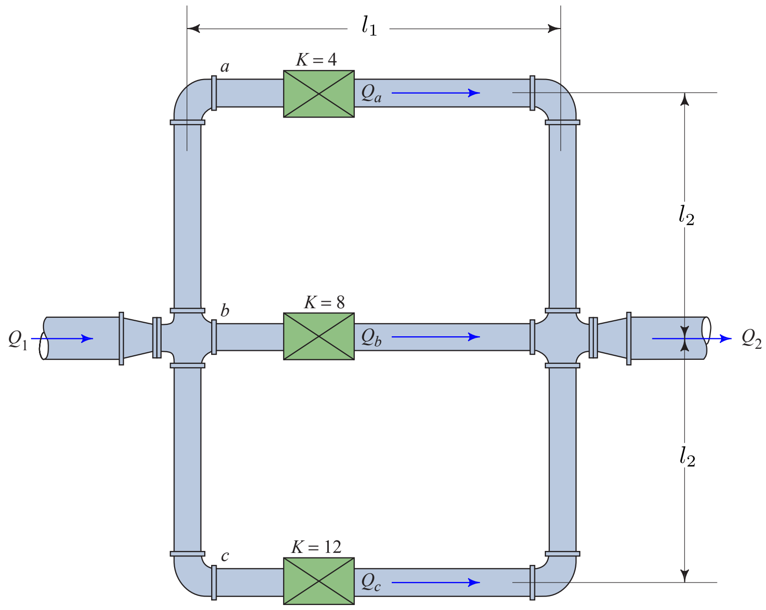
Problema N°2

En la configuración de sistema de tuberías en paralelo que se muestra en el esquema ingresan/egresan $Q_1 = Q_2 = 0.1\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ de agua a $20\,[°\mathrm{C}]$ a través de dos conductos DN 50 ($d_i = 0.0493\,[\mathrm{mm}]$). Las ramas son tuberías DN 25 ($d_i = 0.0243\,[\mathrm{mm}]$), con $l_1 = 6\,[\mathrm{m}]$ y $l_2 = 3\,[\mathrm{m}]$. Las tuberías se consideran lisas (rugosidad $\epsilon \simeq 0$). Se quiere determinar el caudal volumétrico Q_a, Q_b, y Q_c a través de cada una de las ramas. En flujo incompresible la suma de caudales es cero en cada bifurcación y la caida de presión es la misma para cada una de las tres ramas de la configuración. Con estas consideraciones:



$$Q_1 = Q_a + Q_b + Q_c \tag{10}$$

En un problema de flujo turbulento como el de interés se tiene:

$$\left[f_a\left(\frac{l_1+2l_2}{d_a} + 2\left.\frac{L}{d}\right|_c\right) + K_a\right]\frac{\bar{V}_a^2}{2} = \left(f_b\frac{l_1}{d_b} + K_b\right)\frac{\bar{V}_b^2}{2} \tag{11}$$

$$\left(f_b\frac{l_1}{d_b} + K_b\right)\frac{\bar{V}_b^2}{2} = \left[f_c\left(\frac{l_1+2l_2}{d_c} + 2\left.\frac{L}{d}\right|_c\right) + K_c\right]\frac{\bar{V}_c^2}{2} \tag{12}$$

Con $\bar{V}_i = \frac{Q_i}{S_i}$ la velocidad media en la i-ésima rama de sección transversal S_i para $i = a, b, c$. $\left.\frac{L}{d}\right|_c = 30$ la pérdida de carga puntual para los codos, y f_i es el factor de fricción aproximado por la ecuación de Swamee - Jain:

$$f_i = \frac{0.25}{\left(\log_{10}\left(\frac{\frac{\epsilon_i}{d_i}}{3.7} + \frac{5.74}{Re_{d_i}^{0.9}}\right)\right)^2} = F\left(\epsilon_i, d_i, \bar{V}_i, \nu\right) \tag{13}$$

ϵ_i la rugosidad, y d_i el diámetro de la i-ésima tubería, $i = a, b, c$. $Re_{d_i} = \frac{\bar{V}_i d_i}{\nu}$ es el número de Reynolds basado en el diámetro, con ν la viscosidad cinemática del fluido.

Se pide:

1. Utilizando el método de Newton-Raphson (con Jacobiano numérico) para resolver el sistema de ecuaciones no-lineales (10), (11) y (12), encuentre los caudales volumétricos Q_a, Q_b, y Q_c.

Datos del agua a $20\,[°\mathrm{C}]$: $\rho = 998\,[\mathrm{kg/m}^3]$, $\nu = 1.005 \times 10^{-6}\,[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$

Sugerencia: el sistema de ecuaciones lineales que debe resolver, con la matriz de coeficientes formada por el Jacobiano, está mal condicionado. Observar que los elementos del Jacobiano tienen magnitudes que difieren en al menos 4/5 ordenes de magnitud. Esta situación se puede corregir parcialmente reescaleando las ecuaciones (11) y (12) sin alterar el conjunto solución.

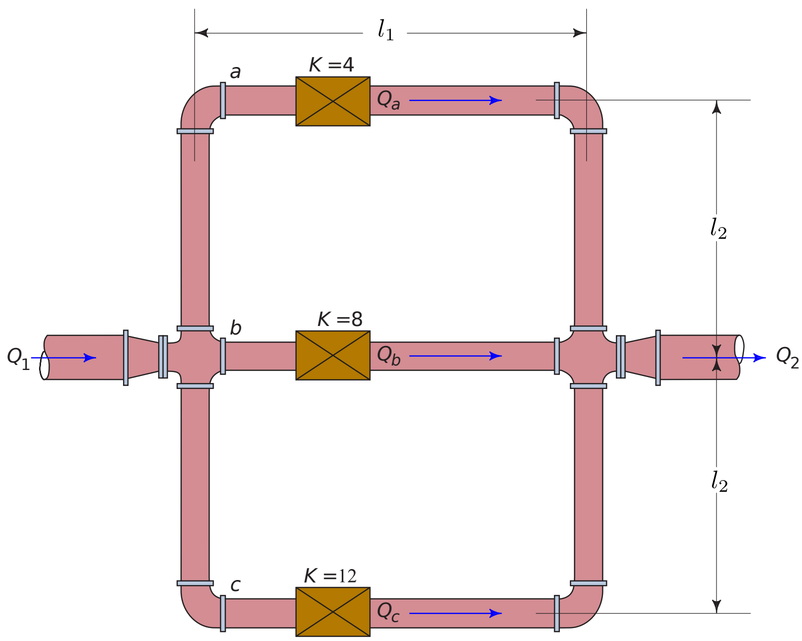
Problema N°2

Para el siguiente problema los siguientes datos son:

Tubo a	
d_a	$2{,}43d-5$
s_a	$\pi\, d_a^2/4$
ϵ_a	$0.d0$
k_a	$4.d0$

Tubo b	
d_b	$2{,}43d-5$
s_b	$\pi\, d_b^2/4$
ϵ_b	$0.d0$
k_b	$8.d0$

Tubo c	
d_c	$2{,}43d-5$
s_c	$\pi\, d_c^2/4$
ϵ_c	$0.d0$
k_c	$12.d0$



Otros datos son:

$$Q_1 = 0{,}1$$
$$l_1 = 6.d0$$
$$l_2 = 3.d0$$
$$\nu = 1{,}005d-6$$
$$\left.\frac{L}{d}\right|_c = 30.d0$$

ν : Viscosidad cinemática

$\left.\frac{L}{d}\right|_c$: Pérdida de carga puntual

Véase a continuación, el siguiente sistema de ecuaciones no lineales a resolver:

$$f_1 = Q_a + Q_b + Q_c - 0{,}1$$
$$f_2 = \left[f_a\left(\frac{l_1+2l_2}{d_a} + 2\left.\frac{L}{d}\right|_c + K_a\right)\right]\frac{\bar{V}_a^2}{2} - \left(f_b\frac{l_1}{d_b} + K_b\right)\frac{\bar{V}_b^2}{2}$$
$$f_3 = \left(f_b\frac{l_1}{d_b} + K_b\right)\frac{\bar{V}_b^2}{2} - \left[f_c\left(\frac{l_1+2l_2}{d_c} + 2\left.\frac{L}{d}\right|_c + K_c\right)\right]\frac{\bar{V}_c^2}{2}$$

Con $\bar{V}_i = \frac{Q_i}{s_i}$ (velocidad media i-ésima) y f_i definido como el factor de fricción, definido como

$$f_i = \frac{0{,}25}{\left(log_{10}\left(\frac{\frac{e_i}{d_i}}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{Re_{d_i}^{0{,}9}}\right)\right)^2} \quad , \quad Re_{d_i} = \frac{\bar{V}_i d_i}{\nu} \text{ (Nro. de Reynolds)}$$

Remplazando todos los datos y dejando a las funciones en términos de Q_i, el sistema de ecuaciones no-lineales es:

$$f_1 = Q_a + Q_b + Q_c - 0{,}1$$

$$f_2 = \left[\frac{0{,}25}{\left(log_{10}\left(\frac{\frac{e_a}{d_a}}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\left(\frac{Q_a\, d_a}{s_a\, \nu}\right)^{0{,}9}} \right) \right)^2} \left(\frac{l_1 + 2l_2}{d_a} + 2\ \frac{L}{d}\bigg|_c + K_a \right) \right] \frac{(Q_a/s_a)^2}{2} - \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{0{,}25}{\left(log_{10}\left(\frac{\frac{e_b}{d_b}}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\left(\frac{Q_b\, d_b}{s_b\, \nu}\right)^{0{,}9}} \right) \right)^2} \frac{l_1}{d_b} + K_b \right) \frac{(Q_b/s_b)^2}{2}$$

$$f_3 = \left(\frac{0{,}25}{\left(log_{10}\left(\frac{\frac{e_b}{d_b}}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\left(\frac{Q_b\, d_b}{s_b\, \nu}\right)^{0{,}9}} \right) \right)^2} \frac{l_1}{d_b} + K_b \right) \frac{(Q_b/s_b)^2}{2} - \cdots$$

$$\cdots \left[\frac{0{,}25}{\left(log_{10}\left(\frac{\frac{e_c}{d_c}}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\left(\frac{Q_c\, d_c}{s_c\, \nu}\right)^{0{,}9}} \right) \right)^2} \left(\frac{l_1 + 2l_2}{d_c} + 2\ \frac{L}{d}\bigg|_c + K_c \right) \right] \frac{(Q_c/s_c)^2}{2}$$

Para resolver este sistema 3×3 se implementará el Jacobiano numérico. Por lo que el `PROGRAM` propuesto deberá ser capaz de calcular la matriz de coeficientes, sin perder de vista lo siguiente

$$\mathbb{J}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \simeq \frac{f_i(\vec{x}+\hat{e}_j h) - f_i(\vec{x})}{h} \quad , \quad \hat{e}_j : \text{Versor en la dirección de } x_j$$

Nótese que $\hat{e}$ es un versor de n componentes que da noción de una dirección arbitraria y h es una constante que a medida que $\to 0$ se obtiene la expresión analítica de la derivada. Cuantitativamente, esta constante significa *cuanto me aparto del $\vec{x}$ propuesto.*

Portanto, se propone con valor inicial $Q_a = 0{,}03, Q_b = 0{,}03, Q_c = 0{,}03$, y $h = 1.d - 8$.

Nótese que el sistema que se quiere resolver es el siguiente

$$\mathbb{J}(\vec{x})\,\vec{\delta x} = -\vec{f}(\vec{x})$$

Siendo $(\vec{x})^k$ un valor conocido, entonces se puede obtener una nueva aproximación $(\vec{x})^{k+1}$

$$(\vec{x})^{k+1} = (\vec{x})^k + (\vec{\delta x})^k$$

Es notable que $(\vec{x})^k + (\vec{\delta x})^k$ da como resultado las raíces del hiperplano.
$\vec{\delta x}$ es una medida que indica la dirección y sentido en la cual expresa que tan lejos me tengo que alejar respecto de $\vec{x}$ para encontrar $\vec{\bar{x}}$(Raíces del problema). Es destacable mencionar que si $\vec{\delta x} \to 0$ entonces se obtendría la solución al problema. Por lo que se adoptaran los siguientes criterios de corte.

Residuo

$$||\vec{f}(x^{k+1})|| \leq \epsilon_1$$

$$\sqrt{(f_1(Q_a^{k+1}, Q_b^{k+1}, Q_c^{k+1}))^2 + (f_2(Q_a^{k+1}, Q_b^{k+1}, Q_c^{k+1}))^2 + (f_3(Q_a^{k+1}, Q_b^{k+1}, Q_c^{k+1}))^2} \leq \epsilon_1$$

Incremento

$$\frac{||\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k||}{||\vec{x}^{k+1}||} \leq \epsilon_2$$

$$\frac{\sqrt{(Q_a^{k+1} - Q_a^k)^2 + (Q_b^{k+1} - Q_b^k)^2 + (Q_c^{k+1} - Q_c^k)^2}}{\sqrt{(Q_a^{k+1})^2 + (Q_b^{k+1})^2 + (Q_c^{k+1})^2}} \leq \epsilon_2$$

adoptarátara como cota para ambas variables $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_M = 1.d - 16$.

Fíjese que se adopta un error por incremento relativo por motivos de independizarnos de la magnitud de las variables, por lo que la diferencia se expresa en fracciones de la misma.

Fijese que el sistema a resolver queda:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9999999994736 & 0{,}9999999994736 & 0{,}9999999994736 \\ 3{,}15491066E+020 & -1{,}586469844992E+020 & 0{,}000000000000 \\ 0{,}000000000000 & 1{,}586469844992E+020 & -3{,}167185035264E+020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000001490116E-003 \\ -2{,}729709231501E+018 \\ 2{,}749961935434E+018 \end{bmatrix}$$

El sistema está mal condicionado, por lo que se procede a multiplicar las funciones 2 y 3 por un factor de escala, ya que no altera el conjunto solución. Si se elige $\lambda = 1.d - 20$, entonces se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9999999994736 & 0{,}9999999994736 & 0{,}9999999994736 \\ 3{,}154910667782 & -1{,}586469845077 & 0{,}000000000000 \\ 0{,}000000000000 & 1{,}586469845077 & -3{,}167185035415 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000001490116E-003 \\ -2{,}729709231501E-002 \\ 2{,}749961935434E-002 \end{bmatrix}$$

Note que el método corta en la iteración $k = 5$. Dando como resultado:

$$Q_a = 2{,}9112359275333705E-002$$
$$Q_b = 4{,}1831037631339954E-002$$
$$Q_c = 2{,}9056604583442468E-002$$

IMPORTANTE:

En este ultimo problema hubo algunos errores en el tipeo de algunos datos. Nótese que los diámetros de los tubos a, b y c, en realidad, ya están expresados en metros, por lo que $d_i = 0{,}0243\ [m]$. Y el Q_1 en realidad vale $0{,}01\ [\frac{m^3}{s}]$.

Cambiando estos datos, se obtiene que el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9999999994736 & 1{,}000000000167 & 1{,}000000000167 \\ 183866{,}6959201 & -177355{,}8715171 & 0{,}000000000000 \\ 0{,}000000000000 & 177355{,}8715171 & -306610{,}5420998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}999977648258E-005 \\ -23{,}03248221993 \\ 225{,}5595215490 \end{bmatrix}$$

Ahora si, nótese que algunos elementos del Jacobiano tienen magnitudes que difieren en al menos 4/5 ordenes de magnitud (como lo dice la sugerencia). Por lo que, se procede aplicar un factor de escala para las ecuaciones 2 y 3 ($\lambda = 1.d - 5$). Obteniendo por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} 1{,}000000000167 & 1{,}000000000167 & 1{,}000000000167 \\ 1{,}838666959202 & -1{,}773558715170 & 0{,}000000000000 \\ 0{,}000000000000 & 1{,}773558715167 & -3{,}066105420989 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}999977648258E-005 \\ -2{,}303248221993E-004 \\ 2{,}255595215490E-003 \end{bmatrix}$$

Dando como resultado:

$$Q_a = 3{,}5574681233394344E-003$$
$$Q_b = 3{,}6847724861118324E-003$$
$$Q_c = 2{,}7577591670313152E-003$$