

Описание электромагнитных волн

Электромагнитное поле описывают при помощи следующих векторных функций координат и времени:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электрического поля,

$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность магнитного поля,

$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ – электрическая индукция,

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – магнитная индукция.

Система уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХЧАСТОТНЫХ ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В средах с квадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды электромагнитного поля процессы обмена энергией между волнами различающихся частот эффективно используются в параметрических генераторах (ПГ). ПГ обеспечивают получение перестраиваемого по частоте излучения в диапазоне длин волн от 10^{-1} см (радиодиапазон) до 10^{-5} см (ближний ультрафиолет)

Процессы, происходящие в ПГ, имеют многочисленные аналоги. Это, например, взаимодействия плазменных волн, некоторые биологические процессы, идущие с изменением численности антагонистических видов, движение твердого тела с одной неподвижной точкой и т. д.

Аналитическое решение уравнений теории нелинейных взаимодействий рассматриваемого типа во многих случаях затруднительно. Поэтому для получения характеристик ПГ, таких, как коэффициент преобразования, пространственный период перекачки энергии, необходимо применение численных методов.

1. Основные уравнения. Распространение одномерных электромагнитных волн в плотных средах описывается волновым уравнением, связывающим напряженность \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь z — координата, вдоль которой распространяется волна; t — время; c — скорость света. Уравнение (1) незамкнуто, его следует дополнить материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Мощное излучение изменяет свойства вещества, в том числе оптические. При этом диэлектрическая проницаемость становится зависящей от поля \mathbf{E} .

В средах, внутренняя структура которых не имеет центра инверсии, основной вклад в нелинейность дает член, квадратичный по полю. В этом случае (2) можно переписать в виде

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}_0 \mathbf{E} + 2\pi \hat{\chi} \mathbf{E} \mathbf{E}. \quad (3)$$

Здесь $\hat{\chi}$ — тензор квадратичной нелинейности.

В линейной среде волны разных частот не взаимодействуют. В нелинейной среде такое взаимодействие оказывается возможным. Так, при распространении в среде волна частоты ω_1 может породить волны с частотой $2\omega_1$ или $\omega_1/2$. Две сильные волны с частотами ω_1 и ω_2 кроме своих гармоник $2\omega_{1,2}$ и субгармоник $\omega_{1,2}/2$ могут породить волны суммарной и разностной частот $\omega_{3,4} = \omega_1 \pm \omega_2$ и наоборот.

Рассмотрим взаимодействие волн с частотами ω_1 , ω_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Решение системы (1) — (3) отыскиваем в виде

$$E(z, t) = \sum_{j=1}^3 A_j(z) \exp[i(\omega_j t - k_j z)] + \text{КС}, \quad (4)$$

где $k_j = \omega_j \operatorname{Re} \varepsilon_0^{1/2}(\omega_j)/c$, КС — комплексно-сопряженные члены. Амплитуды A_j здесь медленно изменяются на расстояниях порядка длины волны. Подставляя (4) в (1) и проводя усреднение по пространственному и временному периодам, получаем систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \alpha_1 \right) A_1 &= i\sigma_1 A_2^* A_3, \\ \left(\frac{d}{dz} + \alpha_2 \right) A_2 &= i\sigma_2 A_1^* A_3, \\ \left(\frac{d}{dz} + \alpha_3 \right) A_3 &= i\sigma_3 A_1 A_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь коэффициенты α_j , связанные с мнимой частью линейной диэлектрической проницаемости, описывают поглощение волн в среде. Коэффициенты нелинейной связи σ_j пропорциональны квадратичной восприимчивости χ .

Для численного анализа проведем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} A_0 z, \quad A_0 = A_3(0), \quad R_3 = A_3/A_0, \\ R_1 &= (\sigma_3/\sigma_1)^{1/2} A_1/A_0, \quad R_2 = -i(\sigma_3/\sigma_2)^{1/2} A_2/A_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В этих переменных (5) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \delta_1 \right) R_1 &= R_2 R_3, \\ \left(\frac{d}{dx} + \delta_2 \right) R_2 &= R_1 R_3, \\ \left(\frac{d}{dx} + \delta_3 \right) R_3 &= -R_1 R_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta_j = \alpha_j (\sigma_1 \sigma_2)^{-1/2} A_0^{-1}$ — безразмерные коэффициенты поглощения

2. Физические процессы, происходящие в ПГ.

1. Приведем примеры стационарных процессов взаимодействия волн, которые описываются в зависимости от граничных условий системой (7).

а) Параметрическое усиление. Если на нелинейную среду в сечении $x=0$ падает интенсивная волна частоты ω_3 ($R_3(0) \gg R_{1,2}(0)$), происходит параметрическое усиление слабых волн с частотами ω_1 , ω_2 . Для простоты будем считать сначала поглощение пренебрежимо малым ($\delta_j=0$). На малых расстояниях ($x \ll 1$) лишь незначительная часть мощности сильной волны (ее называют волной «накачки») преобразуется в мощность слабых волн. Система (7) упрощается:

$$\frac{dR_1}{dx} = R_2, \quad \frac{dR_2}{dx} = R_1. \quad (8)$$

Ее решение с граничными условиями $R_1(0)=R_{10}$, $R_2(0)=R_{20}$ есть (рис. 1)

$$\begin{aligned} R_1(x) &= R_{10} \operatorname{ch} x + R_{20} \operatorname{sh} x, \\ R_2(x) &= R_{20} \operatorname{ch} x + R_{10} \operatorname{sh} x. \end{aligned} \quad (9)$$

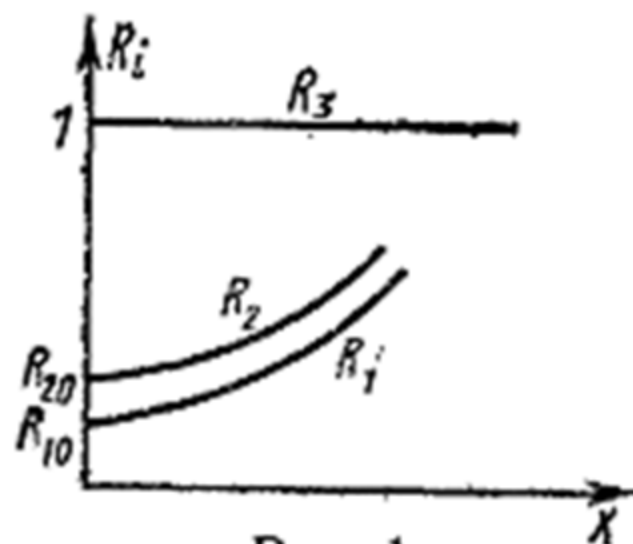


Рис. 1

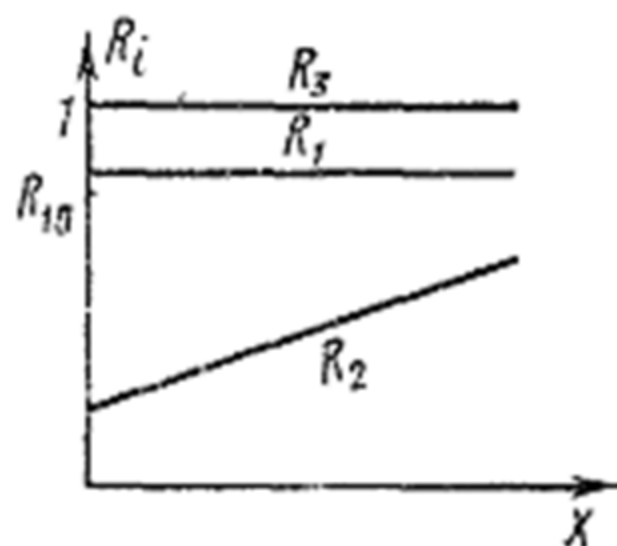


Рис. 2

б) Генерация разностной частоты. Две сильные волны (с частотами ω_3 , ω_1 , например), падая на нелинейную среду, порождают волну с частотой $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. При $x \ll 1$ этот процесс описывается приближенно следующим образом (рис. 2):

$$\begin{aligned} R_3(x) &\simeq 1, \quad R_1(x) \simeq R_{10}, \\ R_2(x) &\simeq R_{10}x + R_{20}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учет поглощения в приближении заданного поля накачки (или накачек), рассмотренного выше, достаточно прост.

2. Если пренебречь поглощением ($\delta_j=0$), система (7) интегрируется точно и с учетом изменения амплитуд накачек.

Типичные зависимости амплитуд взаимодействующих волн от координаты показаны на рис. 3, 4.

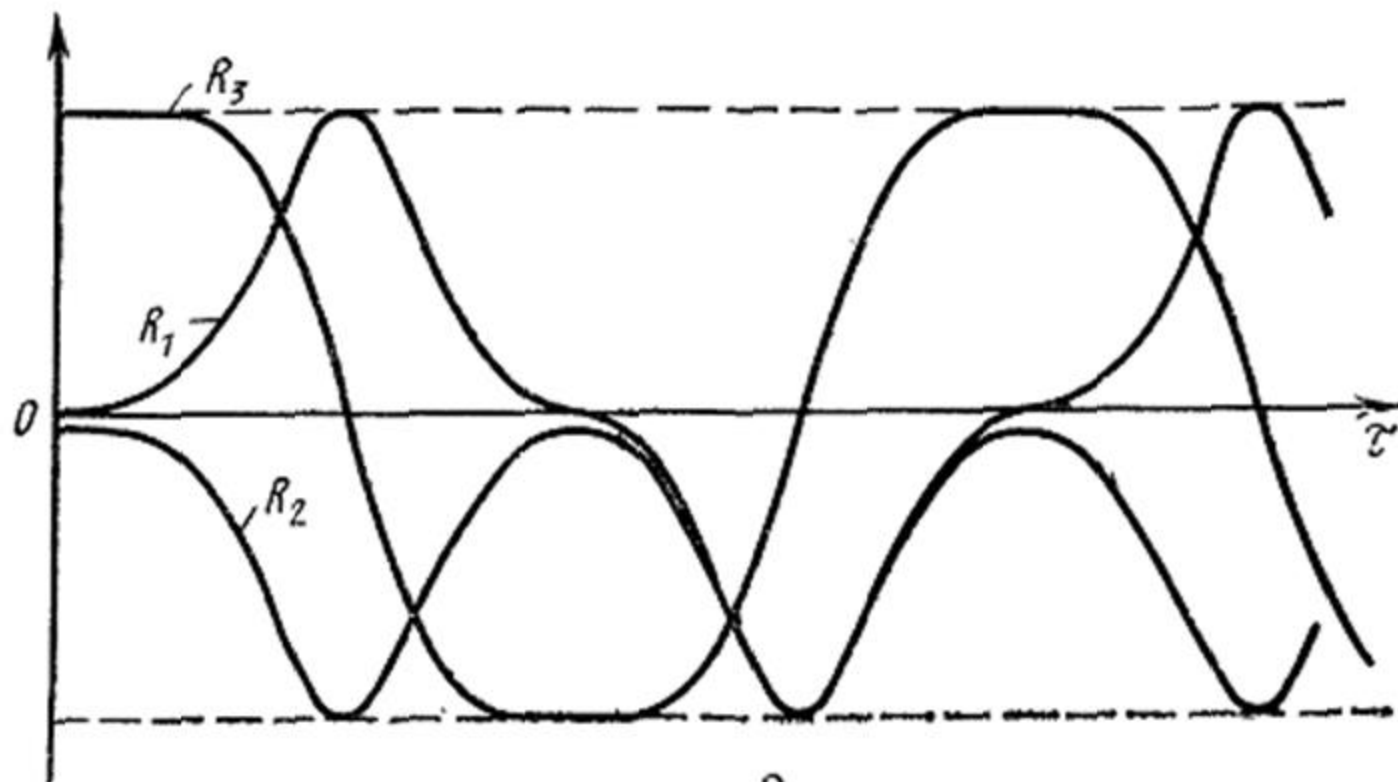


рис. 3

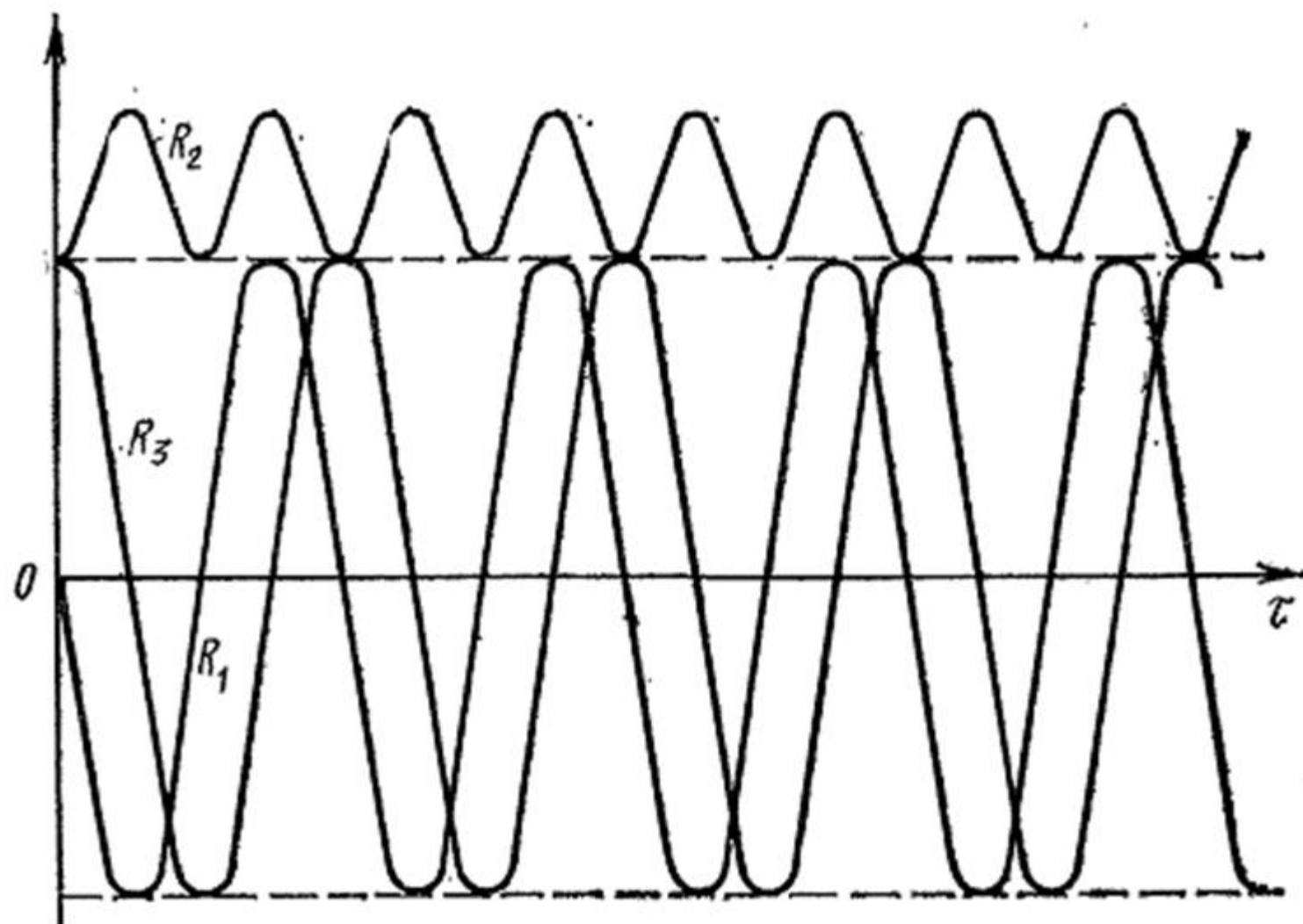


рис. 4.

Таким образом, коэффициент преобразования мощности

$$\eta_{1,2}(x) = R_{1,2}^2(x), \quad (11)$$

важный в практических приложениях, периодически зависит от координаты x и изменяется в пределах от $R_{1,2}^2(0)$ до $1 - R_{1,2}^2(0)$. Следовательно, для получения максимального коэффициента преобразования при заданной мощности накачки (скажем, в процессе параметрической генерации) необходимо подобрать определенную длину нелинейной среды, обратно пропорциональную амплитуде накачки.

Система (7) интегрируется аналитически и при $\delta_j = \delta$, так как члены вида δR_j исключаются заменой:

$$R_j = P_j \exp(-\delta x), \quad y = \frac{1 - \exp(-\delta x)}{\delta}. \quad (12)$$

Осцилляции амплитуд при этом становятся затухающими, а при достаточно большом поглощении вовсе отсутствуют.

3. Для более общего случая ($\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$) аналитического решения получить не удастся. В то же время именно этот случай реализуется чаще всего. Важным является, например, анализ возможностей ПГ, работающего вблизи характеристических полос поглощения ($\delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 \neq 0$). Учет поглощения дает также важную для эксперимента оценку минимальной длины среды, в которой достигается наивысший коэффициент преобразования.

Задание №3

Моделирование трехчастотных волновых взаимодействий в средах с квадратичной нелинейностью

I. Изучение параметрической генерации волн при $\delta_i=0$.

Задать следующие начальные условия:

$$R_1 = 0.1, R_2 = 0, R_3 = 1.$$

Определить:

- а) период перекачки энергии, для чего измерить расстояние между максимумом и минимумом функции R_3 (измерение провести для нескольких максимумов и минимумов и найти среднее значение);
- б) максимальный коэффициент преобразования, для чего измерить максимальное значение функции R_i (измерения провести для нескольких максимумов и взять среднее значение), а затем рассчитать КПМ по формуле (11).

II. Изучение влияния затухания на параметрическую генерацию.

Введение затухания приводит к уменьшению амплитуд всех волн по мере распространения в среде.

Задать следующие начальные условия:

$$R_1 = 0.1, R_2 = 0, R_3 = 1.$$

Определить:

а) квазипериод и КПМ перекачки энергии накачки в энергию сигнальной волны функции в расстояния, пройденного волнами.

Ввести одинаковое для всех затухание $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,05$.

Для этого представить в виде графиков:

1) зависимость периода перекачки энергии для каждой из волн от номера максимума;

2) зависимость КПМ от номера максимума по формуле

$$\eta(n) = \frac{R_{1max}^2(n) + R_{2max}^2(n)}{R_3^2(0)}.$$

б) величины затухания δ , при котором процесс перекачки становится апериодическим. Изменяя затухание $\delta = 0,02, 0,03, \dots$, наблюдать кривые, соответствующие различным δ . Найти такое δ , при котором каждая из функций R_i имеет не более одного максимума.

в) зависимости КПМ перекачки от затухания волны накачки. Рассматривается случай, когда накачка происходит на частоте характеристического излучения, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 \neq 0$.

III. Изучение генерации разностной частоты при $\delta_i=0$.

Задать следующие начальные условия: $R_1 = 1, R_2 = 0, R_3 = 1$ (падение на границу двух волн равной интенсивности).

Определить:

а) периоды перекачки энергии для волн R_1 и R_3 ;

б) максимальный КПМ перекачки энергии в волну разностной частоты по формуле: $\eta_{max} = \frac{R_{2max}^2}{R_{1max}^2 + R_3^2}$.