·大学教学·

Mathematica 软件在常微分方程教学中的应用

程春蕊　朱军辉

(郑州航空工业管理学院 数理系 河南 郑州 450015)

摘　要:本文介绍了 Mathematica 软件在常微分方程的几个典型问题上的应用。在常微分方程的教学中引入 Mathematica 软件,有利于增强教学内容的直观性,激发学生的学习兴趣,提高学生分析问题和解决问题的能力,提升常微分方程教学质量。

关键词:Mathematica 软件;常微分方程;应用

中图分类号:G434　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1006－7353(2012)01－0021－03

Mathematica 是目前世界上应用最广泛的符号计算系统,能够完成符号和数值运算、数学图形绘制甚至动画制作等多种功能。它被广泛应用于数学、物理、化学、生物、机械制造、航空航天、社会学等诸多领域。[1-2] 对于常微分方程这样一门内容较抽象的课程,如何突破教学难点,使常微分方程教学由难变易,Mathematica 软件可以发挥重要作用,一方面可以通过计算机数值计算和绘图迅速了解或探讨某些常微分方程的性态;另一方面是应用数学软件中的符号计算功能直接求解某些常微分方程。结合计算机和数学软件进行常微分方程的"实验",让学生既动脑又动手,提高他们的学习兴趣、激发他们自己解决实际问题的欲望,从而促进独立思考能力、创新意识以及综合应用能力的培养。

1　Mathematica 软件的绘图功能的应用

例 1　作出微分方程$\frac{dy}{dx}=1+xy$的向量场。

在 Mathematica 软件的 Notebook 窗口输入下述命令,绘制图形(见图 1)。

```
<< Graphics`PlotField`
g1 = PlotVectorField[{1, 1+x*y}, {x,-3, 3}, {y,-3, 3}, Frame → True, ScaleFunction → (1 &), ScaleFactor → 0.16, HeadLength → 0.01]
```

例 2　作出微分方程$\frac{dy}{dx}=1+xy$分别通过点(0,0),(－1,1),(1,－1)的三条积分曲线。

方程$\frac{dy}{dx}=1+xy$不能利用初等积分法求通解,作积分曲线图有一定困难,但是在 Mathematica 软件的 Notebook 窗口输入绘图命令,绘制图形(见图 2)。

```
g1 = PlotVectorField[{1, 1 + x*y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Frame → True, ScaleFunction → (1 &), ScaleFactor → 0.16, HeadLength → 0.01]
sol = NDSolve[{y1[x] - 1 - x*y1[x] == 0, y1[0] == 0}, y1[x], {x, -√2,√2}];
g2 = Plot[Evaluate[y1[x] /. sol], {x, -√2,√2}, PlotRange → All];
sol = NDSolve[{y2[x] - 1 - x*y2[x] == 0, y2[-1] == 1}, y2[x], {x, -3, 3}];
g3 = Plot[Evaluate[y2[x] /. sol], {x, -2, 1}, PlotRange → All];
sol = NDSolve[{y3[x] - 1 - x*y3[x] == 0, y3[1] == -1}, y3[x], {x, -3, 3}];
g4 = Plot[Evaluate[y3[x] /. sol], {x, -
```

收稿日期:2011－11－14.

基金项目:河南省社科联 2011 年课题,项目编号:SKL－2011－2203;2012 年郑州航空工业管理学院教育科学研究基金立项课题,项目编号:zhjy12-09.

作者简介:程春蕊(1981－),女,山东曹县人,讲师,研究方向:大学数学教学.

```
1, 2}, PlotRange → All];
    Show[g1, g2, g3, g4]
```

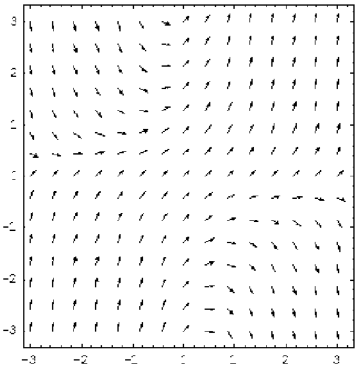

图 1　向量场图

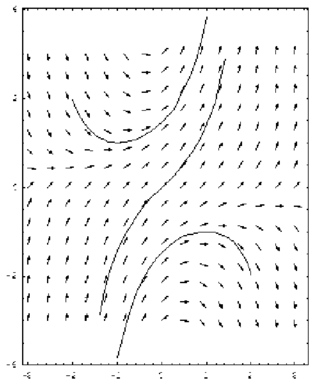

图 2　积分曲线图

例 3　范德波尔方程的极限环。物理学家范德波尔(*van der pol*)研究了在无线电技术中有重要意义的等幅振动电子管电路,通过电路分析,建立了著名的三极管电路的数学模型,即为微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0,$$

方程可化为等价的方程组 $\frac{dx}{dt}=y-\mu\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$, $\frac{dy}{dt}=-x$.

```
    sysVdP := {x'[t] == y[t]-0.1*(x[t]^3/3
-x[t]), y'[t] == -x[t]};
    solVdP1 = NDSolve[{sysVdP, x[0] ==
4, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
    gVdP1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],
y[t]} /. solVdP1], {t, 0, 20}, PlotRange →
All, AspectRatio → Automatic];
    solVdP2 = NDSolve[{sysVdP, x[0] ==
0, y[0] == 1.5}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
    gVdP2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],
y[t]} /. solVdP2], {t, 0, 20}, PlotRange →
All, AspectRatio → Automatic];
Show[gVdP1, gVdP2]
    sysVdP := {x'[t] == y[t]-2*(x[t]^3/3
-x[t]), y'[t] == -x[t]};
    solVdP1 = NDSolve[{sysVdP, x[0] ==
4, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
    gVdP1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],
y[t]} /. solVdP1], {t, 0, 20}, PlotRange →
All, AspectRatio → Automatic];
    solVdP2 = NDSolve[{sysVdP, x[0] == -
0.1, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
    gVdP2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],
y[t]} /. solVdP2], {t, 0, 20}, PlotRange →
All, AspectRatio → Automatic];
    Show[gVdP1, gVdP2]
```

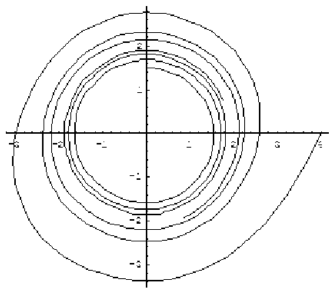

图 3　$\mu=0.1$ 时轨线图

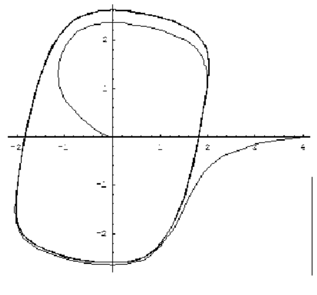

图 4　$\mu=2$ 时的轨线图

图 3 为 $\mu = 0.1$ 时的轨线图,此时通过观察可看出 μ 较小时,极限环为接近半径为 2 的圆;图 4 为当 $\mu = 2$ 时的轨线图,此时可看出 μ 较大时极限环呈长条形。借助于 Mathematica 软件,可迅速了解微分方程的某些性态。比如在研究范德波尔方程的极限环时,利用 Mathematica 软件作出轨线图,让学生可以获得深刻的感性认识,加深对相关知识的理解,教师则通过运用信息技术,有效突破课堂教学的重点和难点,化繁为简。

2 Mathematica 软件求解常微分方程(组)示例

Mathematica 能求常微分方程(组)的准确解,能求解的类型大致覆盖了人工求解的范围,功能很强。Mathematica 求常微分方程的数值解也很方便,且能作出解的图形。

例 4 求解常微分方程 $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}(x-5)$

输入:$DSolve[y'''[x]+3y''[x]+3y'[x]+y[x]==Exp[-x](x-5),y[x],x]$

输出:$\{\{y[x]\to\frac{1}{24}e^{-x}(-20+x)x^3+e^{-x}C[1]+e^{-x}xC[2]+e^{-x}x^2C[3]\}\}$

例 5 求常微分方程组 $\begin{cases} y_1' = -y_1+y_2 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = y_1-4y_3 \end{cases}$ 的通解。

这个类型的题目,不管是用空间分解的方法还是用化矩阵为 Jordan 型的方法,计算起来都很烦琐,计算量很大。但是使用 Mathematica 软件可以快速解题。

输入:DSolve[{y1[x] == (-1) * y1[x] + y2[x], y2[x] == (-1) * y2[x], y3[x] == y1[x] - 4 * y3[x]}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]

输出:$\{\{y1[x]\to e^{-x}C[1]+e^{-x}x\ C[2],\ y2[x]\to e^{-x}C[2],\ y3[x]\to\frac{1}{3}e^{-4x}(-1+e^{3x})C[1]+\frac{1}{9}e^{-4x}(1-e^{3x}+3e^{3x}x)C[2]+e^{-4x}C[3]\}\}$

3 MatheXmatica 软件求(反)拉普拉斯变换示例

拉普拉斯变换能把积分和微分运算转换为基本代数运算,常常被用于研究微分方程确定的系统。把 Mathematica 软件作为辅助教学手段和计算工具,可降低计算难度,提高教学效率。

例 6 已知原函数 $f(t)=te^t\cos t$,求函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

输入:LaplaceTransform[$t*e^t\cos[t],t,s$]

输出:$\frac{(-2+s)s}{(2+(-2+s)s)^2}$

例 7 已知像函数 $F(s)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$,求原函数 $f(t)$

输入:InverseLaplaceTransform[$\frac{2s}{(s\hat{}2+1)\hat{}2}$, s, t]

输出:$t\sin t$

通过例子可以看出,在常微分方程课程的教学中,引入现代信息技术教学手段,恰当地使用数学软件进行辅助教学,不但能够让师生从繁琐、重复的人工计算中“解放”出来,将宝贵的课堂教学时间用于解释问题中蕴含的数学思想、数学方法和数学技巧,提升教学质量,而且可以提高学生用计算机处理问题的能力,培养学生的创新意识。

参考文献

[1] 郭运瑞. 微积分[M]. 北京:高等教育出版社,2011:8-16.
[2] 王高雄,周之铭,朱思铭,王寿松. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2006:298-299.
[3] 丁同仁,李承治. 常微分方程教程[M]. 北京:高等教育出版社,2004:272-273.
[4] 钱祥征. 常微分方程解题方法[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1984:352-353.
[5] 张韵华,王新茂. Mathematica 7 实用教程[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2011:1-5.