

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia

Relatório I

Simulações de Monte Carlo aplicadas ao estudo de Raios Cósmicos

Reynaldo Souza de Carvalho - RA: 251874

Prof^a Dr^a Carola Dobrigkeit Chinellato

2022

1 - Histórico	2
1.1. Chuveiros Atmosféricos	3
1.2. Observatório Pierre Auger	4

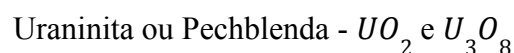
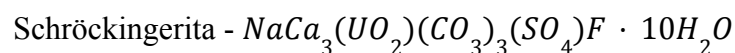
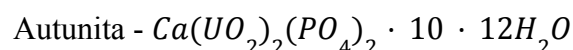
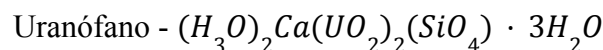
2 - Raios cósmicos e a geocronologia	6
3 - Método de Monte Carlo	7
3.1. Distribuição Uniforme	8
3.2. Distribuição Angular	9
3.3. Distribuição Linear	10
4 - Simulando o espectro de energia	11
5 - Determinando o perfil atmosférico	15
6 - Simulando interações e chuveiros	17
7 - Referências	20

1 - Histórico

Em 1903, Marie Curie (1867 - 1934), seu marido Pierre Curie (1859 - 1906) e Henri Becquerel (1852 - 1908) ganharam o prêmio nobel de física pela descoberta da radioatividade espontânea enquanto estudavam o fenômeno da fosforescência, inicialmente Becquerel acreditava que sais de Urânio fosforescentes seriam capazes de absorver luz solar e reemitir-na na forma de raios-x, para testar essa hipótese, ele enrolou diversas folhas contendo sais de

^{238}U em chapas fotográficas esperando conseguir ver a silhueta do elemento na chapa, o resultado foi positivo e ele conseguia enxergar a silhueta entretanto, ele não esperava que formas metálicas e cristalinas do elemento que não apresentam fosforescência também marcassem a chapa, com isso ficou claro que o Urânio emitia algum tipo de radiação invisível aos olhos, também ionizante, mas produzida pela própria estrutura cristalina do elemento. O trabalho desenvolvido posteriormente pelos Curie e Ernest Rutherford (1871 - 1937) ajudou a expandir a lista de materiais que poderiam emitir essa forma de radiação e quais seriam os tipos de radiação ionizante que poderiam ser emitidas.

A descoberta das partículas α , β e γ emitidas por radionuclídeos permitiu que os físicos observassem a ionização do ar e passassem a postular quanto a origem dessa radiação, a grande hipótese inicial era que a ionização do ar se dava pela emissão de partículas por elementos radioativos encontrados no solo, Urânio em especial aparece frequentemente ligado a rochas sedimentares e argilominerais se inserindo através do íon uranila (UO_2^{2+}) dentro de suas estruturas cristalinas como é o caso dos minerais.



Theodor Wulf (1868 - 1946) foi um dos primeiros a desenvolver um experimento para detectar a quantidade de partículas radioativas ionizantes presentes na atmosfera, ele desenvolveu um eletroscópio voltado para a detecção de partículas carregadas e medir a taxa de produção de íons, ele acreditava que as fontes naturais de radiação no solo eram as principais responsáveis pelas leituras que ele via em seu aparelho, então subiu ao topo da Torre Eiffel esperando que elas caíssem drasticamente, ele esperava que elas caíssem pela metade quando ele estivesse a 80 m de altitude entretanto, ele viu que essa queda só foi observada quando ele chegou ao topo da torre a 330 m de altitude, a intensidade de ionização caiu de 6 íons / cm^3 para 3.5 íons / cm^3 , ele percebeu então que a ionização deveria estar vindo por alguma fonte extraterrestre. Em 1911, Domenico Pacini (1878 - 1934) desenvolveu o mesmo experimento em diversas condições diferentes, ele observou a diferença de ionização ao colocar seu aparelho em montanhas, debaixo da água, na superfície de um lago e do mar, ele percebeu que a ionização parecia ser maior na superfície do que imerso na água

Em 1912, Victor Hess (1883 - 1964) desenvolveu o mesmo experimento mas com um grau ainda maior de meticulosidade, ele desenvolveu várias viagens de balão onde ele mediu a ionização em diversas altitudes diferentes, chegando até 5300 metros de altitude, ele percebeu que a ionização diminui conforme ele deixa a superfície até uma altitude de 1km mas que tende a aumentar novamente quando atinge as porções mais altas da atmosfera. Isso lhe

serviu como indicador de que a maior parte da radiação ionizante presente era extraterrestre e era emitida sobre o planeta, as viagens de balão foram desenvolvidas de dia e noite, inclusive durante um eclipse solar para que ele eliminasse o Sol como possível emissor desse tipo de radiação. Werner Kolhörster (1887 - 1946) repetiu os experimentos de Hess, chegando a uma altitude de 9 km onde ele confirmou que a taxa de ionização atmosférica era maior que no nível do mar.

Robert Andrews Millikan (1868 - 1953) cunhou o termo “Raios Cósmicos” e determinou que a composição dessas partículas deve ser composta por 90% prótons e 10% partículas α , enquanto elementos mais pesados e outras partículas como elétrons correspondem a apenas 1%

Esse trabalho foi associado com aquele desenvolvido por Pierre Victor Auger (1899 - 1993), ele descobriu que eventos de raios cósmicos pareciam estar relacionados, partículas primárias podem chegar até 10^{20} eV e parecem interagir com moléculas de ar na atmosfera gerando uma cascata de diversas outras partículas diferentes chamadas de chuveis atmosféricos.

1.1. Chuveiros Atmosféricos

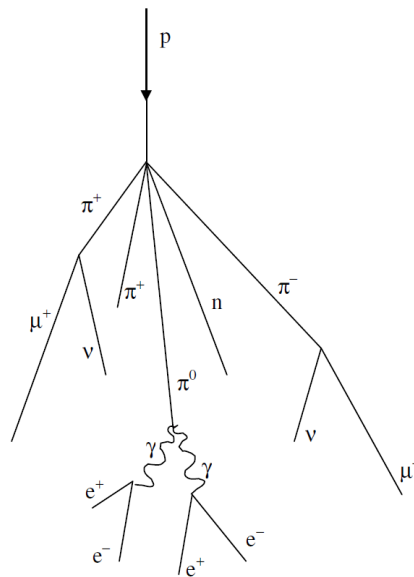


Figura 1: Esquema mostrando um chuveiro cósmico gerado por raios cósmico a partir de um próton

A primeira interação geralmente vista em um chuveiro atmosférico ocorre a dezenas de km de altitude e envolve a produção de píons e nêutrons, píons são constituídos de um quark e um antiquark e podem ser formados pela colisão de 2 prótons onde um deles seria o raio cósmico primário acelerado a uma velocidade próxima da luz e o outro constituiria o núcleo atômico de um gás atmosférico, a colisão produziria píons neutros e carregados que logo decairiam segundo a equação.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (1.0)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu \quad (1.1)$$

o decaimento de um pión carregado gera múons e neutrinos, píons neutros podem também decair gerando um par de fótons de acordo com o processo

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (1.2)$$

A energia desses fótons pode ser convertida em um par elétron-pósitron quando a partícula estiver próxima do campo elétrico de um núcleo atômico.

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad (1.3)$$

O elétron produzido pode sofrer uma queda em sua “energia cinética” ao interagir com o campo elétrico do núcleo atômico e gerar um fóton, cuja energia é equivalente a diferença entre a energia cinética do elétron antes e depois dele interagir com o núcleo atômico em um processo denominado Radiação de Freamento ou *Bremsstrahlung*.

$$e^- \rightarrow \gamma \quad (1.4)$$

A radiação γ gerada no processo pode novamente gerar um par pósitron-elétron e assim uma cascata energética é formada. Um chuvaireiro atmosférico pode envolver a formação de outras partículas mais pesadas como kaons que decaem segundo a equação

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \quad (1.5)$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0 \quad (1.6)$$

1.2. Observatório Pierre Auger

O observatório de raios cósmicos Pierre Auger conta com um campo extenso contendo 1640 estações de detecção de partículas que são utilizados na detecção de eventos astronômicos relacionados a chuvaireiros atmosféricos extensos, esses sensores compreendem uma área de 3857 km² e estão localizados na região da *Pampa Amarilla* nos departamentos de *Malargue* e *San Rafael* entre as latitudes 34.9°S e 35.5°S e as longitudes 69.6°W e 68.8°W. Os detectores estão 1,5 km distantes uns dos outros a uma altitude que pode chegar a 1610 m acima do nível do mar, essa altitude permite que os detectores consigam observar esses eventos enquanto eles ainda possuem uma alta quantidade de energia e não tenham interagido com a atmosfera de forma excessiva.

A média da declividade geral do terreno onde os detectores ficam é de 0.362% sendo mais suave na região central do campo e mais acentuado ao redor da planície, esse valor nos permite ter uma ideia geoespacial muito mais completa sobre a posição desses detectores e que pode servir como um bom auxílio a interpretação física dos chuvaireiros atmosféricos.

Diversas informações geográficas dos detectores foram publicadas em anexo na porção de *Open Data* na página da internet do próprio observatório, a partir dessas informações, podemos determinar que a altitude média para os detectores é de 1414 m enquanto os valores máximos e mínimos são de 1619 e 1344 m respectivamente, podemos representar essas informações por meio do histograma a seguir.

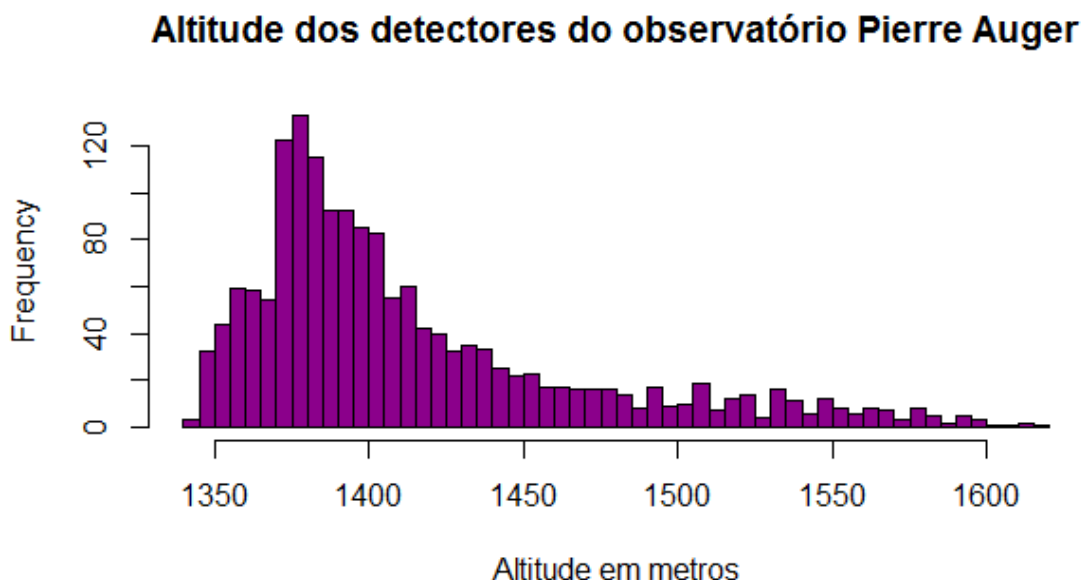


Figura 2: Histograma feito no software Rstudio descrevendo a altitude dos detectores do observatório Pierre Auger com relação a sua frequência

Os detectores do observatório Pierre Auger utilizam o princípio da radiação de Cherenkov onde uma partícula, principalmente um elétron, emite radiação ao passar por um meio com uma velocidade maior que aquela que a luz poderia atingir, no caso de um raio cósmico, o decaimento de um pión neutro pode gerar um par pósitron-elétron acelerados ao ponto que emitem radiação de Cherenkov, essa radiação pode ser usada para determinar a direção e a energia do raio cósmico que gerou o pión neutro.

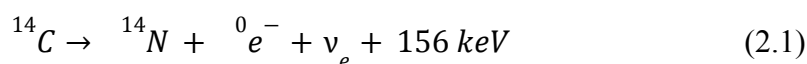
O observatório utiliza dois métodos de detecção, o primeiro utiliza um tanque de 12 mil litros de água extremamente pura, quando uma partícula interage com a água dentro do tanque, a radiação de Cherenkov emitida é captada por tubos que a transformam em sinais elétricos e os transmite pela antena para ser analisado nos computadores do observatório principal. O outro método utilizado envolve a interação do raio cósmico primário com o nitrogênio na atmosfera, o gás consegue emitir radiação ultravioleta e formar grandes traços que podem ser vistos pelos detectores fluorescentes.

2 - Raios cósmicos e a geocronologia

Em 1939, Serge Korff (1906 - 1989) determinou que raios cósmicos primários poderiam gerar nêutrons na atmosfera, esses nêutrons então poderiam interagir com o nitrogênio na atmosfera gerando a seguinte equação.



A equação abaixo determina que um nêutron pode reagir com o nitrogênio gasoso e gerar um próton e Carbono-14, um isótopo de carbono com tempo de meia vida de 5730 ± 40 anos. Um dos nêutrons desse isótopo pode decair e se transformar em um próton, assim transformando o carbono em nitrogênio e liberando uma partícula β e um elétron antineutrino.



Willard Libby (1908 - 1980) percebeu que o carbono-14 emitido sofre todas as reações que o carbono normalmente sofreria, com mudanças mínimas na forma em que interage com a natureza, ele pode ser transformado em dióxido de carbono (CO_2) e participar do ciclo do carbono, ele é então fixado por bactérias no solo e pelas plantas no processo de fotossíntese, os animais adquirem esse carbono ao comer essas plantas ou respirando ele diretamente. Quando os seres vivos morrem, eles deixam de adquirir esse carbono-14 enquanto aquele já existente em seus organismos passa a sofrer o processo de decaimento radioativo naturalmente. Isso garante que todo organismo possui uma espécie de relógio nuclear natural, e que pode ser medido a partir da quantidade de carbono-14 presente em seu organismo, esse método de datação se tornou fundamental para a área da paleontologia e a geocronologia pois permitiu que organismos que viveram entre 500 e 50.000 anos atrás pudessem ser datados com alto grau de precisão.

O processo de datação por Carbono-14 é muito útil para determinação da idade geológica de animais e plantas que já morreram mas, é um processo limitado à ambientes relativamente recentes e cobertos com vegetação, existem diversos outros elementos gerados por raios cósmicos que podem ser mais práticos para outros tipos de datação, esses elementos são chamados de Nuclídeos Cosmogênicos e sua datação fornece informações valiosas quanto ao transporte e deposição de rochas sedimentares ao estimar uma idade para a exposição dessas rochas. São geralmente formados pelo processo de espalação de raios cósmicos a partir da colisão de nêutrons diretamente com a estrutura cristalina da rocha, os elementos formados podem ficar presos na estrutura cristalina e gerar pequenos agregados que podem ser observados por espectrometria.

Rochas frequentemente usadas no processo de datação são granitos e arenitos pois eles apresentam grande quantidade de quartzo cuja estrutura cristalina é constituída quase

exclusivamente de sílica (SiO_2) onde o oxigênio reage com o nêutron cósmico através da reação.



3 - Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma classe de métodos computacionais baseado em simulações matemáticas de larga escala e com grande repetição, o princípio é que problemas determinísticos podem ser resolvidos a partir de diversos experimentos com muita repetição e uso de variáveis aleatórias contínuas e métodos de geração de números aleatórios. Esse método tem sido usado em diversas áreas do conhecimento, especialmente para áreas em que medições diretas são impossíveis ou com grande incerteza.

As variáveis aleatórias utilizadas no método de Monte Carlo são definidas por uma função de densidade de probabilidade (f.d.p), essa função é definida por uma variável aleatória (v.a) x tal que

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (3.1)$$

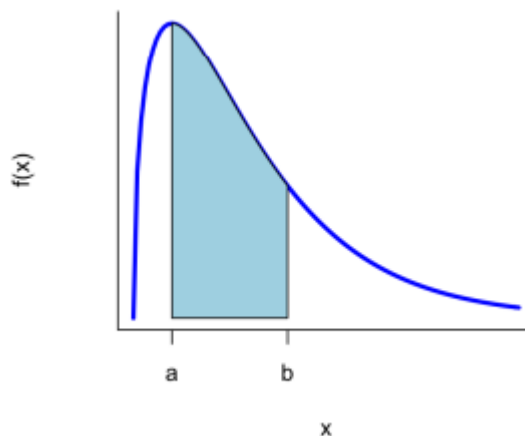


Figura 3: Gráfico mostrando a integral onde $a < X \leq b = \int_a^b f(x) dx$

toda variável aleatória que contém uma função de densidade de probabilidade associada é considerada contínua, a probabilidade de que essa variável pertença a reta $(a,b]$, $a < b$ é dada por

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (3.2)$$

É importante notar que quando x é uma v.a. contínua

$$P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a \leq x < b) \quad (3.3)$$

podemos avançar e determinar que a função densidade de probabilidade $f(x)$ é definida de forma que x sempre assumo um valor entre o intervalo x e $x + dx$, temos também que a probabilidade de que a variável pertença a um intervalo de uma reta entre $(-\infty, x]$ temos uma função de distribuição acumulada (f.d.a), e a denotaremos por F_x

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)u \, du \quad (3.4)$$

3.1. Distribuição Uniforme

Temos que uma v.a tem distribuição uniforme no intervalo $[a,b]$, $a < b$ se a função é determinada pela seguinte expressão

$$f_x(x) = \left\{ \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b, 0 \text{ caso contrário.} \right. \quad (3.5)$$

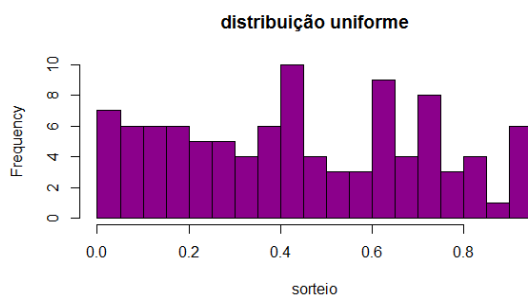
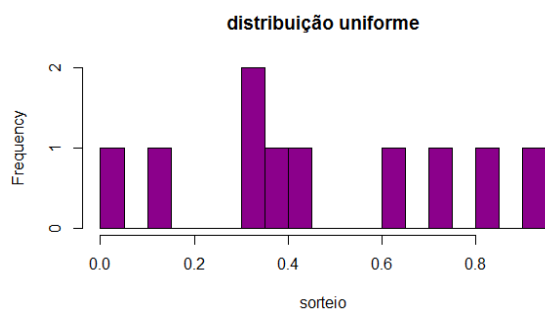
O cálculo da função de distribuição é dada pela expressão

$$F_x(x) = 0, x < a \quad (3.6)$$

$$F_x(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \quad (3.7)$$

$$F_x(x) = 1, x > b \quad (3.8)$$

A partir da expressão podemos determinar um número pseudo-randômico e criar o seguinte gráfico.



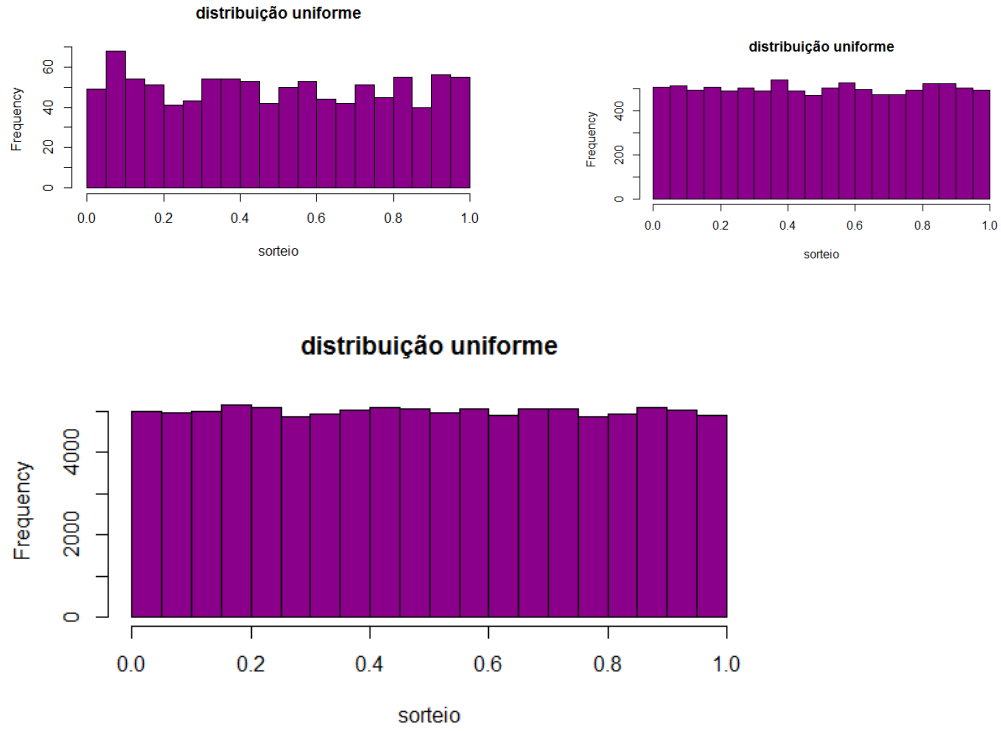


Figura 4: Histogramas desenvolvido no software Rstudio mostrando a distribuição uniforme de uma f.d.p $F_x(x)$ para 10, 100, 1000, 10000 e 100000 valores respectivamente

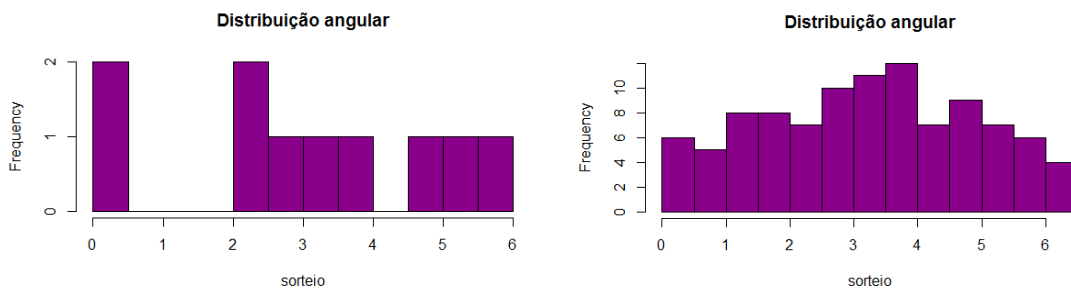
3.2. Distribuição Angular

A distribuição angular pode ser determinada pela seguinte expressão

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta) = A d(\theta) = 1 \quad (3.9)$$

$$u = \int_{\theta}^u f(u) du = 1 \quad (3.10)$$

$$\theta = 2\pi u \quad (3.11)$$



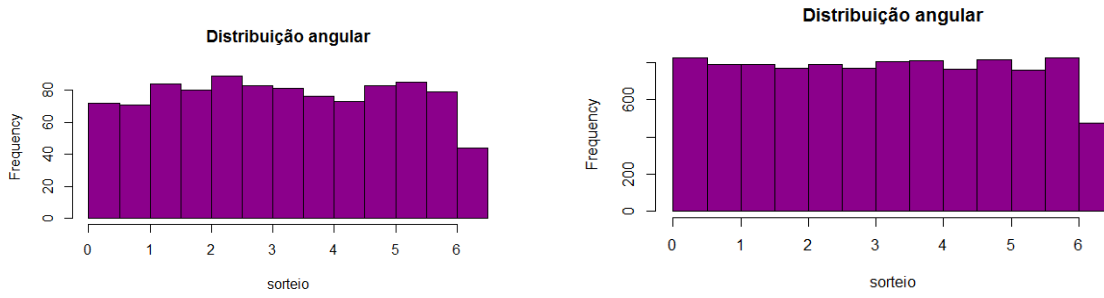


Figura 5: Histogramas mostrando a distribuição angular de uma f.d.p

3.3. Distribuição Linear

Uma v.a. tem distribuição aleatória triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p for

$$f_x(x) = 0, \text{ se } x < 0 \quad (3.12)$$

$$f_x(x) = Cx, \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

$$f_x(x) = C(1 - x) \text{ se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (3.14)$$

$$f_x(x) = 0, \text{ se } x > 1 \quad (3.15)$$

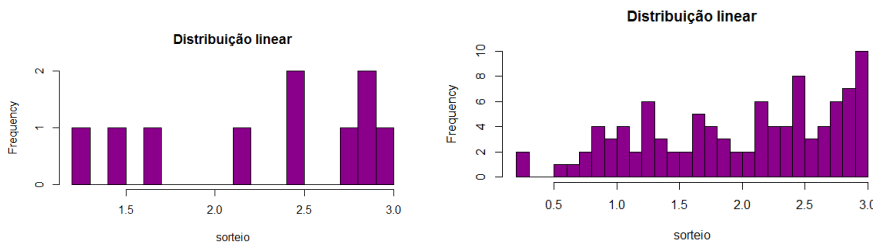
A distribuição linear é definida entre 3 e 0 a partir da seguinte expressão

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 Cx dx = 1 \quad (3.16)$$

$$g(x) dx = \frac{2}{9} x dx \quad (3.17)$$

$$u^0 = \int_0^u f(u) du = \int_0^{x^0} f(x) dx = \int_0^{x^0} \frac{2}{9} x dx \quad (3.18)$$

$$\frac{x^2}{9} = x^0 = \sqrt{9u^0} = 3\sqrt{u^0} \quad (3.19)$$



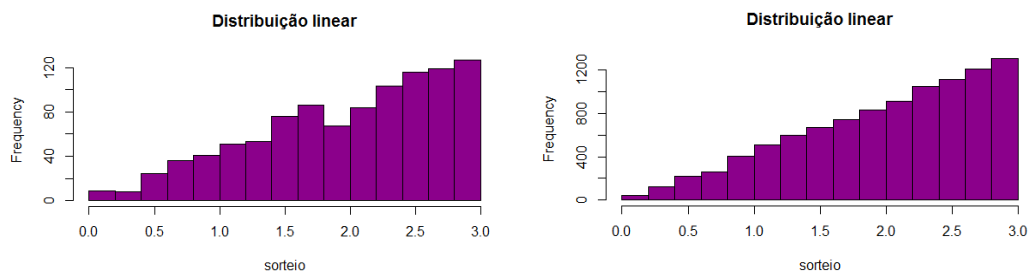


Figura 6: Histograma mostrando a distribuição linear de uma f.d.p para 10, 100, 1000 e 10000 valores

4 - Simulando o espectro de energia

O estudo do espectro de energia associado ao fluxo de raios cósmicos interagindo com a atmosfera é de grande importância para as ciências pois apresenta uma grande ameaça para nossa indústria de eletrônicos e telecomunicações. Os raios cósmicos podem atingir energias na escala de 10^{20} eV e gerar cascatas e reações em cadeia que podem se estender por quilômetros e assim gerar mais partículas ainda extremamente energéticas, essas cascatas, denominadas de chuviscos atmosféricos extensos são detectadas por observatórios ao redor do mundo inteiro e nos fornecem informações importantes sobre suas origens, sua energia e como interagem com as partículas na atmosfera.

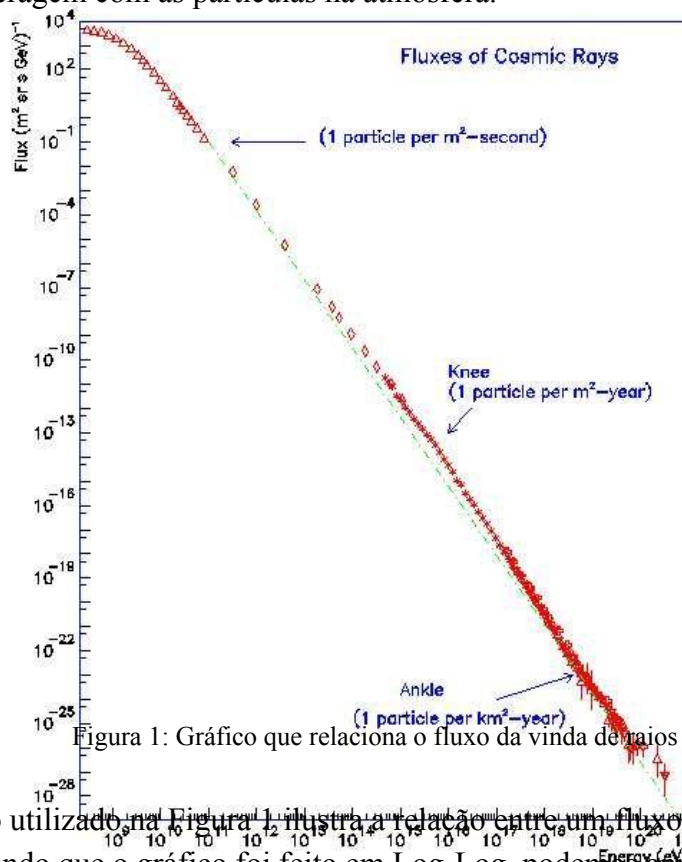


Figura 1: Gráfico que relaciona o fluxo da vinda de raios cósmicos com sua energia

O gráfico utilizado na Figura 1, mostra a relação entre um fluxo de partículas e sua energia, considerando que o gráfico foi feito em Log-Log, podemos aproximá-lo a seguinte curva monomial.

$$Y = mx^k \quad (4.0)$$

onde Y representa o fluxo de partículas, x representa a energia, m representa o coeficiente angular e k é o coeficiente linear, temos então

$$\phi = mE^k \quad (4.1)$$

o logaritmo do fluxo pode ser descrito como tal

$$\text{Log}(\phi) = k\text{Log}(E) + \text{Log}(m) \quad (4.2)$$

assumindo que $\text{Log}(m) = b$ e sendo b constante, temos que.

$$\text{Log}(\phi) = k\text{Log}(E) + b \quad (4.3)$$

$$\phi = E^k \cdot 10^b \quad (4.4)$$

$$\phi = E^k \cdot m \quad (4.5)$$

A curva apresentada na figura 1 apresenta vários coeficientes lineares em porções diferentes da figura, para facilitar os cálculos, nós iremos generalizar a curva como uma equação de reta com apenas um único coeficiente. Voltando para a equação 3.4, podemos construir uma função que representaria uma reta em um gráfico com escala log-log

$$F(E) = E^k \cdot 10^b \quad (4.6)$$

para achar o coeficiente linear, nós podemos escolher dois pontos e aplicá-los ao logaritmo da equação 3.4

$$A = (\phi_1, E_1) = (F(x_1), x_1) \text{ e } B = (\phi_2, E_2) = (F(x_2), x_2) \quad (4.7)$$

$$\text{Log}[F(x_1)] = k\text{Log}(x_1) + b \quad (4.8)$$

$$\text{Log}[F(x_2)] = k\text{Log}(x_2) + b \quad (4.9)$$

x_1 e x_2 são pontos escolhidos na abscissa da curva, k pode ser expresso por

$$k = \frac{\text{Log}(F(x_2)) - \text{Log}(F(x_1))}{\text{Log}(x_2) - \text{Log}(x_1)} \quad (4.10)$$

A partir do gráfico na figura 1, escolhemos os valores para os pontos.

$$A = (F(x_1), x_1) = (10^{-1}, 10^{11}) \text{ e } B = (F(x_2), x_2) = (10^{-4}, 10^{12})$$

$$k = \frac{\text{Log}(10^{-4}) - \text{Log}(10^{-1})}{\text{Log}(10^{12}) - \text{Log}(10^{11})} \quad (4.11)$$

$$k = \frac{-4 - (-1)}{12 - 11} = -3 \quad (4.12)$$

É importante mencionar que essa expressão sempre fornecerá um coeficiente linear negativo de acordo com o gradiente da curva na figura 1, caso fosse necessário que o coeficiente fosse positivo, poderíamos usar a propriedade do logaritmo em que.

$$\text{Log}(x_1) - \text{Log}(x_2) = -\text{Log}(x_2 - x_1) \quad (4.13)$$

Dessa forma, podemos aproximar o fluxo de raios cósmicos como a curva exponencial

$$\phi = mE^{-3} \quad (4.14)$$

Para podermos sortear os diferentes números pseudorandômicos, precisamos normalizar a função considerando que E é uma função de energia que tende ao infinito

$$\int_1^{\infty} \phi dE = 1 \quad (4.15)$$

$$\int_1^{\infty} mE^{-3} dE = 1 \quad (4.16)$$

$$\int_1^{\infty} mE^{-3} dE = -\frac{m}{2E^2} + C \quad (4.17)$$

$$\lim_{E \rightarrow \infty} -\frac{m}{2E^2} + c = 1 \quad (4.18)$$

$$0 + C = 1 \quad (4.19)$$

onde C é a constante de integração, podemos supor um valor para a $C = \frac{m}{2}$

$$\frac{m}{2} = 1, m = 2 \quad (4.20)$$

$$\phi = 2E^{-3} \quad (4.21)$$

Podemos sortear valores diferentes de energia a partir de um valor u^0 entre 1 e 0 a partir da seguinte expressão

$$u^0 = \int_1^{E^0} 2E^{-3} dE \quad (4.22)$$

$$E^0 = \pm \sqrt{\frac{1}{1-u^0}} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^0}} \quad (4.23)$$

Podemos ter os seguintes histogramas a partir da equação acima ao sortearmos 10, 100 e 1000 números pseudorandômicos respectivamente.

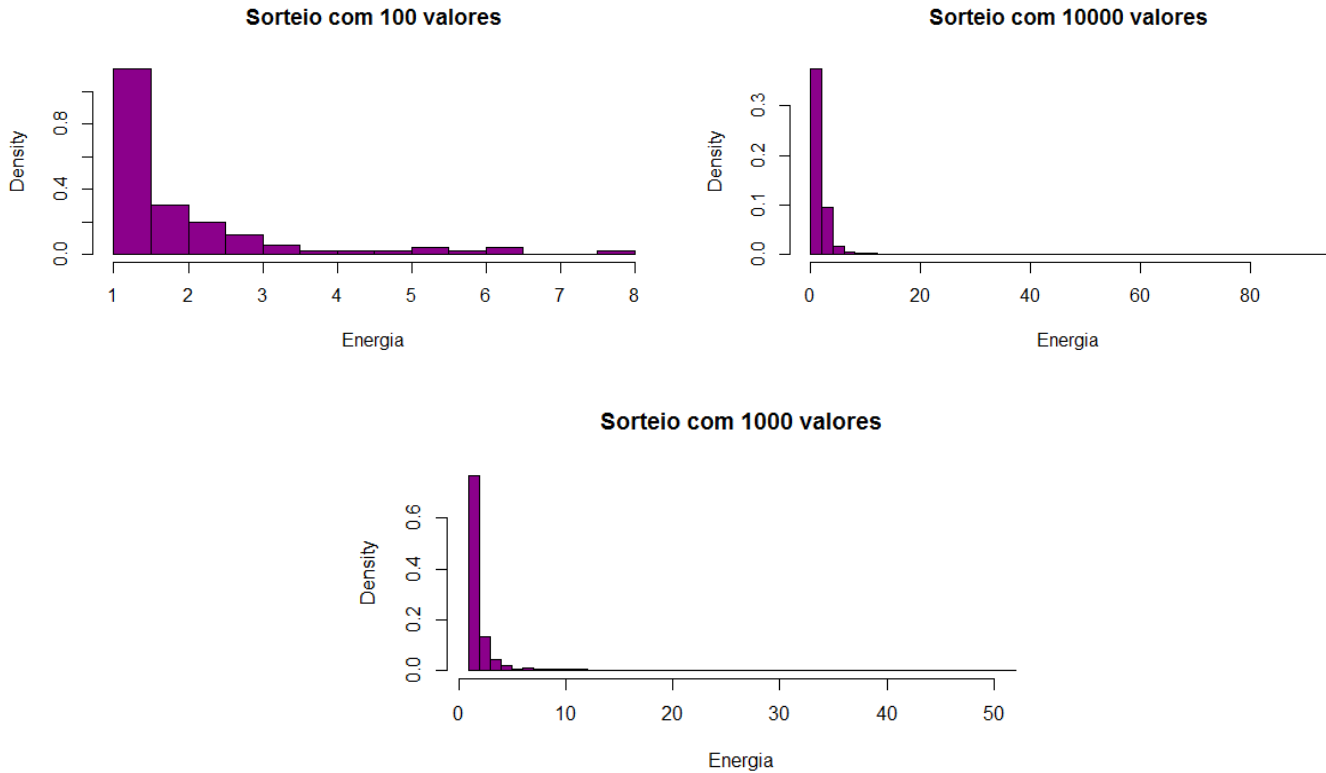


Figura 2: as figuras são de 3 gráficos desenvolvidos no Rstudio mostrando os valores das energias calculadas junto com a densidade de frequência em que aparecem para 10, 100 e 1000 números pseudorandômicos

Podemos observar que as partículas com menor energia apresentam as maiores densidades de frequência, dessa forma podemos ver que elas são as que mais interagem com a nossa atmosfera, essas partículas podem ter diversas origens, podendo vir do sol ou de outras estrelas em eventos de baixa energia. Apesar destas partículas serem numerosas, não podemos determinar com precisão a quantidade de partículas que podem chegar à atmosfera terrestre ao longo de alguma unidade de tempo, isso ocorre pois o fluxo dessas partículas é regido pela atividade da interação entre o campo magnético terrestre e solar. A heliosfera, a camada mais distante da atmosfera solar, é capaz de barrar boa parte do espectro energético extragaláctico de raios cósmicos, dependendo do ciclo solar, ela pode recuar e se tornar mais fraca durante um mínimo solar, ou se tornar mais forte durante um máximo, dessa forma, o fluxo de raios cósmicos depende da atividade solar. O próprio campo magnético terrestre também é capaz de defletir algumas partículas em sua superfície.

5 - Determinando o perfil atmosférico

Os raios cósmicos tem sua energia gradativamente absorvida conforme ionizam as partículas da atmosfera que interagem, quanto maior a distância percorrida na atmosfera, maior será a quantidade de interações desenvolvidas, dessa forma podemos descrever um modelo para a trajetória dessas partículas a partir da profundidade vertical atmosférica e a quantidade de matéria presente.

$$X(h) = X_0 e^{-gM_m h/RT} \quad (5.0)$$

$X(h)$ é a profundidade atmosférica como função da altitude, ela é descrita como o produto da profundidade atmosférica ao nível do mar e uma função exponencial natural que tende a 0. Nessa equação R é a constante universal dos gases, indicando que esse modelo considera as moléculas de gás na atmosfera como ideais, T é a temperatura ao nível do mar, g é a aceleração gravitacional e M_m é a massa molar dos gases presentes.

A massa molar do ar seco é determinada pela massa molar e a fração molar dos principais gases na atmosfera, para este modelo, iremos considerar uma porção da atmosfera completamente uniforme e composta exclusivamente por Nitrogênio e Oxigênio a partir da seguinte expressão

$$Mm_{mistura} = X_{O_2} \cdot Mm_{O_2} + X_{N_2} \cdot Mm_{N_2} \quad (5.1)$$

$$Mm_{mistura} = 32 \cdot 21\% + 28 \cdot 79\% \quad (5.2)$$

$$Mm_{mistura} = 28,84 \text{ g/mol} = 0.02884 \text{ kg/mol} \quad (5.3)$$

É importante considerar que o modelo de uma atmosfera uniforme é viável somente até a camada da mesopausa da atmosfera terrestre (~90km), a fração molar dos gases principais é muito baixa nas porções superiores da atmosfera, chegando a ser nula no topo da estratosfera.

A profundidade atmosférica é uma grandeza expressa em g/cm^2 que considera a variação da densidade atmosférica com relação a uma altitude h e corresponde a integral na distância da densidade atmosférica ρ , em g/cm^3 , ao longo do eixo do chuveiro atmosférico desde o topo da atmosfera (onde $\rho = 0$) até o nível de observação. Ao nível do mar, podemos usar a profundidade atmosférica como sendo de 10000 kg/m^2 .

A temperatura T ao nível do mar é definida por convenção como sendo de $15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ K}$, g é definida como $9,8 \text{ m/s}^2$ e R será $8,314 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Com as informações dadas, podemos calcular a densidade atmosférica a partir da equação 4.0

$$X(h) = 10^4 \cdot e^{-\frac{9.8 \cdot 0.02884 \cdot h}{8.314 \cdot 288.15}} \quad (5.4)$$

podemos aproximar essa expressão como

$$X(h) = 10^4 \cdot e^{-0.000117976h} \quad (5.5)$$

onde $X(h)$ representa a profundidade atmosférica em kg/m^2 em uma dada altura h em metros. Podemos usar essa expressão para calcular a profundidade atmosférica ao longo dos detectores do observatório Pierre Auger de acordo com o histograma abaixo.

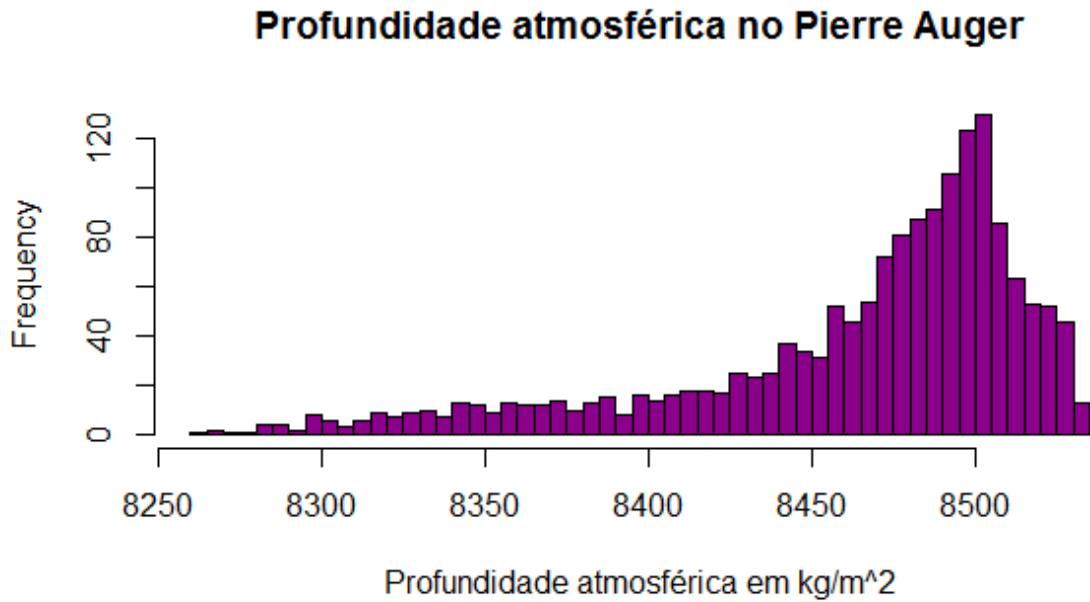


Figura 4: Histograma mostrando a profundidade atmosférica para os diferentes detectores dentro do observatório Pierre Auger, é possível calcular que o valor médio da profundidade atmosférica é de 8463.867 kg/m^2 enquanto o desvio padrão da medida é de 54.8

Quando comparamos o modelo com dados experimentais vemos que para a troposfera, a camada mais superficial da atmosfera, essa expressão é satisfatória e consegue determinar a profundidade atmosférica com uma margem de erro pequena. Em uma altitude de 5km onde a pressão atmosférica é aproximadamente 50% daquela na superfície, a profundidade atmosférica determinada pela fórmula é de 5536 kg/m^2 entretanto, quando olhamos para altitude maiores como a zona de produção de múons por raios cósmicos primários, vemos que enquanto a profundidade atmosférica experimental foi de $\approx 1300 \text{ kg/m}^2$, o dado obtido pela fórmula foi de 1703 kg/m^2 para uma altitude de 15 km.

6 - Simulando interações e chuviscos

Podemos simular a quantidade de interações desenvolvidas pelos raios cósmicos considerando a probabilidade da partícula interagir em uma determinada fatia da atmosfera, utilizando o modelo para profundidade atmosférica e sabendo a altitude dos detectores do observatório, podemos desenvolver algumas simulações

Podemos expressar o caminho percorrido e a quantidade de interações feitas pelos raios cósmicos a partir da seguinte expressão

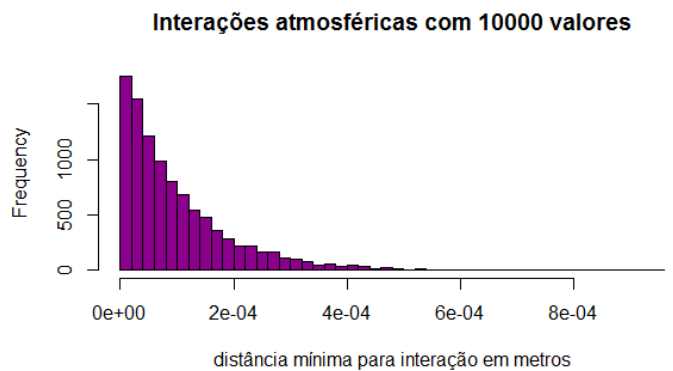
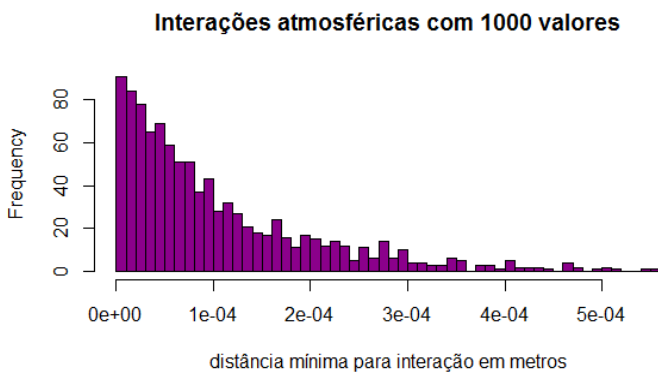
$$\int_0^{u^0} f(u) du = \int_0^{z^0} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{z}{\lambda}} dz \quad (6.0)$$

$$u^0 = 1 - e^{-\frac{z^0}{\lambda}} \quad (6.1)$$

$$z^0 = \frac{\ln(\frac{1}{u^0})}{\lambda} \quad (6.2)$$

Podemos sortear alguns números para o valor de u^0 e substituí-los na equação 5.2, a incógnita λ será equivalente ao livre caminho médio de interação, a profundidade atmosférica calculada anteriormente, essas observações podem ser usadas para simular a distância mínima que um raio cósmico deve percorrer para que possa interagir com uma partícula na atmosfera terrestre.

Supondo que a atmosfera seja uniforme e composta exclusivamente de O_2 e N_2 atuando como gases ideais com uma profundidade atmosférica de 10000 kg/m^2 ao nível do mar, podemos simular a distância mínima para que uma interação ocorra entre um raio cósmico e uma molécula de gás



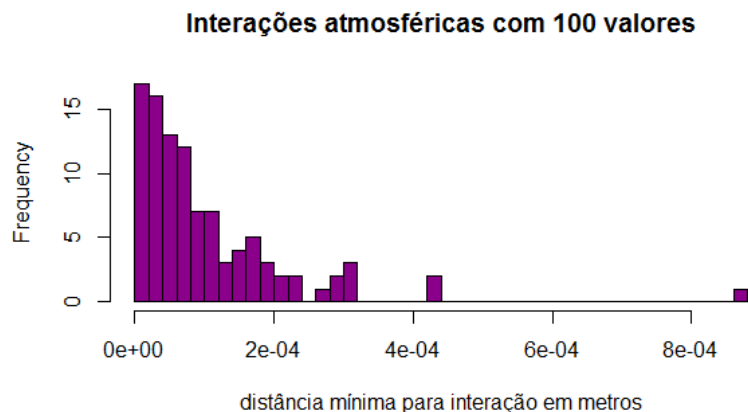


Figura 5 Histogramas mostrando a distância mínima de interação para 100, 1000 e 10000 números sorteados de forma aleatória considerando as condições atmosféricas citadas acima.

É possível observar que nas condições do nível do mar, as partículas da simulação com 100 valores interagiram quase imediatamente ao entrar na atmosfera, mais de 60% das partículas não ultrapassaram $10^{-4} m = 100 \mu m$ antes de interagir com alguma molécula na atmosfera enquanto apenas algumas partículas ultrapassaram $500 \mu m$, a distância mínima média para 100 valores foi de $103 \mu m$.

Podemos fazer a mesma simulação, mas dessa vez considerando o outro extremo da atmosfera terrestre, a 90 km de altitude a profundidade atmosférica é de $0.244887 kg/m^2$, podemos então fazer um histograma a partir dessa altitude.

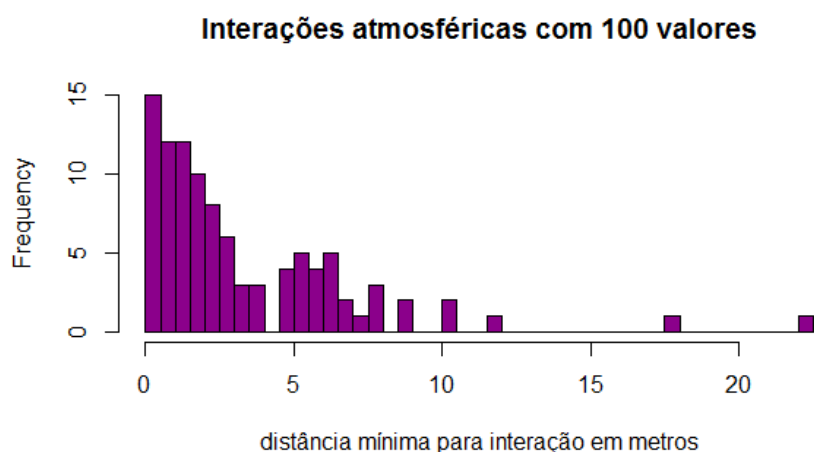
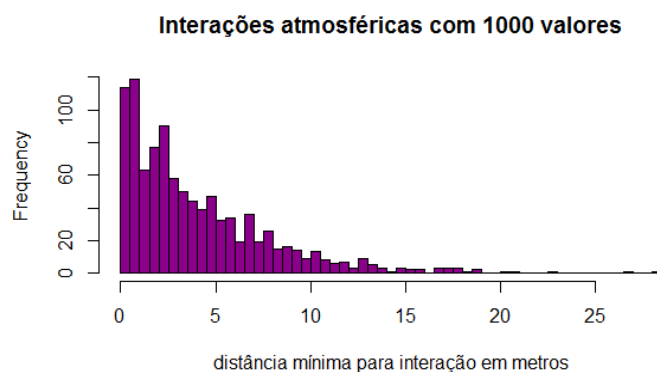
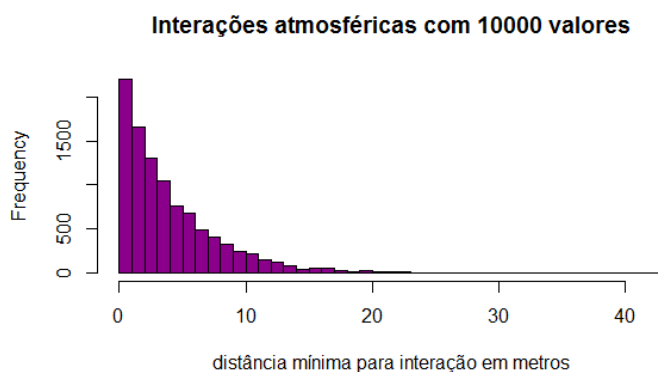


Figura 6 Histogramas mostrando a distância mínima para uma interação considerando a profundidade atmosférica quase nula.

De acordo com as condições atmosféricas, a distância mínima média é de 3.35 m para a simulação de 100 valores, 4.02 m para 1000 valores e 4.07 m para 10000 valores, vemos que nessa simulação, a distância mínima é muito maior pois é inversamente proporcional a profundidade atmosférica, as partículas precisam atravessar distâncias maiores antes de conseguirem interagir.

7 - Referências

- [1] - Acesso em 30/06/22
<https://www.intmath.com/exponential-logarithmic-functions/7-graphs-log-semilog.php>
- [2] - Acesso em 03/09/22
https://www.cs.mcgill.ca/~rwest/wikispeedia/wpcd/wp/e/Earth%2527s_atmosphere.htm
- [3] - Acesso em 31/06/22
https://cosmic.lbl.gov/SKliewer/Cosmic_Rays/Interaction.htm
- [4] - Acesso em 03/09/22
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Particles/muonatm.html>
- [5] - Acesso em 02/09/22
<http://www.atmo.arizona.edu/students/courselinks/fall14/atmo336/lectures/sec1/structure.htm#::~:~:text=Thus%2C%20half%20the%20weight%20of,500%20km%20above%20sea%20level>
- [6] - Acesso em 30/06/22
Cruz Moreno, J., Sciutto, S. Characterization of the atmospheric depth profile using the ground-level temperature: The case of Malargüe, Argentina. *Eur. Phys. J. Plus* 128, 104 (2013). <https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13104-3>
- [7] - Acesso em 03/06/22
<https://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/CosmicRay/Showers.html>
- [8] - Acesso em 30/06/22
Alan Watson 2012 *Phys. World* 25 (08) 35
- [9] - Acesso em 30/06/22
<https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000200030>