

基于多目标规划和模糊层次分析法的打车补贴模型

摘 要

近年来，国内城市规模迅速扩张，人口数量爆发式增长，由人车信息互达障碍导致的“打车难”问题愈演愈烈。多家打车软件服务平台利用打车软件，用补贴方案吸引出租车司机和乘客，力求通过完善人车信息交流模式来改善出租车供求匹配状况。

本文以杭州市为例，分析衡量出租车资源匹配程度的多种指标及它们间的关系，建立多目标规划模型，并结合模糊聚类分析、模糊层次分析方法，通过价值转换模型，重新构建打车补贴方案，促进缓解“打车难”问题。

对于问题一，首先通过**数据采集软件和数据共享交易平台**获得反映杭州市出租车资源供需程度的指标数据。其次利用**模糊聚类算法**对杭州市按出租车供求分布情况进行区域划分，并分析反映出租车资源供求匹配关系的七种重要指标，从出租车等待时间、乘客等待时间和出租车空载率三个方面建立**多目标规划模型**。同时提出基于连续区间有序加权几何平均（COWGA）算子，并构建模糊层次分析法，将多目标规划模型转化为单目标规划模型。结果表明，杭州市城区出租车资源匹配程度低于郊区，且在上下班高峰期存在出租车供不应求现象。

针对问题二，首先分析**各公司的出租车补贴政策**，然后将**补贴函数**运用到问题一的多目标规划模型中，通过分析给予乘客、出租车补贴前后的等待时间和空载率的变化，评价各种补贴方案对“缓解打车难”现象的效用。结果表明，对乘客、出租车进行一定补贴均有助于缓解打车难，但对乘客的补贴额度不宜过大，否则适得其反。

对于问题三，构建以等待时间、不同类别乘客与出租车的距离为指标的**价值转换模型**，考虑不同类别乘客与出租车相对数量的四种不同情况，构建**新的出租车和乘客补贴函数**，并分析**补贴系数**的变化趋势，同时结合问题一的多目标规划模型，从出租车等待时间、乘客等待时间和出租车空载率三个方面论证新的补贴方案的合理性和有效性。

最后，本文对模型进行了改进和灵敏度分析，同时对模型进行了优缺点分析。
关键词：多目标规划；COWGA 算子；模糊层次分析法；打车软件；补贴方案

1 问题重述

随着城市规模的扩大，多元化的社会活动使人们对出租车的需求量增加，城市出租车的供需难题也随之加剧，这极大地影响了人们出行的顺畅，因此，如何缓解“打车难”这一难题成为了当务之急。

与日益加重的打车难问题同时出现的是日益普及的互联网服务，这使得越来越多的行业建立起互联网平台，于是“互联网+”成为了一种互联网发展的新形态，其工作机制是通过互联网对社会资源进行优化和整合，进而全面提升社会资源的利用率，从而解决社会资源配置的问题。

现如今，国内有众多打车平台，他们通过“互联网+”技术，依托移动互联网平台实现了线上与线下的融合，突破传统的打车模式，建立以移动通信、互联网技术为主体的服务平台。其因具有的便捷、补贴，故受到了广大出租车司机和乘客的欢迎，这有效地缓解了人们“打车难”的社会问题。所以，研究这一问题既具有理论研究意义，也具有实际价值。本文以此为背景，将问题总体概况为以下三个方面：

(1) 对给定区域内的出租车分布数量、乘客的需求量、等待时间等合理指标建立数学模型和算法，求解出不同时空出租车等待时间和乘客等待时间，分析出租车和乘客的“供求匹配”程度；

(2) 以不同打车软件公司对出租车不同补贴方式进行数学模型的建立，求解出不同补贴政策对乘客和出租车的影响，分析其对“缓解打车难”的帮助。

(3) 对于新创建的打车服务软件平台，选定合适的指标，建立合理的数学模型，使用算法计算出最优补贴方案，并对结果进行分析论述。

2 问题分析

针对问题一，考虑不同时段系统内的出租车服务，建立出租车需求量、运营中出租车总量、乘客等车时间等指标，以空车数量、空载指数、乘客全程出行成本为目标函数，以等待时间、空载率为决策变量，建立衡量不同时区是否达到稳定的平衡状态的多目标规划模型。利用 COWGA 算子对目标函数进行加权平均，对改进的单目标规划模型进行求解，利用所得的数据画出决策变量随时间变化的曲线，从而分析不同时区的供求匹配程度。

针对问题二，搜集各公司补贴政策数据，考虑不同补贴政策下出租车供求匹

配程度。用乘客平均等待时间、出租车平均等待时间和出租车平均空载率三个指标来衡量出租车供求匹配程度：乘客平均等待时间越短，出租车平均等待时间越短，出租车平均空载率越低，则供求匹配程度越高；乘客平均等待时间越长，出租车平均等待时间越长，出租车平均空载率越高，则供求匹配程度越低。观察出租车供求匹配程度随政策调整的变化趋势，分析即可得到各公司补贴方案是否缓解了“打车难”问题。

针对问题三，建立距离、时间两类指标，通过引入参数，建立对出租车司机补贴额度以及对乘客补贴额度与距离、时间这两类指标间的线性或非线性关系，得到表示对出租车司机补贴额度以及对乘客补贴额度的两个表达式。将表达式带入问题一的模型中，即可求得能满足平衡条件的各个参数值，将求得的参数值重新代入表达式，即为能改善出租车供求匹配程度的最优解。

3 模型假设

1. 在任意给定时段，两地间的出租车服务需求、行驶时间确定；
2. 不存在乘客与司机协商后取消订单；
3. 不论如何打车，两地间的无干扰车费确定；
4. 不存在拼车，即一辆出租车上只载有起终点完全一致的同一批乘客；
5. 使用打车软件的乘客的起终点信息仅某一区域内传播。

4 重要符号说明

I : 起始区域集合；

J : 目的区域集合；

Ω : 起点-终点对（OD 对）集合，其中 $(i, j) \in \Omega$, $i \in I$, $j \in J$ ；

R_{ijt} : t 时刻 (i, j) 间的出租车需求总量；

T_{ijt} : t 时刻在 (i, j) 间行驶的时间总量；

P_{ijt} : 无干扰情况下 (i, j) 间的车费；

S_{ijt}^{e1} : t 时刻 (i, j) 间不使用软件的乘客对出租车的需求总量，其中 e 为乘客；

S_{ijt}^{e2} : t 时刻 (i, j) 间使用软件的乘客对出租车的需求总量；

- I_{it}^{e1} : t 时刻区域*i*内不使用软件的乘客的等车时间;
- I_{ijt}^{e2} : t 时刻区域*i*内使用软件的乘客的等车时间, 且该乘客目的地为区域*j*;
- M_{ijt}^{e1} : t 时刻乘客*e*不使用软件的出行全程成本;
- M_{ijt}^{e2} : t 时刻乘客*e*使用软件的出行全程成本;
- L_{ijt}^a : t 时刻(*i, j*)间已载客出租车车流量, 其中*a*表示出租车“已载客”;
- L_{kijt}^{b2} : t 时刻从区域*k*到区域*i*接乘客的空载出租车车流量, 其中该乘客的目的地为区域*j*, *b*表示出租车“空载”;
- h_{ijt}^{b2} : t 时刻通过软件找到要从区域*i*到*j*的乘客的空载出租车的等待时间;
- L_{kit}^{b1} : t 时刻不使用软件要从区域*k*到*i*寻找乘客的空载出租车车流量;
- h_{it}^{b1} : t 时刻不使用软件在区域*i*内寻找乘客的空载出租车的等待时间;
- U_{kit}^{b1} : t 时刻不使用软件要从区域*k*到*i*寻找乘客的空载出租车的空载指数;
- U_{kijt}^{b2} : t 时刻从区域*k*到区域*i*接乘客的空载出租车的空载指数;
- \tilde{L}_{kt}^{b1} : t 时刻不使用软件从区域*k*出发寻找乘客的空载出租车总数;
- \tilde{L}_{kt}^{b2} : t 时刻使用软件从区域*k*出发寻找乘客的空载出租车总数。

5 问题求解

本文所建立的基于多目标规划和模糊层次分析法的打车补贴模型可由流程图图 1 清晰表示。

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 基本分析

在衡量出租车服务的供求关系匹配程度过程中, 需要全面考虑到乘客需求量、出租车供应量、出租车空载量等因素, 因此, 若采用单目标规划模型来衡量供求是否平衡将存在偏颇。故对于问题一, 我们基于实际情况, 将问题抽象成一个数学问题并将其简化为多目标规划形式。

在我们所构建的模型中, 订单取消量等因素难以用表达式直观衡量, 或数据

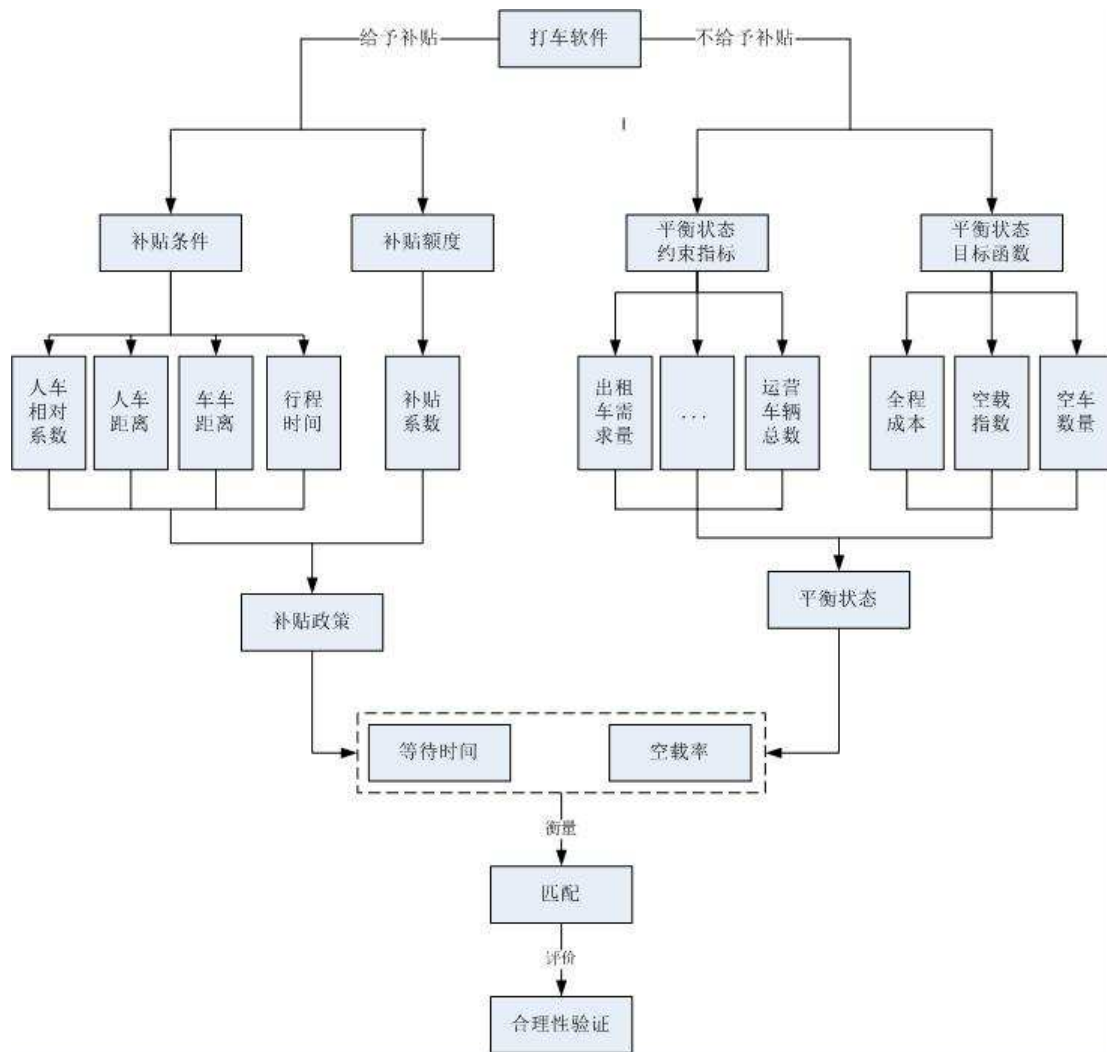


图 1 基于多目标规划和模糊层次分析法的打车补贴模型流程图

有所缺失，故在模型的建立过程中，我们只考虑了出行全程成本等 7 个指标作为是否达到供需平衡的衡量标准。另外需要强调的是，“平衡”是指在系统内，出租车上下客流稳定，即所谓的“平衡”是一种动态稳定状态；而“匹配”是指系统内供求相当，当出租车的供与求相差越小，匹配程度越高，且本文是在平衡的状态下讨论其的匹配程度。最后，我们结合实际情况，补充部分约束条件，建立多目标规划模型来求解问题。

本文中，鉴于杭州的重要地理位置、领先的发展速度、突出的交通问题，我们选择杭州作为研究城市。

5.1.2 数据来源

为得到相应数据来研究不同时空的出租车“供求匹配”程度，我们在滴滴快

的智能出行平台-滴滴苍穹获取到 2015 年 9 月 4-10 日杭州市出租车市场的供应量分布、需求量分布、打车难易度、路线、接单时间及路线轨迹等各时段监控数据,通过 GooSeeker 等数据采集软件对杭州市交通管理局网站等相关网站上的出租车市场数据进行搜集。此外,我们还参照了大数据共享交易平台——数据堂——对杭州市出租车供求状况以及不同时期滴滴快的公司对出租车补贴政策的相关数据。在搜集数据结束后,我们将所需数据导入 Excel 进行归纳整理,为后期数据的处理和分析工作做准备。

5.1.3 通过聚类方法对城市区域按出租车供求进行划分

(1) 聚类目的及方法说明

为研究不同时段、不同区域的出租车供需匹配情况,我们将杭州市区进行区域划分。基于已有数据,我们对杭州市区出租车分布、出租车需求两个因素在三个不同的典型时间段进行模糊聚类。为全面衡量时间段对出租车对供需匹配情况的影响,我们选取具有代表性的三个时间段:交通拥堵的早高峰时间 8-9 时,交通缓和的午休时间 12-13 时,车流量的稳定晚高峰结束后时间 19-20 时。

设一个集合含有若干个元素。为在集合元素数目过多的情况下,将其中元素所具有的特征研究并运用于生产实际中,我们需要将一些相似程度较高的元素聚合成一个子类,此时,相似程度较低的元素分布在不同的子类中,则全面的整体分析便可简化为分析一个子类的整体特征,这使得工作量大大减少,且也有利于达到满意的实际效果。

聚类方法不一而足,本文中,我们选用模糊 C-均值聚类方法(简称 FCM 算法)。该方法基本思想如下:设样本集合为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$,将其分成 m 个子类,求得每个子类的聚类中心 $c_i (i=1, 2, \dots, m)$,从而使得目标函数 D 达到最小值,其中目标函数 D 定义如下:

$$D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^m (d_{ij})^2, \quad (1)$$

其中, a_{ij} 表示样本 e_j 对子类 c_i 的隶属度,且 a_{ij} 满足每一个样本对各个类的隶属度之和为1,即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$; d_{ij} 表示样本 j 与其聚类中心 c_i 的 Euclid 距离,即

$d_{ij} = \|e_j - c_i\|^2$. 运用 *Lagrange* 数乘法，可以求得各个聚类中心 c_i 和样本 e_j 对子类 c_i 的隶属度 a_{ij} 。

(2) 聚类结果

对于问题一，基于搜集到的数据，我们利用 *C*–均值 聚类方法，对数据点进行聚类分析。本文中，我们利用杭州市 9 月 7-10 日 4 个工作日的平均出租车供需数据对杭州市区进行区域划分。

首先，以出租车供应量为标准，可将数据点分成 5 个子类，结果如图 1-3；其次，再以出租车需求量为标准，将数据点分成 5 个子类，结果如图 4-6；

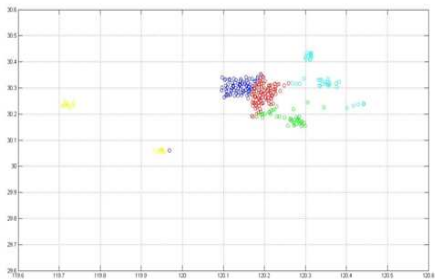


图 2 杭州市工作日 8-9 时出租车
供应聚类分析结果图

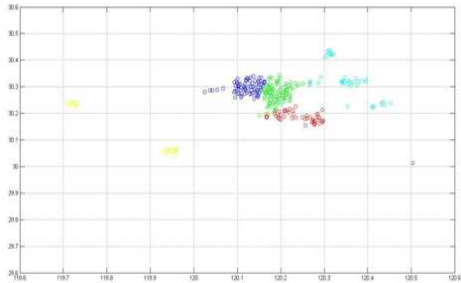


图 3 杭州市工作日 12-13 时出租
供应聚类分析结果图

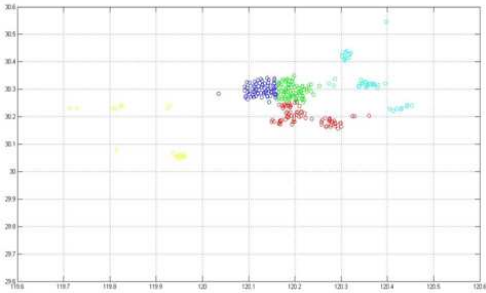


图 4 杭州市工作日 19-20
时出租车供应聚类分析结果图

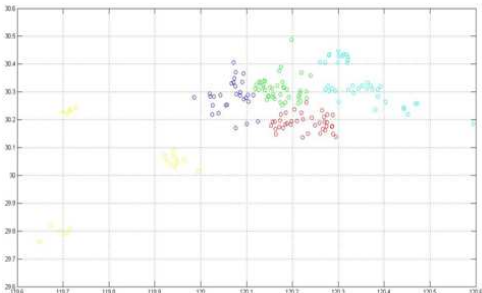


图 5 杭州市工作日 8-9 时出
租车需求聚类分析结果图

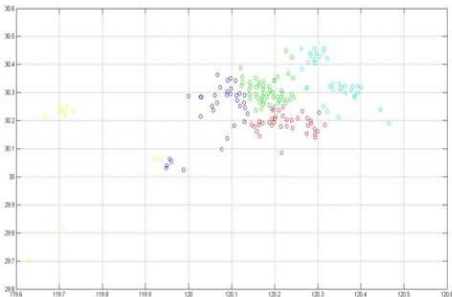


图 6 杭州市工作日 12-13 时

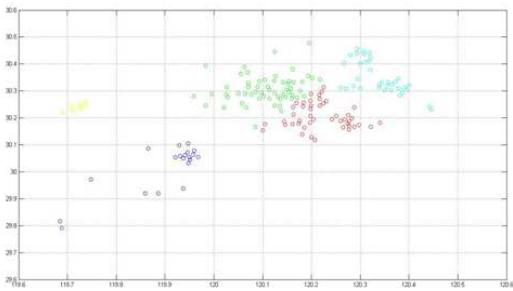


图 7 杭州市工作日 19-20 时

出租车需求聚类分析结果图

出租车需求聚类分析结果图

由以上三个不同时间段出租车供应与需求聚类分析图可见：

（1）出租车供应与需求分布主要集中在北纬 30.1° 至 30.5° ，东经 120° 至 120.4° 地区，我们将这段地区与杭州市行政地图进行对比知，这些数据分布密集地区分别对应拱墅区、上城区、下城区、江干区、西湖区等经济发展迅速的主城区，这些地区人口密度大，对于出租车的需求量也相对较大。由此可说明，出租车供应与需求分布呈总体匹配状态，即总体供需相当；

（2）在 7 至 8 时以及 19 至 20 时这两个时间段，出租车需求分布范围较大，涵盖了主城区周边的一部分郊区；而在 12 至 13 时这个时间段内，90%以上的出租车需求分布在主城区，此时郊区部分的需求分布在数据上可以忽略。而在三个时间段内，出租车供应分布则单一地分布在主城区，这致使郊区乘客的打车意愿无法得到满足，从而造成郊区出租车服务需求大于供；

（3）虽然不同时间段出租车供应与需求数量分布状况总体一致，但显然，需求分布明显比供应分布稀疏很多，也就是说，流动出租车总是集中在范围很小的区域，而有打车意愿的乘客则相对均匀地分布在范围较大的区域内，这一现象导致尽管在总体上出租车服务的供求数量相当，但仍有乘客的出租车服务无法得到满足，此时出租车也存在一定的空载现象。

5.1.4 模型建立

（1）多目标规划模型

基本情况：

考虑杭州市的公路运输系统，现已知在系统内存在出租车服务的供与需。在传统意义上，乘客在街边等待出租车，而这种打车方式既无效率，也易使乘客对出租车服务产生负面心理。随着互联网的普及，多家公司依托移动互联网建立了打车软件服务平台，这使得乘客出行更加便利，也使乘客与司机的交流更加直接有效。因此，在出行前，乘客会选择自己偏好的打车方式（使用或不使用打车软件）来减少等车时间、车费等出行成本。

本文中，我们将不使用和使用打车软件两种打车模式分别命名为“模式 1”和“模式 2”。在模式 2 中，乘客可以在打车软件中发送出租车服务需求，随后出租车接单即代表线上打车完成；在这种情况下，除了线上打车，传统意义上的

路边拦车依旧可行。另一方面，对于出租车而言，一旦接到乘客，司机则会将乘客送到其所要求的目的地，并按照规定价格合理收取费用。

现考虑不同时段系统内的出租车服务。用 S_{ijt}^{e1} 和 S_{ijt}^{e2} 分别表示 S_{ijt}^{e1} 乘客 t 时刻 (i, j) 间不使用和使用软件的乘客对出租车的需求总量，故显然，

$$S_{ijt}^{e1} + S_{ijt}^{e2} = R_{ijt} . \quad (2)$$

现阶段，在中国大陆的绝大多数城市中，在打车软件中提供起终点信息能够被乘客接受。所以基于这种实际情况，现设乘客进行线上打车时全部提供真实的起点与终点，随后软件平台会将上述信息发送至附近区域内的空载出租车。因此，起点相同但终点不同的乘客会被系统根据其所提供的起终点信息所区分，进一步而言，因为出租车司机存在主观选择，起点相同但终点不同的乘客的等待接单时间也不相同。

在该多目标规划模型中，决策变量为等待时间和出租车空载率，其中等待时间包括（1）不使用打车软件的乘客的等车时间，（2）使用打车软件的乘客的等车时间，（3）不使用打车软件的出租车的等客时间，（4）使用打车软件的出租车的等客时间。模型建立目标函数及约束条件后，得到相应结果，对不同时空出租车资源“供求匹配”程度进行分析。

指标建立：

（i）出行全程成本

考虑到在无干扰情况下，任意 OD 对 (i, j) 的车费固定，仅与 (i, j) 间道路距离、起步价有关。对于乘客而言，计算出行的全部成本需要考虑行程中的等待时间，其包括等待出租车的时间和在车上等待到达目的地的时间。因此，对任意 OD 对 (i, j) ， t 时刻乘客 e 不使用、使用软件的出行全程成本分别为：

$$M_{ijt}^{e1} = P_{ijt} + f_1 I_{it}^{e1} + f_2 T_{ijt} , \quad (3)$$

$$M_{ijt}^{e2} = P_{ijt} + f_1 I_{ijt}^{e2} + f_2 T_{ijt} + f_1 l_t - f_2 g_{ij} , \quad (4)$$

其中 $f_1 = m_1 t$ ， $f_2 = m_2 t$ 分别为顾客等车时间、顾客乘车时间的价值转化函数， l_t 表示乘客接单后等待出租车到达的时间， g_{ij} 为软件补贴与时间 t 的函数。显然，

乘客等待时间越少，出行全程成本越低，出租车的供应与需求平衡程度越高，故我们可得目标函数 1 归纳如下：

$$\min \sum_{i \in I} h_{it}^{e1} + \sum_{(i,j) \in \Omega} (h_{ijt}^{e2} - f_2 g_{ij}); \quad (5)$$

(ii) 出租车需求量

根据 Luce 于 1959 年提出的 Logit 模型，可以得到在 t 时刻从区域 i 到 j 通过软件打车的概率 p_{it} ：

$$p_{it} = \frac{S_{ijt}^{e2}}{S_{ijt}^{e1} + S_{ijt}^{e2}} = \frac{\exp(-\beta_1 M_{ijt}^{e2})}{\exp(-\beta_1 M_{ij}^{e1}) + \exp(-\beta_1 M_{ijt}^{e2})}, \quad (6)$$

其中 β_1 表示从乘客个体角度而言，乘客需求与出租车服务之间的不确定程度，该参数与乘客所在位置、乘客对出租车服务的需求程度等因素有关，具有主观性。根据 p_{it} ，可以用乘客出行全程成本来表示乘客对出租车的需求量，结果如下：

对 $\forall (i, j) \in \Omega$ ， t 时刻 (i, j) 间不使用和使用软件的乘客对出租车的需求总量分别为

$$S_{ijt}^{e1} = R_{ijt} \frac{\exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{it}^{e1} + f_2 T_{ijt})]}{\exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{it}^{e1} + f_2 T_{ijt})] + \exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{ijt}^{e2} + f_2 T_{ijt} + f_1 l_t - f_2 g_{ij})]}, \quad (7)$$

$$S_{ijt}^{e2} = R_{ijt} \frac{\exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{ijt}^{e2} + f_2 T_{ijt} + f_1 l_t - f_2 g_{ij})]}{\exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{it}^{e1} + f_2 T_{ijt})] + \exp[-\beta_1 (P_{ij} + f_1 I_{ijt}^{e2} + f_2 T_{ijt} + f_1 l_t - f_2 g_{ij})]}. \quad (8)$$

(iii) 运营中出租车总量

现考虑不同时段系统内的出租车服务，设 t 时段系统内共有运营中出租车 N_t 辆。若 L_{ijt}^a 表示每时段 (i, j) 间载客出租车车流量 (辆/小时)，则载客出租车总量可表示为 $\sum_{(i,j) \in \Omega} L_{ijt}^a T_{ijt}$ (辆)。考虑到空载出租车车流量与空载出租车等待时间与空载总时间的关系，我们可以得到空载出租车总量：

$$\text{空载出租车总量} = \sum_{i \in I, k \in J} L_{kit}^{b1} (T_{kit} + h_{it}^{b1}) + \sum_{k \in J, (i,j) \in \Omega} L_{kijt}^{b2} (T_{ki} + h_{it}^{b1} + l_t) \quad (\text{辆}). \quad (9)$$

考虑到出租车的空载时间包含两方面：(a) 出租车不通过软件寻找下一个乘客的时间，(b) 出租车接单后从前一个乘客的终点到下一个乘客的起点的行驶时间，因此，基于出租车的空载时间和载客时间之和应与出租车服务总时间相等，则在

t 时刻有：

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} L_{ijt}^a T_{ijt} + \sum_{i \in I, j \in J} L_{kit}^{b1} (T_{kit} + h_{it}^{b1}) + \sum_{k \in J, (i,j) \in \Omega} L_{kijt}^{b2} (T_{kit} + h_{ijt}^{b2} + l_t) = N_t. \quad (10)$$

即空载出租车总量与载客出租车总量之和等于系统内运行出租车的数量。

(iv) 空载指数

我们引入“空载指数”来衡量出租车的空载时间、空载率等相关指标。在乘客下车后，出租车变为空载状态，其可以根据空载时间和净利润来决定如何选择下一个乘客以及其地点以减少出租车本身的空载指数。令

$$U_{kit}^{b1} = -\bar{P}_{it} + \pi_t (h_{it}^{b1} + T_{ki} + \bar{v}_{it}) - \bar{y}_{it}, \quad \forall k \in J, i \in I, \quad (11)$$

$$U_{kit}^{b2} = -\bar{P}_{it} + \pi_t (h_{ijt}^{b2} + T_{ki} + T_{ij} + l_t) - y_{jt}, \quad \forall k \in J, (i,j) \in \Omega, \quad (12)$$

其中， U_{kit}^{b1} 表示从区域 k 到 i 不使用软件寻找乘客的空载出租车的空载指数，用 t 时刻不使用软件情况下的运营成本与 t 时刻区域 i 接走后区域 j 对乘客选择目的地的吸引力、 t 时刻的单位时间运营成本的差来表示，这里 t 时刻的单位时间运营成本为

$$\bar{P}_{it} = \sum_{j, (i,j) \in \Omega} P_{ijt} S_{ijt}^{el} / \sum_{j, (i,j) \in \Omega} S_{ijt}^{el}, \quad (13)$$

t 时刻区域 i 接走后区域 j 对乘客选择目的地的吸引力为

$$\bar{y}_{it} = \sum_{j, (i,j) \in \Omega} y_{jt} S_{ijt}^{el} / \sum_{j, (i,j) \in \Omega} S_{ijt}^{el}; \quad (14)$$

U_{kit}^{b2} 表示使用软件从区域 k 到 i 接目的地为区域 j 的乘客的空载出租车的空载指数，用 t 时刻使用软件情况下的运营成本与 t 时刻的单位时间运营成本、 t 时刻在出租车选单时区域 j 对其的吸引力的差来表示，这里 t 时刻的单位时间运营成本如式(12)， t 时刻在出租车选单时区域 j 对其的吸引力 y_{jt} 为 t 的函数，可表示为 $y_{jt}(t) = m_3 t$ ， m_3 为比例系数；另外， π_t 表示出租车在 t 时刻的单位时间运营成本，

$$\bar{v}_{it} = \sum_{j, (i,j) \in \Omega} T_{ijt} S_{ijt}^{el} / \sum_{j, (i,j) \in \Omega} S_{ijt}^{el} \quad (15)$$

表示使用软件的出租车在区域 i 内的平均收入。

显然，为使供需平衡，交通系统内的出租车空载指数越小越好，故得目标函数2如下：

min

$$\sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} L_{kijt}^{b2} [-P_{ijt} + \pi_t(T_{kit} + T_{ijt} + l_t) - y_{jt}] + \sum_{(i,j) \in \Omega, i \in I} L_{kit}^{b1} [-\bar{P}_{it} + \pi_t(T_{kit} + \bar{v}_{it}) - \bar{y}_{it}]. \quad (16)$$

根据上述空载指数函数，空载出租车选择寻找下一个乘客的方法和地点可在图 7 中清楚的表示。

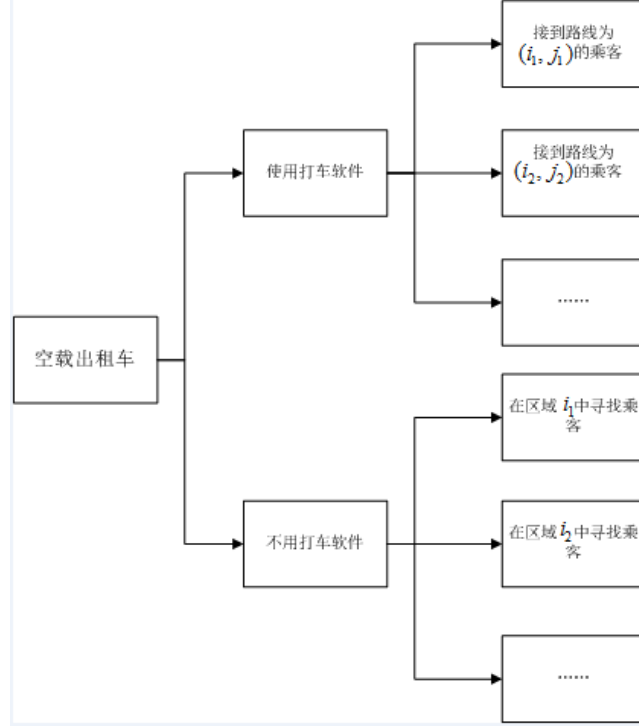


图 8 出租车选择乘客模式图

我们可以发现，寻找下一个乘客的地点与是否使用打车软件有直接关系。另外，鉴于出租车司机不同的性格等，出租车的预期空载指数也不相同，我们因此得到如下假设：未载客的出租车司机的选择是遵循一种层次逻辑模型的，在这种模型中，司机如何选择下一个顾客的决定是在上一层选择中做出的，而选择在何地的顾客这一决定则是在下一层选择中做出的（选择优化打车软件的出租车司机在下一层选择中有了更多的机会来确定他们下一段行程的目的地）。

（v）出发寻找乘客的空载出租车总数

设 \tilde{L}_{kt}^{b1} 为模式 1 中从 k 区域离开准备搜寻下一位客户的空载出租车总数， \tilde{L}_{kt}^{b2} 为模式 2 中从 k 区域离开准备搜寻下一位客户的空载出租车总数。根据定义可得到下列等式：

$$\tilde{L}_{kt}^{b1} = \sum_{i \in I} L_{kit}^{b1}, \forall k \in J, \quad (17)$$

$$\tilde{L}_{kt}^{b2} = \sum_{(i,j) \in \Omega} L_{kijt}^{b2}, \forall k \in J, \quad (18)$$

$$\sum_{i, (i,k) \in \Omega} L_{ijt}^a = \tilde{L}_{kt}^{b1} + \tilde{L}_{kt}^{b2}, \forall k \in J, \quad (19)$$

其中，式（17）（18）直接分别来自于 \tilde{L}_{kt}^{b1} 、 \tilde{L}_{kt}^{b2} 的定义，式（19）表示在给定的一个小时中，在某一地点卸客的出租车数量应该等于准备从该地离开的空载出租车的数量。

根据以上符号定义，首先设模式 2 中，在 t 时刻一个空载出租车司机准备通过软件从区域 k 离开去寻找下一位乘客的概率 p_{2t} 为：

$$p_{2t} = \frac{\tilde{L}_{kt}^{b2}}{\tilde{L}_{kt}^{b1} + \tilde{L}_{kt}^{b2}} = \frac{\exp(-\beta_2 H_{kt}^{b2})}{\exp(-\beta_2 H_{kt}^{b2}) + \exp(-\beta_2 H_{kt}^{b1})}, \forall k \in J; \quad (20)$$

其次，若现已知从区域 k 出发的空载出租车决定不使用软件来寻找下一个乘客，则其选择区域 i 作为寻找乘客的区域的概率如下：

$$\frac{L_{kit}^{b1}}{\tilde{L}_{kt}^{b1}} = \frac{\exp(-\beta_3 U_{kit}^{b1})}{\sum_{i \in I} \exp(-\beta_3 U_{kit}^{b1})}, \forall i \in I; \quad (21)$$

再次，若现已知从区域 k 出发的空载出租车已经决定通过软件来寻找下一个乘客，则其驶往区域 i 且在区域 i 等待路线为 (i, j) 的乘客的概率如下：

$$\frac{L_{kijt}^{b2}}{\tilde{L}_{kt}^{b2}} = \frac{\exp(-\beta_4 U_{kijt}^{b2})}{\sum_{(i,j) \in \Omega} \exp(-\beta_4 U_{kijt}^{b2})}, \forall (i, j) \in \Omega, \quad (22)$$

其中， β_2 为总离散系数， β_3 和 β_4 分别为不使用和使用软件离散系数；另外，

$$H_{kt}^{b1} = -\left(\frac{1}{\beta_3}\right) \ln \sum_i \exp(-\beta_3 U_{kit}^{b1}), \quad (23)$$

$$H_{kt}^{b2} = -\left(\frac{1}{\beta_4}\right) \ln \sum_{(i,j) \in \Omega} \exp(-\beta_4 U_{kijt}^{b2}). \quad (24)$$

在 β_2 、 β_3 和 β_4 的选取中，需满足 $\beta_3 \gg \beta_2$ 且 $\beta_4 \gg \beta_2$ ^[1]。在静态平衡状态中，出租车流动应当保证各个区域内的乘客都能够方便地打到车，即：无论乘客打车方式

如何，每一位乘客经过一段时间的等待后都应当如愿以偿地打到车，因此我们得到：

$$\sum_{k \in J} L_{kit}^{b1} = \sum_{j, (i, j) \in \Omega} S_{ijt}^{e1}, \forall i \in I; \quad (25)$$

$$\sum_{k \in J} L_{kijt}^{b2} = S_{ijt}^{e2}, \forall (i, j) \in \Omega. \quad (26)$$

(vi) 乘客等车时间

首先考虑不使用打车软件的乘客。本文中，对于不使用软件的出租车和乘客，我们引入基于 Cobb-Douglas 生产函数^[2]，则在区域 i 内不使用软件的乘客等车时间为：

$$I_{it}^{e1} = (A_i)^{-1/\alpha_1} \left(\sum_{j, (i, j) \in \Omega} S_{ijt}^{e1} \right)^{(1-\alpha_1)/\alpha_1} (h_{it}^{b1} \sum_{k \in J} L_{kit}^{b1})^{\alpha_1/\alpha_2}, \forall i \in I, \quad (27)$$

其中 α_1 和 α_2 分别为等车乘客与空车的相遇比例弹性系数，一般而言， $0 < \alpha_1 \leq 1$ ， $0 < \alpha_2 \leq 1$ ， A_i 是区域的属性参数，与该区域的面积成反比； $\sum_{j, (i, j) \in \Omega} S_{ijt}^{e1}$ 表示该区域内等车的乘客； $h_{it}^{b1} \sum_{k \in J} L_{kit}^{b1}$ 表示不使用软件的出租车花在寻找乘客的总时间。特别地，若令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，则

$$I_{it}^{e1} = \frac{1}{A_{it} h_{it}^{b1} \sum_{k \in J} L_{kit}^{b1}}. \quad (28)$$

这种顾客等时的近似分布，理论上被 [3-4] 通过预期顾客等时来计算，并被[5-8]间接引用。

其次考虑使用打车软件的乘客。直观来看，在模式 2 中，乘客与出租车双方都不需要花太长时间便可以打到车或找到乘客，类似于式 (25)，从区域 i 到 j 的乘客通过软件所需要的等待时间为

$$I_{it}^{e2} = (\tilde{A})^{-1/\alpha_1} (S_{ijt}^{e2})^{(1-\alpha_1)/\alpha_1} (h_{it}^{b2} \sum_{k \in J} L_{kijt}^{b2})^{\alpha_2/\alpha_1}, \forall (i, j) \in \Omega, \quad (29)$$

其中 \tilde{A} 为反应软件强可行性的常系数。

(vii) 空车数量

类似于空载指数，交通系统内的空车数量也是衡量供需是否平衡的重要指标：空车数量越少，说明出租车上客率越高，即乘客对出租车服务的需求得到了越大程度的满足，故可得目标函数 3 如下：

min

$$\sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_4} \right) \tilde{L}_{kt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b2} - 1) + \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_3} \right) \tilde{L}_{kt}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b1} - 1) + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_4} \tilde{L}_{kijt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kijt}^{b2} - 1) \\ + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_3} \tilde{L}_{kijt}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kijt}^{b1} - 1); \quad (30)$$

综上所述，得到多目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_4} \right) \tilde{L}_{kt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b2} - 1) + \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_3} \right) \tilde{L}_{kt}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b1} - 1) \\ & + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_4} \tilde{L}_{kijt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kijt}^{b2} - 1) + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_3} \tilde{L}_{kijt}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kijt}^{b1} - 1); \\ \min \quad & \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} L_{kijt}^{b2} [-P_{ijt} + \pi_t(T_{kit} + T_{ijt} + l_t) - y_{jt}] + \sum_{(i,j) \in \Omega, i \in I} L_{kit}^{b1} [-\bar{P}_{it} + \pi_t(T_{kit} + \bar{v}_{it}) - \bar{y}_{it}]; \\ \min \quad & \sum_{i \in I} h_{it}^{e1} + \sum_{(i,j) \in \Omega} (h_{ijt}^{e2} - f_2 g_{ij}); \\ s.t. \quad & \begin{cases} (2)-(4); (6)-(15); (17)-(29); \\ L_{ijt}^a = S_{ijt}^{e1} + S_{ijt}^{e2}; \\ \tilde{L}_{kt}^{b2} + \tilde{L}_{kt}^{b1} = \sum_{i, (k,i) \in \Omega} (S_{ikt}^{e1} + S_{ikt}^{e2}); \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $L_{ijt}^a = S_{ijt}^{e1} + S_{ijt}^{e2}$ 表示 t 时刻从区域 i 到 j 已载客出租车数量等于系统内所有乘客对出租车的总需求量，此时，供需平衡； $\tilde{L}_{kt}^{b2} + \tilde{L}_{kt}^{b1} = \sum_{i, (k,i) \in \Omega} (S_{ikt}^{e1} + S_{ikt}^{e2})$ 表示 t 时刻在区域 k 内所有寻找乘客的空载出租车的总数量等于有需要从区域 i 到 k 的所有乘客的数量，此时，供需平衡。

目前，求解多目标规划问题有多种方法，如线性加权法、理想点法、极大极小法、目标规划法^[9-11]等，本文考虑基于连续区间有序加权几何平均（COWGA）算子的权重计算模型，使多目标规划问题转化为传统的单目标规划问题。

（2）基于 COWGA 算子的权重计算模型

COWGA 算子基本概念：

定义 1 称 a 为一个区间函数，若 $a = [a^L, a^U] = \{x | a^L \leq x \leq a^U\}$ 。特别地，若 $a^L = a^U$ ，则 a 退化为一个实数；假设区间数 $a = [a^-, a^+]$ ， $b = [b^-, b^+]$ （实数可以看成是两端相同的退化区），则区间数的运算及区间数序关系如下：

$$\textcircled{1} \quad a+b=[a^-+b^-,a^++b^+];$$

$$\textcircled{2} \quad ab=[a^-b^-,a^+b^+], \text{ 特别地 } va=[va^-,va^+], v \in R^+;$$

$$\textcircled{3} \quad a/b=[a^-/b^-,a^+/b^+], \text{ 特别地 } 1/b=[1/b^-,1/b^+];$$

为简化, 现令 $N=\{1,2,\dots,n\}$, $\Omega^+=\{a \mid a=[a^L, a^U], a^U \geq a^L \geq 0\}$ 。

定义 2 若矩阵 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$, $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$, 则称 \tilde{A} 为区间数判断矩阵。

定义 3 若区间数判断矩阵 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ 满足 $a_{ij}^L \cdot a_{ji}^U = a_{ij}^U \cdot a_{ji}^L = 1$, $i, j \in N$. 若 $a_{ii}^U = a_{ii}^L = 1$, $i \in N$, 则称 \tilde{A} 为区间数互反判断矩阵^[12]。

定义 4: 设 $F:\Omega^+ \rightarrow R^+$, 若

$$F_Q(\tilde{a}) = F_Q([a^L, a^U]) = a^U \cdot \left(\frac{a^L}{a^U} \right)^{\int_0^1 (dQ(y)/dy) y dy}, \quad (31)$$

则称 F 为连续区间有序加权几何平均 (C-OWGA) 算子^[13-14], 其中 Q 称为基本单调区间函数 (BUM), 且满足: (1) $Q(0)=0, Q(1)=1$ (2) 若 $x > y$, 则 $Q(x) \geq Q(y)$ 。

定义 5: 称 λ 为决策的态度参数, 若

$$F([a_{ij}, b_{ij}]) = a_{ij}^{(1-\lambda)} b_{ij}^{\lambda}. \quad (32)$$

定义 6: 设 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ 为区间数互反判断矩阵, 若

$$F_Q(\tilde{a}_{ij}) = F_Q([a_{ij}^L, a_{ij}^U]) = a_{ij}^U \cdot \left(\frac{a_{ij}^L}{a_{ij}^U} \right)^{\int_0^1 (dQ(y)/dy) y dy}, \quad (33)$$

$$F_Q(\tilde{a}_{ji}) = \frac{1}{F_Q(\tilde{a}_{ij})}, i, j \in N, \quad (34)$$

则称 $F_Q(\tilde{A})=(F_Q(\tilde{a}_{ij}))_{n \times n}$ 为偏好度 \tilde{a}_{ij} 的期望值。

这样即可得到基于 COWGA 算子的权重计算模型如下:

基于 COWGA 算子的权重计算模型:

Step 1 设各目标权重为 η_i , $i=1,2,3$, 利用模糊层次分析法^[15], 针对上述 3 个目

标函数, 构造区间互反判断矩阵 $P=(p_{ij})_{3 \times 3}$:

Step 2 由连续区间有序加权几何平均（COWGA）算子集成专家矩阵 P ，得到相应矩阵 \tilde{P} ，其中：

$$F([a_{ij}, b_{ij}]) = a_{ij}^{(1-\lambda)} b_{ij}^{\lambda}, \quad (35)$$

其中 λ 为决策的态度参数，且 $\lambda \in [0, 1]$ ；

Step 3 由和积法^[13]求得各目标对应的权重 η_i ， $i = 1, 2, 3$ ；

Step 4 将权重分别赋予目标，得到单目标规划的目标函数如下：

min

$$\begin{aligned} & \eta_1 \left[\sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_4} \right) \tilde{L}_{kt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b2} - 1) + \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_3} \right) \tilde{L}_{kt}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kt}^{b1} - 1) + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_4} \tilde{L}_{kijt}^{b2} (\ln \tilde{L}_{kijt}^{b2} - 1) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} \frac{1}{\beta_3} \tilde{L}_{kit}^{b1} (\ln \tilde{L}_{kit}^{b1} - 1) \right] \\ & + \eta_2 \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega, k \in J} L_{kijt}^{b2} [-P_{ijt} + \pi_t(T_{kit} + T_{ijt} + l_t) - y_{jt}] + \sum_{(i,j) \in \Omega, i \in I} L_{kit}^{b1} [-\bar{P}_{it} + \pi_t(T_{kit} + \bar{v}_{it}) - \bar{y}_{it}] \right\} \\ & + \eta_3 \left\{ \sum_{i \in I} h_{it}^{e1} + \sum_{(i,j) \in \Omega} (h_{ijt}^{e2} - f_2 g_{ij}) \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

使其约束条件为：

$$s.t. \begin{cases} (2)-(4); (6)-(15); (17)-(29); \\ L_{ijt}^a = S_{ijt}^{e1} + S_{ijt}^{e2}; \\ \tilde{L}_{kt}^{b2} + \tilde{L}_{kt}^{b1} = \sum_{i, (k,i) \in \Omega} (S_{kit}^{e1} + S_{kit}^{e2}); \end{cases} \quad (37)$$

5.1.5 模型求解与结果分析

对于多目标规划模型，通过 Matlab 软件，对模型进行编程求解，程序见附录。

对于权重计算模型，乘客基于主观判断给出专家区间数判断矩阵，其目的在于衡量上模型各个目标函数的权重。现将所得专家区间数判断矩阵集结为如下区间互反判断矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} [1, 1] & [2, 3] & [\frac{4}{3}, 2] \\ [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 1] & [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}] \\ [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] & [\frac{4}{5}, 2] & [1, 1] \end{pmatrix},$$

取 $\lambda = 2/3$ ，根据和积法，得到

$$\eta_1 = 0.4783, \quad \eta_2 = 0.2102, \quad \eta_3 = 0.3115$$

可以看出目标函数 1 权重最大，3 次之，2 最小；换句话说，对于乘客而言，出行成本最重要，对空车数量的要求次之，对出租车空载指数的关心最小。

通过计算，我们得到不使用及使用打车软件的情况下，乘客等待出租车的时间、出租车等待乘客的时间以及出租车平均空载比率。我们将所得结果绘制成图，并对不同时空出租车资源“供求匹配”程度进行详细分析。

说明：下列每子图中，有五条不同颜色的折线，一种颜色的折线代表一类地区，其中，红、绿、蓝三条折线代表主城区（杭州市政府附近），紫色折线代表离主城区较近的周边郊区，黑色折线代表离主城区较远的郊区。根据实际情况，我们粗略的认为：乘客平均等待时间越长，出租车空车时间越长，出租车空载率越高，供需匹配程度越低；反之，乘客平均等待时间越短，出租车空载时间越短，出租车空载率越低，供需匹配程度就越高。

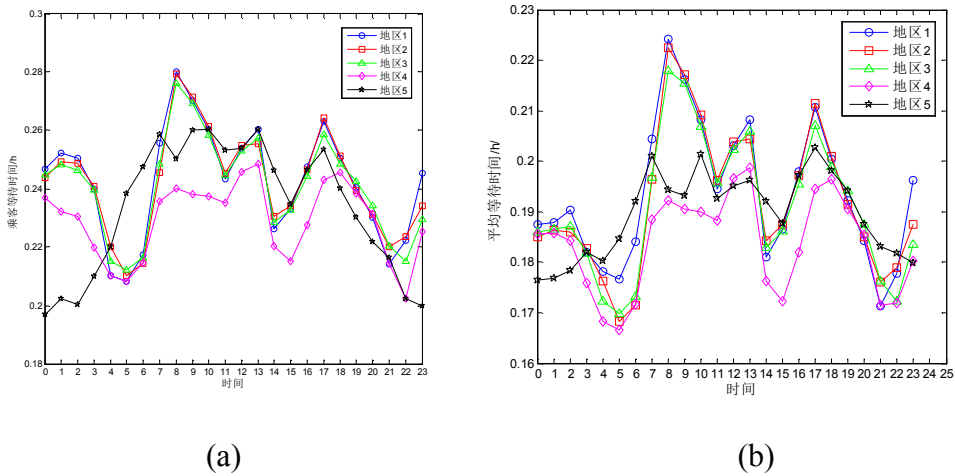


图 9 不使用和使用打车软件乘客平均等待时间

由图 9 (a)(b)易见，郊区乘客平均等待时间较城区乘客平均等待时间变化较小；使用打车软件乘客平均等待时间短于不使用打车软件乘客平均等待时间；无论是郊区还是城区，也无论是否使用打车软件，乘客平均等待时间都在 8 时至 9 时，12 时至 13 时，17 时至 18 时达到高峰，并且在 8 时至 9 时达到最大值。这几个时间段为上下班高峰时期，乘客对出租车需求量较大，且道路车辆较拥挤通行不畅，导致了“人打不到车”的情况，并且在乘客等待时间高峰时段，城区的

乘客平均等待时间是明显大于郊区乘客等待时间的，这说明上下班高峰时期出租车资源地区分配情况有待改善；0 时至 5 时，流动出租车资源稀少，因此城区及郊区的乘客平均等待时间均较长。

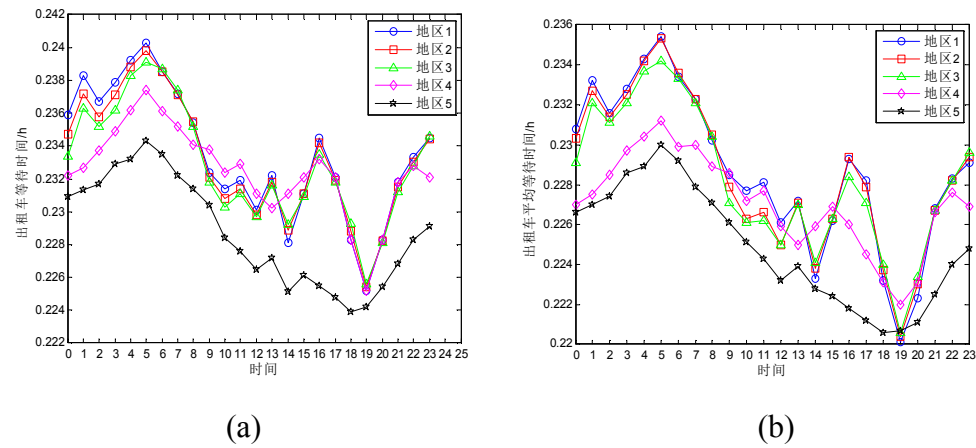


图 10 不使用和使用打车软件出租车等待乘客的平均时间

由图 10(a)(b)易见，5 条折线增减状况大体与乘客平均等待时长变化一致，即“车载不到人”与“人等不到车”的状况几乎同时发生；使用打车软件出租车平均空载时间短于不使用打车软件出租车平均空载时间；郊区出租车平均空载时间较城区出租车平均空载时间变化较小，且城区出租车平均空载时间长于郊区出租车平均空载时间。不同的是，从一天开始的 0 时至结束是的 24 时，出租车平均等待时长总体呈减少趋势，开始高于乘客平均等待时长，但随着时间推移慢慢减少并与乘客平均等待时间持平，这说明出租车供需在一天之内逐步趋于平衡。

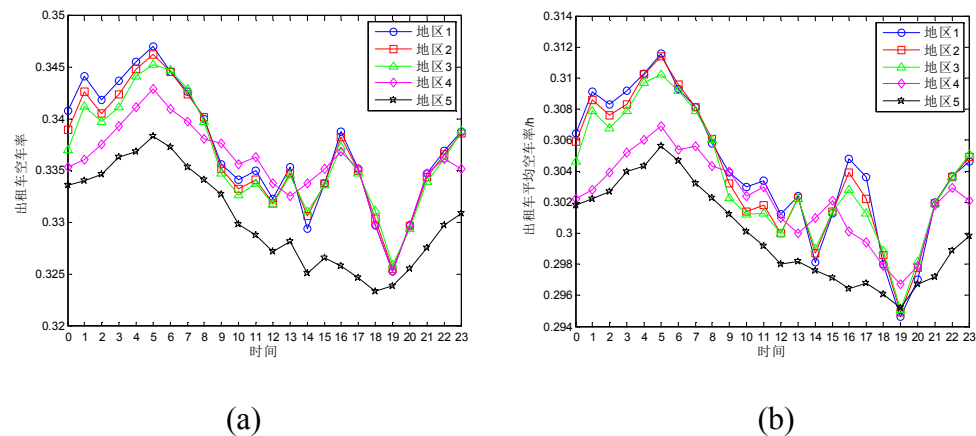


图 11 不使用和使用打车软件出租车平均空载比率

由图 11 (a) (b)可以看出，5 条折线增减状况大体与乘客平均等待时长变化也大体一致；使用打车软件出租车平均空载比率短于不使用打车软件出租车平均空

载比率；城区出租车平均空载比率大于郊区出租车平均空载比率。

综合所述，我们得到下结论：

（1）上下班高峰期杭州市出租车供需匹配程度较低（供不应求），需要制定推行相应政策，对这些时段出租车流动情况进行重点治理。

（2）杭州市城区出租车供需匹配程度低于郊区，需要通过一些激励方法改善城区及其周边地区的出租车分布情况。

（3）出租车空载期内，浪费大量燃油资源，需要根据各地区乘客分布情况，调整空载出租车分布情况，提高供需匹配程度，进而减少对燃油资源的消耗。

5.2 问题二的分析及求解

5.2.1 基本情况分析

近几年，国内城市规模的扩张迅速，人口变化呈现爆发式增长，“打车难”问题已不再是一线城市的难题。由 2014 年《公共服务蓝皮书》^[16]数据，有 35% 以上的乘客打车等候时间超过了 20 分钟，70% 左右的乘客打车等候时间超过了 10 分钟。导致这种现象的原因除了出租车供应数量无法满足市场需求外，出租车的供应信息与乘客的需求信息无法达成交互也是重要原因之一。然而上下班高峰打不到车，出租司机常常以“交班”、“不顺路”等理由拒载，类似的情况更是加剧了由出租车与乘客信息不对称所造成的打车难情况。

随着科技发展和互联网的推广，现在市场上存在多家打车软件，比如滴滴打车，快的打车。这些是基于移动互联网向司机与乘客提供可直接交互的移动平台，短语音、腾讯地图、微信支付再配合可激励司机的抢单功能，有效避免了出租“空车”和乘客“等车”的现象，同时“点评司机”功能也将更多的权益赋予乘客，同时也提高了整个出租行业的服务质量。据滴滴数据显示，滴滴打车目前已经覆盖 178 个城市，日均订单最高达 522 万单，是传统叫车方式的 300 多倍。截至 2014 年 12 月，中国打车软件累计账户规模达 1.72 亿，其中快的打车市场份额为 56.5%，滴滴打车为 43.3%，两家打车软件也成为国内主要的打车软件。

为积累用户，两家公司掀起补贴大战。双方均成功地在短时间内积累了大量用户，然而在这批用户中，存在着相当比例的因高额现金补贴而使用打车软件的用户。在补贴额度下调后，这部分用户存在一定的流失。为避免因为恶性竞争带

来的不必要成本，2015 年 2 月 14 日，滴滴、快的两家打车软件公司实现战略合并。但是，合并后新公司的总裁柳青表示，未来两个品牌不会完全整合，但是双方的用户数据会并表；换句话说，尽管两家合并了，但仍需要大量补贴，故补贴方式、力度在未来不会发生大幅度的改变。

5.2.2 补贴政策分类

本文中，我们考虑滴滴、快的两家公司合并前的一些具有代表性的补贴政策，基于问题一建立的模型，求出并画出对出租车、乘客分别补贴时，出租车空载时间、乘客等车时间、出租车空载率与补贴额度的关系。

经过调查我们发现，打车软件对乘客的补贴方式主要有“返现”及“车费减免”两种，对出租车的补贴方式主要有“接单奖励”和“返现”两种。考虑到补贴金额的不同，我们对所有的补贴额度进行分析，选取具有代表性的补贴额度与补贴方式的组合，观察相应指标随补贴方案的变化情况，其中，对乘客、出租车的补贴方案具体细节分别见表 1 和表 2：

表 1 对乘客补贴方案

方案序号	补贴来源	补贴时间(2014 年)	补贴方式	补贴额度（元）
1	滴滴打车	3 月 23 日	返现	3-5
2	滴滴打车	1 月 10 日	车费减免	10
3	滴滴打车	3 月 7 日	车费减免	6-15
4	滴滴打车	2 月 17 日	返现	10-15
5	滴滴打车	2 月 18 日	返现	12-20

表 2 对出租车补贴方案

方案序号	补贴来源	补贴时间(2014 年)	补贴方式	补贴额度（元/单）
1	滴滴打车	7 月 9 日	接单奖励	2
2	滴滴打车	2 月 17 日	接单奖励	5.11
3	快的打车	1 月 10 日	返现	10

5.2.3 补贴前后变化情况结果及分析

基于以上补贴方案，首先，我们考虑到乘客与出租车司机对等待时间均具有

较强的感知能力，故等待时间这一指标具有较强的直观性，因此，根据问题一中的模型，我们最先比较在仅对乘客补贴的情况下，出租车空载时间、乘客等车时间随补贴方案的变化，变化情况如下图：

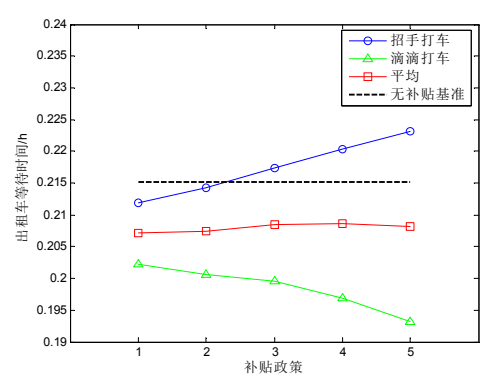


图 12 对乘客补贴时出租车空载时间变化

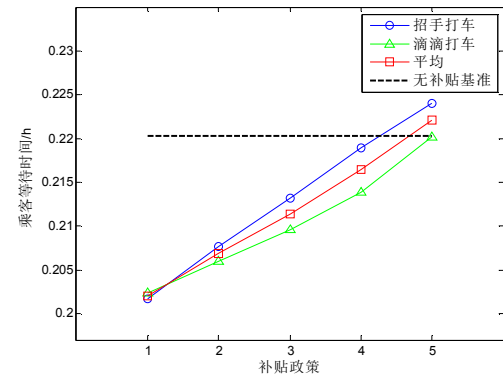


图 13 对乘客补贴时乘客等车时间变化

由图 12，蓝线表示不使用打车软件出租车空载时间随补贴政策的变化，显然，随着补贴额度的增大，不使用软件的出租车的空载时间明显增加，这说明此时不使用软件能寻找到新乘客的难度明显增大，与事实相符；绿线表示使用打车软件出租车空载时间随补贴政策的变化，显然，随着补贴额度的增大，使用软件的出租车的空载时间明显减少，甚至减少一倍，这说明使用打车软件在一定程度上，弥补了乘客与出租车之间的信息不对称，使得出租车寻找新乘客的难度大大减小；黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有出租车平均空载时间；红线表示对乘客补贴后，所有出租车平均空载时间，可以看出，在不同额度的补贴政策下，出租车平均空载时间差别并不明显，然而同时，相较于无补贴的情况，出租车平均空载时间明显减小。这就说明，对乘客补贴有利于减小出租车的空载时间，即对缓解打车难有帮助。

图 13 中，蓝线表示不使用打车软件乘客等车时间随补贴政策的变化，显然，随着补贴额度的增大，不使用打车软件乘客等车时间明显增加，也就是说，不使用软件的乘客打车难度明显增大，与事实相符；绿线表示使用打车软件乘客等车时间随补贴政策的变化，由图可知，随着补贴额度的增大，使用软件的乘客的等待时间同样明显增加，这说明随着出租车需求量的增加，打车难度越来越大；黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有乘客的等车时间；红线表示对乘客补贴后，所有乘客的等车时间，可以看出，随着补贴额度的增加，乘客等车时间明显增大；另外，与基准线进行比较，在补贴额度较小的情况下，乘客等车时

间明显小于无干扰值，此时打车难问题并不明显，然而，随着补贴额度的增大，乘客等车时间增大，表明打车难问题越来越严重。总而言之，对乘客过高的补贴额度并不能缓解打车难问题，反而会使打车难问题严重，即对乘客补贴越高，打车越难。根据数据知，对乘客的补贴不应超过方案 4 的额度，即 10-15 元。

其次，我们考虑仅对乘客补贴的情况下，出租车空载时间、乘客等车时间随补贴方案的变化，变化情况如下图：

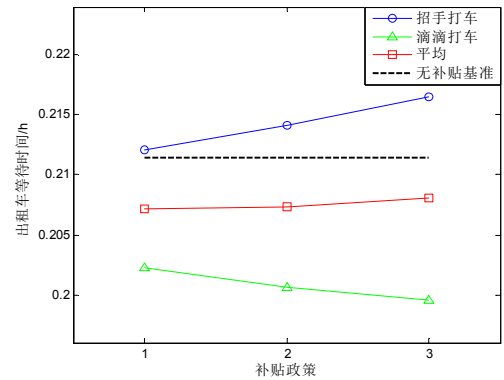


图 14 对出租车补贴时出租车空载时间变化

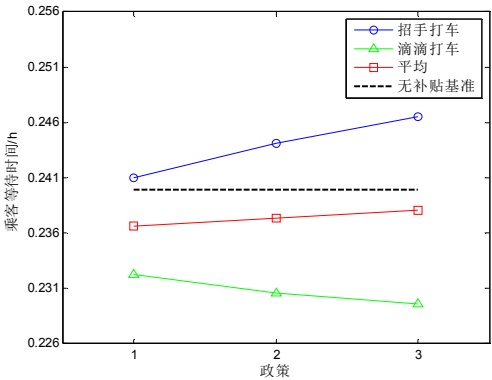


图 15 对出租车补贴时乘客等车时间变化

图 14 中，蓝线表示仅对出租车补贴时，不使用打车软件出租车空载时间随补贴政策的变化，可以看出，随着补贴额度的增大，不使用软件的出租车的空载时间有所增加，这是因为补贴政策促使出租车使用打车软件，而不使用打车软件的出租车在与乘客的信息对接上有漏洞，故寻找到新乘客的难度明显增大；绿线表示仅对出租车补贴时，使用打车软件出租车空载时间随补贴政策的变化。随着补贴额度的增大，使用软件的出租车的空载时间有所减少，这说明使用打车软件的出租车更容易通过软件接到新乘客，间接提高了出租车服务的供应量，并且寻找新乘客的难度有所减小；黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有出租车平均空载时间；红线表示对出租车补贴后，所有出租车平均空载时间。由图可以看出，在不同额度的补贴政策下，出租车平均空载时间差别很小，然而同时，相较于无补贴的情况，有补贴情况的出租车平均空载时间更小。这就说明，对出租车补贴有利于减小出租车的空载时间，即对缓解打车难有帮助。

图 15 中，蓝线表示对出租车补贴时，不使用打车软件乘客等车时间随补贴政策的变化。显然，随着补贴额度的增大，不使用打车软件乘客等车时间明显增加，也就是说，不使用软件的乘客打车难度明显增大，这是因为对出租车的补贴促使出租车通过打车软件选择乘客，换句话说，面对不使用打车软件的乘客的出

租车总量减小，故对不使用打车软件的乘客而言，打车难度变大；绿线表示对出租车补贴时，使用打车软件乘客等车时间随补贴政策的变化。由图可知，随着补贴额度的增大，使用软件的乘客的等待时间有所减小，这说明打车软件促进了出租车与乘客的信息互达，缓解了打车难问题；同时，出租车补贴促使更多的出租车选择通过软件来寻找乘客，故面对使用软件的乘客的出租车供应量增大，从另一方面缓解了打车难问题；补贴促使出租车选择随着出租车需求量的增加，打车难度越来越大；黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有乘客的等车时间；红线表示对出租车补贴后，所有乘客的等车时间。由图可知，随着补贴额度的增加，乘客等车时间明显增大；另外，与基准线进行比较，在补贴额度较小的情况下，乘客等车时间仅出现了较小上升，但仍小于基准线值。因此，对出租车进行补贴有助于缓解打车难问题，然而并不是补贴越大越好，即随着对出租车补贴额度的增大，打车难问题的缓解程度越来越小。

最后，考虑到人对空载率变化不能直接感知，而需经过数据的统计和整理之后才能得出，故观察在分别对乘客、出租车进行补贴的情况下，出租车空载率随补贴方案的变化，其情况如下图：

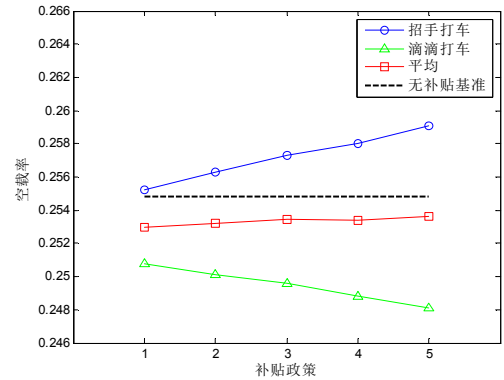


图 16 对乘客补贴时出租车空载比变化

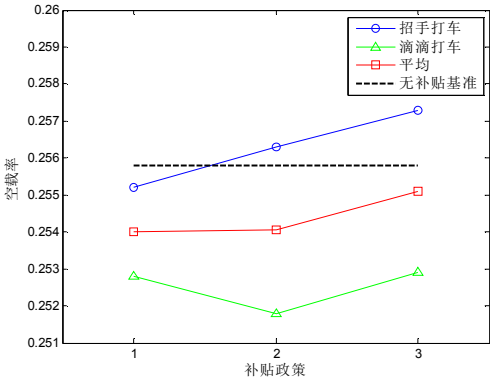


图 17 对出租车补贴时乘客空载比变化

图 16 中，黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有出租车的空载比；红线表示对乘客进行补贴时，所有出租车的平均空载比。在有补贴的情况下，空载比有所减小，即空车数量减小，这可以体现在有更多的出租车去服务乘客，也就是说乘客对出租车的服务需求得到更大程度的满足；蓝线表示对乘客进行补贴时，不使用软件出租车的空载比。随补贴额度增大，不使用软件的出租车的空载率明显增大，即越来越少的不使用软件的出租车在公路系统能服务乘客；与基准线相比，不论补贴额度为多少，空载率总是比基准线值大；绿线表示对乘客进

行补贴时，使用软件出租车的空载比。随补贴额度增大，使用软件的出租车的空载率明显减小，也就是说有更多的使用软件的出租车服务乘客。综上，可以得出，对乘客进行补贴有利于缓解打车难问题。

图 17 中，黑色虚线作为基准线，代表没有补贴的情况下所有出租车的空载比；红线表示对出租车进行补贴时，所有出租车的平均空载比。由图可见，平均空载比先减后增，由曲线变化趋势可以看出，方案 2 所对应的补贴额度（接单奖励 5.11 元）为所选额度中最优的；蓝线表示对出租车进行补贴时，不使用软件出租车的空载比。由图可知，在补贴额度为介于方案 1 与 2 额度之间的某值时，不使用软件出租车的空载比从小于基准线值变为大于基准线值，并且一直随补贴额度的增大而增大；绿线表示对出租车进行补贴时，使用软件出租车的空载比。由图可知，随着补贴额度的增大，使用软件出租车的空载比先减后增，即使用软件的空载出租车数量先减后增，换句话说，可以满足使用软件的乘客需求的出租车数量先增后减。于是，方案 2 所对应的补贴额度对使用软件出租车的空载比为最优。综上，对出租车进行补贴，有助于缓解打车难问题，然而补贴额度最在最优值，即不能过大也不能过小。

5.3 问题三的分析及求解

5.3.1 基本分析

在问题二中，我们已经分析了在不同地区，出租车及乘客补贴额度不同时，出租车资源的供需匹配程度（用乘客等待时间、出租车等待时间、出租车空载率等指标来衡量）的变化趋势。

考虑到人——车相对数量关系，我们将实际出现的情况分成 4 种：人多车多、人多车少、人少车多、人少车少。（1）人多车多时，乘客打车和司机寻找乘客都比较容易，双方付出的代价均很小，故此时不给予出租车补贴；（2）人多车少时，乘客等车时间均较长，容易出现供不应求的状况，故应当给予出租车一定补贴，以吸引他们去人多地区寻找乘客；（3）人少车多时，出租车可以轻易寻找到乘客，代价很小，供大于求，故此时不对出租车给予补贴，且不鼓励他们离开人少地区寻找乘客；（4）人少车少时，司机宣召乘客和乘客打车都比较困难，故不对出租车给予补偿。综上，只有当人多车少时，我们才给予前往人多地区的出租车补偿。

5.3.2 指标建立

(1) 人——车相对数量系数 q_{jkt} :

考虑到衡量给出租车发放补贴的条件, 设 ρ_{jt} 为 t 时刻第 j 类乘客子类区域的人口密度 (子区域即为根据聚类划分的 5 个区域), $\hat{\rho}_{kjt}$ 为 t 时刻离第 j 个乘客子类区域最近的第 k 类出租车子类区域的出租车密度, 其中 $j=1,2,3,4,5$ 。现令人——车相对数量系数为 $q_{jkt} = \frac{\rho_{jt}}{\hat{\rho}_{kjt}}$, $j=1,2,3,4,5$, 令 α 为阈值 (例如 $\alpha=10$ 表示一辆出租车周围分布着 10 个乘客), 只有当 $q_{jkt} \geq \alpha$ (人多车少) 时, 我们才给予出租车相应补贴; 否则, 将不给予。

(2) 人与区域距离 d_{ijkt} :

设 (x_{ijt}, z_{ijt}) 为 t 时刻第 j 个乘客子区域中第 i 个乘客的位置坐标, (μ_{jt}, γ_{jt}) 为 t 时刻第 j 个出租车子区域中心坐标, 则

$$d_{ijkt} = \sqrt{(x_{ijt} - \mu_{kt})^2 + (z_{ijt} - \gamma_{kt})^2} \quad (38)$$

表示第 j 类乘客子区域中第 i 个乘客到第 k 个出租车子区域中心的距离, 其中 $j=1,2,3,4,5$ 。若第 k 个出租车子区域中一辆出租车准备去接第 j 类乘客子区域中第 i 个乘客, 那么他在接乘客的过程中走的路程越长, 错过的订单就越多, 于是打车软件对该出租车的补贴就应越多。因此我们规定 d_{ijkt} 越大, 补贴额度越大。

(3) 区域与区域距离 \hat{d}_{jt} :

设 $(\bar{x}_{jt}, \bar{z}_{jt})$ 为 t 时刻第 j 类乘客子区域中心坐标, d_{jkt} 表示 t 时刻第 j 类乘客子区域中心与第 k 类出租车子区域中心的距离, 其中

$$d_{jkt} = \sqrt{(\bar{x}_{jt} - \mu_{kt})^2 + (\bar{z}_{jt} - \gamma_{kt})^2}; \quad (39)$$

再令

$$\hat{d}_{jt} = \min_k d_{jkt}, \quad (40)$$

则 \hat{d}_{jt} 表示 t 时刻第 j 类乘客子区域中心与最近的出租车子类区域中心的距离。于

是 \hat{d}_{jt} 越大，出租车司机接到乘客所要花费的时间与油费就越多，因此在满足人多于车的先决条件后，我们要对出租车司机给予补偿，并且 \hat{d}_{jt} 越大，补贴额度越大。

(4) 行程时间 T_{jmt} :

现设 T_{jmt} 为身处第 j 类乘客子区域的乘客乘坐出租车前往第 m 类乘客子区域所需时间。在这里，不考虑堵车、交通事故等特殊情况，即只要 j 与 m 确定，则 T_{jmt} 为定值。因此， T_{jmt} 越大，出租车服务一固定乘客的时间越长，故若满足人多于车的先决条件，对出租车补偿额度越高。

综上，上述的 4 类指标的线性、非线性组合来计算对出租车司机及乘客的补贴额度。

5.3.3 模型建立

现用 d_{ijkt} 、 \hat{d}_{jt} 、 T_{jmt} 的线性组合来表示对处于第 k 类出租车子区域准备去接第 j 类乘客子区域中的第 i 个乘客的出租车司机的补贴额度 r_{ijkt} ，则有

$$r_{ijkt} = \theta_{1t} T_{jmt} + \theta_{2t} d_{ijkt} + \theta_{3t} \hat{d}_{jt}, \quad (41)$$

其中， θ_{1t} 、 θ_{2t} 、 θ_{3t} 为补贴系数。

考虑对乘客的补贴额度，在合理范围内，如果一个地区人口由少增多，会在一定程度上刺激出租车司机向该地区的流动，这就改善了出租车高度集中在主城区的尴尬状况，因此随着人口的增加，我们应当提高对该部分乘客的奖励；反之，当人口增加到现有的出租车数量无法满足乘客需求的程度时，这新增人群则影响了原本的供需平衡状态，我们应适当降低对新增人口的补贴额度。因此我们取

$$g_{ijt} = \theta_{4t} e^{-\rho_{jt}} \quad (42)$$

作为对乘客的奖励，其中， θ_{4t} 为补贴系数。

基于问题一中的模型，我们可以对四个补贴系数进行求解。

5.3.4 结果分析

由问题一中的模型，可得到不同时段各个地区的 4 个补贴系数、乘客等待时

间、出租车等待时间以及出租车空载率等数据以后，我们对由数据得到的图形进行分析如下：

（1）有无补贴对比情况

（i）乘客等待时间变动分析

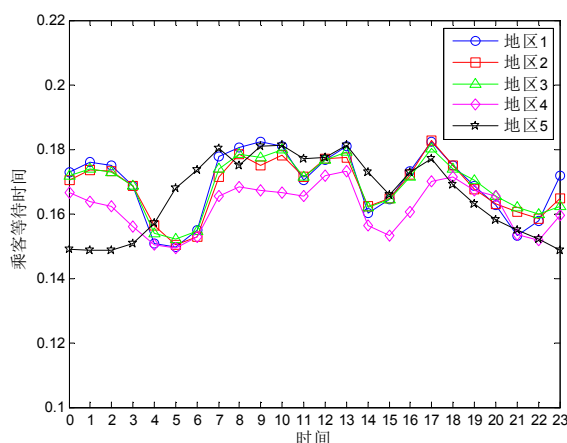


图 18 给予补贴后乘客等待时间变化图

由图 18 可知，可以将地区 1-5 分为三类：

（a）地区 1-3。这三个区域是交通最拥堵的地区，从图 18 可以看出，6 时为此三区域乘客等待时间最少的时刻；随着早高峰的到来，三个区域的乘客等待时间急剧上升，并于 9 时达到最高值；伴随早高峰的结束，9-14 时乘客等待时间出现小范围波动，并于 14 时达到极小值；之后晚高峰情况与早高峰来临时类似，约于 17-18 时达到极大值；之后乘客对出租车服务的需求减小，乘客等待时间降低；

（b）地区 4。总体而言，地区 4 与地区 1-3 变化趋势相似，区别仅在于地区 4 的两次高峰值、高峰过后的稳定值等均小于地区 1-3 的值；

（c）地区 5。从行政区域来看，地区 5 属于郊区。与地区 1-4 相比，地区 5 乘客等待时间开始增加的時刻更早，这是因为若要到达市区内相同的目的地，从郊区出发将要花费更长的时间。郊区同样存在早晚高峰，其中早高峰从 7-8 时开始，持续大约 3 小时；晚高峰开始于 17 时，但仅持续很短时间后，乘客等待时间便开始下降；另外，地区 5 的午夜乘客等待时间明显小于地区 1-4，这是因为这一时间段内，地区 5 对出租车服务的需求量也很小。

与未给予补贴的情况（如图 9）相比，给予补贴后，5 条乘客平均等待时间与时刻的变化关系折线图更加聚集，极端情况（例如高峰值特别大）被消除。

（ii）出租车等待时间变动分析

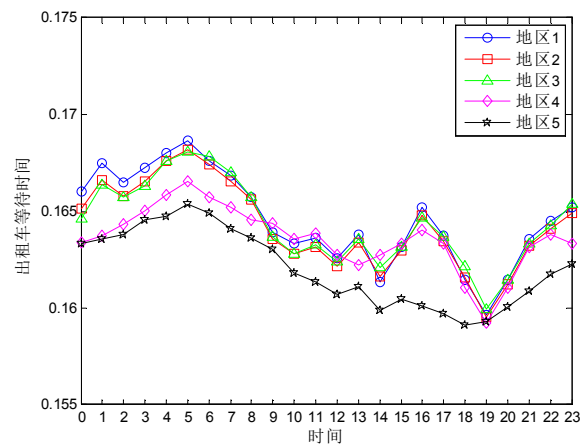


图 19 给予补贴后出租车等待时间变化图

根据图 19 所示，地区 1-3 出租车等待时间最高点在 6 时，之后伴随早高峰的出现，乘客对出租车的需求量增高，供不应求，出租车等待时间明显减少；随后，出租车等待时间在小范围内的波动中呈现明显下降趋势，至 19-20 时达到最小值，这表示，在 19-20 时，乘客对出租车的需求量最大。地区 4-5 的变化趋势与地区 1-3 基本一致，区别在于出租车等待时间值整体小于区域 1-3 的值。

与未给予补贴的情况（如图 10）相比，给予补贴后，出租车等待时间最高值下降，最低值上升，折线图变得更加缓和且更加密集。

（iii）出租车空载率变动分析

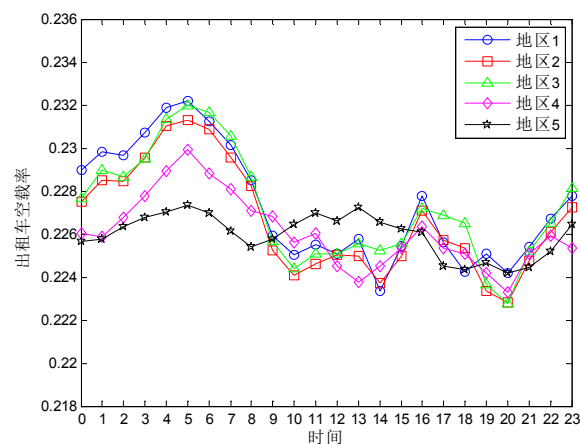


图 20 给予补贴后出租车空载率变化图

根据图 20，区域 1-4 有着相同的变化趋势：在早高峰 7 时来临之前，空载率在 6 时达到最大值；随着早高峰的到来，乘客对出租车服务的需求逐步提高，空

车数量明显减少，故空载率减少；晚高峰情况与早高峰类似，然而最大空载率明显小于早高峰空载率最大值。对于区域 5，其出租车空载率在一定范围内波动，同时，在早晚高峰到来时，同样出现短时间内的空载率降低现象。

与未给予补贴的情况（如图 11）相比，给予补贴后，对于不同区域，出租车空载率的极差明显减小，折线更加密集。

以上三图在与未给予补贴的情况相比，均出现了极差减小、方差（离散程度）减小的情况。实际中，这种变化反映为高峰时间段内，需求满足程度大于原有情况，出租车资源得到了更好的应用，即所给予的补贴有利于缓解打车难问题，既有较高的合理性。

（2）补贴系数变动分析

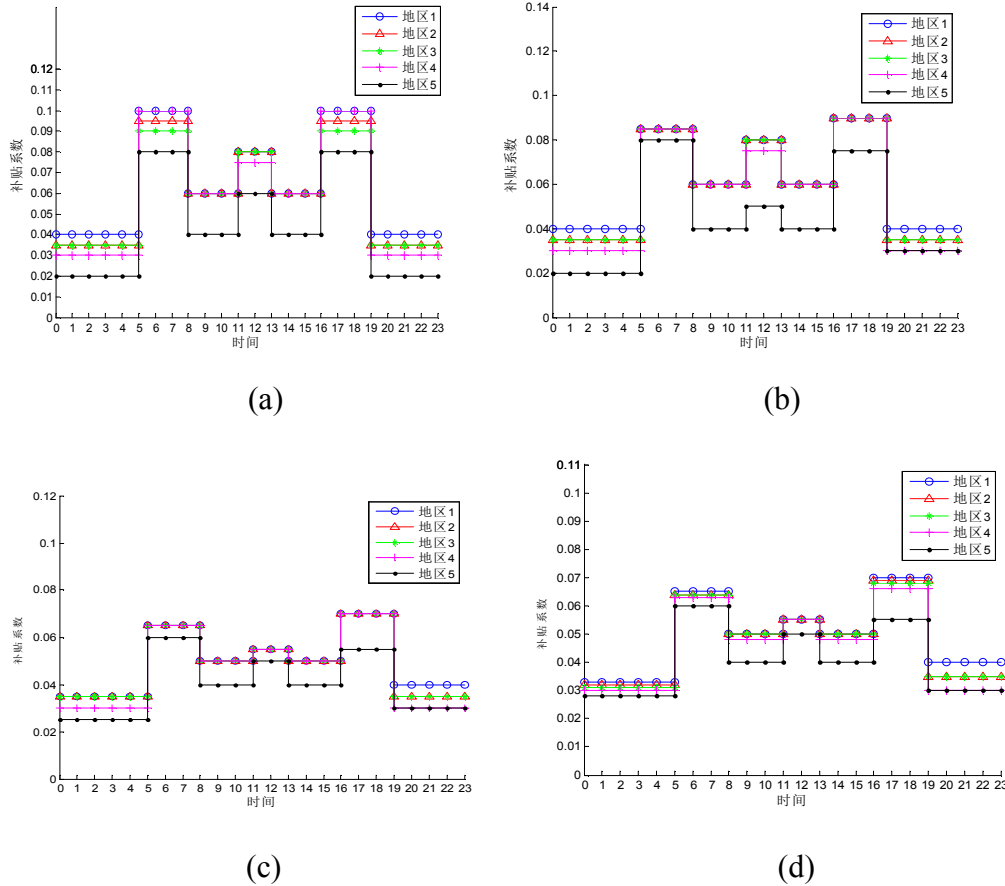


图 21 四个补贴系数变化图

图 21 (a)-(d)分别体现了以需求量为标准划分的 5 类地区补贴系数 θ_{1t} 、 θ_{2t} 、 θ_{3t} 、 θ_{4t} 随时间变化图。易见，在上下班高峰时期，交通拥挤，出租车运营成本较大，乘客等待出租车时间较长，五类地区 4 个补贴系数均达到较高水平。另外，

郊区人口数量少，对出租车需求量不大，比较容易达到供需平衡的状态，这使得郊区补贴系数明显小于主城区补贴系数。并且，一天之内 θ_{1t} 、 θ_{2t} 的变化幅度明显大于 θ_{3t} 、 θ_{4t} 的变化幅度，而 θ_{1t} 和 θ_{2t} 为计算出租车司机的补贴函数中的指标系数，据此我们可以推测，出租车司机对新补贴政策的反应灵敏度要大于乘客对新补贴政策的反应灵敏度。

6 结果分析

本文针对出租车缓解“打车难”问题的补贴方案设计问题，考虑了乘客等待时间、出租车等待时间、出租车空载率等因素，建立了基于模糊聚类法、层次分析法、多目标规划等建模方法的数学模型，求解出能最大程度满足各地区乘客需求的出租车补贴方案，并得到了以下结论：

- （1）本文中运用的多目标规划模型具有很强的逻辑严密性，建立了多个指标间的平衡关系，能够求解出更贴合实际情况的结果；
- （2）本文中引用的参数较多，而这些参数对模型的优化结果有很大的影响；
- （3）本文通过引入参数，用公式清晰地表达出了若干个变量之间的关系，这种方法可以让我们更好地把握社会现象背后的规律。

7 灵敏度分析

我们通过灵敏度分析，刻画模型中参数对出租车供需匹配程度的影响。考虑到人车数量比阈值 α 和决策态度参数 λ 对优化结果影响较大，故在此仅分析其二者对优化结果的影响。

在问题一中，由定义知， $\lambda \in [0,1]$ ，在模型的求解计算中，我们取态度参数 $\lambda = \frac{2}{3}$ ；在问题三中， α 表示一辆出租车周围乘客数的阈值， $\alpha \in N$ ，但考虑到实际情况，若出租车周围已有一定数量的乘客，那么其他乘客便不会选择尝试搭乘该出租车，根据生活实际，我们设这个最大值为 10；另一方面，设出租车周围一定有乘客等待乘车，则 α 最小值为 1；然而，在对 α 进行灵敏度分析时， α 的离散型导致分析过程的复杂化，故我们取 $\alpha \in [0.5,10]$ 。

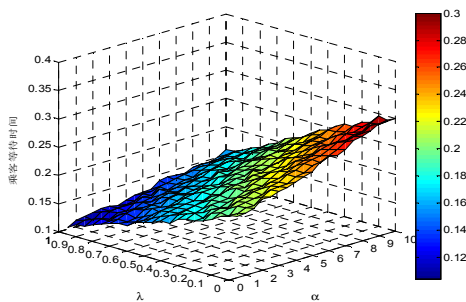


图 22 乘客等待时间随
参数 λ 、 α 变化图

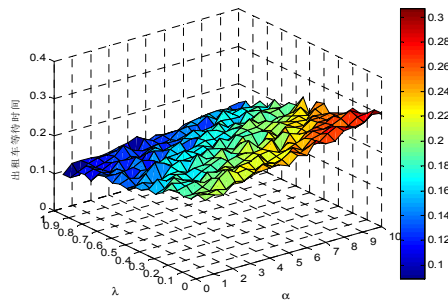


图 23 出租车等待时间随
参数 λ 、 α 变化图

从图中可知，乘客等待时间随参数 λ 、 α 变化趋势总体上与出租车等待时间随参数 λ 、 α 变化趋势一致，并且都在区域 $\{(\lambda, \alpha) | 0.9 < \lambda < 1, 0 < \alpha < 1\}$ 内取到最小值，在区域 $\{(\lambda, \alpha) | 0 < \lambda < 0.1, 9 < \alpha < 10\}$ 内取到最大值；且 λ 越大， α 越小，乘客等待时间和出租车等待时间越短； λ 越小， α 越大，乘客等待时间和出租车等待时间越长。

不同之处在于，出租车等待时间随参数 λ 、 α 变化比乘客等待时间随参数 λ 、 α 变化明显很多，这是由于补贴政策最直接的体验者和获益者是出租车司机，乘客则在一定程度上通过出租车司机这个中间媒介来适应政策的变化。我们需要严格控制 λ 和 α 的取值最大程度地减缓“打车难”问题。

8 模型评价与改进

8.1 模型优点

- (1) 运用模糊聚类方法将大量数据点分成若干个子类，方便处理；
- (2) 确定权重时引入区间数，使模型的不确定程度增大，更适用于实际情况，得出更可靠的结果；
- (3) 在问题三中，通过建立距离、时间两类指标，来计算对出租车司机和乘客的补贴额度，充分地考虑了实际情况中，人-车-区域之间的关系。

8.2 模型缺点

- (1) 问题一中，达到平衡状态时所满足的约束条件较多，使得模型求解过程稍显复杂；
- (2) 在模型假设中，许多特殊情况被排除，这使得模型并不适用于突发状况。

8.3 模型改进

我们放宽假设条件：乘客对出租车的需求总量一定。特别地，乘客除了选择出租车为出行工具以外，还有很多其他选择，例如公交车等乘坐费用不随行驶里程变化的交通工具。因此，对于每一个 OD 对来说，出行工具包括使用打车软件和不使用打车软件叫到的出租车以及其他非出租车交通工具。设 t 时刻在区域 i 的乘客通过打车软件叫出租车前往区域 j 的概率如下^[17]：

$$p_{3t} = \frac{S_{ijt}^{e2}}{R_{ijt}} = \frac{\exp(-\beta_1 M_{ijt}^{e2})}{\exp(-\beta_1 M_{ijt}^{e2}) + \exp(-\beta_1 M_{ijt}^{e1}) + \exp(-\beta_1 \bar{M}_{ijt})}, \quad (43)$$

其中， \bar{C}_{ij} 是一个常数，它反映了 OD 系统中除出租车以外其他交通工具的平均乘坐费用。这表示乘客选择不同出行工具是一个偏好行为。对 $\forall(i, j) \in \Omega$ ，由上式我们有：

$$S_{ijt}^{e1} = R_{ijt} \frac{\exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt})\}}{\exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt})\} + \exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt} + f_2 T_{ijt})\} + \exp(-\beta_1 \bar{M}_{ijt})} \quad (44)$$

$$S_{ijt}^{e2} = R_{ijt} \frac{\exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt} + f_2 T_{ijt})\}}{\exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt})\} + \exp\{-\beta_1 (P_{ijt} + f_1 I_{ij}^{e1} + f_2 T_{ijt} + f_1 \bar{z}_t)\} + \exp(-\beta_1 \bar{M}_{ijt})} \quad (45)$$

于是新的平衡状态，即新的约束条件，是通过等式 (37) (44) (45) 表示。另外，我们能够很直观地得到这种平衡状态是基于问题一中模型的。

参考文献

- [1] J. D. Ortuzar, L. G. Willumsen, Modelling Transport second ed. [M], New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [2] Hai Yang, Cowina W. Y. Leung, S. C. Wong, Michael G. H. Bell, Equilibria of bilateral taxi-customer searching and meeting on networks[J], Transport. Research Part B, 44: 1067–1083, 2010.
- [3] G. W. Douglas, Price regulation and optimal service standards: the taxicab industry[J], Transport Economics and Policy, 6 (2): 116–127, 1972.
- [4] Hai Yang, S. C. Wong, K. I. Wong, Demand-supply equilibrium of taxi services in a network under competition and regulation[J], Transport Research Part B, 36(9):

799–819, 2002.

- [5] Arthur S. De Vany, Capacity utilization under alternative regulatory constraints: an analysis of taxi markets[J], *Journal of Political Economy*, 83 (1): 83–94, 1975.
- [6] Michael E. Beesley, Stephen G. Glaister, Information for regulation: the case of taxis[J], *The Economic Journal*, 93 (370): 594–615, 1983.
- [7] Robert D. Cairns, Catherine Liston-Heyes, Competition and regulation in the taxi industry[J], *Public Economics*, 59 (1): 1–15, 1996.
- [8] Hai Yang, Min Ye, Wilson H. Tang, S. C. Wong, Regulating taxi services in the presence of congestion externality[J], *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 39 (8): 17-40, 2005.
- [9] 陈华友, 运筹学[M], 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008.
- [10] Evans G. W, An Overview of Techniques for solving Multi-objective Mathematical Programs[J], *Management Science*, 30 (11): 1268-1270, 1278-1279, 1279, 1984.
- [11] 董增川, 多目标决策方法及其应用[J], *河海科技进展*, 3 (13): 38-45, 1993.
- [12] 徐泽水, 达庆利, 3 种基于互反判断矩阵的互补判断矩阵排序法[J], *东南大学学报 (自然科学版)* 31 (5): 2001.
- [13] Ronald R. Yager, Zeshui Xu, The continuous odered weighted geometric operator and its application to decision making[J], *Fuzzy Sets and Systems*, 157: 1393-1402, 2006.
- [14] Ligang Zhou, Yingdong He, Huayou Chen, On compatibility of interval multiplicative preference relations based on the COWGA operator[J], *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 22 (4): 407-428, 2014.
- [15] 陈华友, 周礼刚, 刘金培, 数学模型与数学建模[M], 北京: 科学出版社, 2014.
- [16] 公共服务蓝皮书[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2014.
- [17] Fang He, Zuo-Jun Max Shen, Modeling taxi services with smartphone-based e-hailing applications, *Transportation Research Part C*, 58: 93-106, 2015.

附录

程序一 问题一模糊聚类

```
clear
clc
close all
data=xlsread('xuqiu')
[center,U,obj_fcn]=fcm(data,5);
plot(data(:,1),data(:,2),'o');
maxU=max(U);
index1=find(U(1,:)==maxU);
index2=find(U(2,:)==maxU);
index3=find(U(3,:)==maxU);
index4=find(U(4,:)==maxU);
index5=find(U(5,:)==maxU);
line(data(index1,1),data(index1,2),'linestyle','none','marker','o','color','g');
line(data(index2,1),data(index2,2),'linestyle','none','marker','o','color','c');
line(data(index3,1),data(index3,2),'linestyle','none','marker','o','color','y');
line(data(index4,1),data(index4,2),'linestyle','none','marker','o','color','b');
line(data(index5,1),data(index5,2),'linestyle','none','marker','o','color','k');
grid on;
xlabel('经度')
ylabel('纬度')
title('8~9 时杭州市出租车需求模糊聚类分析图')
```

程序二 问题一模型求解

```
function result = youhua()
label = xlsread('shuju1.xls');
I = label(1);
J = label(2);
wc1 = sdpvar(I,1);
wc2 = sdpvar(I,J);
wt1 = sdpvar(I,1);
wt2 = sdpvar(I,J);
Tvt1 = sdpvar(J,I);
Tvt2 = sdpvar(J,I,J);
beta = xlsread('shuju2.xls');
beta1 = beta(1);beta2 = beta(2);beta3 = beta(3);beta4 = beta(4);
y = zeros(J,1);
z = 1;
p = 10; p01 = 30; p02 = 20;
g = 0;fun = 0;
N = 30000; %%%
F = xlsread('shuju3.xls');
```

```

D = xlsread('shuju4.xls');
alpha = xlsread('shuju5.xls');

for i = 1:I
    for j = 1:J
        C1(i,j) = F(i,j) + p01 * wc1(i) + p02 * t(i,j);
        C2(i,j) = F(i,j) + p01 * wc2(i,j) + p02 * t(i,j) + p02 * z - p01 * g;
    end
end
qc1 = D * exp(-beta1*C1)./(exp(-beta1*C1)+exp(-beta1*C2));
qc2 = D * exp(-beta1*C2)./(exp(-beta1*C1)+exp(-beta1*C2));

for k = 1:J
    for i = 1:I
        tt(i) = sum(qc1.* t,2)./sum(qc1,2);
        ff(i) = sum(qc1.* F,2)./sum(qc1,2);
        yy(i) = sum(qc1.* repmat(y,I,1),2)./sum(qc1,2);
        u1(k,i) = -ff(i) + p * (wt1(i) + t(k,i) + tt(i)) - yy(i);

        for j = 1:J
            u2(k,i,j) = -F(i,j) + p * (wt2(i,j) + t(k,i) + t(i,j) + z) - y(j) - fun;
        end
    end
end

T1wan(k) = sum(Tvt1,2);
T2wan(k) = sum(sum(Tvt2,2),3);

cons = [sum(Tvt1,2) == sum(qc1,2)];
cons = [cons,sum(Tvt2,1) == qc2];
cons = [cons,T1wan + T2wan == sum(qc1 + qc2,1)];

obj = alpha(1) * ((1/beta2 - 1/beta4) * sum(T2wan .* log(T2wan - 1)) + (1/beta2 - 1/beta3) *
sum(T1wan .* log(T1wan - 1)) +...
    1/beta4 * sum(sum(sum(Tvt2 .* log(Tvt2 - 1)))) + 1/beta3 * sum(sum(Tvt1 .* log(Tvt1 - 1))))
+ ...
    + alpha(2) * (sum(sum(u1)) + sum(sum(sum(u2)))) + alpha(3) * (sum(sum(C1)) +
sum(sum(C2)));

ops = sdpsettings('solver','cplex','verbose', 2,'saveduals',0);
result = optimize(cons,obj, ops);

wc1 = double(wc1);

```

```

wc2 = double(wc2);
wt1 = double(wt1);
wt2 = double(wt2);
Tvt1 = double(Tvt1);
Tvt2 = double(Tvt2);

clear
close all;
clc
y1= xlsread('wen1.xls','A1:A24');
y2= xlsread('wen1.xls','B1:B24');
y3= xlsread('wen1.xls','C1:C24');
y4= xlsread('wen1.xls','D1:D24');
y5= xlsread('wen1.xls','E1:E24');
x=0:23;
hold on
plot(x,y1,'b')
plot(x,y2,'r')
plot(x,y3,'g')
plot(x,y4,'m')
plot(x,y5,'k')
hold off

```

程序三 问题二绘图分析

```

clear
close all;
clc
y1= xlsread('wen1.xls','A1:A24');
y2= xlsread('wen1.xls','B1:B24');
y3= xlsread('wen1.xls','C1:C24');
y4= xlsread('wen1.xls','D1:D24');
y5= xlsread('wen1.xls','E1:E24');
x=0:23;
hold on
plot(x,y1,'b')
plot(x,y2,'r')
plot(x,y3,'g')
plot(x,y4,'m')
plot(x,y5,'k')
hold off

```

程序四 问题三灵敏度分析

```

clear;
close all;

```

```
clc
x=0.5:0.5:10;
y=0:0.5:10;
z=xlsread('wen3');
surf(x,y,z)
```