longitud del arco de circunferencia de extremos A' y B' (Figura 2.3). Por tanto, antes de dar por buena la definición debemos probar que

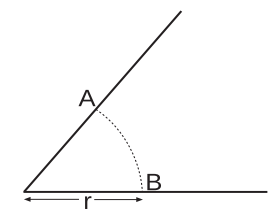


Figura 2.2: Definiendo el radian

se verifica la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$, cualesquiera que sean los radios r y r'. Para probar esta igualdad, necesitamos el Teorema de Tales sobre triángulos semejantes.

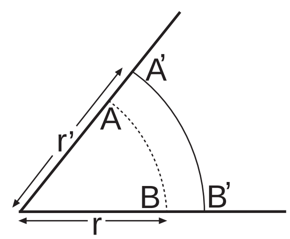


Figura 2.3: La definición de radian es independiente del radio elegido

Teorema 2.1.1 (Tales)**.** *Consideremos un triángulo cualquiera ABC y tracemos una recta paralela a uno de sus lados (paralela al lado AB, por ejemplo). Sean M y N los puntos donde dicha recta intersecta a los otros lados. Entonces los triángulos ABC y MNC son semejantes (Figura 2.4)*

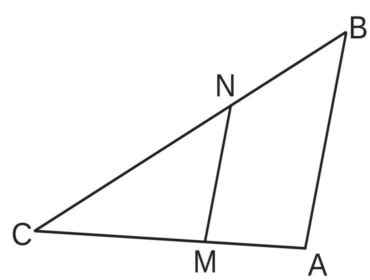


Figura 2.4: Triángulos semejantes

El hecho de ser semejantes ambos triángulos se traduce en que se tienen las siguientes relaciones entre sus lados y ángulos:

I. Los ángulos homólogos son iguales, es decir, $\hat{A} = \hat{M}$ y $\hat{B} = \hat{N}$.

II. Las longitudes de sus lados son proporcionales, es decir, se verifica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = k,$$

donde la constante k es un valor estrictamente positivo que recibe el nombre de razón de semejanza.

Ahora podemos abordar la prueba de la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$: si dividimos el ángulo representado en la Figura 2.3 en n partes iguales y trazamos las cuerdas de cada uno de los n ángulos resultantes, obtenemos como resultado una forma similar a la representada en la Figura 2.5 (nótese que, para una mayor claridad, en la figura se ha representado el caso concreto $n = 3$). Si n es suficientemente grande, las longitudes de las poligonales inscritas a los correspondientes arcos de circunferencia son una buena aproximación de las longitudes de dichos arcos y esta aproximación es tanto más buena cuanto mayor es n. Si p_n y p'_n denotan las longitudes de estas poligonales, bastará probar que $p'_n/r' = p_n/r$, cualquiera que sea el valor de n,

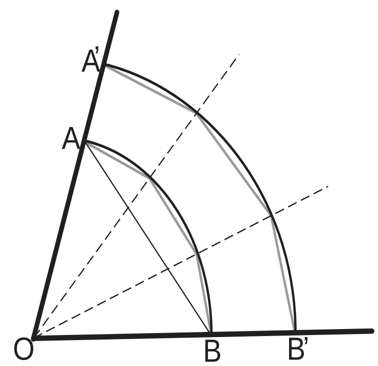


Figura 2.5: División de un ángulo en partes iguales

con lo que demostraríamos la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$. Veamos entonces que se verifica la igualdad $p'_n/r' = p_n/r$, para todo valor de n. Para ello, nos ayudamos de la Figura 2.6 que representa uno de los n ángulos en que hemos dividido el ángulo inicial. Los triángulos OA_0B_0 y $OA'_0B'_0$ son semejantes, por ser paralelas las cuerdas A_0B_0 y $A'_0B'_0$, y por tanto tienen sus lados proporcionales, lo que nos permite obtener la igualdad $r'/r = \overline{A'_0B'_0}/\overline{A_0B_0}$. Dividiendo ahora por n y teniendo en cuenta que $p_n = n\cdot\overline{A_0B_0}$ y $p'_n = n\cdot\overline{A'_0B'_0}$, se obtiene fácilmente la igualdad deseada, esto es, $\frac{p'_n}{r'} = \frac{p_n}{r}$.

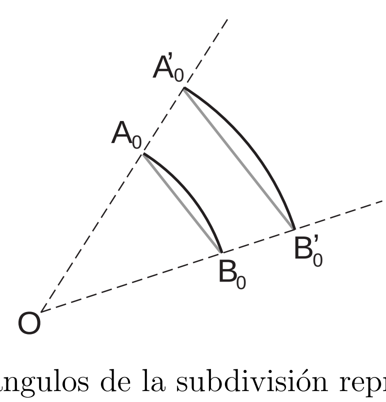


Figura 2.6: Uno de los ángulos de la subdivisión representada en la Figura 2.5

Ejemplos

a) Un arco correspondiente a cierto ángulo mide 12 cm y su radio 4 cm. ¿Cuántos radianes mide el ángulo?

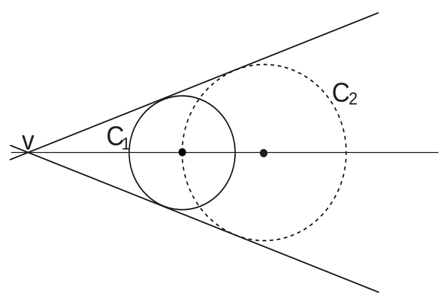
b) ¿Cuántos radianes mide un ángulo recto?

c) Un ángulo mide 2.5 radianes. Si dibujamos un arco de radio 4 cm, ¿cuál es la longitud del arco?

d) Un ángulo mide 1.2 radianes y uno de sus arcos mide 6 cm. ¿Cuánto mide el radio con el que se ha trazado dicho arco?

e) Sabiendo que $180° = \pi\, rad$ calcular, aproximadamente, cuántos grados mide un radián.

f) Consideremos una circunferencia C_1 de radio $r_1 = 5$ cm, tangente a las semirrectas de vértice V. La distancia del vértice al centro de la circunferencia es de 15 cm. Se traza otra circunferencia C_2 que pase por el centro de C_1 y también tangente a ambas semirrectas. Calcular el radio de C_2.



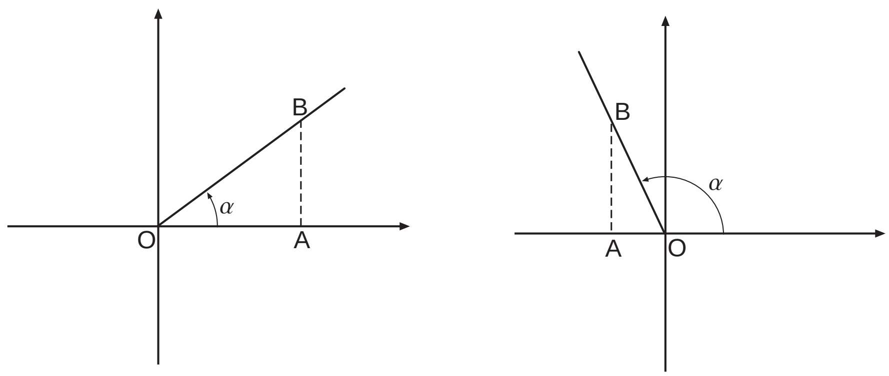
2.2. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas básicas son el seno (que denotaremos por sen) y el coseno (que denotaremos por cos) pues, como veremos más adelante, el resto de razones se definen a partir de ellas. Tanto el seno como el coseno son periódicas de período 2π. Esto significa que para cualquier valor α se verifica que

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \text{ y } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$

y por ello basta definir $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 2\pi]$. En todos los casos, se procederá como sigue: dado el ángulo con vértice en O, se escoge un punto B en uno de sus lados y se traza la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al otro lado, al que corta en un punto que denotaremos por A (Figura 2.9).

Se define entonces $\operatorname{sen}\alpha$ como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa del triángulo OAB, con signo positivo o negativo según el cuadrante al que pertenezca el ángulo en cuestión, como se describe de forma precisa en las figuras 2.7 y 2.8.



$0 < \alpha < \pi/2$ $\qquad\qquad$ $\pi/2 < \alpha < \pi$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}; \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \qquad\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \quad \cos\alpha = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Figura 2.7: Definición de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en el primer y segundo cuadrantes

Es importante señalar que las definiciones de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ son independientes de la elección del punto B. Más concretamente, supongamos que se considera el ángulo de la Figura 2.9 y trazamos perpendiculares por los puntos B y B'. Por el Teorema de Tales, los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, pues los lados AB y $A'B'$ son paralelos. Entonces sus lados son proporcionales, luego se verifica la igualdad

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}.$$

O lo que es igual

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}},$$

lo que prueba que la definición de $\operatorname{sen}\alpha$ es independiente del punto B. De manera similar se comprueba la independencia de la definición de $\cos\alpha$ en lo que respecta a la elección de B.

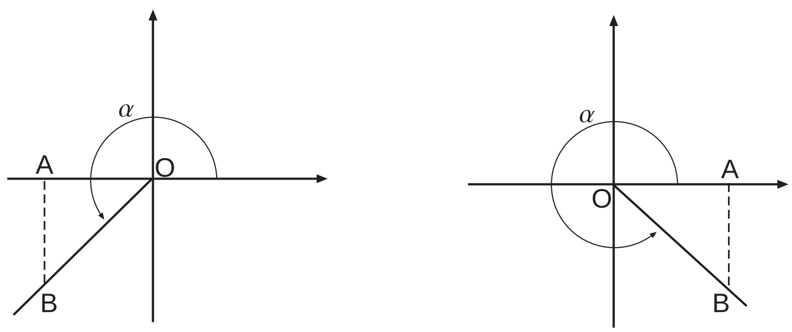
Existe una relación fundamental entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, que se deduce directamente al aplicar el Teorema de Pitágoras, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.2.1 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Esto es, en un triángulo rectángulo como el de la Figura 2.10, que es rectángulo en A y por tanto tiene como catetos los lados b y c y por hipotenusa el lado a, se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.

Ya estamos en condiciones de obtener la **relación fundamental** que relaciona $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Cualquiera que sea el ángulo α, se verifica que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$



$\pi < \alpha < 3\pi/2$ $\qquad$ $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}}$; $\quad \cos\alpha = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Figura 2.8: Definición de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en el tercer y cuarto cuadrantes

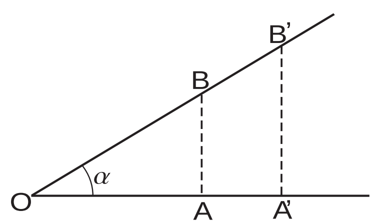


Figura 2.9: Las definiciones de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ son independientes de B

Para probar esta identidad, vamos a considerar nuevamente la Figura 2.9. Si calculamos la expresión $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, de acuerdo con las definiciones, obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AO}^2}{\overline{OB}^2} = 1,$$

donde la última igualdad no es otra cosa que el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo OAB de la Figura 2.9.

De la relación fundamental se deduce además que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$ y que $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Como ya se indicó al principio del tema, a partir del seno y del coseno es posible definir las restantes razones trigonométricas. De esta forma, dado un ángulo α se definen la tangente, la cotangente, la cosecante y la secante de α como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Es importante señalar que tanto la tangente como la cotangente son periódicas y más concretamente, tienen periodo π. La prueba es muy fácil, basta tener en cuenta que

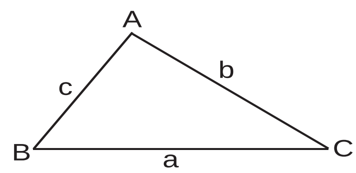


Figura 2.10: Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$)

$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. Por tanto, resulta

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ejemplo

Completar la siguiente tabla:

	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/6$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/3$	$\alpha = \pi/2$
$\operatorname{sen}\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					

Todas las razones trigonométricas pueden representarse geométricamente, mediante una circunferencia de radio unidad, que recibe el nombre de circunferencia goniométrica (Figura 2.11). Como puede observarse, para cada valor de α el par $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ representa las coordenadas de un punto de la circunferencia unidad.

2.3. Resolución de triángulos arbitrarios

Describiremos en esta sección dos resultados útiles para la resolución de un triángulo cualquiera a partir de las relaciones existentes entre sus lados y ángulos.

Teorema 2.3.1 (Teorema del seno)**.** *En un triángulo ABC cualquiera, la longitud de cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto. Es decir,*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

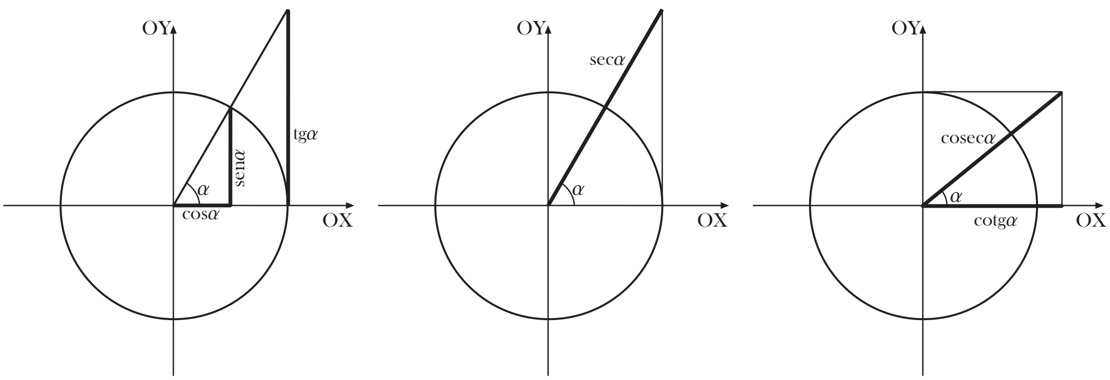


Figura 2.11: La circunferencia goniométrica

Teorema 2.3.2 (Teorema del coseno)**.** *En un triángulo ABC cualquiera el cuadrado cada uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el producto de ambos por el coseno del ángulo que forman. Esto es,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \quad y \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\hat{C}.$$

2.4. Resumen de fórmulas

Finalizaremos el capítulo con una relación de relaciones y fórmulas trigonométricas que serán de gran utilidad para la resolución de los problemas.

- $1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
- $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha}$.
- $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$.
- $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.
- $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$.
- $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \text{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \text{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

Ejercicios y problemas

1. El radio de una circunferencia mide 18 cm. ¿Cuál es la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de 75°?

2. ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un sector circular de n grados de amplitud?¿Y si el ángulo del sector se expresa en radianes?

3. Expresar en radianes las siguientes medidas: 45°, 150°, 210°, 315°.

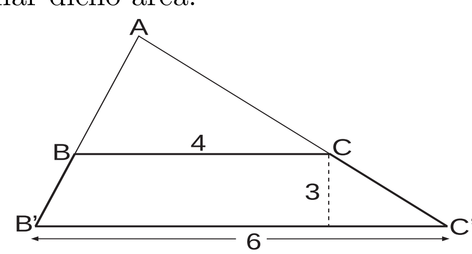
4. Expresar en grados sexagesimales: $2\pi/3\,rad$, $\pi/5\,rad$, $3\pi/8\,rad$.

5. Ordenar, de menor a mayor, las siguientes medidas de ángulos: 18°, $\pi/6\,rad$, 14°, $0.4\,rad$.

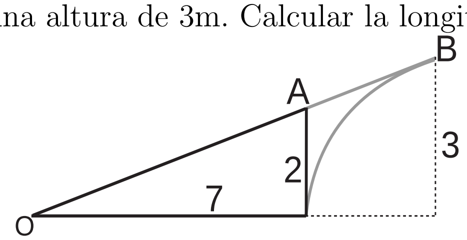
6. Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 80 m. de largo que forma con el suelo horizontal un ángulo de 70°. Suponiendo que el cordel esté recto, calcular distancia del globo al suelo.

7. Si las puntas de los brazos de un compás distan entre sí 6.25 cm y cada brazo mide 11.5 cm, ¿qué ángulo forman los brazos?

8. Para calcular el área del triángulo AB'C' disponemos únicamente de los datos del trapecio de la figura. Hallar dicho área.



9. Un rampa de saltos de exhibición para motocicletas se quiere prolongar de manera que el motorista salte desde una altura de 3m. Calcular la longitud AB.



10. Un poste vertical de dos metros proyecta una sombra de 0.8 m. A la misma hora, la torre de una iglesia es de 24.8 cm. Determinar la altura de la torre.

11. Determinar los valores de las razones trigonométricas del ángulo α si P es un punto del lado terminal, siendo el inicial OX y las coordenadas de P

a) $P = (6, 8)$ *b*) $P = (-6, 8)$ *c*) $P = (-3, -4)$

d) $P = (-1, 5)$ *e*) $P = (4, -7)$ *f*) $P = (5, -12)$

12. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos $\pi/6\,rad$, $\pi/4\,rad$, $\pi/3\,rad$, $7\pi/12\,rad$, $25\pi/24\,rad$, $47\pi/12\,rad$.

13. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas, sabiendo que

$$a)\ \operatorname{cotg}\alpha = \tfrac{12}{5} \qquad b)\ \operatorname{cotg}\alpha = \tfrac{\sqrt{6}}{2} \qquad c)\ \sec\alpha = -\sqrt{5}$$
$$d)\ \operatorname{sen}\alpha = -\tfrac{2}{3} \qquad e)\ \operatorname{cosec}\alpha = -\tfrac{2\sqrt{3}}{3} \qquad f)\ \cos\alpha = -\tfrac{1}{3}$$

14. Simplificar las expresiones

$$a)\ \cos^2 x - 2(1+\cos x)\operatorname{sen}^2\tfrac{x}{2} \qquad b)\ \tfrac{1}{2\operatorname{sen}(\pi/18)} - 2\operatorname{sen}(7\pi/18)$$

15. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$a)\ \operatorname{sen}(2x)\cos x = 3\operatorname{sen}^2 x \qquad b)\ tan(2x) = -tan\,x$$

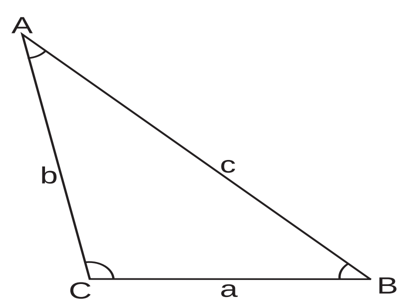
$$c)\ \cos^2(2x) = \sin^2\left(\tfrac{8\pi}{9}\right) \qquad d)\ \tfrac{\sqrt{3}}{4} + tan(3x) = \tfrac{3tan\frac{2}{3}}{4}$$

$$e)\ \operatorname{sen}^2(2x) - \cos^2(2x) = \tfrac{1}{2} \qquad f)\ \cos^2 x + \sin x = \tfrac{1}{4}$$

$$g)\ 1 + tan^2(3x+\pi) = \tfrac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}} \qquad h)\ \cos(2x) + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$$

16. Determinar la longitud de los lados del triángulo de la figura, la medida de sus ángulos y su superficie si,

$$a)\ b = 35m, A = 50°, B = 70° \qquad b)\ a = 10cm, b = 7cm, C = 60°$$
$$c)\ a = 10m, b = 9, c = 7 \qquad d)\ a = 40m, b = 60, A = 42°$$



17. Los lados de un triángulo miden 13m, 14m y 15m. Calcular el coseno y el seno del ángulo menor y la superficie del triángulo.

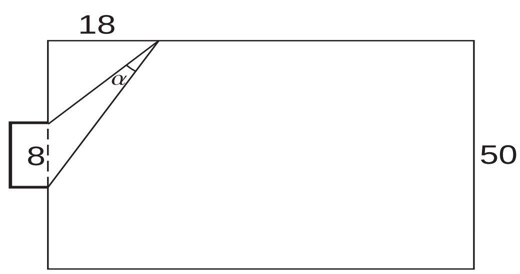
18. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde dos puntos A y B, de una misma orilla, distantes entre sí 24 metros, se observa un mismo punto C de la orilla opuesta. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ forman con la orilla desde la que se observa, unos ángulos de 34° y 58° respectivamente. Determinar la anchura del río.

19. Dos aviones salen de un mismo punto, en distintas direcciones, formando un ángulo de $25°$. Supuesto que han marchado en línea recta, si uno ha recorrido 200 km. y el otro 320 km., ¿cuál es la distancia que los separa?

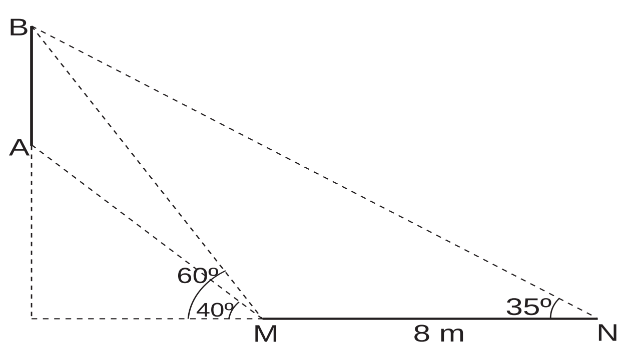
20. Dos personas, distantes entre sí 2 km. observan al mismo tiempo un avión. Si los ángulos de elevación observados son de $7\pi/18\, rad$ y $17\pi/36\, rad$. ¿Cuál es la altura del avión, supuesto que está en el mismo plano vertical que los dos observadores?

21. Una estatua de 2 m. de altura está colocada sobre un pedestal. Desde un punto situado a 1.5 m. del suelo, el pedestal se ve formando un ángulo de $20°$ con la horizontal. Desde este mismo punto, el punto más alto de la estatua se ve formando un ángulo de $45°$ con la horizontal. Calcular la altura del pedestal.

22. Un campo de fútbol mide 50 m. de ancho y la portería tiene 8 m. de ancho. Si un jugador está situado en la banda lateral, a 18 m. de la línea de fondo, ¿bajo qué ángulo ve la portería?



23. Calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ en la figura adjunta:



Capítulo 3

Nociones de Geometría Plana

Introducción

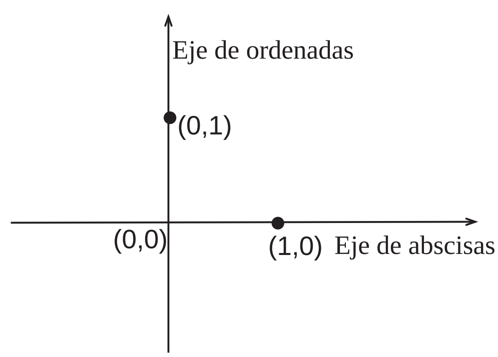


Figura 3.1: Sistema de referencia cartesiano.

Un ***Sistema de Referencia Cartesiano***, figura 3.1, está compuesto por tres elementos:

- Un punto arbitrario del plano que se denomina ***origen***, O, y se designa numéricamente por $(0,0)$.
- Dos rectas perpendiculares que se cortan en el origen, O, y se denominan ***ejes de coordenadas***.
- Dos puntos, uno sobre cada eje, equidistantes ambos del origen, que se utilizan para indicar la ***unidad de medida*** sobre los ejes, además de señalar el ***sentido positivo*** sobre cada uno de ellos.
    - El primer punto, que se designa por $(1,0)$, identifica el ***eje de abscisas***.
    - El segundo punto, que se designa por $(0,1)$, identifica el ***eje de ordenadas***.

Las ***coordenadas*** de un punto en el plano son las longitudes, positivas o negativas, de los segmentos determinados por sus proyecciones sobre los ejes y el origen.

3.1. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia.

Se denomina ***distancia entre dos puntos*** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ del plano, ver figura 3.2, que denotamos por $d(A, B)$, a la longitud del segmento de recta que tiene por extremos A y B. Esto es:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

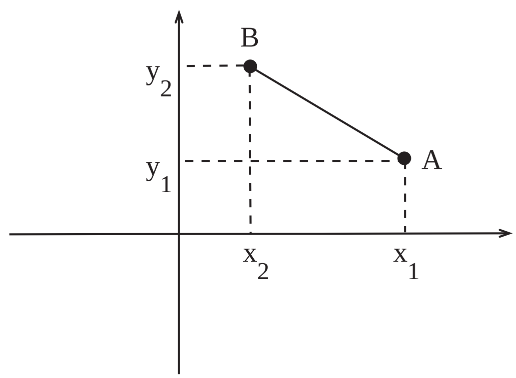


Figura 3.2: Distancia entre dos puntos.

Ejemplo 3.1.1. La distancia entre los puntos $A = (1, 5)$ y $B = (-3, 1)$ respecto de un mismo sistema de referencia, es igual a:

$$d(A, B) = \sqrt{((-3) - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Una ***circunferencia*** es el conjunto de puntos del plano que están a una distancia fija, llamada ***radio***, de un determinado punto, llamado ***centro*** de la circunferencia.

Una circunferencia está determinada por su centro, que será un punto de coordenadas (x_0, y_0), y su radio r. Para que un punto (x, y), pertenezca a la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r, se debe cumplir la siguiente condición:

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = r$$

y según la fórmula para la distancia entre dos puntos esta expresión queda como

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

que, elevada al cuadrado, da lugar a la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ejemplo 3.1.2. La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro el punto $(3,4)$ es $(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

Si en la ecuación de la circunferencia $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ desarrollamos los cuadrados resulta:

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

es decir, $x^2+y^2+ax+by+c=0$, con $a=-2x_0$, $b=-2y_0$ y $c=x_0^2+y_0^2-r^2$.

Pero no todas las ecuaciones de la forma anterior representan una circunferencia, es necesario que r^2 sea positivo; es decir, los números a, b, c tienen que ser tales que

$$r^2=x_0^2+y_0^2-c=(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}>0.$$

En resumen, si a, b y c son números reales tales que $a^2+b^2-4c>0$, entonces la ecuación de la forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

representa una circunferencia con:

- Centro: $C=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$,
- Radio: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Ejemplo 3.1.3. Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, hallar su centro y su radio.

- Centro: $C=(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2})=(1,-2)$,
- Radio: $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-4)}=3$

3.2. Ecuación de la recta.

Una ***recta*** es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas (x,y) satisfacen una ecuación del tipo

$$Ax+By+C=0 \tag{3.1}$$

donde A, B y C son números reales. A esta ecuación se la conoce como *ecuación implícita* de la recta. Según la definición, un punto pertenece a una recta si, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta, ésta se satisface.

Ejemplo 3.2.1. El punto $(1,3)$ pertenece a la recta $4x-y-1=0$ por ser $4\cdot 1-3-1=0$ y el punto $(2,3)$ no pertenece a la recta por ser $4\cdot 2-3-1\neq 0$.

Si $B = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $x = -\frac{C}{A}$, que representa la recta paralela al eje de ordenadas, situada a distancia $-\frac{C}{A}$ del origen.

Si $A = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $y = -\frac{C}{B}$, que es la recta paralela al eje de abscisas situada a distancia $-\frac{C}{B}$ del origen.

Ejemplo 3.2.2.

- La ecuación $2x - 5 = 0$ es una recta paralela al eje de ordenadas formada por los puntos de abscisa constante $x = \frac{5}{2}$.

- La ecuación $3y + 1 = 0$ es una horizontal formada por los puntos de ordenada fija $y = -\frac{1}{3}$.

Cuando $B \neq 0$ la ecuación 3.1 se puede expresar como $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Si hacemos $m = -\frac{A}{B}$ y $n = -\frac{C}{B}$ obtenemos la *ecuación explícita* de la recta:

$$y = mx + n$$

La constante m se denomina ***pendiente*** de la recta e indica su inclinación, y la constante n representa la ***ordenada en el origen***.

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y que tiene como pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que se conoce como *ecuación punto-pendiente* de la recta.

Si ahora conocemos dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y queremos calcular la recta que pasa por ellos, debemos buscar una ecuación de la forma $y = mx + n$ que se verifique para los valores (x_1, y_1) y también para (x_2, y_2); luego, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Una vez resuelto, obtenemos la *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*:

- Si $x_1 \neq x_2$, la ecuación es $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$.

- Si $x_1 = x_2$, la ecuación es $x = x_1$.

Podemos observar que dados dos puntos existe una única recta que pasa por ellos.

Ejemplo 3.2.3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, -1)$ es $y = \frac{-1-2}{3-1}(x - 1) + 2$ o bien, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

3.3. Pendiente de una recta. Rectas paralelas

La ***pendiente*** de la recta indica su inclinación. Expresa lo que crece , o decrece, la ordenada y de los puntos de la recta por cada unidad que aumente la abscisa x. Observamos que la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las x. Luego, la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), figura 3.3, es:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

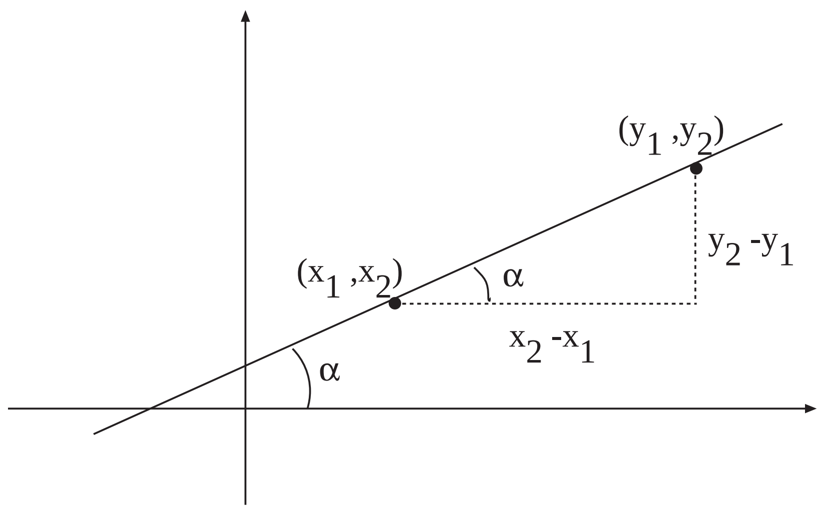


Figura 3.3: La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo 3.3.1. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(5, 4)$ es $m = \tan \alpha = \frac{4-1}{5-(-2)}$.

Puesto que la pendiente de una recta marca su inclinación con respecto a los ejes de coordenadas, dos rectas son ***paralelas*** si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 3.3.2. Las rectas $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 6$ son paralelas porque tienen la misma pendiente $m = 2$.

3.4. Rectas perpendiculares. Cálculo de la recta perpendicular por un punto a una recta dada.

Dos rectas $r \equiv y = mx + n$ e $r' \equiv y = m'x + n'$ son ***perpendiculares*** si $m \cdot m' = -1$ o bien, $m' = \frac{1}{m}$. Toda recta perpendicular a r, es paralela a r'.

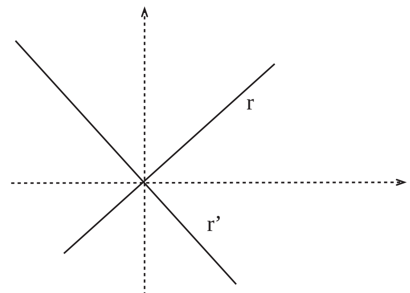


Figura 3.4: Las rectas $r \equiv y = mx + n$ y $r' \equiv y = (-\frac{1}{m})x + n'$ son perpendiculares.

La ecuación de la recta perpendicular a $y = ax + b$ que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$$y = (-\frac{1}{a})(x - x_0) + y_0.$$

Ejemplo 3.4.1. La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x + 1$ que pasa por el punto $(2, -1)$ es $y = -\frac{1}{2}(x - 2) - 1$.

3.5. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazado desde el punto, figura 3.5

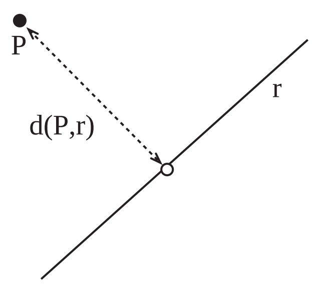


Figura 3.5: Distancia de un punto a una recta.

Esto es, dada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ y un punto $P = (x_1, y_1)$ no contenido en r. La distancia entre el punto y la recta viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 3.5.1. La distancia del punto $p = (-5, 8)$ a la recta $r \equiv 2x - 6y + 7 = 0$ es:

$$d(p, r) = \frac{|2(-5) - 6 \cdot 8 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{51}{\sqrt{40}}.$$

3.6. área de un triángulo

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura (donde la altura es la longitud de un segmento perpendicular que parte de la base hasta llegar al vértice opuesto) y dividiéndolo por dos.

Ejemplo 3.6.1. *Los puntos de coordenadas $A = (3, 8)$, $B = (-11, 3)$ y $C = (-8, -2)$ son los vértices de un triángulo. Hallar su área:*

Tomamos como base del triángulo el segmento $\overline{BC}$, su longitud es:

$$d(B, C) = \sqrt{(-8 + 11)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{34}.$$

La altura del triángulo será la distancia de A a la recta que pasa por B y por C, BC:

Ecuación de BC: $m = \frac{-2-3}{-8+11} = \frac{-5}{3} \rightarrow y = 3 - \frac{5}{3}(x + 11) \rightarrow 5x + 3y + 46 = 0$

Altura: $d(A, BC) = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 46|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

$$\dot{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} = \frac{85}{2}$$

3.7. Punto medio de un segmento. Mediatriz

Las coordenadas del ***punto medio***, M, de un segmento de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) son:

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Ejemplo 3.7.1. Hallar el punto medio del segmento de extremos $(-5, 2)$, $(7, -4)$:

Si A' es el ***simétrico*** de A respecto de P, entonces P es el punto medio del segmento AA'. Así, si $A = (a_1, a_2)$ y $P = (p_1, p_2)$, las coordenadas de $A' = (x, y)$ se pueden obtener resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_1+x}{2} \\ p_2 = \frac{a_2+y}{2} \end{cases}$$

Ejemplo 3.7.2. *Hallar el simétrico A', del punto $A = (7, 4)$ respecto de $P = (3, -11)$:*

Llamamos (x, y) a las coordenadas de A'. Se cumple que:

$$\begin{cases} 3 = \frac{7+x}{2} & \rightarrow & \text{x=-1} \\ -11 = \frac{4+y}{2} & \rightarrow & \text{y=-26} \end{cases}$$

Luego, $A' = (-1, -26)$.

Se llama ***lugar geométrico*** al conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. La ***mediatriz*** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos, que equidistan de sus extremos:

$$d((x,y),A) = d((x,y),B)$$

Ejemplo 3.7.3. *Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A = (-3,4)$, $B = (1,0)$:*

El punto (x,y) pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si cumple la condición $d((x,y),(-3,4)) = d((x,y),(1,0))$:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y desarrollamos los cuadrados indicados:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \ \rightarrow\ x - y + 3 = 0 \ \rightarrow\ y = x + 3$$

La recta obtenida, $y = x + 3$, tiene las siguientes características:

- Pasa por $(-1,2)$, que es el punto medio del segmento.
- Su pendiente, 1, y la pendiente del segmento, -1, cumplen que $1 \cdot (-1) = -1$. Son perpendiculares.

3.8. Ecuación de la elipse, hipérbola y parábola

Definición. *Dados dos puntos, F y F', llamados focos, y una distancia k, llamada constante de la elipse ($k > d(F,F')$), se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya suma de distancias a F y a F' es igual a k:*

$$d((x,y),F) + d((x,y),F') = k$$

Definición. *Dados dos puntos, F y F', llamados focos, y una distancia k, llamada constante de la hipérbola ($k < d(F,F')$), se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya diferencia de distancias a F y a F' es igual a k:*

$$|d((x,y),F) - d((x,y),F')| = k$$

Definición. *Dados un punto F, llamado foco, y una recta, d, llamada directriz, se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) que equidistan de F y de d:*

$$d((x,y),F) = d((x,y),d)$$

Ejemplo 3.8.1. Dados los puntos $F = (-2,5)$, $F' = (7,-3)$ y la recta $r \equiv x - y - 1 = 0$, obtener las ecuaciones de:

1. La elipse de focos F y F' y cuya constante es 17.
   $d((x,y),F)+d((x,y),F')=17 \rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}=17$

2. La hipérbola de focos F y F' y cuya constante es 6.
   $|d((x,y),F)-d((x,y),F')|=6 \rightarrow |\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}|=6$

3. La parábola de foco F y directriz r.
   $d((x,y),F)=d((x,y),r) \rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1+1}}$

3.8.1. Estudio de la elipse

Elementos característicos de la elipse: Los elementos característicos de una elipse de focos F y F', figura 3.6, son:

O centro de la elipse

$a=\overline{OA}=\overline{OA'}$ semieje mayor

$b=\overline{OB}=\overline{OB'}$ semieje menor

$c=\overline{OF}=\overline{OF'}$ semidistancia focal

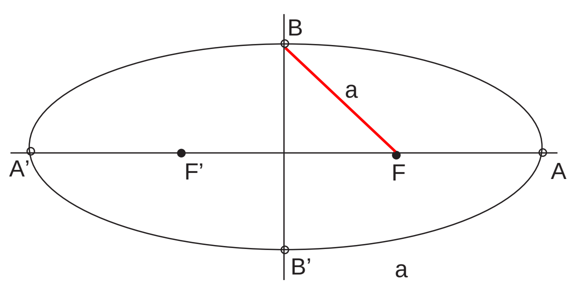


Figura 3.6: La elipse.

La constante, k, de la elipse es $2a$, pues $k=\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$. Como B es un punto de la elipse se cumple que $\overline{BF}+\overline{BF'}=2a \Rightarrow \overline{BF}=\overline{BF'}=a$. Además, el triángulo rectángulo BOF cumple que $a^2=b^2+c^2$. A los puntos A, A', B y B' les llamamos ***vértices*** de la elipse.[1]

Se llama ***excentricidad de una elipse*** al cociente entre la distancia focal y el eje mayor, $e=\frac{c}{a}$, que es un número mayor que cero y menor que 1.

[1]Esta notación no está universalmente aceptada. Algunos autores llaman vértices sólo a los puntos extremos del eje mayor.

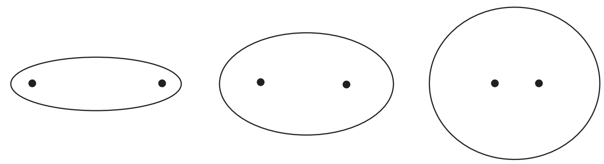


Figura 3.7: Las tres elipses tienen el mismo eje mayor.

Las tres elipses de la figura 3.7 tienen el mismo eje mayor, $2a$. Se observa que cuanto más distan los focos, mayor es su excentricidad.

Ecuación reducida de la elipse: La ecuación reducida de la elipse de focos $F^{'} = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo 3.8.2. Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos $F^{'} = (-4, 0)$ y $F = (4, 0)$ y constante $k = 10$.

Semieje mayor: $k = 10 \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$

Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 8 \rightarrow$2c=8$\rightarrow c = 4$

Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 \rightarrow b = 3$

Excentricidad: $c/a = 4/5 = 0.8$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ◀

Ecuación de la elipse con focos en el eje Y: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$

Ecuación de la elipse con centro distinto del (0,0): La ecuación de la elipse de semiejes a y b, con centro en (α, β) y ejes paralelos a los ejes coordenados es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

3.8.2. Estudio de la hipérbola

Elementos característicos de la hipérbola: La hipérbola de focos F y $F^{'}$ como en la figura 3.8, sus elementos característicos son:

O centro de la hipérbola

$c = \overline{OF} = \overline{OF'}$ semidistancia focal

$a = \overline{OA} = \overline{OA'}$ semieje

r y r' asíntotas.

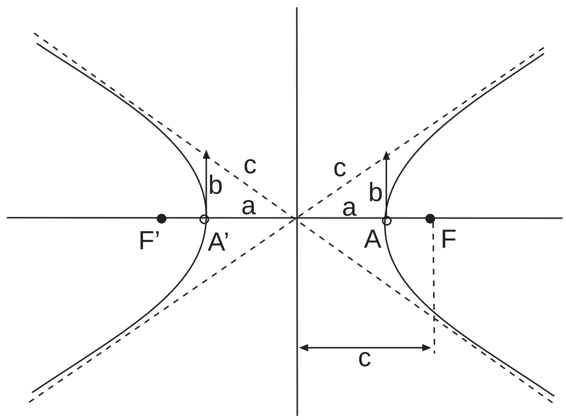


Figura 3.8: La hipérbola.

La constante de la hipérbola es $2a$, pues $k = \overline{AF'} - \overline{AF} = \overline{AF'} - \overline{A'F'} = \overline{AA'} = 2a$. Se cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$, (ahora es $c > a$). Y al igual que en la elipse, la relación entre c y a se llama *excentricidad*. A los puntos A y A' les llamamos ***vértices*** de la hipérbola.

Ecuación reducida de la hipérbola: La ecuación reducida de la hipérbola de focos $F' = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuación de la hipérbola con focos en el eje Y: En general, la ecuación $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ corresponde a una hipérbola cuyos focos son $F = (0, c)$ y $F' = (0, -c)$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ecuación de la hipérbola con centro distinto del (0,0): La ecuación de la hipérbola de semiejes a y b, con centro en (α, β) y ejes paralelos a los ejes coordenados es una de las siguientes:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

3.8.3. Estudio de la parábola

Elementos característicos de la parábola: Los elementos característicos de la parábola son, figura 3.9:

F foco

d directriz

V vértice

p distancia del foco a la directriz.

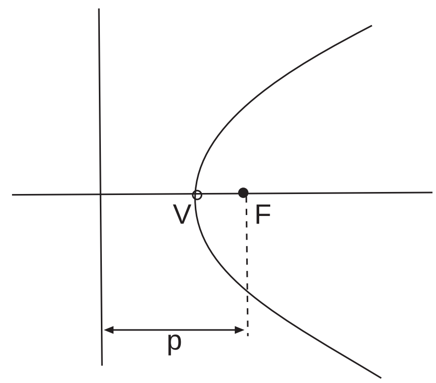


Figura 3.9: La parábola.

Ecuación reducida de la parábola: La ecuación reducida de la parábola de foco $F' = (\frac{p}{2}, 0)$ y directriz $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ es

$$y^2 = 2px.$$

Ejercicios y problemas

1. Hallar el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

$x^2+y^2=8$	$(x-3)^2+(y+0'3)^2=9$	$4x^2-4x+4y^2-3=0$
$x^2+y^2-4x+6y=100$	$x^2+y^2-8x+10y=4$	$4x^2+4y^2+28y+13=0$
$x^2-8x+y^2+12y=48$	$9x^2-6x+9y^2+6y=-1$	$x^2+2\sqrt{2}x+y^2-2\sqrt{3}y=0$

2. Hallar, en cada caso, el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia C que cumple:

a) El segmento que une los puntos $P_1(-1,-3)$ y $P_2(3,1)$ es un diámetro de C.

b) Pasa por los puntos $P_1(1-2)$, $P_2(-3,4)$ y $P_3(4,2)$.

c) Pasa por los tres vértices de un triángulo equilátero del cual se sabe que está en el primer cuadrante, uno de sus lados es paralelo al eje OX, su altura vale $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y uno de sus vértices es el punto $P(1,1)$ (Hallar todas las soluciones).

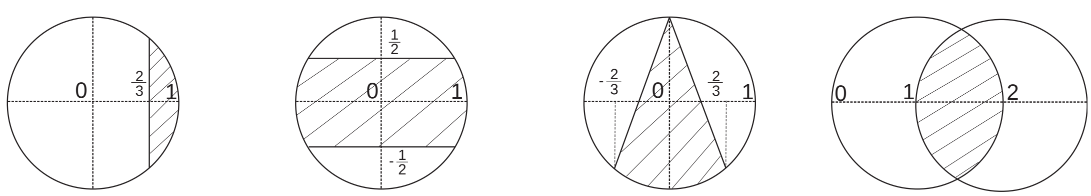
d) Pasa por los seis vértices de un hexágono regular uno de cuyos lados es el segmento que une los puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(3,1)$ (Hay dos soluciones).

e) Es tangente a la circunferencia $C' \equiv x^2+4x+y^2+6y=-9$, la recta que une los centros de C y C' es paralela al eje OY y el radio de C es dos tercios del radio de C_1 (Hay cuatro soluciones).

f) Tiene el mismo centro que la circunferencia C' que pasa por los puntos $P_1(-2,0)$, $P_2(0,1)$ y $P_3(-1,-2)$ y el área que encierra es la misma que el área de la corona circular que delimita en el interior de C'.

3. La circunferencias C_1 y C_2 tienen radios 1 y 2 respectivamente y sus centros están en los puntos $P(1,1)$ y $Q(3,2)$. Hallar la distancia entre sus puntos de corte.

4. Hallar, en cada caso, el área de la zona rayada:



5. Hallar la pendiente de las recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P_1(-1,2)$ y $P_2(2,-1)$.

b) Pasa por los puntos $P_1(0,-2)$ y $P_2(87'3,-2)$.

c) Pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(-2,87'3)$.

d) Su ordenada en el origen vale 2 y corta al eje OX en el punto $P(\frac{2}{3},0)$.

e) Pasa por los puntos $P(1,a)$ y $Q(a+1,b)$.

6. ¿Están alineados los puntos $P(0,3)$, $Q(1,1)$ y $R(2,-1)$? Hallar a para que los puntos $P_1(1,5)$, $Q(-2,-1)$ y $R(a^2-1, 3(a+1))$ estén alineados.

7. Determinar si la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela, perpendicular o ninguna de las dos cosas a la recta que pasa por los puntos R y S en los casos siguientes:

a) $P(4,2)$, $Q(8,3)$, $R(-2,8)$ y $S(1,-4)$.

b) $P(0,-5)$, $Q(15,0)$, $R(1,2)$ y $S(0,5)$.

c) $P(-7,8)$, $Q(8,-7)$, $R(-8,10)$ y $S(6,-4)$.

d) $P(8,-2)$, $Q(2,8)$, $R(-2,-8)$ y $S(-8,-2)$.

8. Hallar k para que las rectas que pasan, respectivamente, por P y Q y por R y S sean: 1) Paralelas y 2) Perpendiculares.

a) $P(2,1)$, $Q(6,3)$, $R(4,k)$ y $S(3,1)$.

b) $P(1,k)$, $Q(2,3)$, $R(1,7)$ y $S(3,6)$.

c) $P(9,4)$, $Q(k,10)$, $R(11,-2)$ y $S(-2,4)$.

d) $P(1,2)$, $Q(4,0)$, $R(k,2)$ y $S(1,-3)$.

9. Dibujar y hallar, en cada caso, la ecuación de la recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-2,3)$. Idem con $P(2'5,-3'8)$ y $Q(3'8,-2'5)$.

b) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $2x+y+1=0$.

c) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $x+2y+1=0$.

d) Pasa por el punto $P(-1'5, \frac{1}{3})$ y es perpendicular a la recta $3x-2y=4$.

e) Pasa por el punto $P(2,3)$ y es una recta vertical.

f) Pasa por el punto $P(3,2)$ y es una recta horizontal.

g) Pasa por el punto $A(-1'2, 2'3)$ y es perpendicular al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5}, \frac{9}{7})$.

h) Es la mediatriz del segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5}, \frac{9}{7})$.

i) Pasa por el punto medio del segmento que une los puntos de corte de la recta $2x-y+1=0$ con la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ y es perpendicular a dicho segmento.

j) Pasa por el punto $P(1,-1)$ y es paralela a la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

k) Es perpendicular a la recta $2x+3y+4=0$ y su ordenada en el origen es 5.

l) Es paralela al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,0)$ y pasa por $R(4,0)$.

m) Es la recta simétrica respecto del eje OY de la recta $2x+3y+4=0$.

n) Es la recta simétrica respecto del eje OX de la recta mediatriz del segmento que une los puntos $A(2,1)$ y $B(1,3)$.

10. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(-1'5, -2'5)$ y su radio vale $\sqrt{2}\,u$. La recta $x = -0'5$ corta a dicha circunferencia en los puntos P_1 y P_2 y por dichos puntos trazamos sendas tangentes a la circunferencia. Hallar el punto en el que se cortan dichas tangentes.

11. Hallar la distancia del punto $P(1, 1)$ a la recta $x + y - 1 = 0$.

12. Hallar la distancia de la recta $3'2x - 5'3y = 0'25$ al origen de coordenadas.

13. Hallar la distancia entre las rectas $2x + 3y = 4$ y $2x + 3y = 5$.

14. Usamos la recta $r \equiv y = -3x + 2$ como espejo. Hallar:

a) La imagen que refleja el punto $P(4, 1)$.

b) La ecuación de la imagen reflejada por la circunferencia $x^2 + 6x + y^2 + 2\sqrt{2}y = -9$.

c) La ecuación de la imagen que refleja la recta $6x + 2y = -7$.

d) La recta que tiene la misma ordenada en el origen que r y es igual a su imagen reflejada.

e) La circunferencia que es igual a su reflejada, tiene radio 1 y es tangente al eje OX.

15. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P(1, 1)$, $Q(3, 0)$ y $R(2, 3)$.

16. Hallar el área del triángulo delimitado por las rectas $r_1 \equiv y = \frac{1}{3}x$, $r_2 \equiv x = 1$ y $r_3 \equiv y = -\frac{1}{3}x + 5$

17. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en los puntos $P(1, 3)$ y $Q(3, 1)$. Determinar el vértice que falta (hay dos soluciones) y calcular el área de dicho triángulo.

18. Dado un triángulo cuyos vértices están en los puntos A, B y C (simbolizado por $\triangle ABC$), por cada vértice trazamos una paralela al lado opuesto de dicho vértice. Los puntos de corte de dichas rectas son los vértices de un nuevo triángulo llamado triángulo órtico de $\triangle ABC$. Hallar los vértices del triángulo órtico del triángulo $\triangle ABC$ en los casos siguientes:

a) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$.

b) $A(-1, -2)$, $B(3, -1)$ y $C(1, 3)$.

c) $A(-1, -1)$, $B(2, 1)$ y $C(3, -3)$.

19. Dados los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 1)$ y $C(7, 5)$, hallar:

a) La ecuación de las tres bisectrices del triángulo $\triangle ABC$.
Indicación: $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

b) La ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

c) La ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

20. La diagonal mayor de un rombo está sobre la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$ y mide $3\,u$, uno de los vértices de dicha diagonal está en el punto $V_1(0,1)$ y la diagonal menor mide la mitad de la diagonal mayor. Hallar el área de dicho rombo.

21. Los vértices de un hexágono regular están, leídos siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, en los puntos $A(0,1)$, B, C, D, E y F y el segmento $\overline{AD}$ mide $\sqrt{10}\,u$ y está sobre la recta $2x - 6y = -6$. Hallar los cinco vértices restantes del hexágono.

22. Probar que la figura formada al conectar los puntos medios consecutivos de un cuadrilátero es un paralelogramo.

23. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el segmento que une los puntos $A(0,0)$ y $B(3,0)$. Se sabe que la longitud de uno de los catetos es $1\ u$. Hallar el vértice que falta (hay cuatro soluciones).

24. La parábola $\mathbb{P}$ tiene su foco en el punto F, su vértice en el punto V y su directriz es la recta r. Hallar, en cada caso, la ecuación de $\mathbb{P}$.

a) $F(0,1)\quad r \equiv y = -1$	*b*) $F(1,0)\quad r \equiv x = 0$	*c*) $V(0,0)\quad F(0,-1)$
d) $F(-2,0)\quad r \equiv x = -3$	*e*) $F(0,1)\quad r \equiv y = 2$	*f*) $V(0,0)\quad F(1,0)$
g) $V(0,-1)\quad F(0,0)$	*h*) $V(-1,0)\quad F(-2,0)$	*i*) $V(0,1)\quad F(0,0)$
j) $V(0,-1)\quad r \equiv y = -2$	*k*) $V(-1,0)\quad r \equiv x = 1$	*l*) $V(0,1)\quad r \equiv y = 3$

25. Dibujar cada una de las siguientes parábolas después de hallar su vértice, foco, directriz y puntos de corte con los ejes.

a) $y = x^2$	*b*) $y = 2x^2$	*c*) $y = -x^2$
d) $y = -\frac{1}{2}x^2$	*e*) $y^2 + 10x = 0$	*f*) $y = 2x^2 - 2x - 4$
g) $y = 3x^2 - 2x + 1$	*h*) $y = -7x^2 + 1$	*i*) $y = -0'2x^2 - 3x$
j) $y = 0'1x^2 + 2x + 3$	*k*) $y^2 + 2y + x = 1$	*l*) $x = \sqrt{3}y^2 + \sqrt{2}y$
m) $1 = -2y^2 - 3y - x$	*n*) $(y-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$	*o*) $9x^2 - 9y + 3x = 1$

26. Una parábola corta al eje OX en los puntos $P_1(-1,0)$ y $P_2(2,0)$. Su vértice está en el punto $V(0'5,2)$. Hallar el foco, la directriz y la ecuación de la parábola.

27. Una parábola corta al eje OX sólo en el punto $P(2,0)$ y al eje OY sólo en el punto $Q(0,2)$. Hallar su foco, su directriz y dibujar dicha parábola (hay dos soluciones).

28. El vértice de una parábola está situado en el punto $V(1,-1)$ y pasa por los puntos $P_1(-1,3)$ y $P_2(3,3)$. Encontrar la ecuación, foco y directriz de dicha parábola.

29. El foco de una parábola está situado en el punto $F(-2,3)$ y dista del vértice $3\,u$. Encontrar la ecuación, vértice y directriz de dicha parábola (hay cuatro soluciones).

30. Una parábola tiene su foco en el origen de coordenadas y la distancia del mismo a su vértice es igual a la distancia entre el foco y los puntos de corte de la parábola con el eje OX. Hallar la ecuación de dicha parábola (hay muchas soluciones).

31. Dada la parábola $y = x^2 - 2x$, encontrar otra parábola tal que sus vértices respectivos y los dos puntos en los que se cortan dichas parábolas sean los vértices de un cuadrado.

32. Hallar los vértices y los focos las siguientes elipses (y dibujarlas):

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	*b*) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$	*c*) $x^2 + 2y^2 + 4y + 7 = 6x$
d) $25x^2 + 9y^2 = 225$	*e*) $4x^2 + 25y = 25$	*f*) $2x^2 + 5y^2 - 3x + 10y = 0$
g) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$	*h*) $6x^2 + 4y^2 = 2$	*i*) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 2x = 3y$

33. Hallar, en cada caso, la constante, todos los vértices[2], la excentricidad y la ecuación de la elipse (y dibujarla) que cumple:

a) Tiene sus focos situados en los puntos $F_1(-2, 0)$ y $F_2(2, 0)$ y dos de sus vértices son los puntos $V_1(-5, 0)$ y $V_1(5, 0)$.

b) Focos: $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$ Vértices: $V_1(0, 13)$ y $V_2(0, -13)$.

c) Focos: $F_1(3, 1)$ y $F_(3, -1)$ Vértices: $V_1(3, 3)$ y $V_2(3, -3)$.

d) Focos: $F_1(1, 2)$ y $F_(- 1, 2)$ Longitud del eje mayor 6.

e) Centro: $C(2, 2)$ Foco: $F_1(0, 2)$ Vértice: $V_1(5, 2)$

f) Focos: $F_1(-3, 1)$ y $F_2(1, 1)$ Vértice: $V_1(-1, 3)$

34. Hallar la constante y la ecuación de las hipérbolas que cumplen:

a) Tiene sus focos situados en los puntos $F_1(-2, 0)$ y $F_2(2, 0)$ y dos de sus vértices son los puntos $V_1(-5, 0)$ y $V_1(5, 0)$.

b) Focos: $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$ Vértices: $V_1(0, 13)$ y $V_2(0, -13)$.

c) Focos: $F_1(3, 1)$ y $F_(3, -1)$ Vértices: $V_1(3, 3)$ y $V_2(3, -3)$

d) Focos: Vértices: $V_1(3, 0)$ y $V_2(-33,)$ Asíntotas: $y = 2x$ $y = -2x$.

e) Focos: $F_1(2, 2)$ y $F_(6, 2)$ Asíntotas: $y = x - 2$ $y = 6 - x$

35. Hallar sobre el eje OX cuatro puntos $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(-b, 0)$ y $B_2(b, 0)$ con $a > b > 0$ tales que la elipse cuyos focos son A_1 y A_2 y cuyos vértices son B_1 y B_2 corta a la hipérbola cuyos focos son B_1 y B_2 y cuyos vértices son A_1 y A_2 en cuatro puntos que resultan ser los vértices de un cuadrado.

[2]Recuérdese que nosotros llamamos vértices a los puntos extremos del ambos ejes, el mayor y el menor. Algunos autores llaman vértices sólo a los puntos extremos del eje mayor

Capítulo 4

Las funciones elementales

4.1. Conceptos básicos sobre funciones

Sea D un subconjunto de números reales. Una **función (real de variable real)** es una "ley" que a cada número real x del subconjunto D le asocia otro número real único (denominado **imagen** de x). Al conjunto D se le llama **dominio** de la función.

Ejemplos de funciones son los siguientes:

1. La ley que a cada número no negativo le asocia su raíz cuadrada positiva.

2. La ley que a cada número del intervalo $[-1, 5]$ le asocia su cuadrado aumentado en dos unidades.

3. La ley que a cada número distinto de 0 le asigna su inverso.

En el primer ejemplo, el dominio de dicha función sería $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (es decir, los números no negativos); en el segundo caso, el dominio es el conjunto $[-1, 5]$ tal y como nos indican; por último, el dominio de la tercera función es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, puesto que podemos calcular el inverso de cualquier número real excepto del 0.

Las funciones se suelen denotar con las letras $f, g, h, \ldots$. Para <u>determinar una función</u>, hay que indicar tanto su <u>dominio</u> como la <u>expresión algebraica</u> que permite obtener la imagen de cada valor del dominio. Esto se suele abreviar en Matemáticas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es decir, estamos definiendo una función que denominamos f, cuyo dominio es D y que a cada número x del dominio D le asocia la imagen $f(x)$. Volviendo a los ejemplos de arriba, tendríamos que tales funciones se abrevian como sigue:

1. $$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & +\sqrt{x} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} g\colon & [-1,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{R}^+\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

OBSERVACIONES:

- En algunas ocasiones, para precisar una función f tan sólo se indica la ley algebraica $f(x)$. En este caso, tenemos que entender que el dominio de dicha función es el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ posible, es decir, el conjunto de los números x para los cuales tiene sentido calcular $f(x)$. Por ejemplo, si decimos "sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$", debemos entender que el dominio de tal función está constituido por todos los números reales excepto el 2 y -2, pues estos dos valores anulan el denominador. Por otra parte, el dominio de la función $g(x) = x^2+1$ es todo $\mathbb{R}$, pues es posible elevar al cuadrado cualquier $x \in \mathbb{R}$ y sumarle 1.

- El dominio de una función depende también de la naturaleza de las magnitudes que pretendemos describir. Por ejemplo, la función $f(x) = \pi x^2$ designa el área de un círculo de radio x; matemáticamente, tal función tiene por dominio todo $\mathbb{R}$; en el marco de la Geometría, el dominio de dicha función sería $\mathbb{R} \cup \{0\}$, pues no tiene sentido hablar de círculos con radio negativo.

- En los ejemplos del punto anterior, x recibe el nombre de **variable independiente**, pues varía con libertad en el dominio D. Sin embargo, la variable independiente puede venir representada por otra letra. Así, las expresiones siguientes representan todas a la misma función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \qquad f(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}} \qquad f(z) = \frac{z}{\sqrt{z+1}}$$

Las siguientes definiciones están referidas a una función f cuyo dominio es D.

Se llama **imagen** de f, y se abrevia Im (f), al conjunto numérico formado por todas las imágenes $f(x)$ cuando x recorre el dominio D; es decir,

$$\text{Im } (f) = \{f(x) : x \in D\}.$$

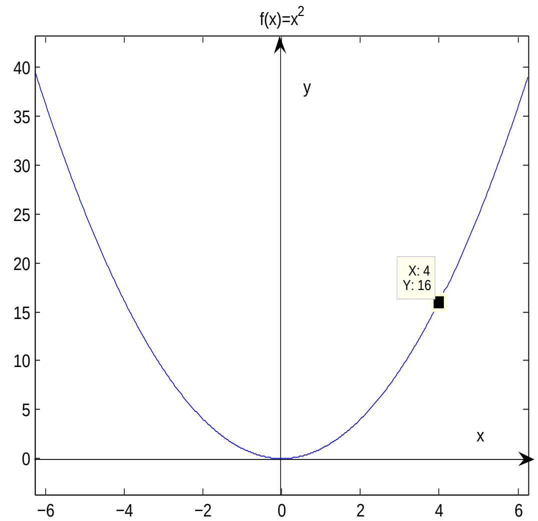
Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (puesto que podemos elevar al cuadrado cualquier número real). En este caso

$$\text{Im } (f) = \{f(x)\colon x \in \mathbb{R}\} = \{x^2\colon x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty).$$

Se llama **gráfica** de f a la curva resultante al representar en unos ejes cartesianos el conjunto siguiente:

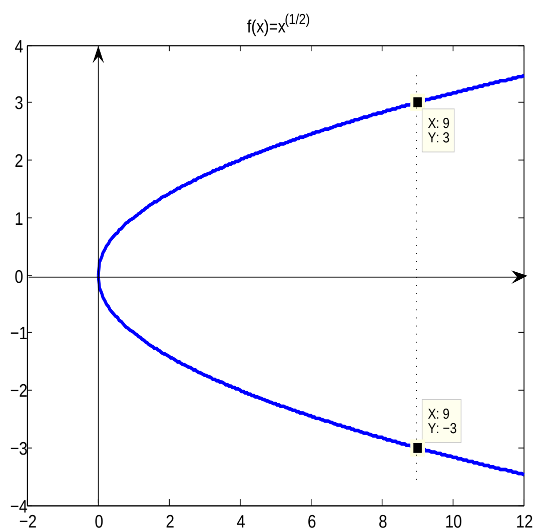
$$\{(x, f(x)) : x \in D\}$$

es decir, el conjunto de todos pares ordenados cuya primera coordenada es un punto x del dominio y cuya segunda coordenada es su imagen $f(x)$. La ecuación de la gráfica de una función viene dada por $y = f(x)$.



Esta es la gráfica de la función $f(x) = x^2$, es decir, la curva que resulta al representar todos los puntos de la forma (x, x^2) cuando x recorre $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $f(4) = 4^2 = 16$, luego uno de los puntos de la curva anterior es la representación del par $(4, 16)$. La ecuación de dicha curva (denominada parábola) es $y = x^2$.

Debemos hacer notar que, si bien la gráfica de cualquier función es una curva sobre el plano $\mathbb{R}^2$, no todas las curvas del plano son la gráfica de alguna función. Por ejemplo, la siguiente curva



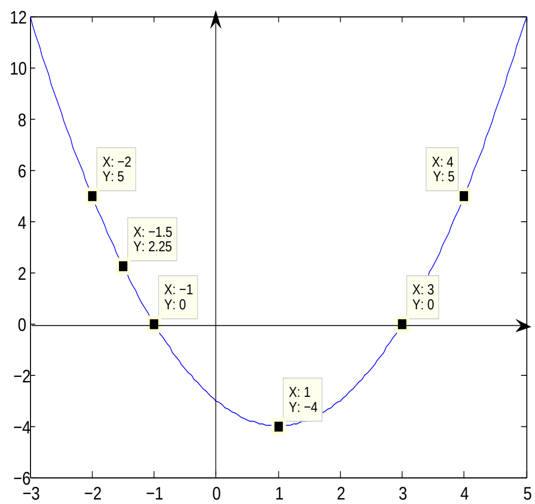
no es la gráfica de ninguna función pues, por ejemplo, el valor $x = 9$ tendría dos imágenes, $y_1 = 3$ e $y_2 = -3$ (como se ha dicho en la definición de función, a cada punto del dominio se le asocia una única imagen). En general, la gráfica de una función tiene la propiedad de que cualquier recta vertical corta a dicha gráfica en, a lo sumo, un punto.

4.2. Algunas características sobre funciones

Sea f una función con dominio D.

Se dice que f es **creciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in I$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I, crece $f(x)$ (la gráfica de f "sube" a medida que "nos movemos hacia la derecha" en el eje OX).

Se dice que f es **decreciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in I$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I, decrece $f(x)$ (la gráfica de f "baja" a medida que "nos movemos hacia la derecha" en el eje OX).

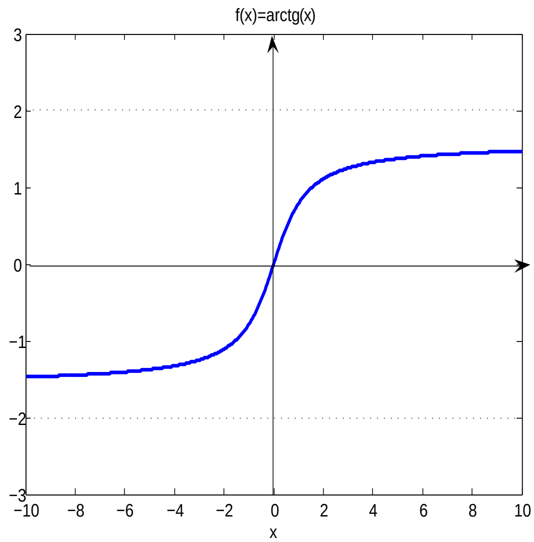


La función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.

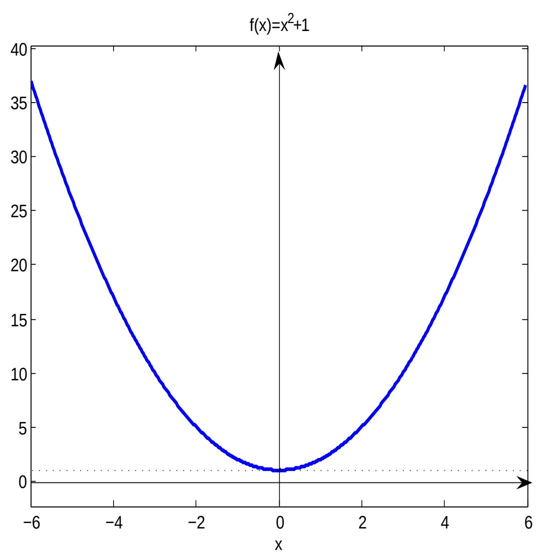
Se dice que f está **acotada superiormente** en el intervalo $I \subset D$ si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, la imagen de cualquier x del intervalo I es menor que cierta constante M (la gráfica de f queda por debajo de la recta horizontal $y = M$). La constante M recibe el nombre de **cota superior** de f en I.

Se dice que f está **acotada inferiormente** en el intervalo $I \subset D$ si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, la imagen de cualquier x del intervalo I es mayor que cierta constante m (la gráfica de f queda por encima de la recta horizontal $y = m$). La constante m recibe el nombre de **cota inferior** de f en I.

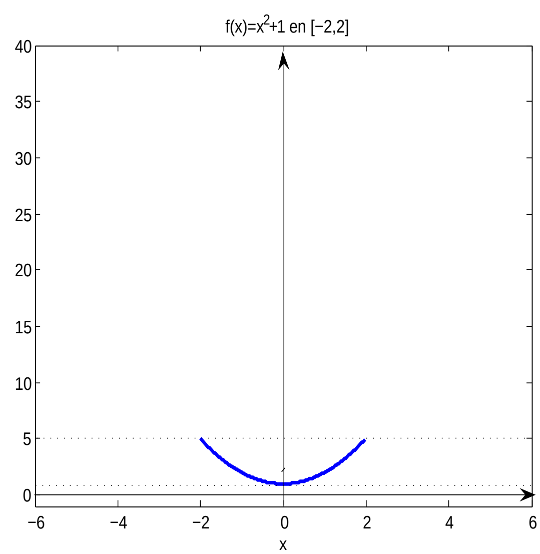
Se dice que f está **acotada** en el intervalo $I \subset D$ si está acotada superior e inferiormente. En virtud de las definiciones anteriores, esto puede resumirse diciendo que existe un número $K > 0$ tal que $-K \leq f(x) \leq K$ cualquiera que sea $x \in D$ (la gráfica de f está entre las rectas horizontales $y = -K$ e $y = K$). La constante K recibe el nombre de **cota** de f en I.



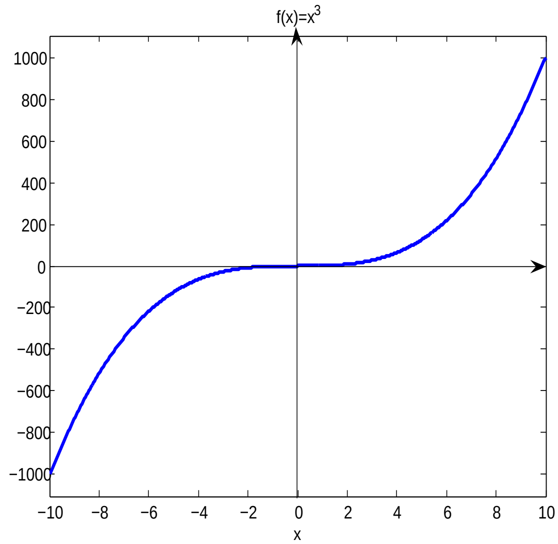
Esta función está acotada superior e inferiormente en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, $M = 2$ es cota superior de f en $\mathbb{R}$ y $m = -2$ es cota inferior de f en $\mathbb{R}$). Es, pues, una función acotada en $\mathbb{R}$.



Esta función está acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ ($m = 1$ sirve como cota inferior de f en $\mathbb{R}$) pero no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$.



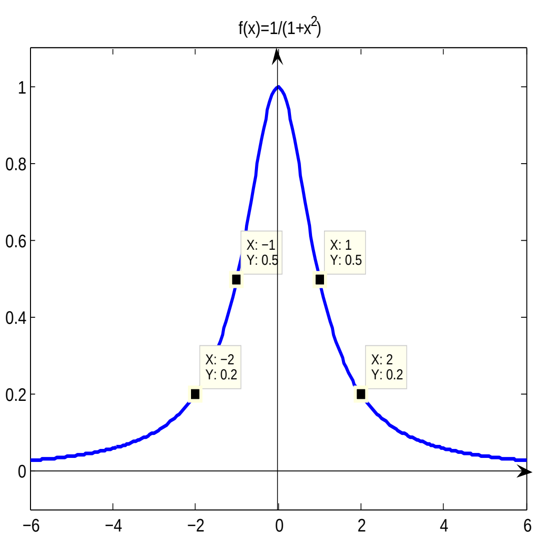
Sin embargo, si nos restringimos, por ejemplo, al intervalo $I = [-2, 2]$, f sí está acotada superiormente (sirve como cota superior $M = 5$); así pues, la función f sí está acotada en $[-2, 2]$.



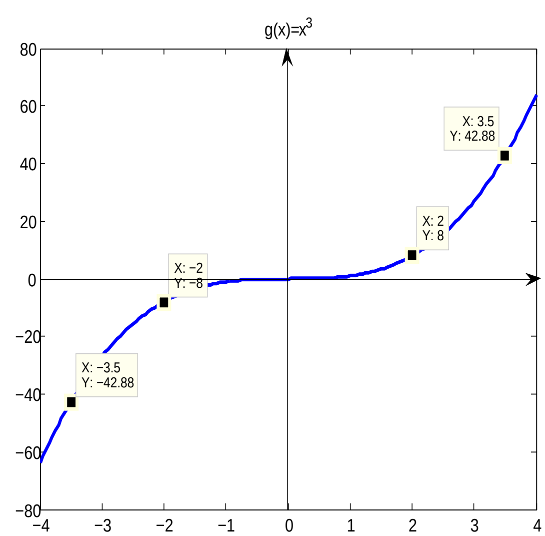
Esta función no está acotada superior ni inferiormente en $\mathbb{R}$.

Se dice que f es **par** si $f(-x) = f(x)$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, si cualquier número real del dominio y su opuesto tienen la misma imagen (la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY).

Se dice que f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, si cualquier número real del dominio y su opuesto tienen imágenes opuestas (la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen).

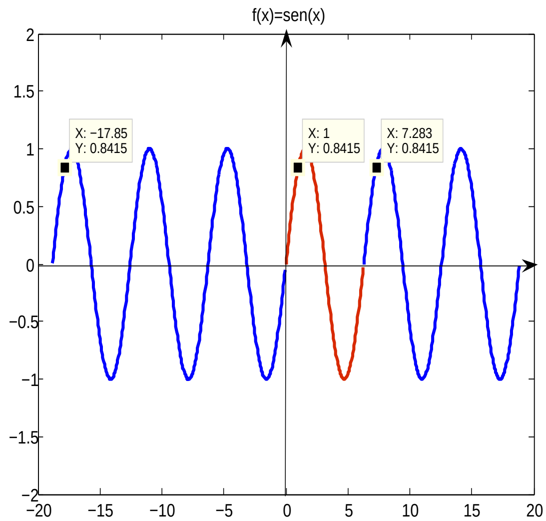


La función $f(x) = 1/(1+x^2)$ es par; en efecto, $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$.



La función $g(x) = x^3$ es impar; en efecto, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Se dice que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **periódica** si existe un número $T > 0$ cumpliendo que $f(x+T) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}$; es decir, si las imágenes de los puntos de la recta real se repiten al trasladarnos por el eje OX cierta longitud T. A la menor de las cantidades T se le llama **periodo** de f. Gráficamente, una función periódica consta de un trozo fundamental que se va repitiendo a lo largo de todo el eje OX en trozos de longitud igual al periodo.



La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es periódica de periodo $2\pi(\simeq 6'283)$; un trozo fundamental de la gráfica es el correspondiente al intervalo $[0, 2\pi]$ (en rojo) del eje OX. El resto de la gráfica consiste en copias repetidas de dicho trozo.

4.3. Composición de funciones

Sean f y g dos funciones. Se define la **composición** de g y f (y se representa $g \circ f$) como la función que a cada x asigna $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Así pues, $g \circ f$ es la función resultante de aplicar f y g sucesivamente y responde al siguiente esquema:

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g\big(f(x)\big)$$

En definitiva, la función $g \circ f$ se define como sigue:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

Observemos que para que la expresión $g\big(f(x)\big)$ tenga sentido, ha de ocurrir que $f(x)$ esté en el dominio de la función g. Por ello, el dominio de D de $g \circ f$ no sólo depende del dominio de f, sino también de su imagen y del dominio de g.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2 + 1$, la función $g \circ f$ es aquella que sigue el siguiente esquema:

   $$x \xmapsto{f} 3x \xmapsto{g} (3x)^2 + 1$$

   esto es, $(g \circ f)(x) = (3x)^2 + 1 = 9x^2 + 1$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = x+2$, entonces $f \circ g$ es la función definida por:

$$f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \frac{1}{(x+2)-2} = \frac{1}{x}.$$

Es interesante observar en este último ejemplo que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Es importante destacar que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$, es decir, la composición de funciones no es conmutativa. En efecto, en el último ejemplo $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x}$; sin embargo,

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{x-2} + 2 = \frac{2x-3}{x-2}$$

Por último, es fácil comprobar que la composición de funciones sí es una operación asociativa, esto es, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ cualesquiera que sean las funciones f, g y h que se consideren.

4.4. Inversa de una función

Antes de definir el concepto de función inversa, necesitamos saber qué es una función inyectiva.

Una función $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** si, dados $x_1, x_2 \in D$ distintos, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$; es decir, f es inyectiva si no toma dos veces el mismo valor (la gráfica de una función inyectiva verifica la propiedad de que cualquier recta horizontal corta a dicha gráfica en, a lo sumo, un punto).

Veamos algunos ejemplos:

1. La función $f(x) = 3x + 2$ es inyectiva. Para comprobarlo, veamos que dos imágenes iguales han de corresponder a orígenes iguales ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

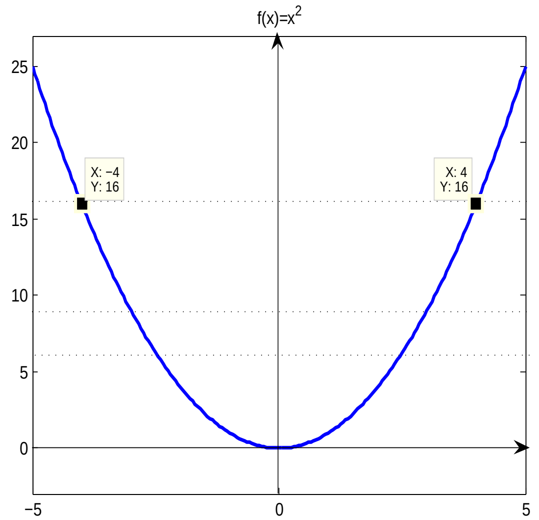
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

2. Cualquier función creciente en todo su dominio es inyectiva.

3. Cualquier función decreciente en todo su dominio es inyectiva.

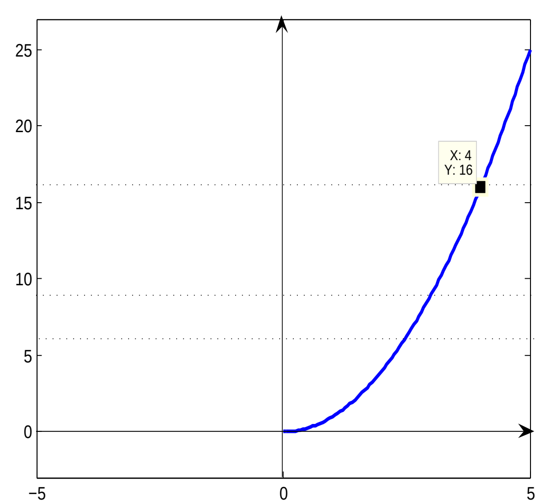
4. La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva; por ejemplo, 4 y -4 tienen la misma imagen ($f(-4) = f(4) = 16$). Gráficamente, la recta horizontal de ecuación $y = 16$ corta a

la parábola $y = x^2$ en dos puntos: $(4, 16)$ y $(-4, 16)$.



La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Cualquier recta horizontal corta a su gráfica en dos puntos.

En el ejemplo anterior, si nos quedamos con una mitad de la parábola, obtenemos una función inyectiva.Así, la función $g(x) = x^2$ definida en $[0, +\infty)$ sí es inyectiva.



Dada una función inyectiva $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, la **función inversa** f^{-1} es la que tiene por dominio Im (f) y a cada imagen le asocia su correspondiente origen.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = 3x$, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el triple de x (f es inyectiva por ser creciente). Así, por ejemplo, $f(2) = 6$ y $f(4) = 12$. La función inversa f^{-1} tiene por dominio Im $(f) = \mathbb{R}$ y es aquella que a cada valor real le asocia su tercera parte, o sea, $f^{-1}(x) = x/3$; de esta forma, resulta evidente que $f^{-1}(6) = 2$ y $f^{-1}(12) = 4$.

El procedimiento general para obtener la función inversa de una función inyectiva dada,

f, consiste en despejar x de la ecuación $y = f(x)$, poniendo así x como una expresión en función de y, en concreto, $x = f^{-1}(y)$. Veamos algunos ejemplos:

1. Si $f(x) = x^3$, despejando x en $y = x^3$ resulta $x = \sqrt[3]{y}$, de donde

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

(recordemos que el nombre de la variable es intrascendente; de hecho, si resulta más familiar puede escribirse $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$).

2. Si $f(x) = 3x + 2$, despejando x en $y = 3x + 2$ resulta $x = \dfrac{y-2}{3}$, luego

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

(o también $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$).

OBSERVACIONES:

- En este instante es fácil justificar por qué se ha definido la función inversa tan sólo para funciones inyectivas. La idea consiste en que, si una función f no es inyectiva, entonces hay al menos dos valores x_1 y x_2 que van la misma imagen c. Al considerar la "función" inversa, tendríamos que f^{-1} asignaría a c los valores x_1 y x_2, lo que entra en contradicción con el concepto de función (una función asigna a cada valor de la variable independiente una única imagen). Por ejemplo, intentemos obtener la función inversa de $f(x) = x^2$; si procedemos como en los ejemplos anteriores, debemos despejar x de $y = x^2$, resultando ahora $x = \pm\sqrt{y}$, es decir, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$. Pero esta expresión última no es una función pues a cada valor y no negativo le asocia dos valores: $+\sqrt{y}$ y $-\sqrt{y}$.

- Si $I \subset \mathbb{R}$, la función **identidad** en I es aquella definida por $id_I(x) = x$ cualquiera que sea $x \in I$. Si f es inyectiva con dominio D, las igualdades siguientes son consecuencias directas de las definiciones de función inversa y función compuesta:

  1. $f^{-1} \circ f = id_D$,
  2. $f \circ f^{-1} = i_{\mathrm{Im}\,(f)}$.

4.5. Estudio de las funciones elementales

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se estudian algunas de ellas.

4.5.1. Función polinómica

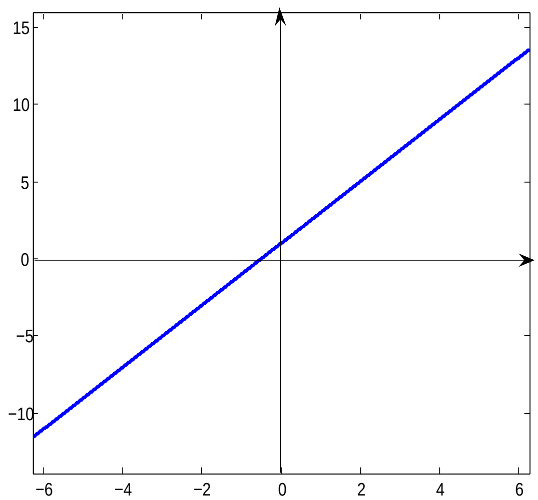
Una **función polinómica de grado** n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

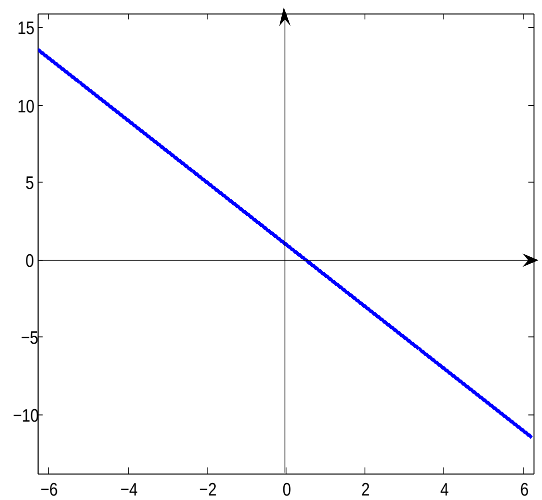
siendo $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Tenemos varios casos particulares especialmente relevantes:

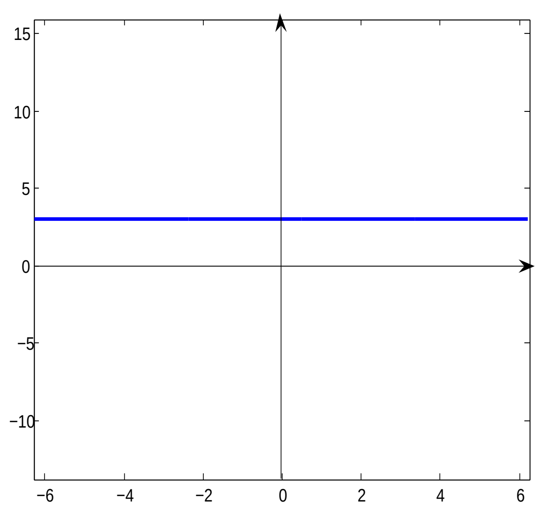
1. **Función afín:** son las funciones de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de este tipo de funciones es una recta.



Función afín $f(x) = ax + b$ con $a > 0$

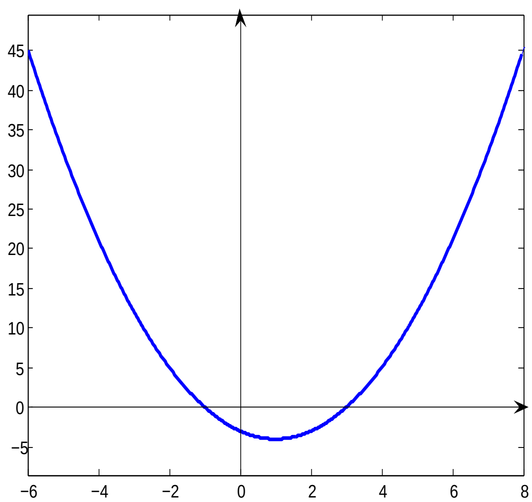


Función afín $f(x) = ax + b$ con $a < 0$

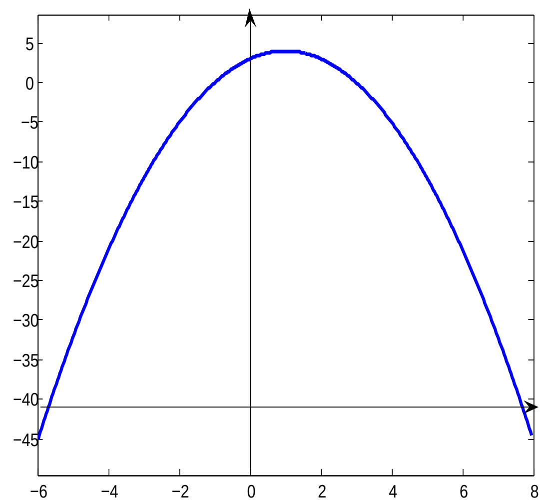


Función afín $f(x) = ax + b$ con $a = 0$

2. **Funciones cuadráticas:** son las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. La gráfica de este tipo de funciones es una parábola. Se llama **vértice** de la parábola al punto en el que la parábola cambia la tendencia de crecimiento; en el caso $a > 0$, corresponde con el punto de menor ordenada mientras que si $a < 0$, el vértice es el punto de mayor ordenada.



Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$

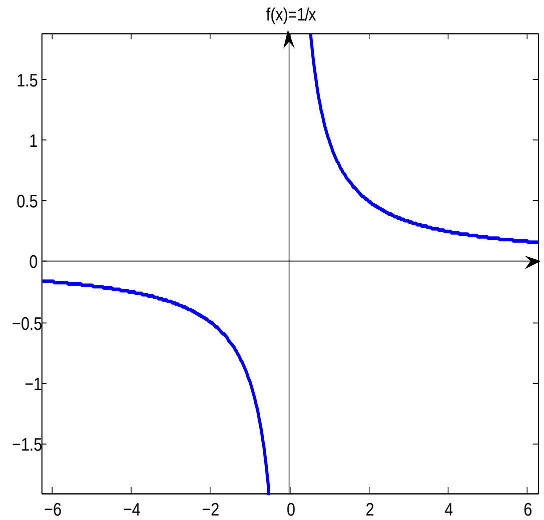


Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$

4.5.2. Función racional

Una **función racional** es una función de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siendo f y g funciones polinómicas. El dominio de estas funciones es el conjunto de todos los números reales que no anulan el denominador.

Dentro de estas funciones cabe destacar la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.



4.5.3. Función irracional

Una **función irracional** es una función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ siendo $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ y g una función racional.

- Si n es par, el dominio de la función irracional f coincide con el dominio de g.
- Si n es impar, el dominio de la función irracional f es el conjunto formado por los puntos x del dominio de g en los que $g(x) \geq 0$.

4.5.4. Función exponencial

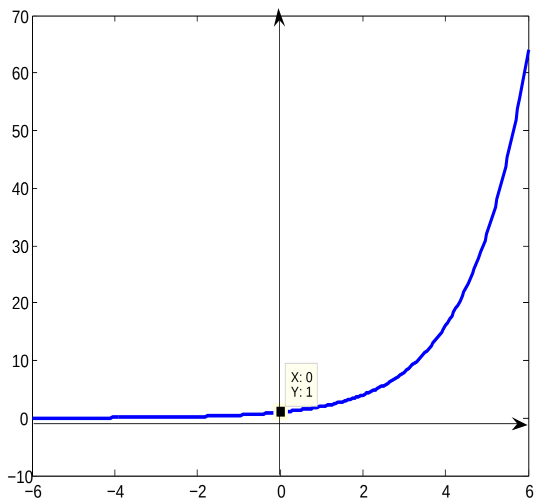
Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$ siendo $a \in \mathbb{R}^+$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen es $\mathbb{R}^+$.

A continuación se exponen algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (véase capítulo 1):

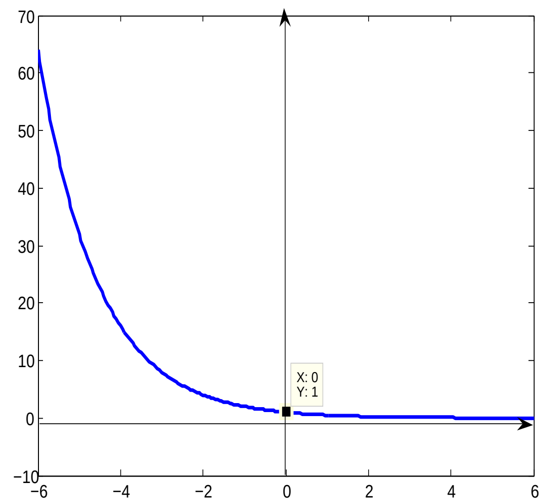
- $a^x > 0$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$

- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- $a^{x_1/x_2} = \sqrt[x_2]{a^{x_1}}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

La gráfica de este tipo de funciones depende de si $a > 1$ o $a \in (0,1)$ (el caso $a = 1$ no tiene interés pues $f(x) = 1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$).



Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 1$



Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \in (0,1)$

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.5.5. Función logarítmica

Si La **función logaritmo en base** a es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$ (véase capítulo 1). El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}^+$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

La función logaritmo en base a resulta ser la función inversa de la función exponencial de base a definida anteriormente. Así pues y como ya se ha visto en el capítulo 1, la relación que define al logaritmo es la siguiente:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, $\log_a x$ es el número al que hay que elevar a para obtener como resultado x.

A continuación se recuerdan algunas propiedades de los logaritmos (véase capítulo 1):

- $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$

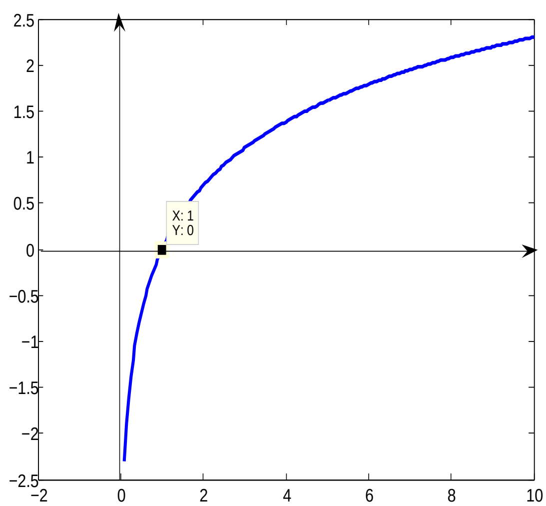
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

- $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

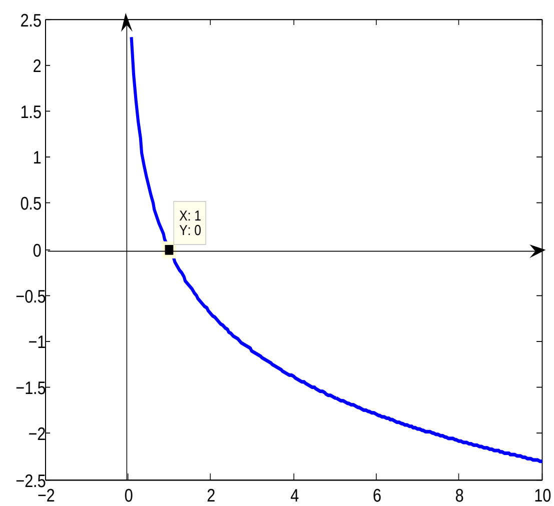
- $\log_a xp^{=} p \cdot \log_a x$

- $\log_a \sqrt[p]{x} = \dfrac{1}{p} \log_a x$

Al igual que ocurría con la exponencial, la gráfica de la función logarítmica depende de si la base es mayor que 1 o es un valor entre 0 y 1.



Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a > 1$



Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a \in (0, 1)$

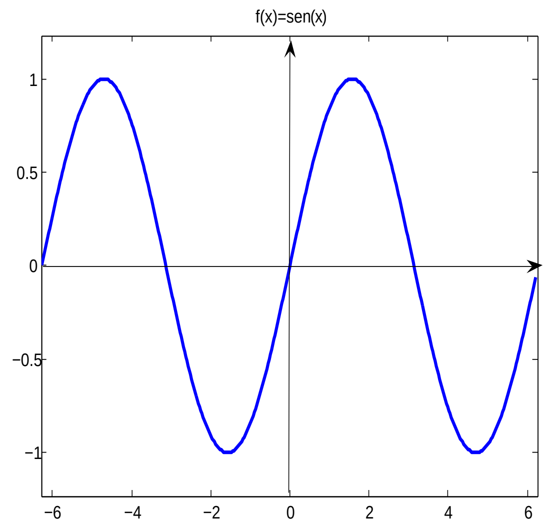
La función logaritmo más utilizada es la de base e (**logaritmo neperiano**) y se denota $f(x) = \ln\, x$ o simplemente $f(x) = \log x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.5.6. Funciones trigonométricas

Es conveniente recordar que, en el Cálculo, se emplea el radián para la medida de los ángulos por ser una medida adimensional.

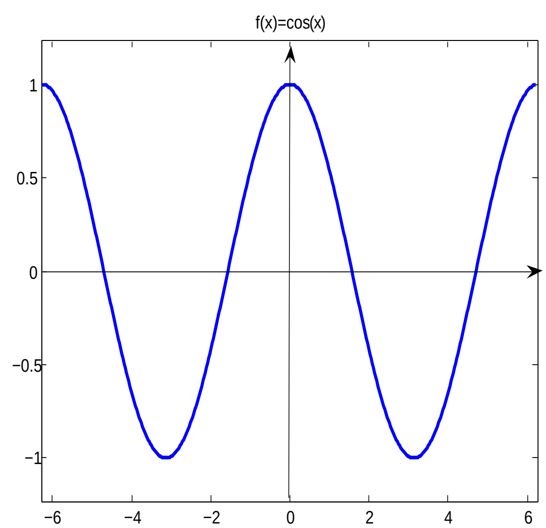
1. Función **seno**: viene dada por $f(x) = \text{sen}\ x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el

intervalo $[-1, 1]$.



El seno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\, x$, es una función impar.

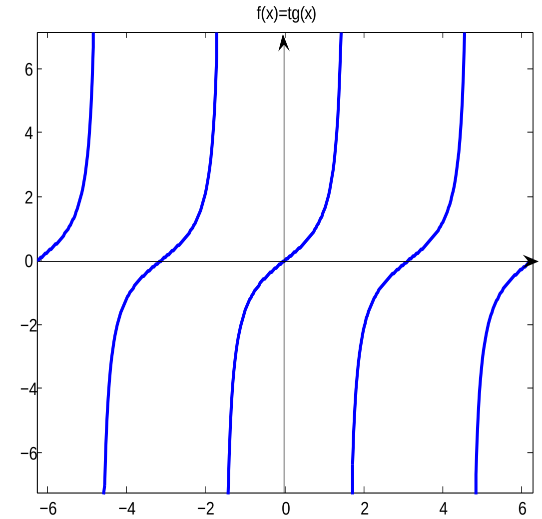
2. Función **coseno**: viene dada por $f(x) = \cos\, x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-1, 1]$.



El coseno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\cos\,(-x) = \cos\, x$, es una función par.

3. Función **tangente**: viene dada por $f(x) = \text{tg}\, x$. Teniendo en cuenta que $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos\, x}$, su dominio es $\mathbb{R}$ quitando los puntos en los que se anula la función coseno. Por tanto,

el dominio de la función tangente es $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}:\ k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es $\mathbb{R}$.

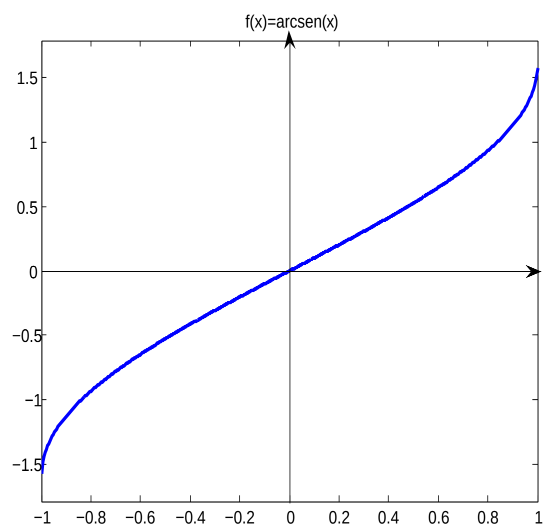


La tangente es una función periódica de periodo π y, puesto que $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\ x$, es una función impar.

4. Función **arco seno**: viene dada por $f(x) = \mathrm{arcsen}\ x$. La función arco seno es la inversa de la función seno cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco seno es la siguiente:

$$\mathrm{arcsen}\ x = y \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}\ y = x$$

Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

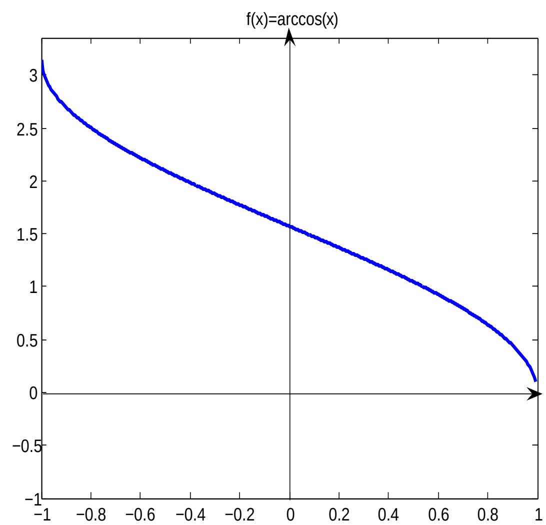


5. Función **arco coseno**: viene dada por $f(x) = \mathrm{arccos}\ x$. La función arco coseno es la inversa de la función coseno cuando está última se considera definida en el intervalo

$[0, \pi]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco coseno es la siguiente:

$$\arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[0, \pi]$.



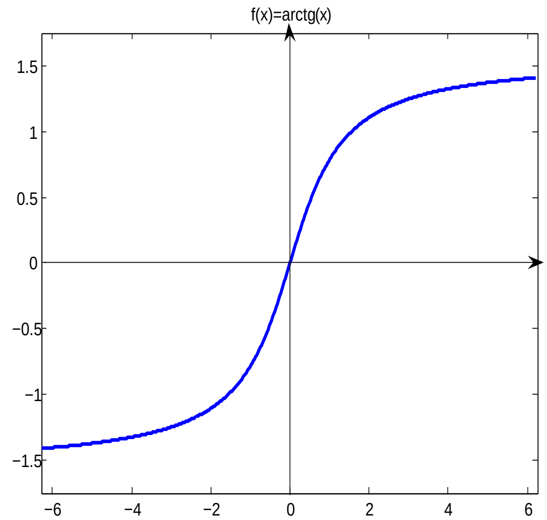
Existe la siguiente relación entre las funciones arco seno y arco coseno

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

6. Función **arco tangente**: viene dada por $f(x) = \operatorname{arctg} x$. La función arco tangente es la inversa de la función tangente cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define a la arco tangente es la siguiente:

$$\operatorname{arctg} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x$$

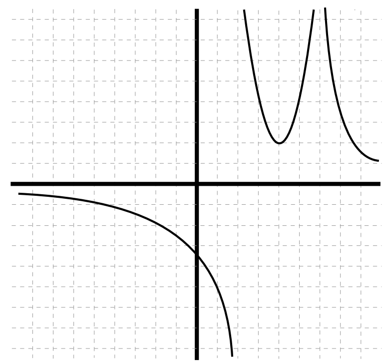
Su dominio es el intervalo $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.


f(x)=arctg(x)
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−6
−4
−2
0
2
4
6

Ejercicios y problemas

1. Observar la siguiente gráfica e indicar:

- Dominio de definición.
- Recorrido.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.



2. Dibujar la gráfica de una función impar de dominio $\mathbb{R}$, que corte a los ejes en los puntos (-3,0), (0,0) y (3,0) y que tenga un máximo en (-2,1).

3. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(\frac{x^2-1}{x+2})$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$

c) $f(x) = \arccos(\frac{x-1}{x+2})$

d) $f(x) = \sqrt[4]{-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

e) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

4. Dadas las funciones $f(x) = \text{sen }(x-1)$ $g(x) = \frac{x^2+5}{x}$ y $h(x) = e^{x+3}$, realizar las siguientes operaciones:
a) $f \circ g$ *b*) $g \circ h$ *c*) $h^{-1} \circ f$ *d*) $f \circ g \circ h$

5. Demostrar que si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ también lo es. ¿Y si f y g fueran decrecientes? ¿Y si una fuera creciente y la otra decreciente?

6. Calcular la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-4}{3x-5}$

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}} + 5$

c) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $f(x) = \text{arcsen}(x^3 - 1)$

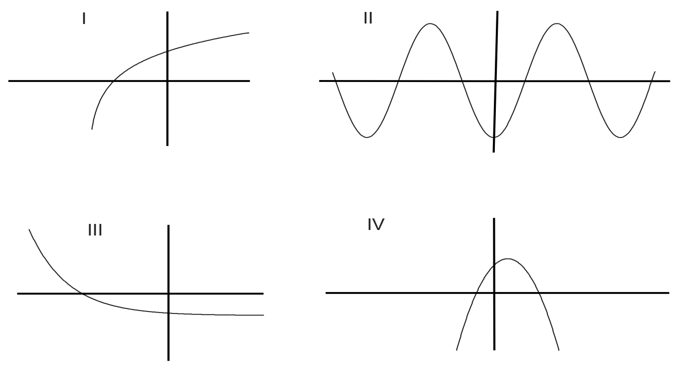
7. Dar dos ejemplos de funciones que coincidan con su inversa.

8. Calcular el periodo de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \cos(2x) + \cos(x+3)$ *b*) $f(x) = \text{sen}^2 x$

9. Obtener una función $f(x)$ de la cual sabemos que es un polinomio de tercer grado que corta a los ejes en los puntos (-2,0), (1,0), (3,0) y (0,3).

10. De entre las siguientes funciones, elegir las que corresponden a las gráficas de la figura.

a) $f(x) = -\cos(2x)$	*b*) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$	*c*) $f(x) = 2^{-x} - 3$
d) $f(x) = -\log(x-1)$	*e*) $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$	*f*) $f(x) = \log(x+3)$
g) $f(x) = -2^x + 3$	*h*) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$	*i*) $f(x) = -(x-1)^2$



11. Para alquilar un coche una empresa nos ofrece las siguientes siguientes tarifas:

- Tarifa A: 30 euros diarios.
- Tarifa B: 12 euros diarios más 6 céntimos por kilómetro recorrido.

Representar la función de gasto en cada opción. ¿A partir de qué recorrido es más rentable la tarifa A que la B?

12. Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota. La altura h, en metros, a la que se encuentra en cada instante t, en segundos, viene dada por $h(t) = 30t - t^2$.

a) Representar gráficamente $h(t)$.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento se alcanza?

c) ¿En qué intervalo de tiempo está a más de 25 metros de altura?

13. Un eucalipto de 20 años de edad tiene 10 m de altura, 30 cm de diámetro y su madera se puede vender a 3 euros/m^3. A partir de ese momento, cada año crece 20 cm de alto y un cm de ancho, pero su madera se deprecia a razón de 6 céntimos por año el m^3. Escribe y representa gráficamente la función $P(x)$ que da el precio de venta de un eucalipto, según su edad, a partir de los 20 años. ¿En qué momento es más ventajoso talar los eucaliptos? (Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, donde r es el radio y h la altura.)

14. Expresar de otra forma (efectuando la división) y representar gráficamente la función $g(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ a partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

15. Dibujar en unos mismos ejes los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = \cos x \quad g(x) = |\cos(x+\pi)|$

b) $f(x) = e^x \quad g(x) = 3 - e^{x-1}$

16. Un tipo de bacterias duplica su número cada 3 horas. Si en el instante inicial hay 100 bacterias,

a) Obtener una ley exponencial de crecimiento del cultivo de la forma $f(x) = Ca^x$ que indique el número de bacterias en función del tiempo transcurrido (en horas). Representar gráficamente la función obtenida.

b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 8 horas?

c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para obtener 60000 bacterias?

d) Calcular y representar gráficamente la función inversa de $f(x)$.

17. Un isótopo radiactivo tiene una semivida de 5 días, es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original en 5 días. Obtener un ley exponencial de decrecimiento de la forma $f(x) = Ca^{-x}$ para expresar la cantidad $f(x)$ después de x días, sabiendo que en el instante inicial existe 100 gramos de dicho istopo. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

18. El valor de un determinado automóvil se deprecia un 10 % anual hasta el décimo año, a partir del cual permanece constante. A los 30 años se considera un clásico por lo que duplica su precio cada 10 años. Expresar el valor del coche en función del tiempo transcurrido sabiendo que el precio de compra fue de 30.000 euros. Dibujar la gráfica de la función obtenida.

19. Una noria tiene un diámetro de 50 m y da una vuelta cada minuto. Dibujar, de forma aproximada, una gráfica que muestre cómo varía la altura del cestillo en el que nos hemos montado en función del tiempo transcurrido. ¿A qué función se parece? Obtener la expresión analítica de la función que has dibujado.

20. Demostrar que sen $x + \cos x 1$ para $x \in (0, \pi/2)$. (Indicación: Dibujar y comparar las gráficas de $f(x) =$ sen x y $g(x) = 1 - \cos x$)

21. Demostrar, utilizando representaciones gráficas, que la ecuación $x + e^{-x} = 2$ tiene una solución positiva y otra negativa. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x + e^{-x} = 1$?