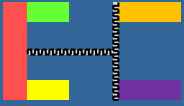


TEMA 2.

UNIDAD ARITMÉTICO-LÓGICA

dtic

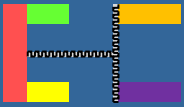




UNIDAD ARITMÉTICO-LÓGICA

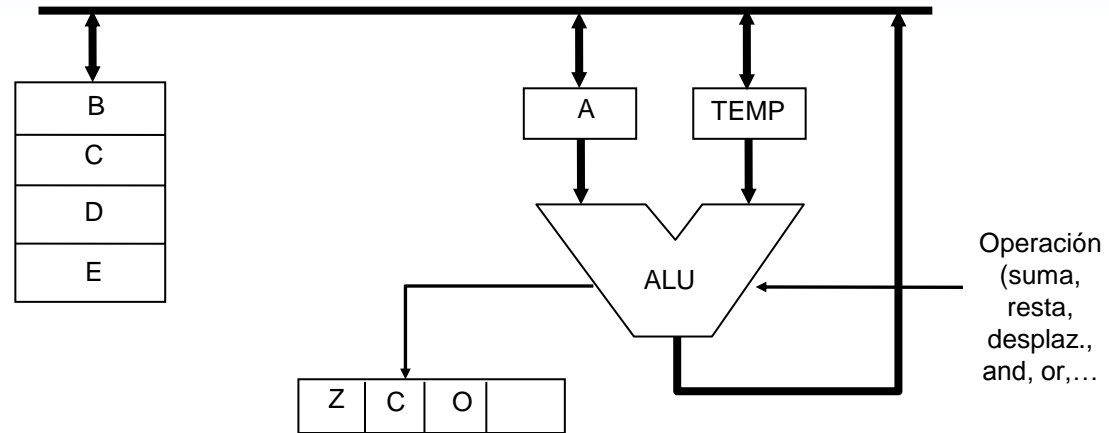
Índice

- ⊙ Introducción
- ⊙ Unidad lógica
- ⊙ Operadores de desplazamiento
- ⊙ Unidad aritmética entera
 - ⊙ Sumar y restar
 - ⊙ Multiplicar y dividir
- ⊙ Unidad aritmética flotante. IEEE 754
 - ⊙ Sumar y restar
 - ⊙ Multiplicar y dividir
 - ⊙ Técnicas de redondeo

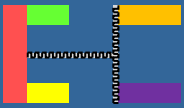


ESTRUCTURA GENERAL ALU

Introducción



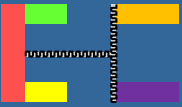
- ⊙ Operador aritmético, lógico, desplazamiento (uno o varios) (ALU)
- ⊙ El Acumulador
- ⊙ Uno o varios registros temporales
- ⊙ Indicadores de resultado
 - ⊙ Acarreo (C)
 - ⊙ Negativo (N)
 - ⊙ Desbordamiento (O)
 - ⊙ Cero (Z)



OPERACIONES TÍPICAS

Introducción

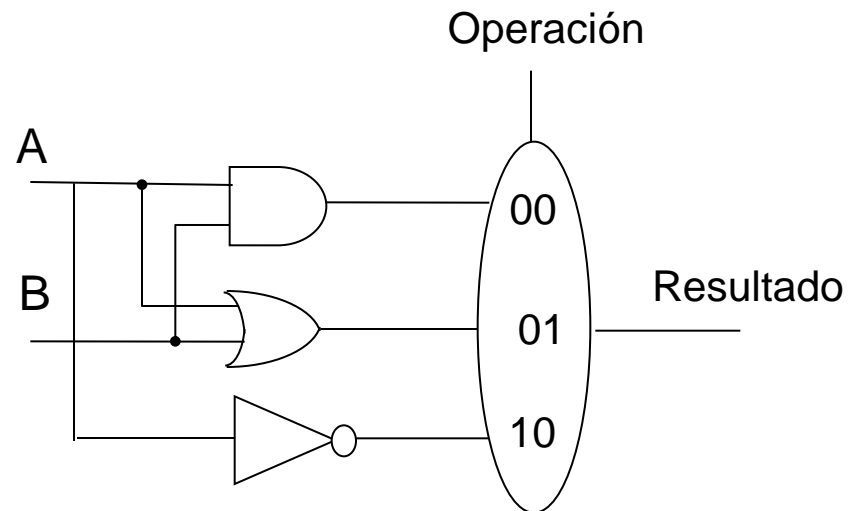
Operación	Potencia de cálculo			
	Mínima	Baja	Media	Alta
Suma/Resta en binario	Comb	Comb	Comb	Comb
Suma/Resta en coma flotante	Prg/Copr	Prg/UC	UC	Secu
Multiplicación en binario	Prg/Copr	Prg/UC	UC	Comb
Multiplicación en coma flotante	Prg/Copr	Prg/UC	UC	Secu
División en binario	Prg/Copr	Prg/UC	UC	Secu
División en coma flotante	Prg/Copr	Prg/UC	UC	Secu
Operaciones lógicas	Comb	Comb	Comb	Comb
Desplazamientos unitarios	Comb	Comb	Comb	Comb
Desplazamientos múltiples	Prg	Prg/UC	UC	Comb

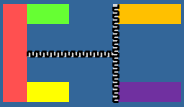


OPERACIONES LÓGICAS

Unidad
lógica

- ⊙ Fáciles de implementar \Rightarrow Correspondencia directa con Hardware.
- ⊙ Puertas lógicas AND, OR, OR-EXCLUSIVA, INVERSORES,...



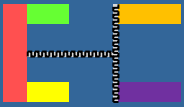


OPERACIONES DE DESPLAZAMIENTO

Operadores de desplazamiento

- Consisten en trasladar los bits de una palabra hacia la izquierda o derecha.
- Dependiendo de cómo se traten los extremos, se obtienen tres tipos de desplazamientos:
 - Lógicos
 - Circulares
 - Aritméticos

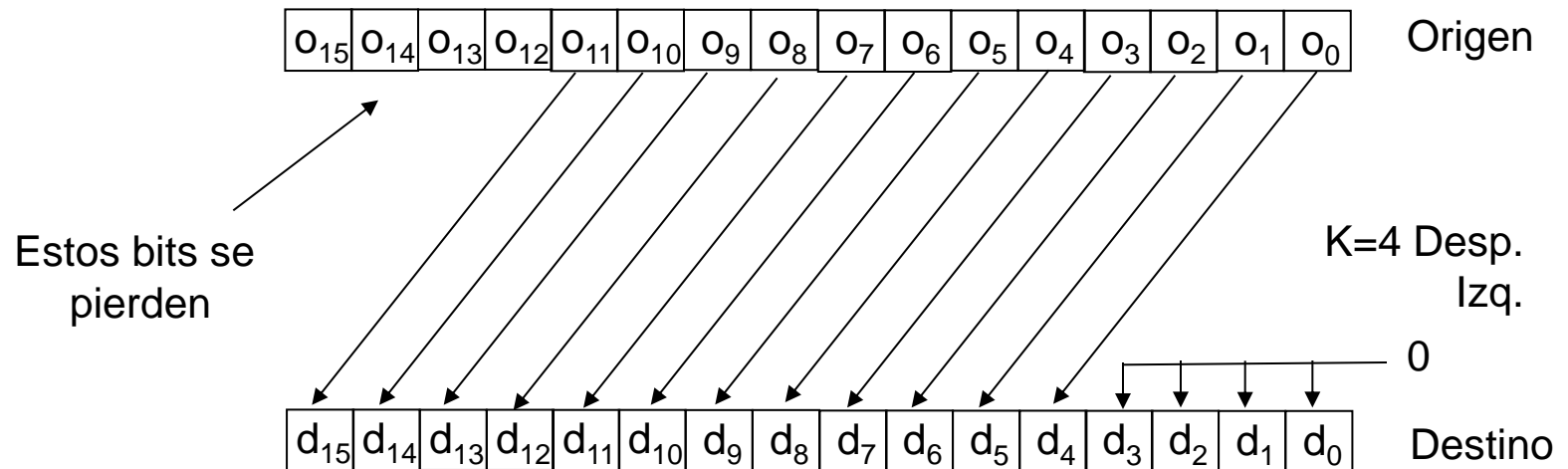




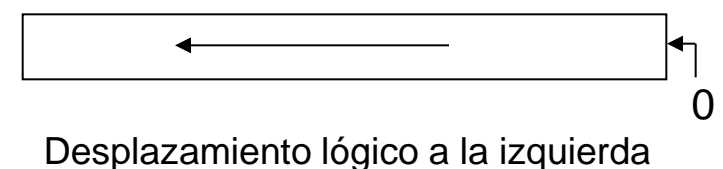
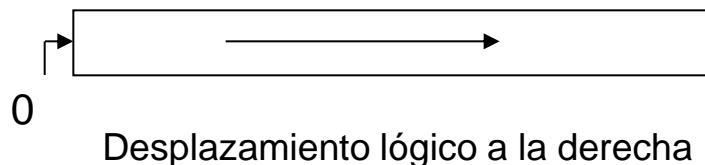
DESPLAZAMIENTOS LÓGICOS

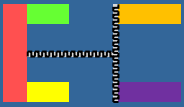
Operadores de
desplazamiento

- Los valores extremos se completan con ceros, aunque se pueden plantear desplazamientos lógicos con inclusión de unos en lugar de ceros



Habitualmente, el origen y destino es la misma palabra.

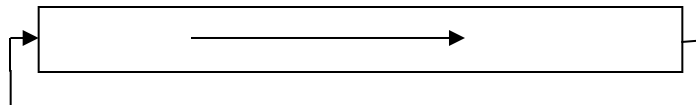
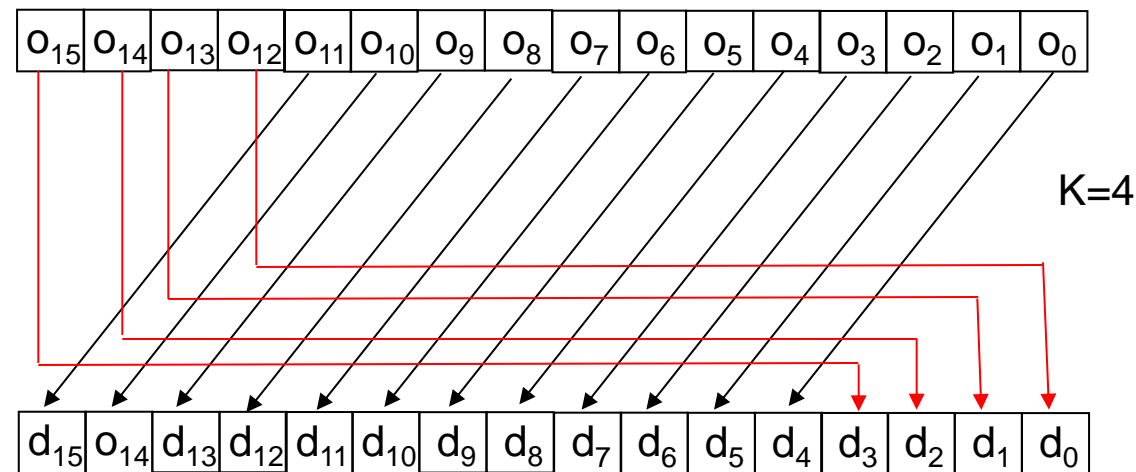




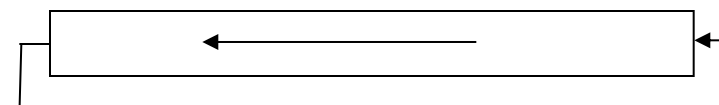
DESPLAZAMIENTOS CIRCULARES

Operadores de
desplazamiento

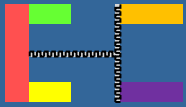
- Los bits del origen que sobran por un lado, se insertan en el destino por el otro, matemáticamente:



Desplazamiento circular a la derecha



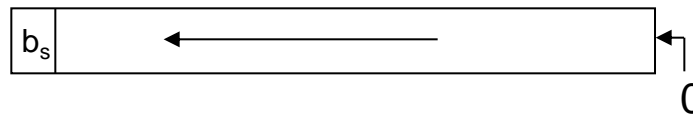
Desplazamiento circular a la izquierda



DESPLAZAMIENTOS ARITMÉTICOS

Operadores de
desplazamiento

- Se tiene en cuenta el bit de signo y se representa en complemento a 2.
- Desplazamiento a la **izquierda** (multiplicación por 2):



Desplazamiento aritmético a la izquierda

- Se van perdiendo bits de signo y hay que introducir ceros por la derecha para números positivos
- Para que no haya overflow hay que comprobar el bit de signo después de la operación:
 - Si el número es positivo, se desplaza y da negativo -> Overflow
 - Si el número es negativo, se desplaza y da positivo -> Overflow



DESPLAZAMIENTOS ARITMÉTICOS

Operadores de
desplazamiento

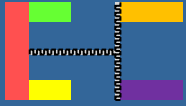
🎯 Ejemplos:

$$O = 0000\ 1010 = 10_{10} \times 2 \rightarrow D = 0001\ 0100 = 20_{10} \rightarrow \text{correcto}$$

$$O = 0100\ 0000 = 64_{10} \times 2 \rightarrow D = 1000\ 0000 = -128_{10} \rightarrow \text{incorrecto}$$

$$O = 1111\ 1100 = -4_{10} \times 2 \rightarrow D = 1111\ 1000 = -8_{10} \rightarrow \text{correcto}$$

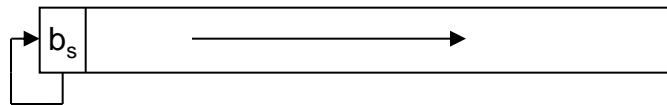
$$O = 1000\ 0100 = -124_{10} \times 2 \rightarrow D = 0000\ 1000 = 8_{10} \rightarrow \text{incorrecto}$$



DESPLAZAMIENTOS ARITMÉTICOS

Operadores de
desplazamiento

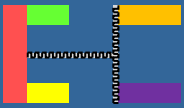
- ⊙ Desplazamiento a la derecha (división por 2):
 - ⊙ Hay que conservar el signo del dato, hay que recircularlo.
 - ⊙ Hay que introducir ceros por la izquierda para números positivos
 - ⊙ Para números negativos hay que introducir unos



Desplazamiento aritmético a la derecha

$$O = 0000\ 1010 = 10_{10} / 2 \rightarrow D = 0000\ 0101 = 5_{10}$$

$$O = 1111\ 1100 = -4_{10} / 2 \rightarrow D = 1111\ 1110 = -2_{10}$$



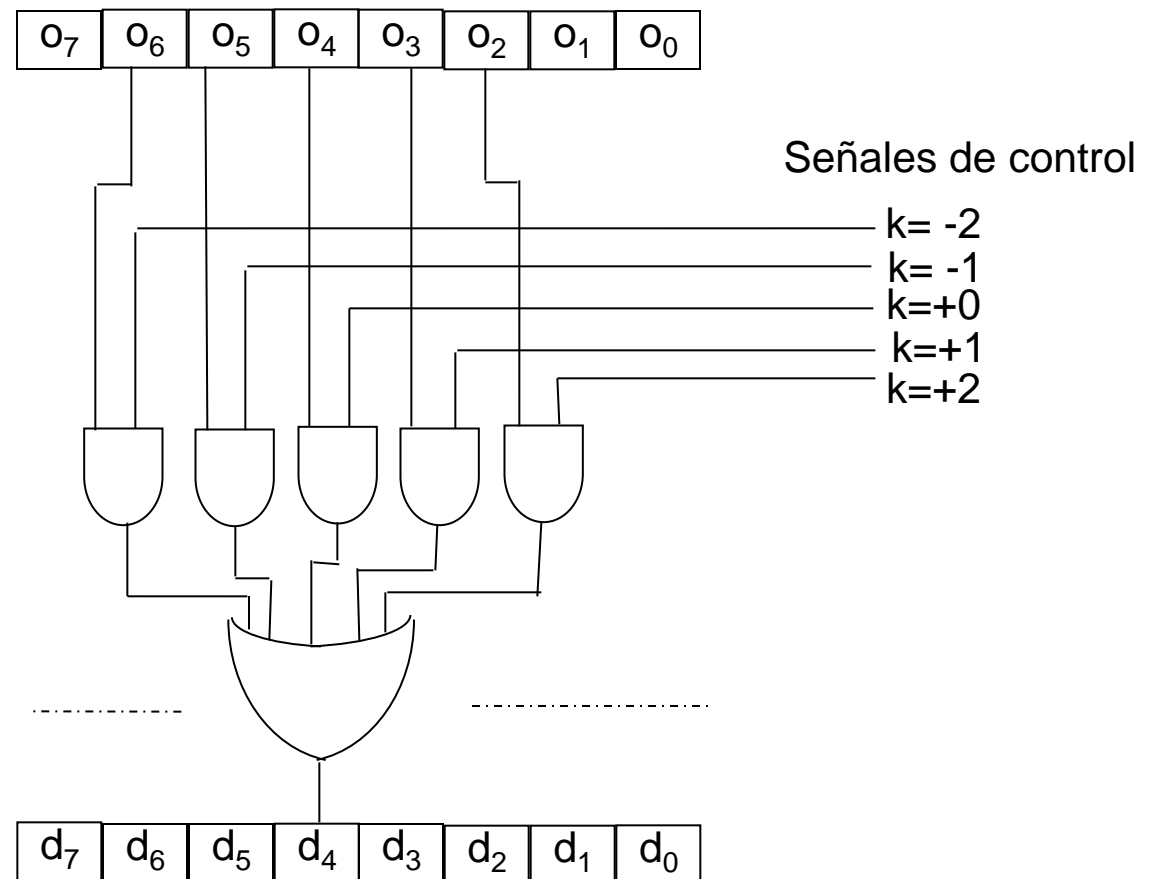
IMPLEMENTACIÓN OPERACIONES DE DESPLAZAMIENTO

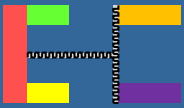
Operadores de desplazamiento

🎯 Puertas lógicas

- 🎯 La complejidad es elevada.
- 🎯 Las señales de control son las mismas para cada bit.

Unidad de desplazamiento de 2 bits para el bit 4

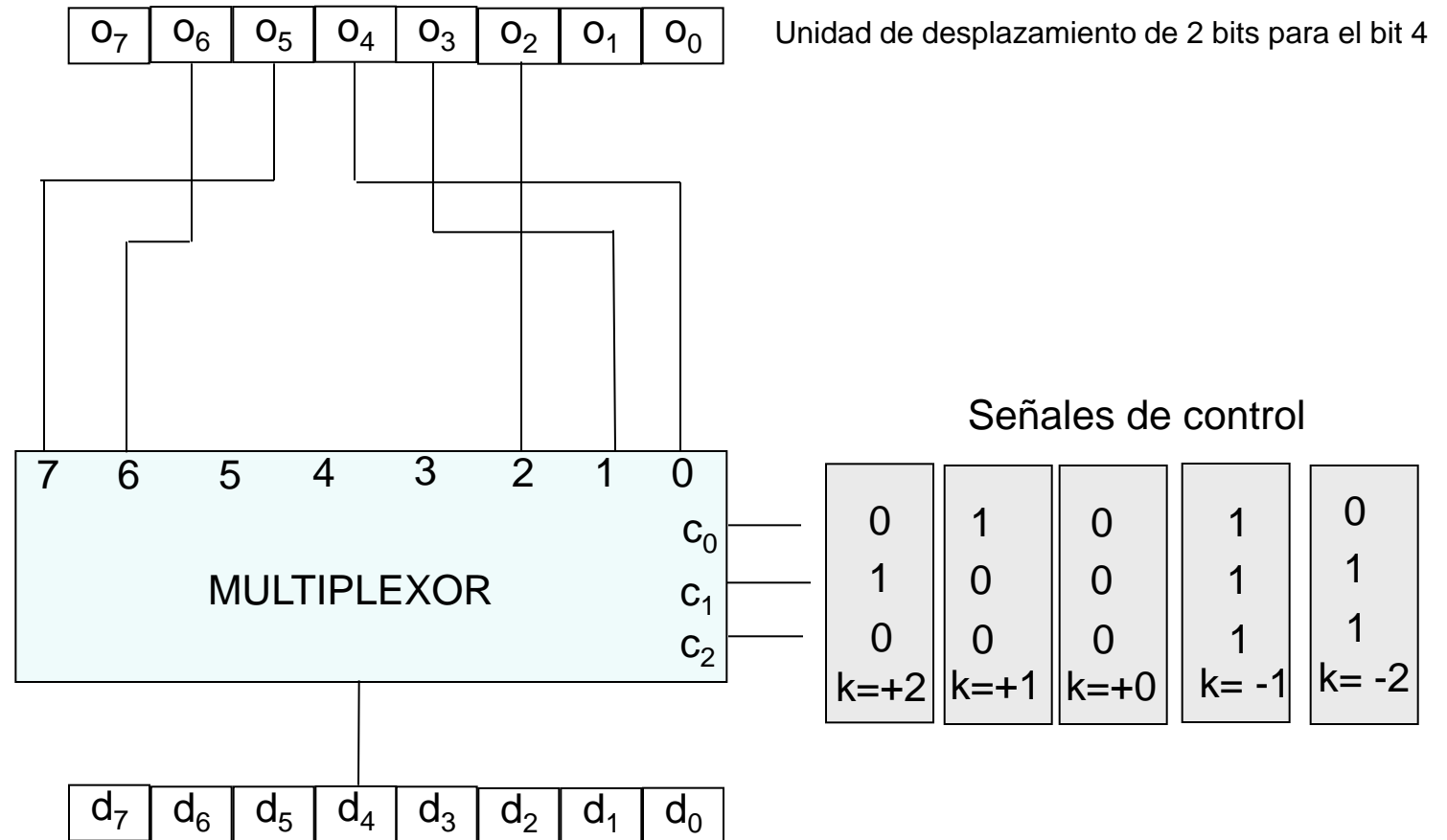


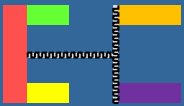


IMPLEMENTACIÓN OPERACIONES DE DESPLAZAMIENTO

Operadores de desplazamiento

🎯 Multiplexores





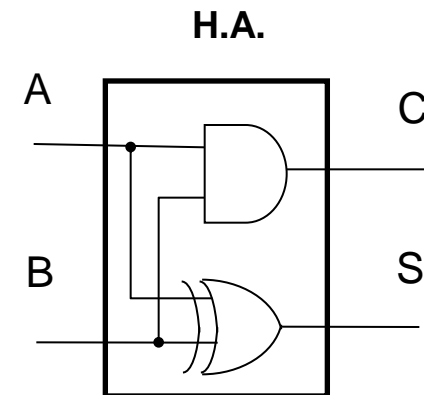
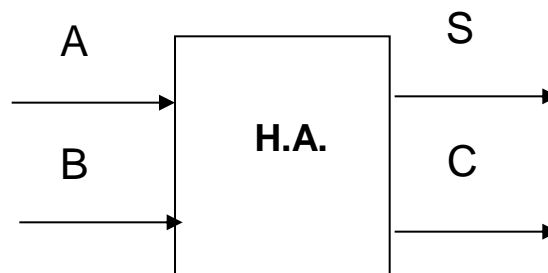
LA SUMA Y LA RESTA

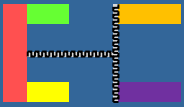
Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

⊙ Semisumador Binario (H.A.)

Entradas		Salidas	
X	Y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$S = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X \oplus Y$$
$$C = X \cdot Y$$

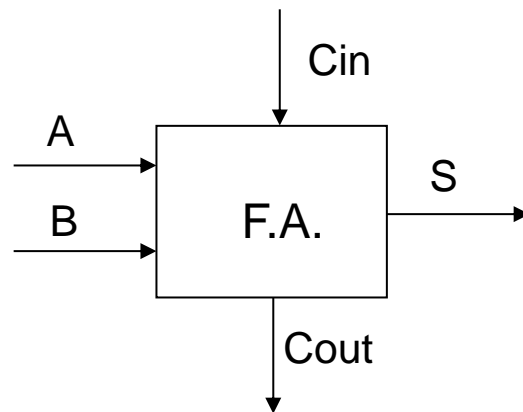




SUMADOR COMPLETO (F.A.)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

⊙ Semisumador Binario (H.A.)



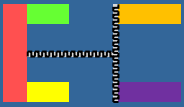
Entradas			Salidas	
A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot Cin + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Cin} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{Cin} + A \cdot B \cdot Cin$$

$$Cout = A \cdot B + A \cdot Cin + B \cdot Cin$$

$$S = (A \oplus B) \oplus Cin$$

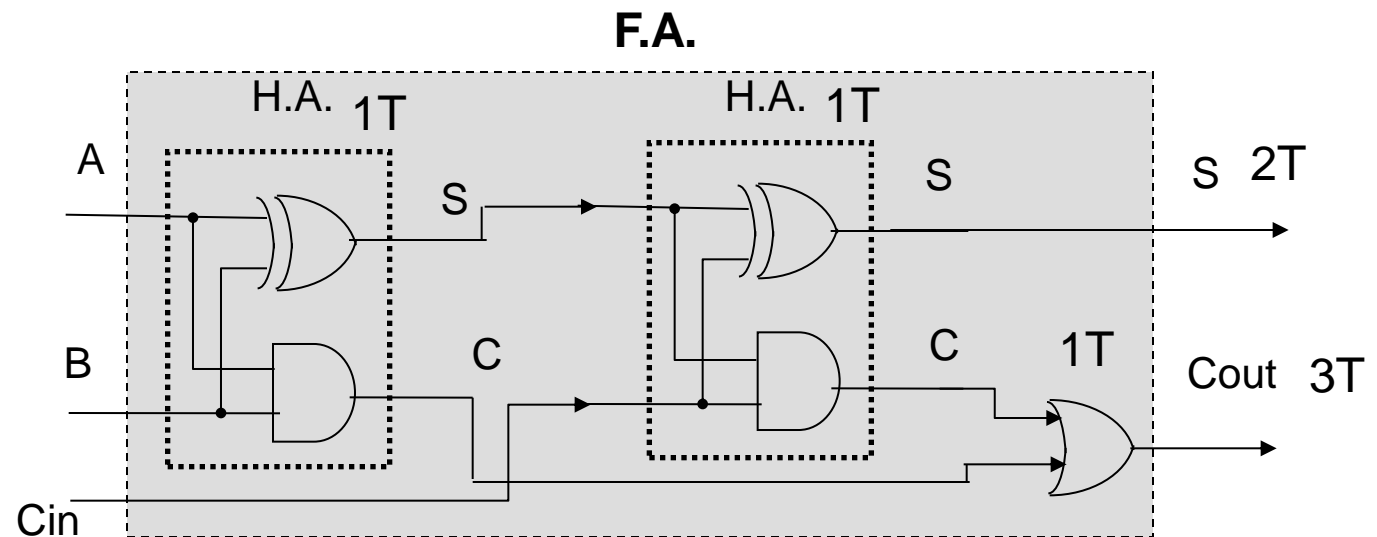
$$Cout = AB + Cin(A \oplus B)$$

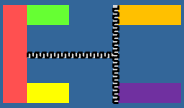


SUMADOR COMPLETO (F.A.)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

Sumador completo (FA) - Semisumadores

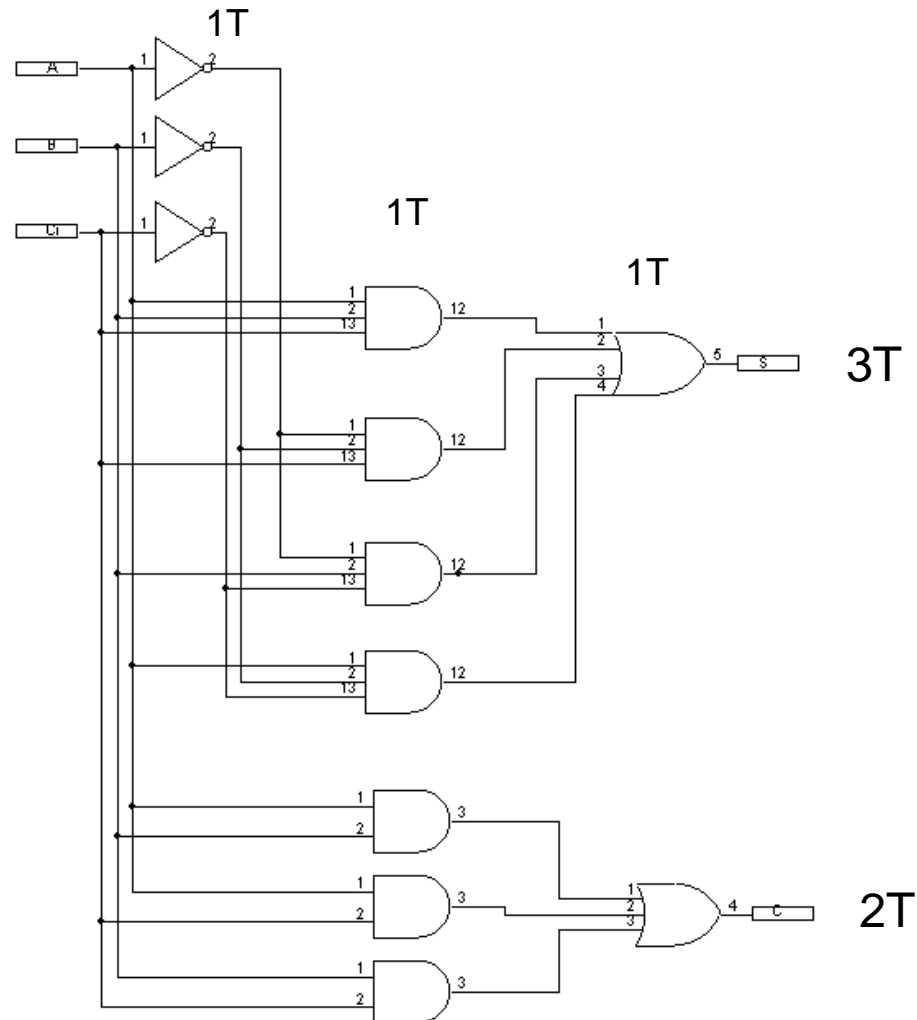


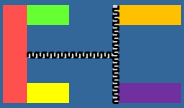


SUMADOR COMPLETO (F.A.)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

Sumador completo (FA) – Puertas lógicas

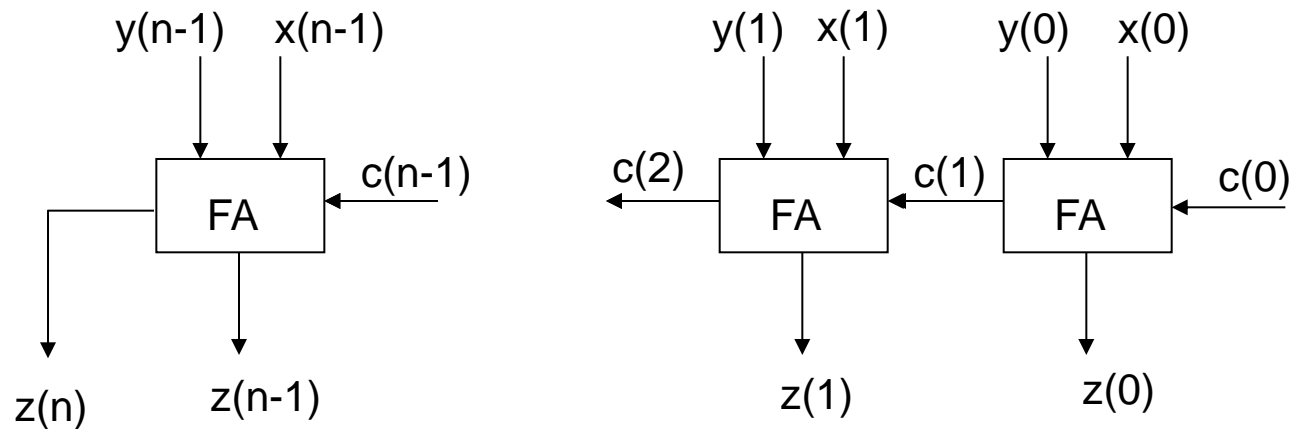


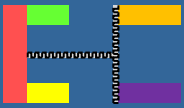


SUMADOR CON PROPAGACIÓN DE ACARREO (CPA)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- La estructura para sumar dos números de n bits es colocar en cascada n sumadores completos.
- El acarreo se propaga de una etapa a la siguiente: Sumador con Propagación de Acarreo (Carry Propagated Adder)

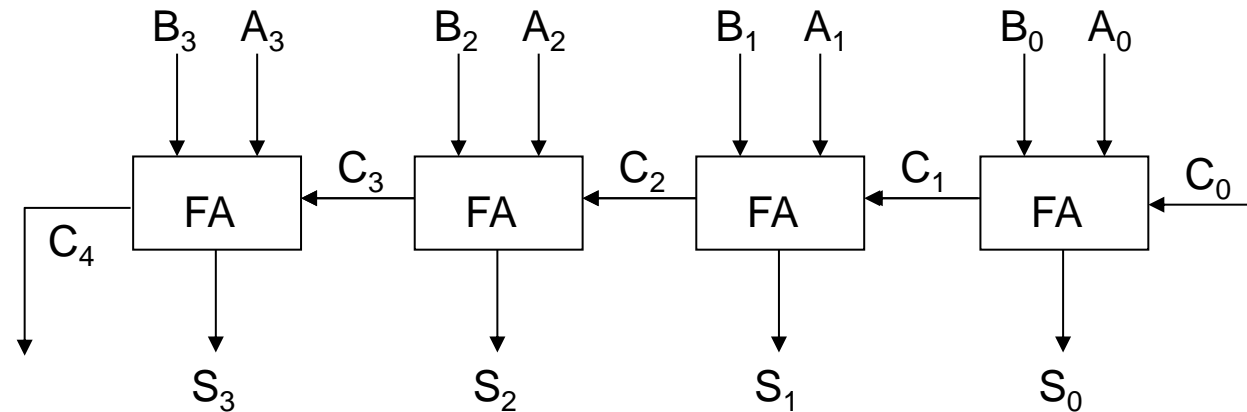


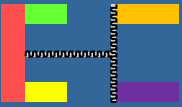


SUMADOR CON PROPAGACIÓN DE ACARREO (CPA)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- Sumador con propagación de acarreo de 4 bits.





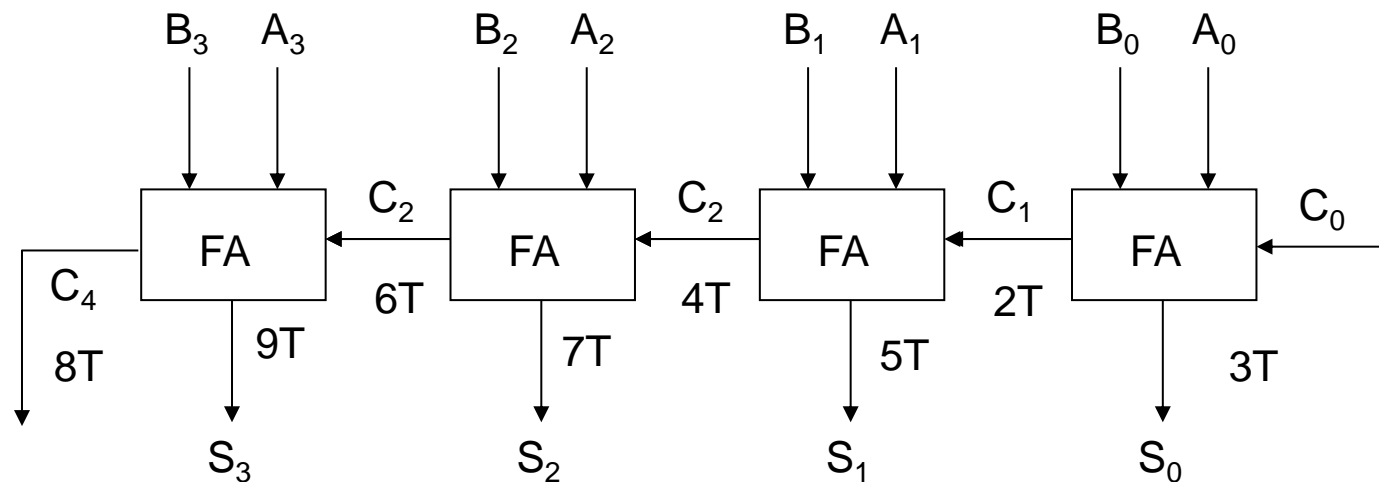
SUMADOR CON PROPAGACIÓN DE ACARREO

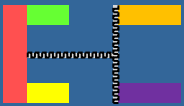
Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- Sumadores contruidos con puertas lógicas a partir de la expresión:

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot Cin + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{Cin} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{Cin} + A \cdot B \cdot Cin$$

$$Cout = A \cdot B + A \cdot Cin + B \cdot Cin$$

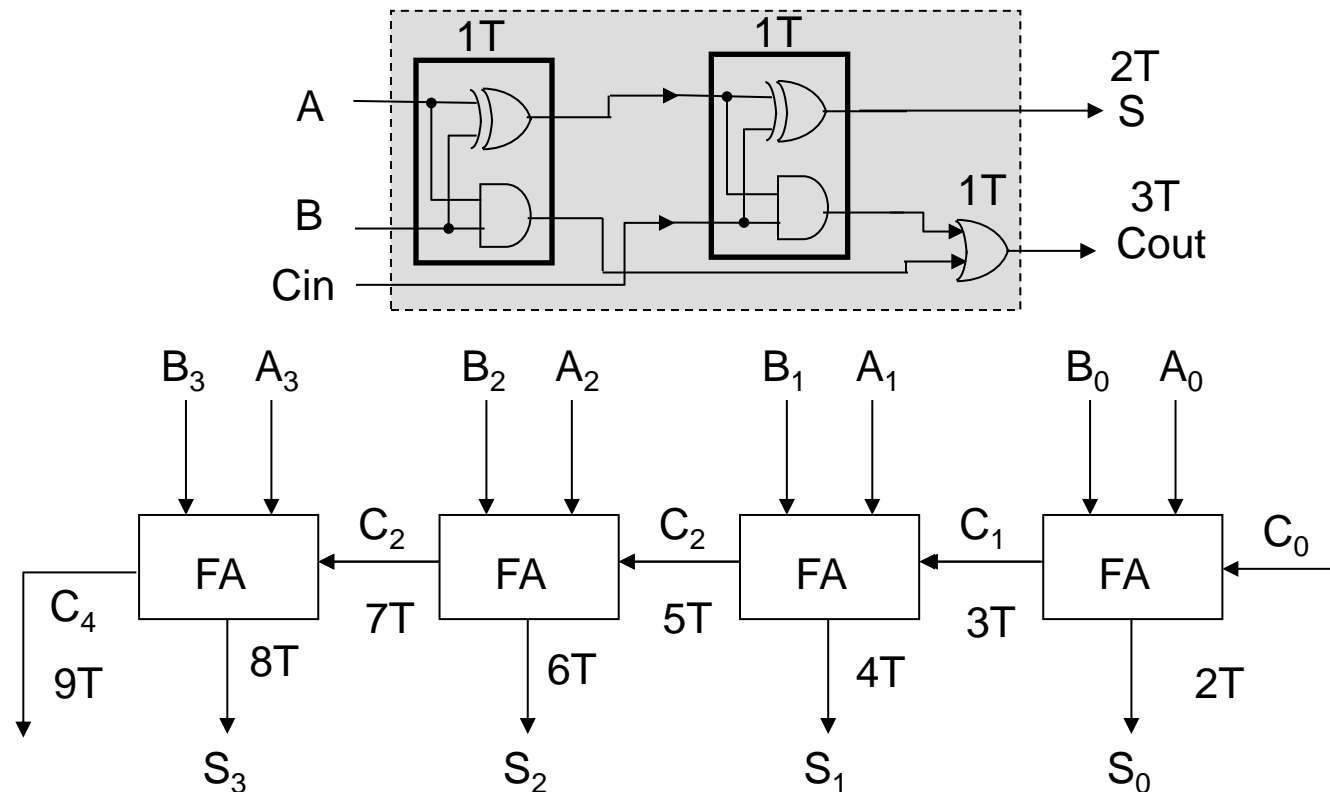




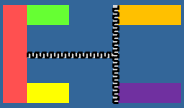
SUMADOR CON PROPAGACIÓN DE ACARREO

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- Sumadores completos contruidos con semisumadores:



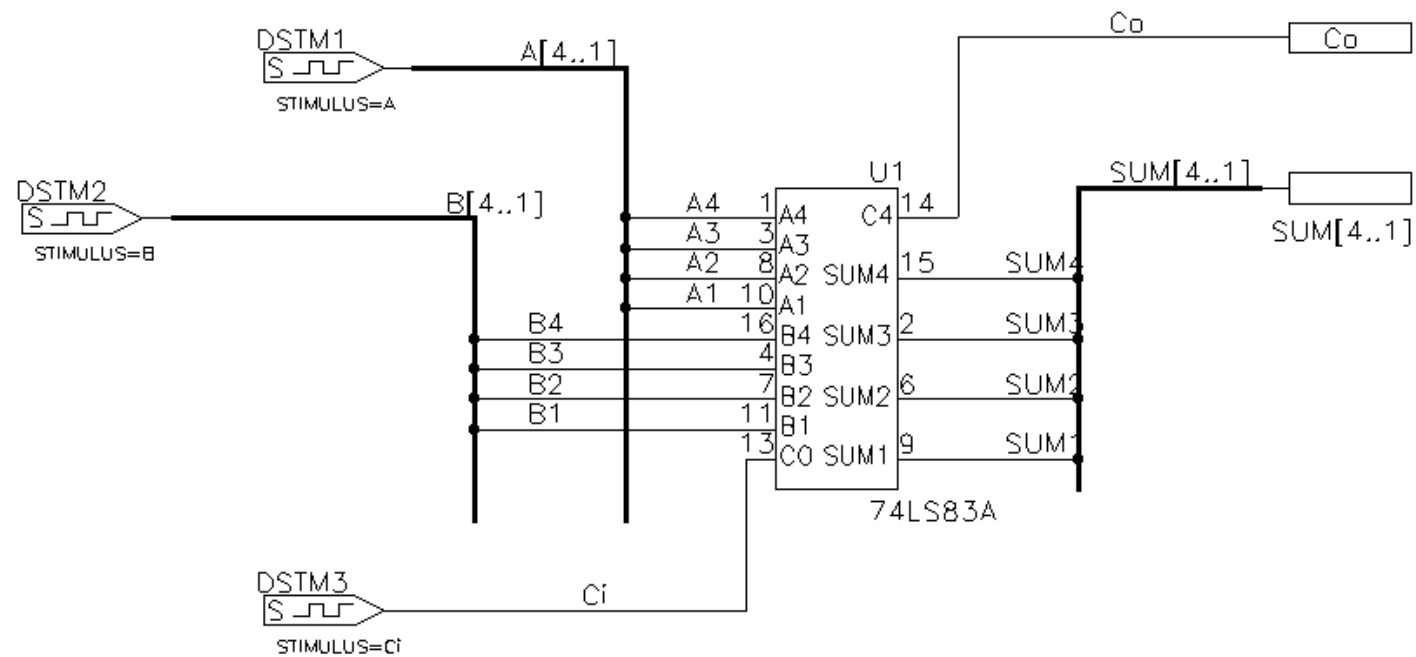
$$Tiempo_Total = (2 \cdot n + 1)T$$

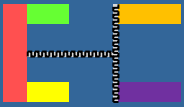


SUMADOR 74LS83

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

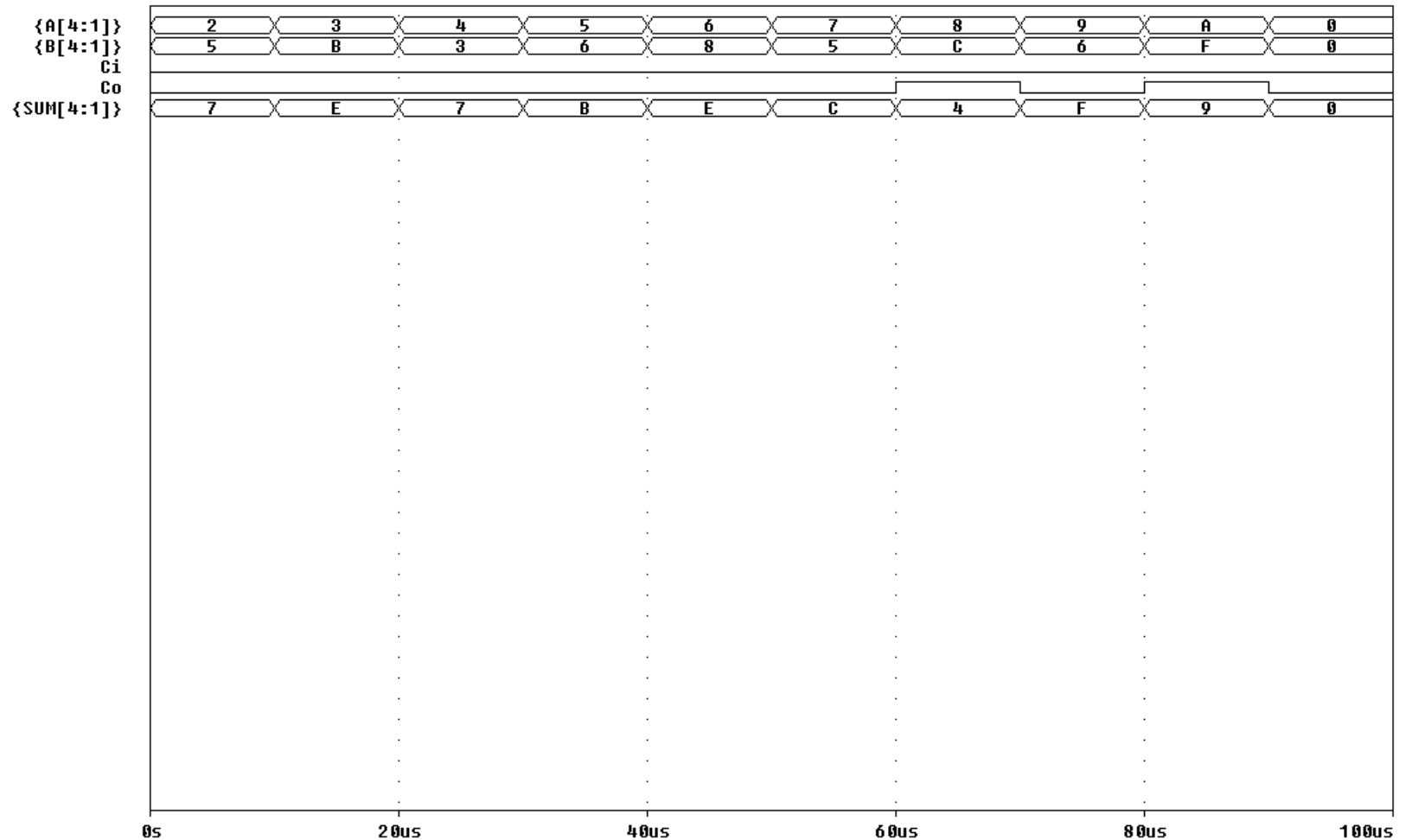
Sumadores integrado

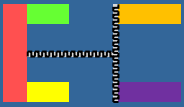




SUMADOR 74LS83

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

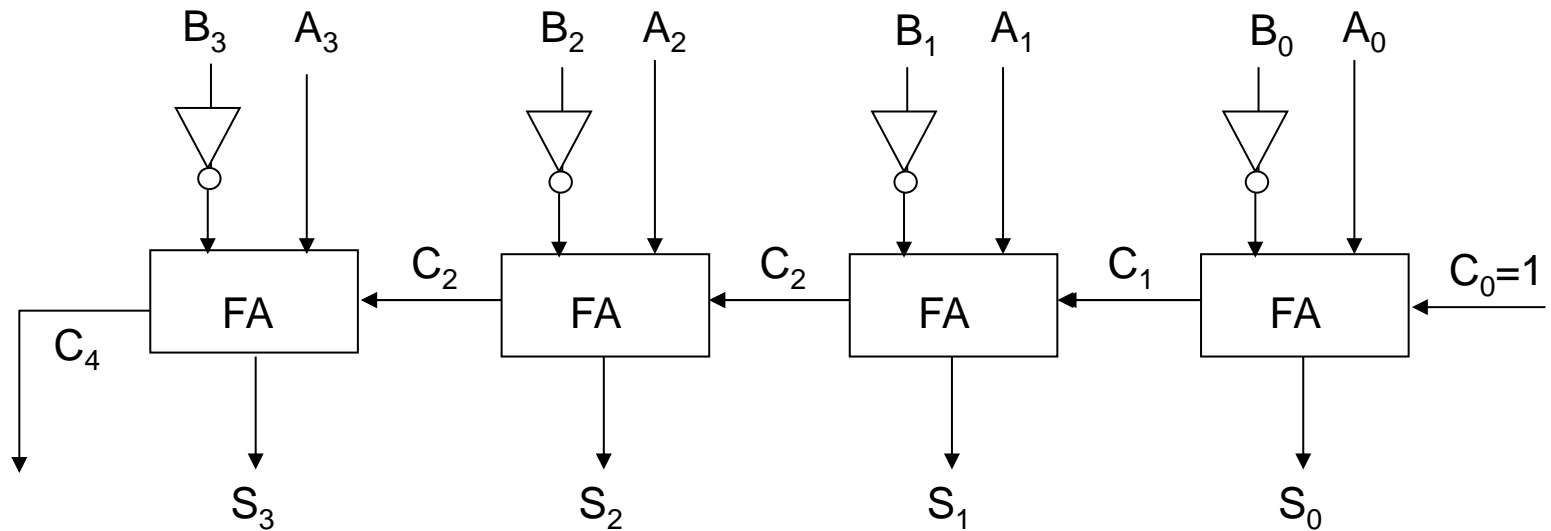


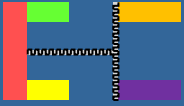


CIRCUITO RESTADOR

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- Suponer que se trabaja con números expresados en complemento a 2.
- $A - B = A + (C1(B) + 1)$



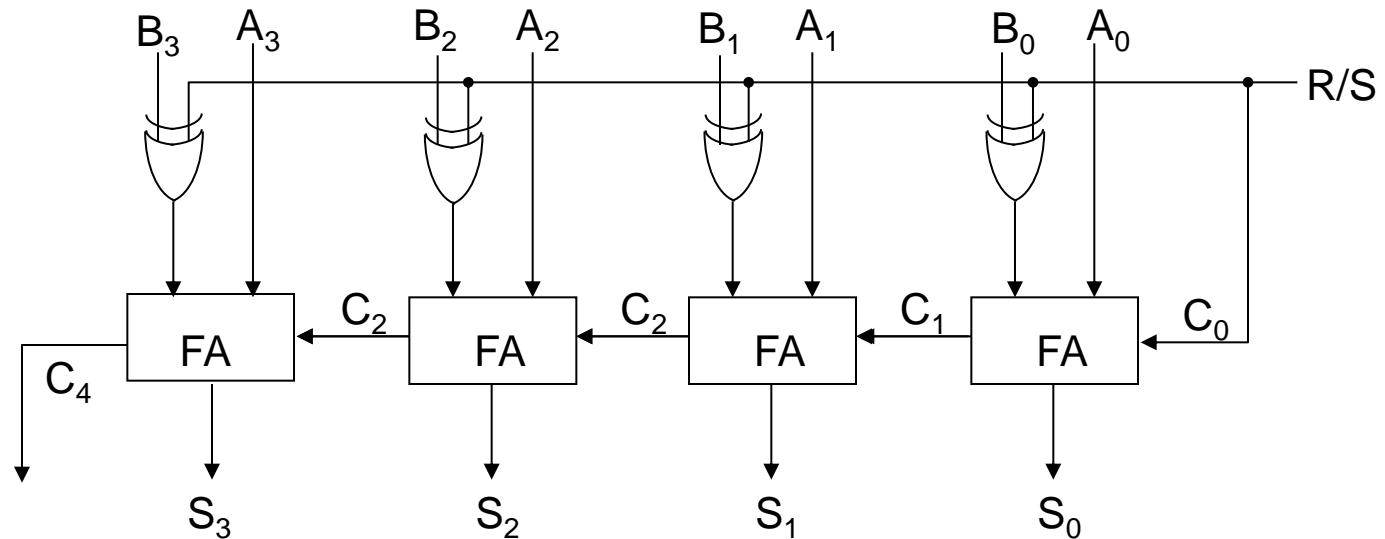


CIRCUITO SUMADOR-RESTADOR

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

R/S	B _i	Entrada al FA
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

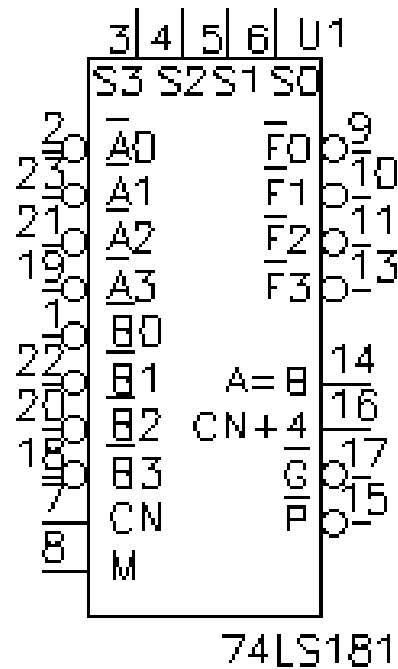
$$Tiempo_Total = 2(n+1)T$$

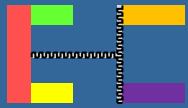




CIRCUITO SUMADOR-RESTADOR 74LS181

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

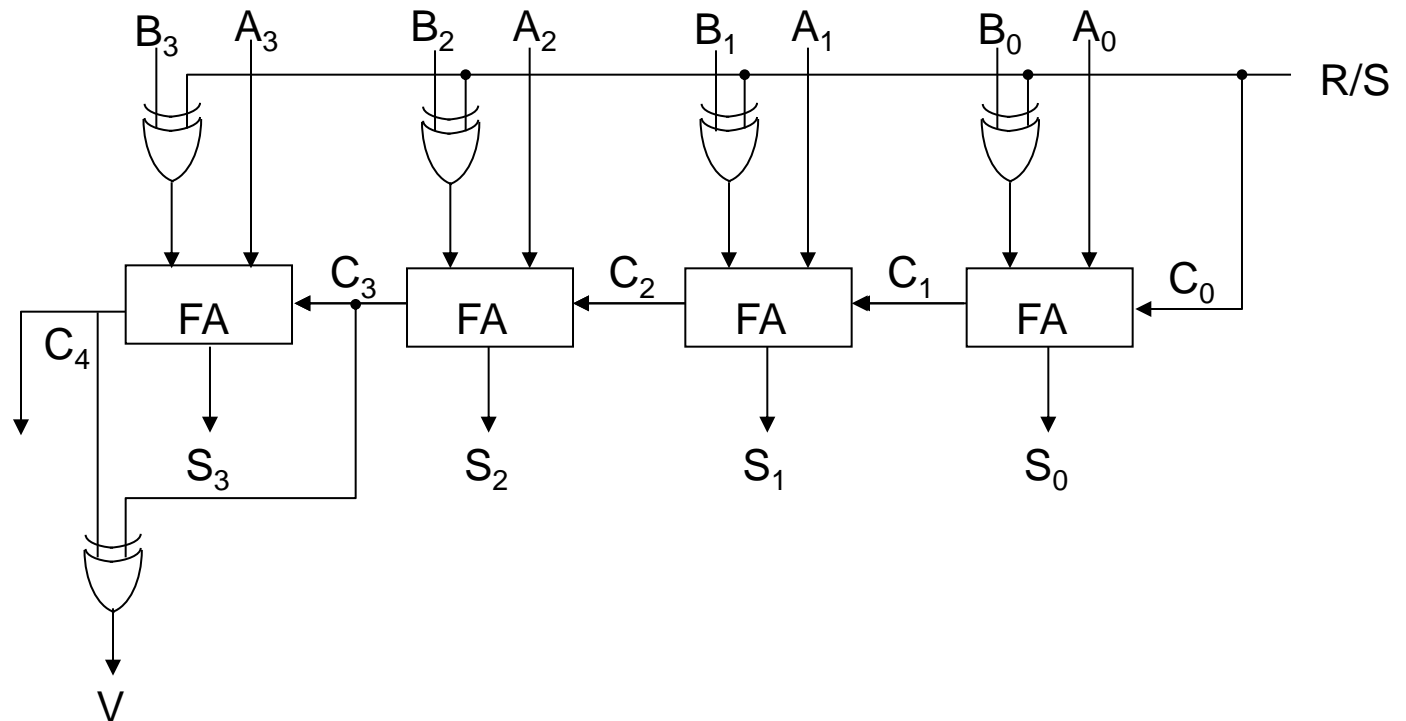


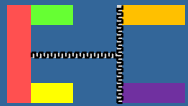


DETECCIÓN DE DESBORDAMIENTO

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

Sumador-Restador en complemento a 2 con detección de desbordamiento.





DETECCIÓN DE DESBORDAMIENTO

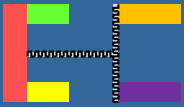
Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

1. Caso suma de dos positivos

$$\begin{array}{rcccc} & S & & & \\ C4 & C3 & C2 & C1 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{OV}$$

2. Caso suma de dos negativos

$$\begin{array}{rcccc} & S & & & \\ C4 & C3 & C2 & C1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{OV}$$



SUMADOR CON ANTICIPACIÓN DE ACARREO (CLA)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

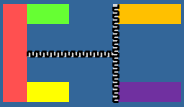
- ⊙ Carry Lookahead Adder (CLA)
- ⊙ Suponer A y B números de 4 bits
- ⊙ Señal generadora de acarreo : $G_i = a_i \cdot b_i$
- ⊙ Señal propagadora de acarreo:
$$\begin{cases} P_i = a_i \oplus b_i \\ P_i = a_i + b_i \end{cases}$$
- ⊙ Acarreo de la etapa i: $C_i = G_i + P_i \cdot C_{i-1}$
- ⊙ Particularizando para A y B:

$$C_0 = G_0 + P_0 \cdot C_{-1}$$

$$C_1 = G_1 + P_1 \cdot C_0$$

$$C_2 = G_2 + P_2 \cdot C_1$$

$$C_3 = G_3 + P_3 \cdot C_2$$



SUMADOR CON ANTICIPACIÓN DE ACARREO

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

- Desarrollando las expresiones y poniéndolas en función de C_{-1} :

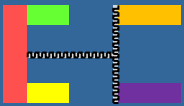
$$C_0 = G_0 + P_0 \cdot C_{-1}$$

$$C_1 = G_1 + P_1 \cdot G_0 + P_1 \cdot P_0 \cdot C_{-1}$$

$$C_2 = G_2 + P_2 \cdot G_1 + P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_{-1}$$

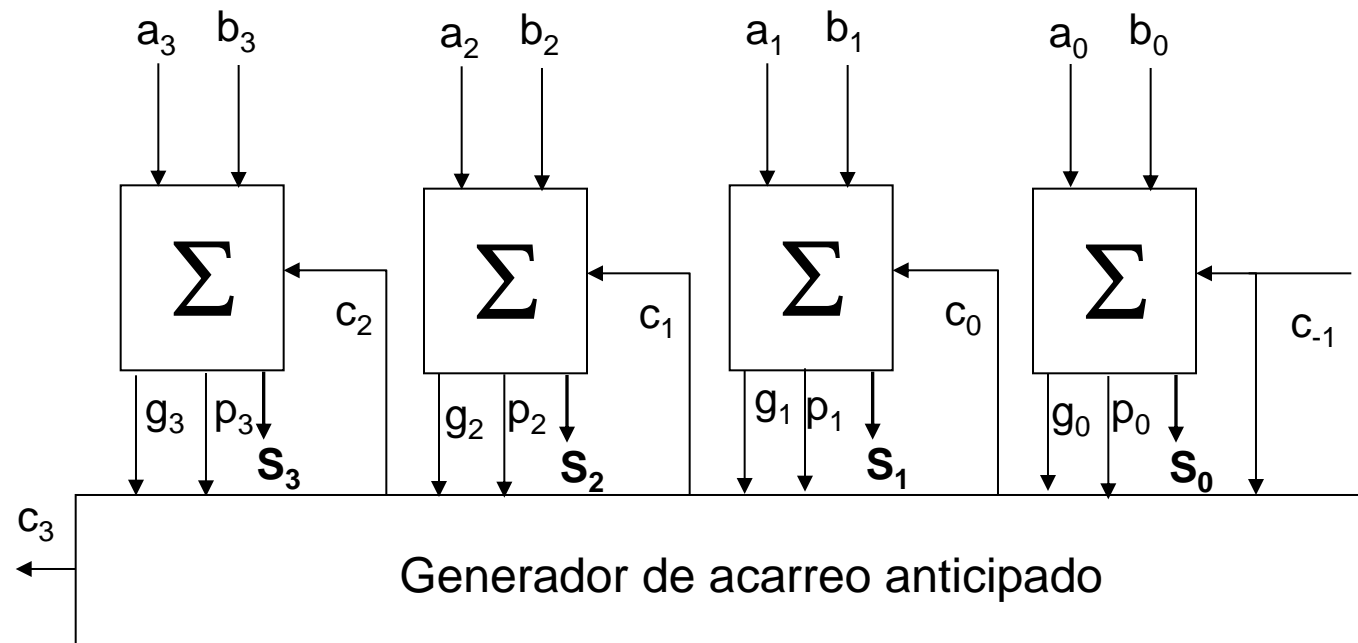
$$C_3 = G_3 + P_3 \cdot G_2 + P_3 \cdot P_2 \cdot G_1 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_{-1}$$

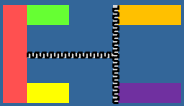
- Todos los acarreos dependen de a_i y b_i .
- Estas expresiones se resuelven como suma de productos.
- Tres niveles de puertas lógicas para obtener cada uno de los acarreos.



SUMADOR CON ANTICIPACIÓN DE ACARREO

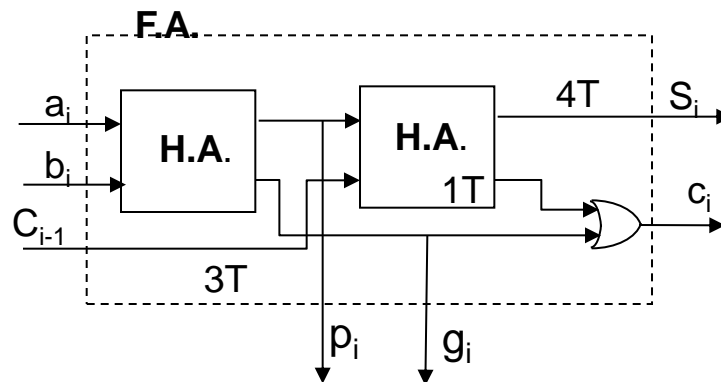
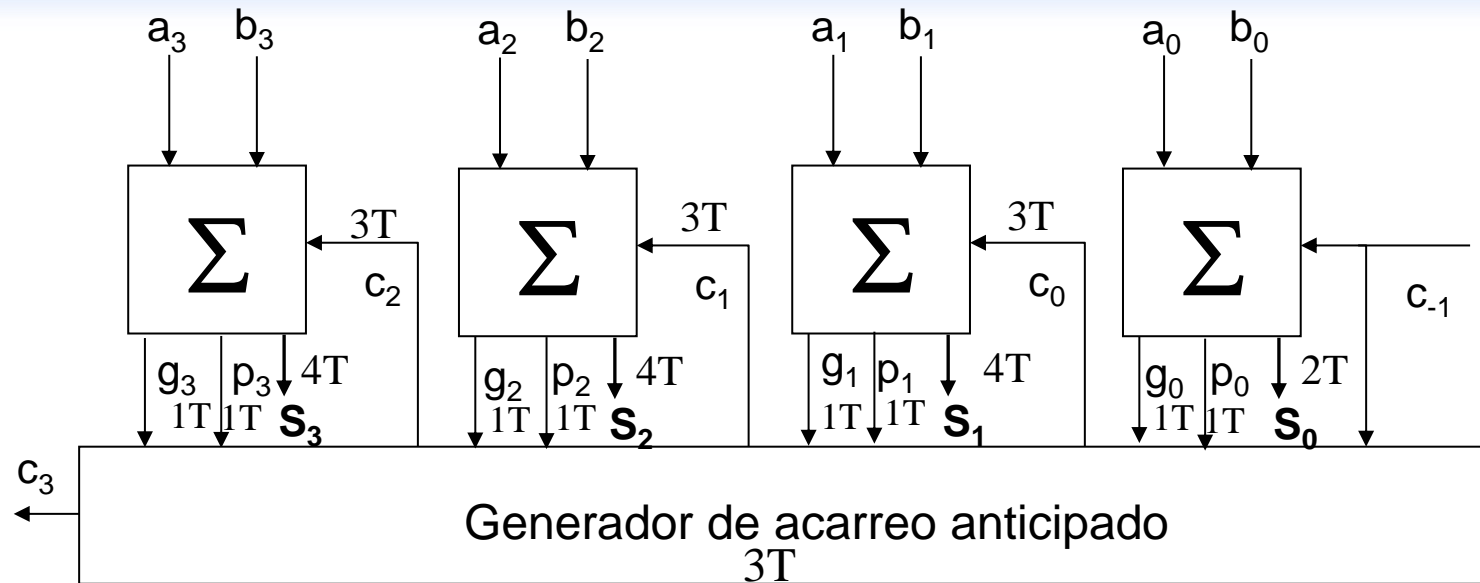
Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar



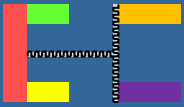


SUMADOR CON ANTICIPACIÓN DE ACARREO

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

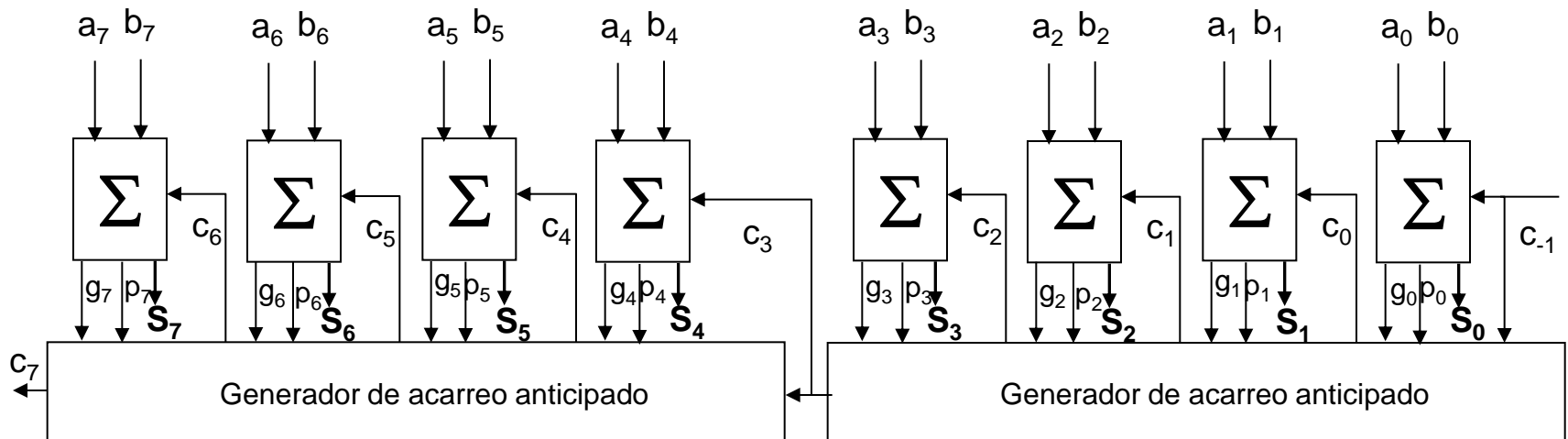


Sumadores contruidos
con semisumadores



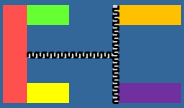
EJEMPLO (SUMADOR CLA DE 8 BITS)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar



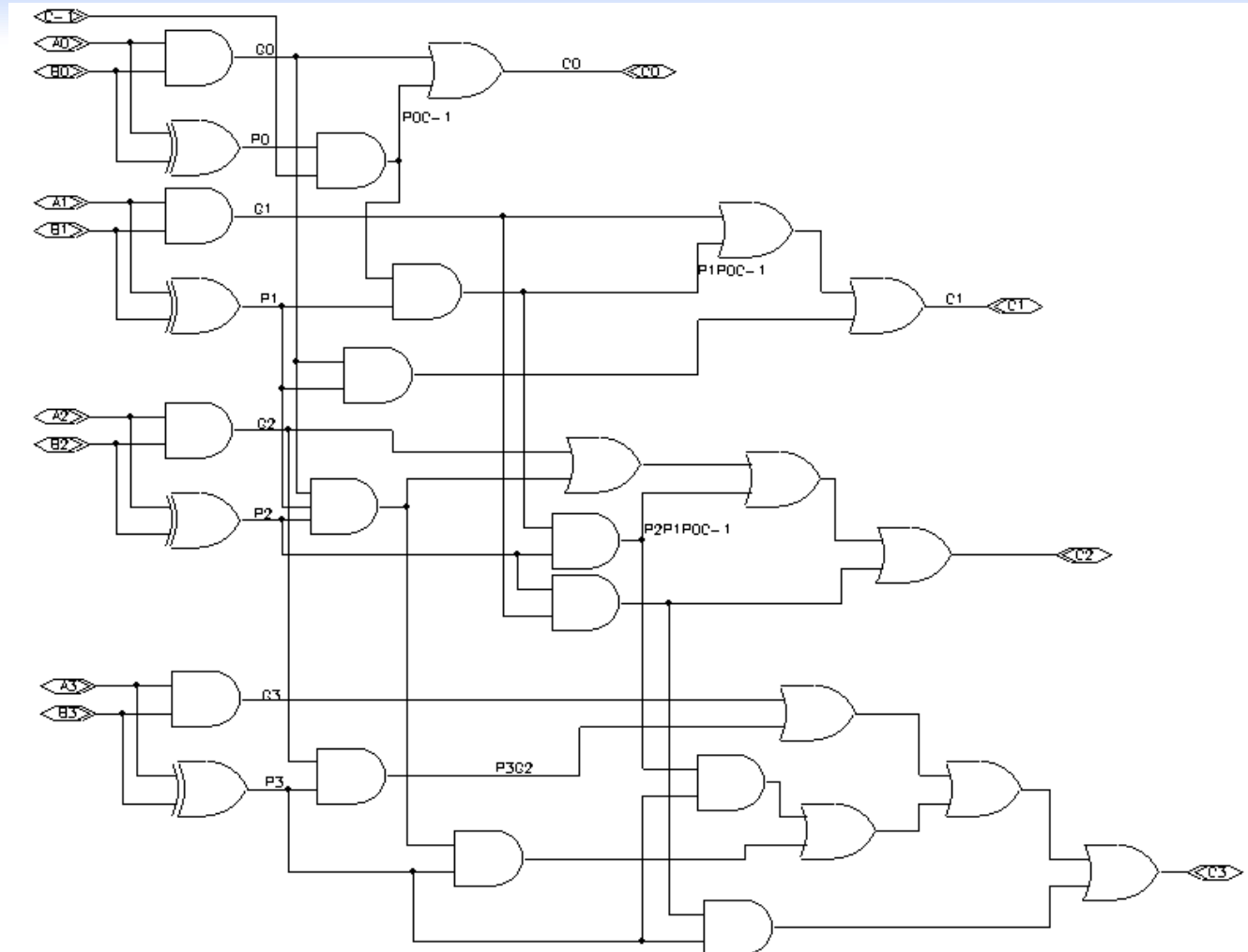
Calcular los retardos en este CLA suponiendo que los sumadores se construyen con semisumadores.

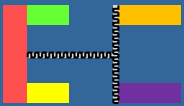
Comparar el resultado con el de un sumador CPA de 8 bits.



EJEMPLO (CLA DE 4 BITS)

Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar





EJEMPLO (CLA DE 4 BITS)

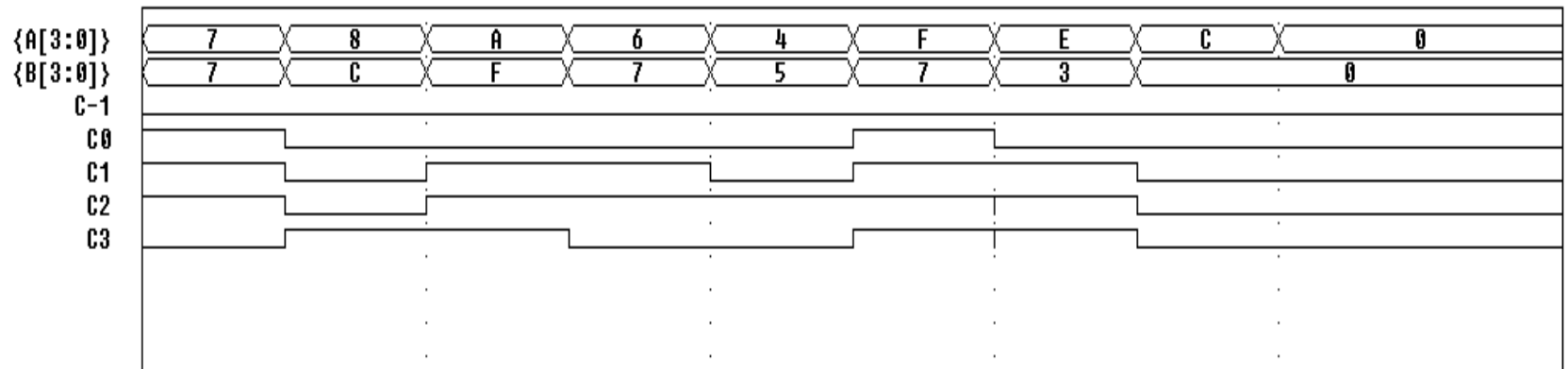
Unidad
aritmética
entera.
Sumar y
restar

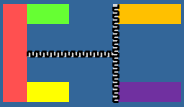
C3 C2 C1 C0

0	1	1	1	
	0	1	1	1
	0	1	1	1
	1	1	1	0

C3 C2 C1 C0

1	1	1		
	1	0	1	0
	1	1	1	1
	1	0	0	1



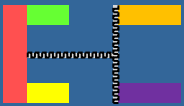


LA MULTIPLICACIÓN

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

- ⊙ Algoritmo de sumas y desplazamientos
- ⊙ Si multiplicando de n bits y multiplicador de m bits, entonces el producto tendrá una longitud de $n+m$ bits.
- ⊙ Multiplicación binaria: sencilla ya que hay que multiplicar por 1 o por 0.

Multiplicando				5	3	2
Multiplicador				4	3	1
				<hr/>		
				5	3	2
		1	5	9	6	
	2	1	2	8		
	<hr/>					
Producto	2	2	9	2	9	2



MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Repetir n veces

Si el bit 0 del multiplicador=1 entonces

Sumar el multiplicando a la mitad izquierda del producto y colocar el resultado en la mitad izquierda del producto.

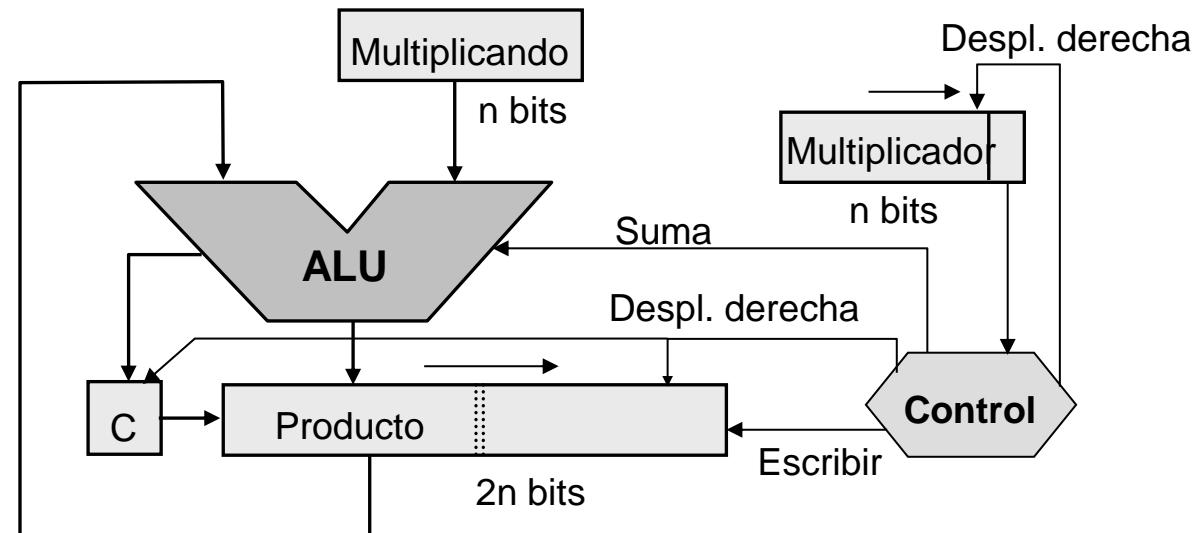
Fin entonces

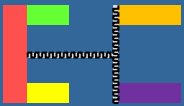
Desplazar 1 bit a la derecha el registro producto

Desplazar 1 bit a la derecha el registro multiplicador

Fin repetir

Versión preliminar



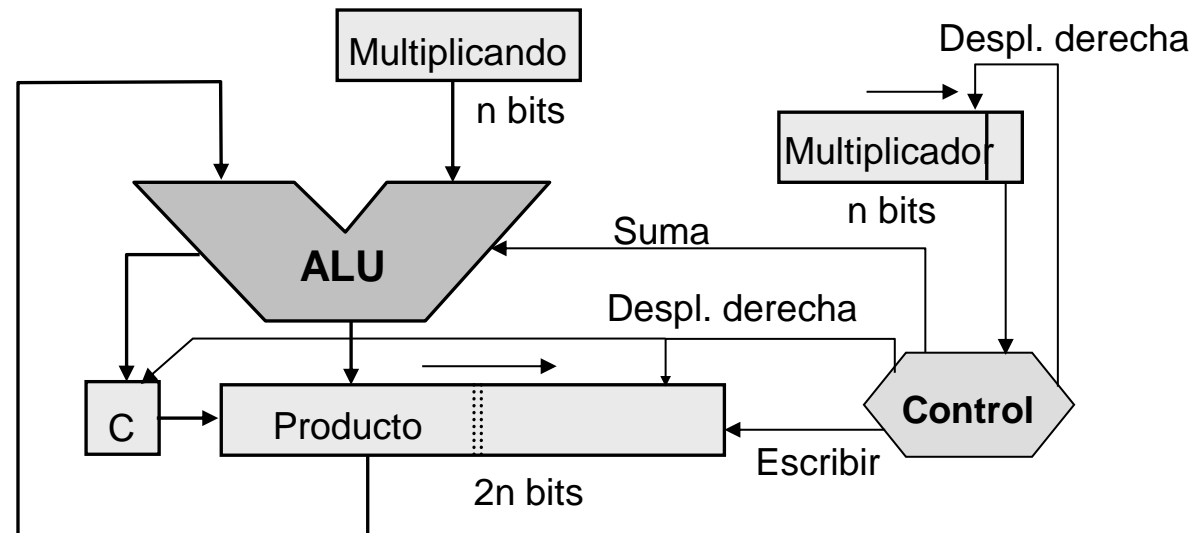


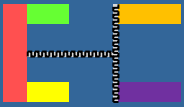
MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Multiplicando				1	0	1	1				
Multiplicador				1	1	0	1				
				1	0	1	1				
				0	0	0	0				
				1	0	1	1				
				1	0	1	1				
Producto				1	0	0	0	1	1	1	1

*Versión
preliminar*





MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Repetir n veces

Si el bit 0 del registro producto=1 entonces

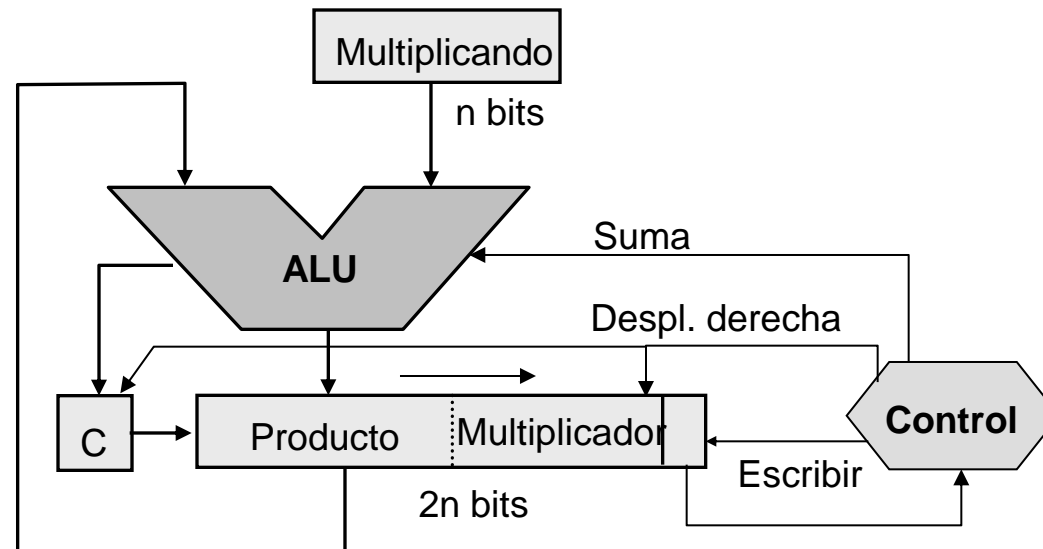
Sumar el multiplicando a la mitad izquierda del producto y colocar el resultado en la mitad izquierda del producto.

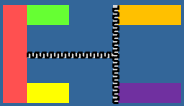
Fin entonces

Desplazar 1 bit a la derecha el registro producto

Fin repetir

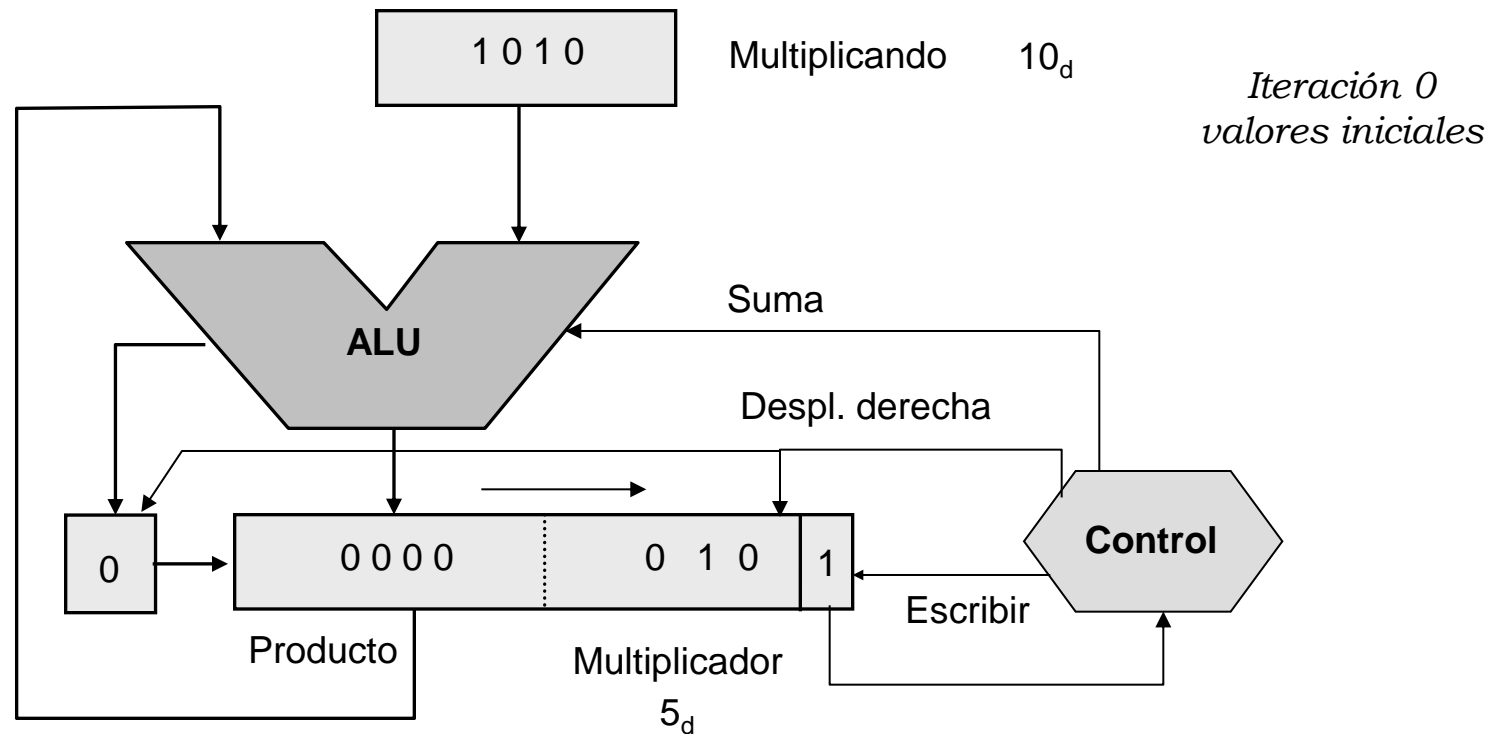
*Versión
final*

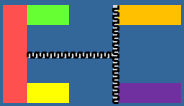




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

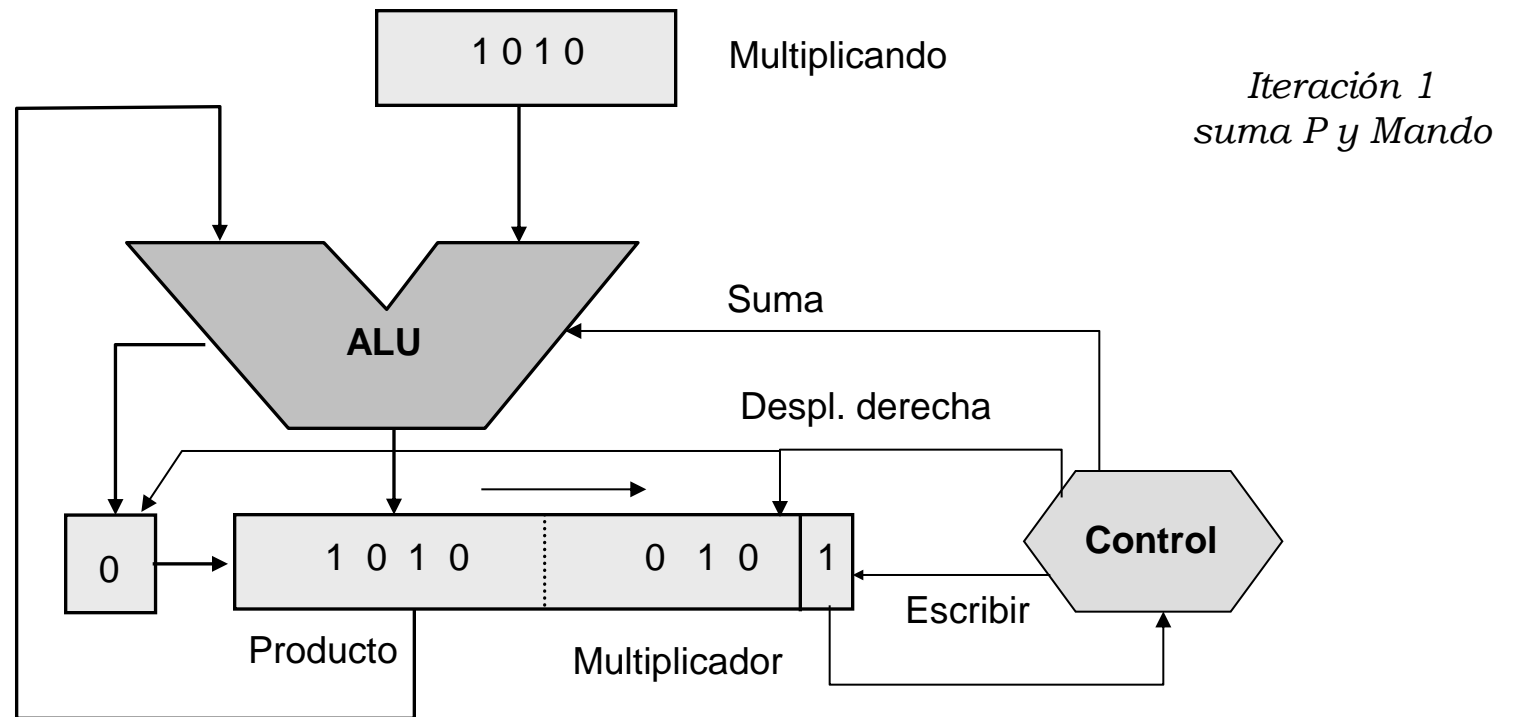
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

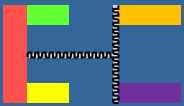




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

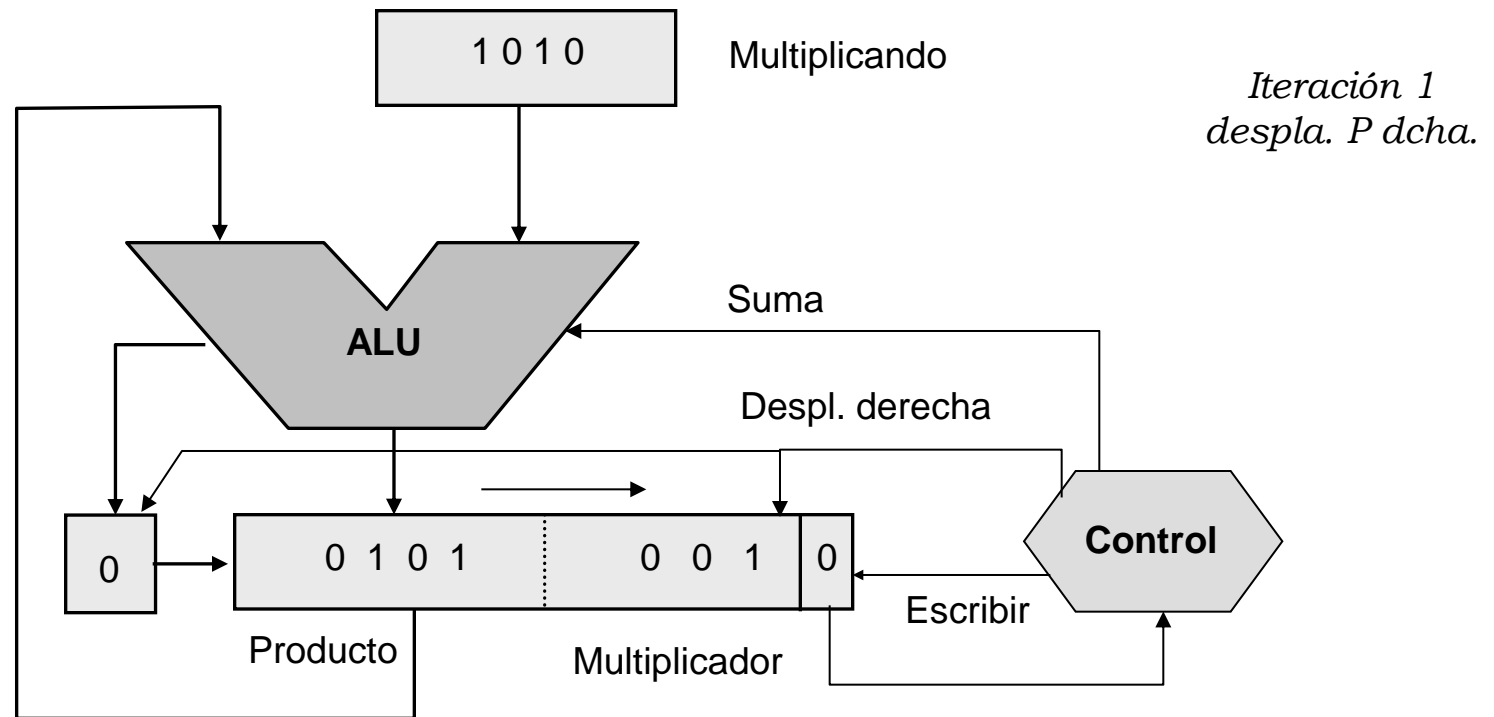
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

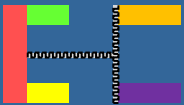




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

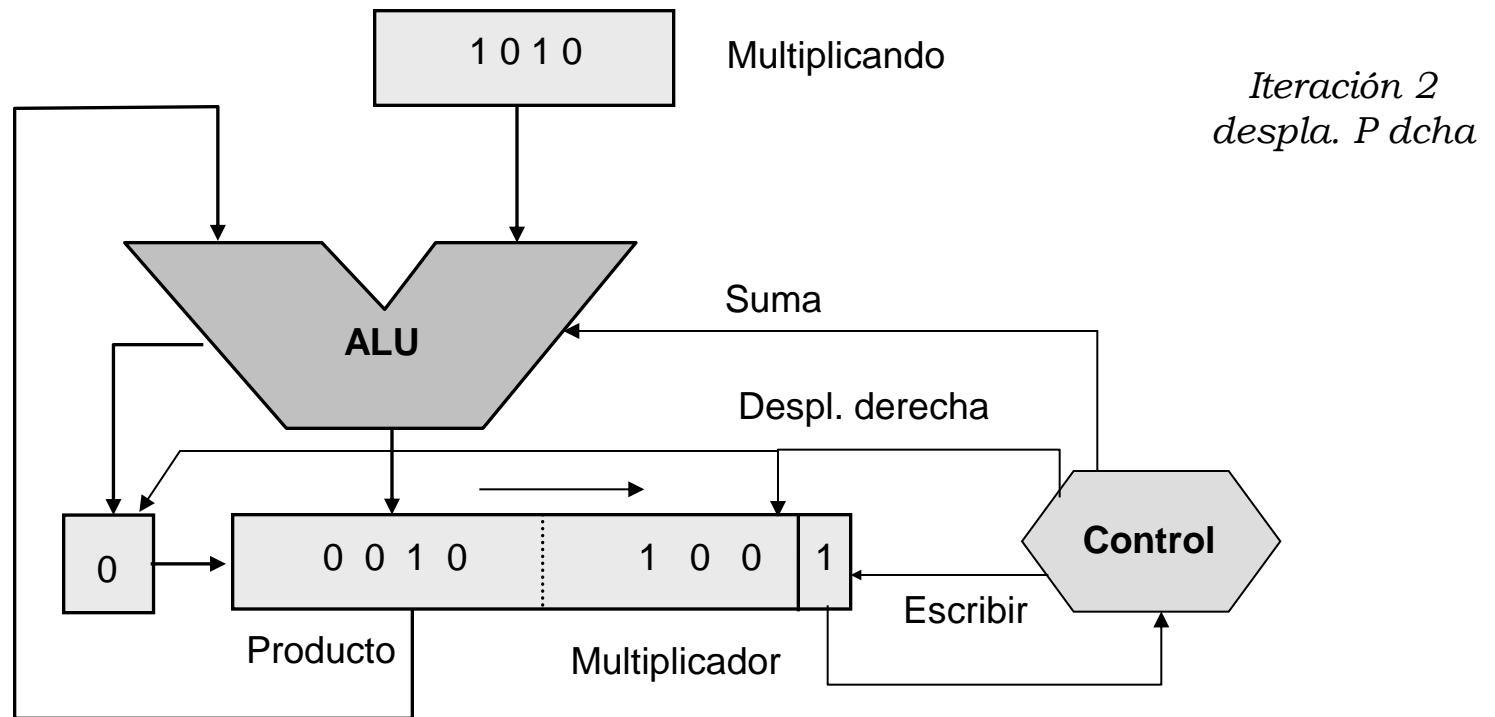
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

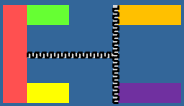




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

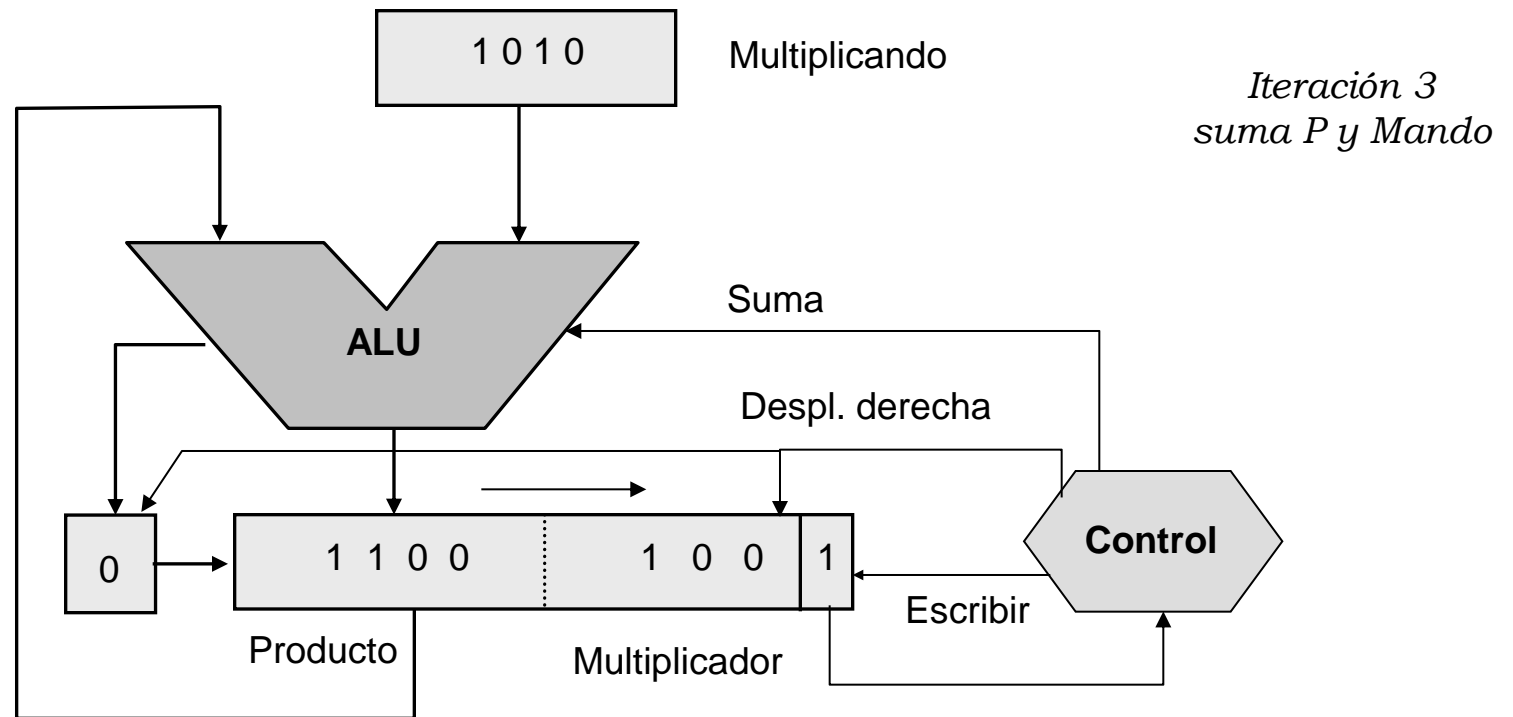
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

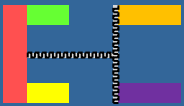




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

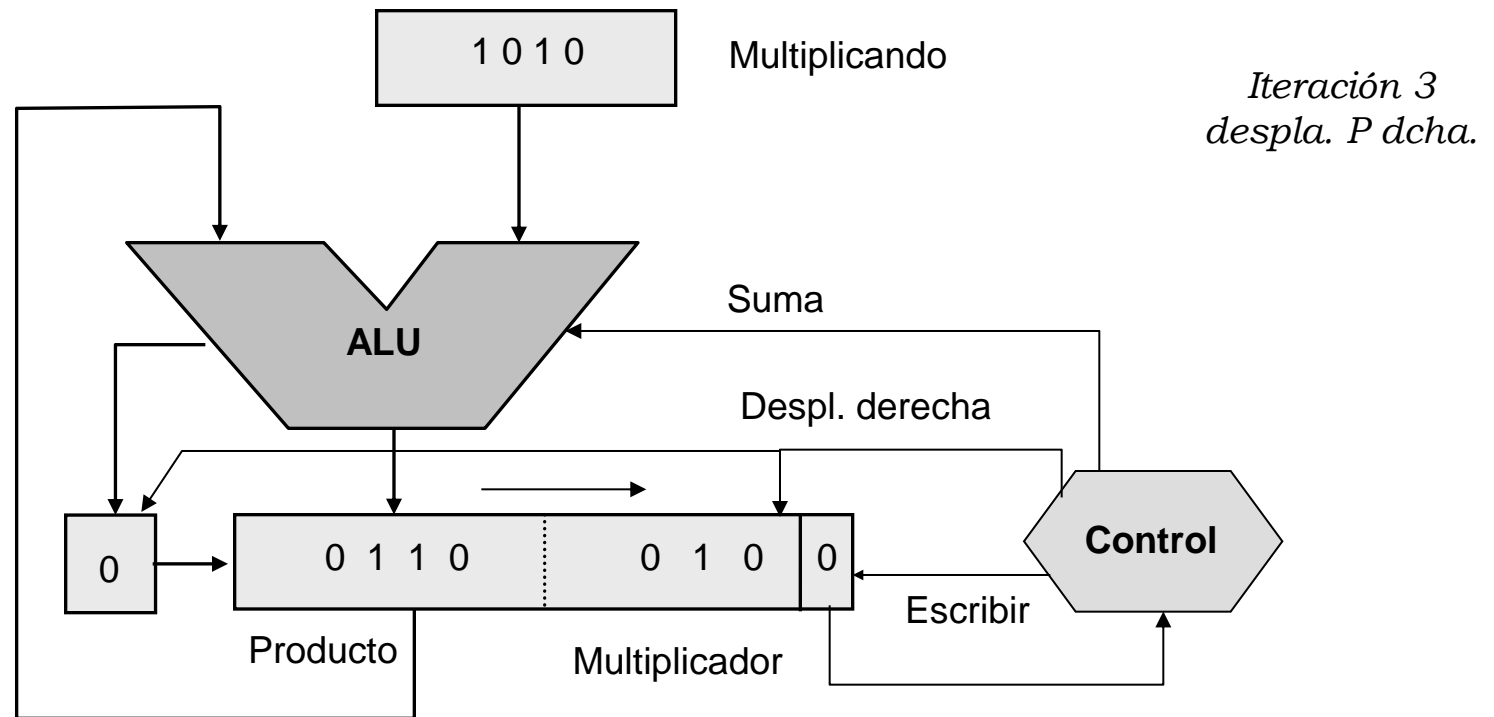
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

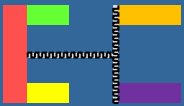




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

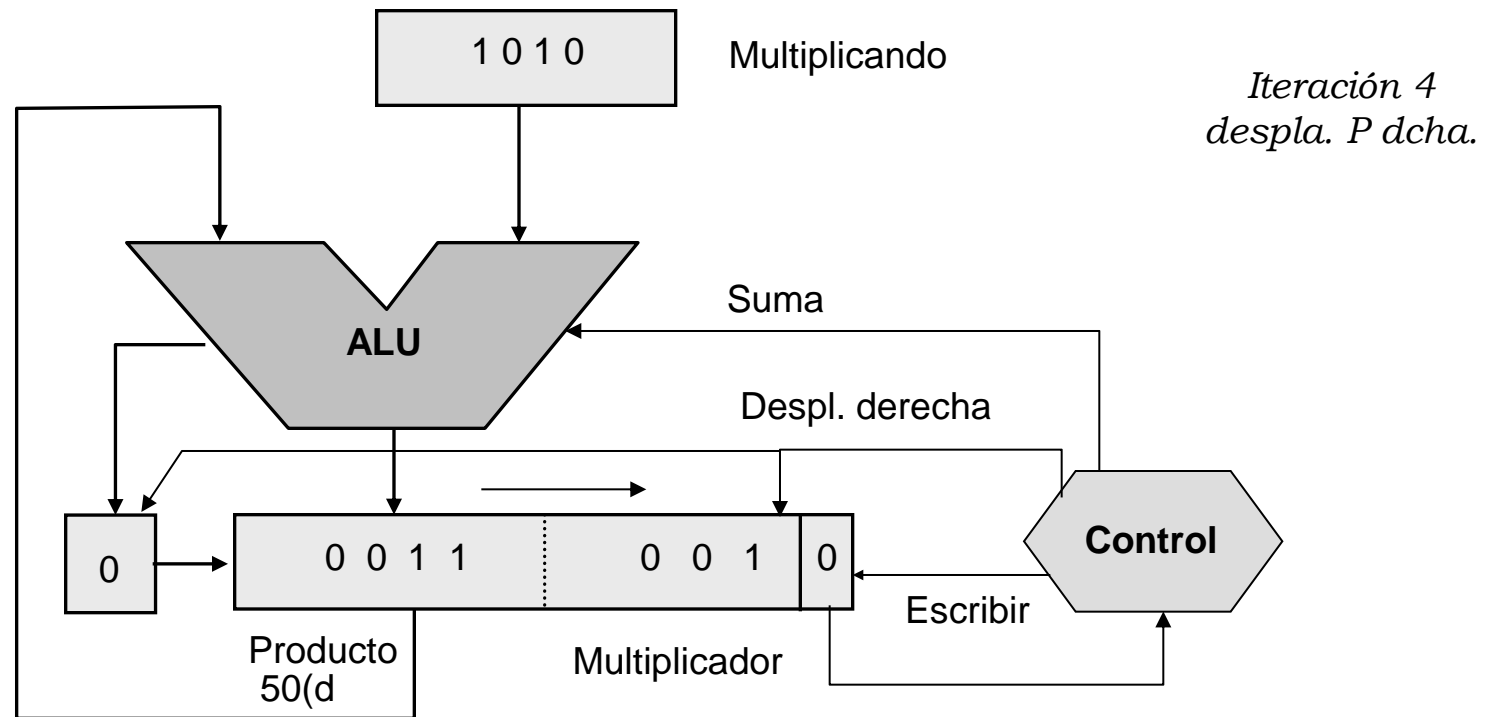
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

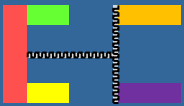




MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir





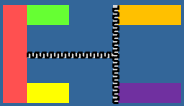
MULTIPLICACIÓN BINARIA SIN SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Multiplicando = 1010

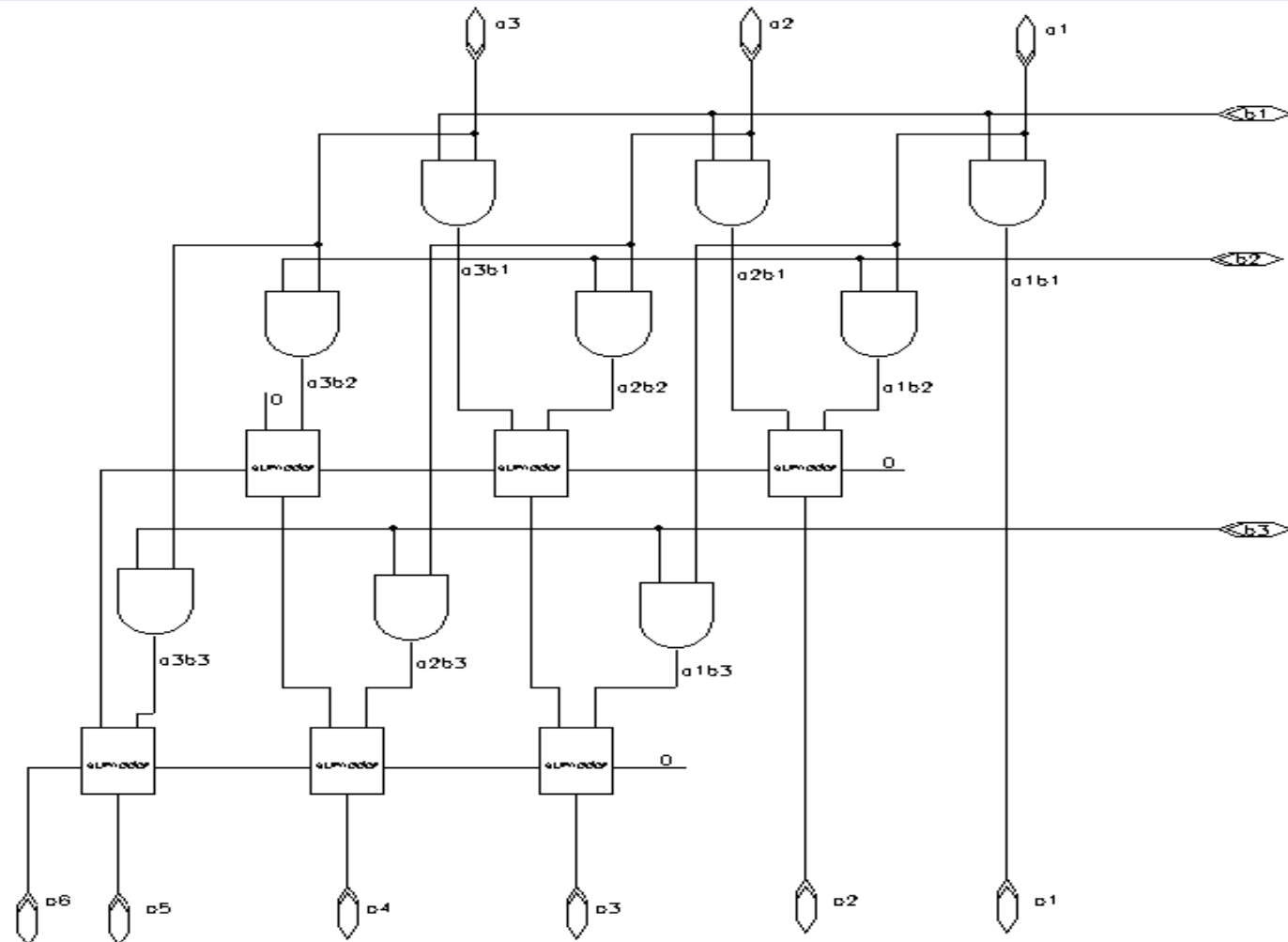
Multiplicador = 0101

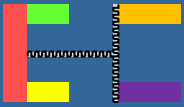
Producto	Multiplicando	Acción	Iteración
0000 0101	1010	Valores iniciales	0
1010 0101	1010	Sumar prod. y multiplicando	1
0101 0010	1010	Desplazar prod. a derecha	1
0010 1001	1010	Despl. producto 1 bit a la derecha	2
1100 1001	1010	Sumar prod. y multiplicando	3
0110 0100	1010	Despl. producto 1 bit a la derecha	3
0011 0010	1010	Despl. producto 1 bit a la derecha	4



MULTIPLICACIÓN RÁPIDA

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir





MULTIPLICACIÓN BINARIA CON SIGNO

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

- Supongamos números expresados en Ca2
- $A = 1010$ y $B = 0011$
- Apliquemos algoritmo de sumas y desplazamientos

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 0011 \\ \hline 1010 \\ 1010 \\ 0000 \\ 0000 \\ \hline 0011110 \end{array}$$

Versión errónea

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 0011 \\ \hline 11111010 \\ 1111010 \\ 000000 \\ 00000 \\ \hline 11101110 \end{array}$$

Versión correcta



ALGORITMO DE BOOTH

Unidad
aritmética
entera.

Multiplicar y
dividir

- Supongamos Multiplicando = 2 y Multiplicador = 7 (en binario 0010 x 0111)
- Booth expresó $7 = 8 - 1$ y sustituyo el multiplicador por esta descomposición:

$$0111 = 1000 - 0001 = +100-1$$

				0	0	1	0
				x	+1	0	0
							-1
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0		
0	0	0	1	0			
0	0	0	0	1	1	1	0

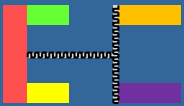
Multiplicando

Multiplicador según A. Booth

Restamos el multiplicando

2 despl. (2 ceros en el multiplicador)

Sumamos el multiplicando



ALGORITMO DE BOOTH

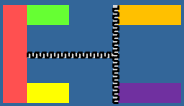
Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Bit actual	Bit a la izquierda	Sustitución
0	0	0 (no hay transición)
0	1	-1 (transición hacia negativo)
1	0	+1 (transición hacia positivo)
1	1	0 (no hay transición)

Ejemplo: Multiplicando = 11101110 y Multiplicador = 01111010

Recodificación del multiplicador según Booth = +1000-1+1-10

								x	1	1	1	0	1	1	1	0
									+1	0	0	0	-1	+1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0			
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0				
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	



ALGORITMO DE BOOTH

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Inicialmente $q_{-1}=0$

Repetir n veces

Si $q_0 = 1$ y $q_{-1} = 0$ entonces

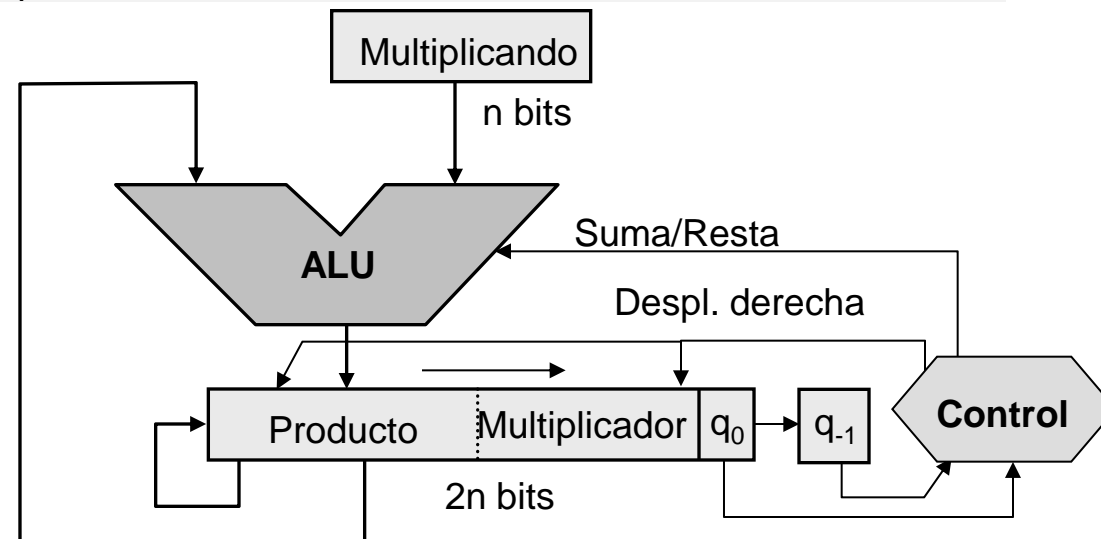
$\text{Producto}_h = \text{producto}_h - \text{Multiplicando}$

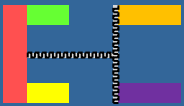
Si $q_0 = 0$ y $q_{-1} = 1$ entonces

$\text{Producto}_h = \text{Producto}_h + \text{Multiplicando}$

Desplazamiento aritmético a la derecha de Producto y q_{-1}

Fin repetir.





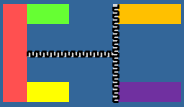
ALGORITMO DE BOOTH

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Multiplicando = 1010

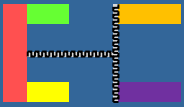
Multiplicador = 1110

Multiplicando	Producto	q ₋₁	Acción	Iteración
1010	0000 1110	0	Valores iniciales	0
1010	0000 1110	0	00 → Ninguna operación	1
1010	0000 0111	0	Desplazamiento dcha.	1
1010	0110 0111	0	10 → Resta	2
1010	0011 0011	1	Desplazamiento dcha.	2
1010	0011 0011	1	11 → Ninguna operación	3
1010	0001 1001	1	Desplazamiento dcha	3
1010	0001 1001	1	11 → Ninguna operación	4
1010	0000 1100	1	Desplazamiento dcha.	4



- ⊙ La división la podemos expresar como:
$$\text{Dividendo} = \text{Cociente} \times \text{Divisor} + \text{Resto}$$
- ⊙ El resto es más pequeño que el divisor. Hay que reservar el doble de espacio para el dividendo.
- ⊙ Supondremos operandos positivos.

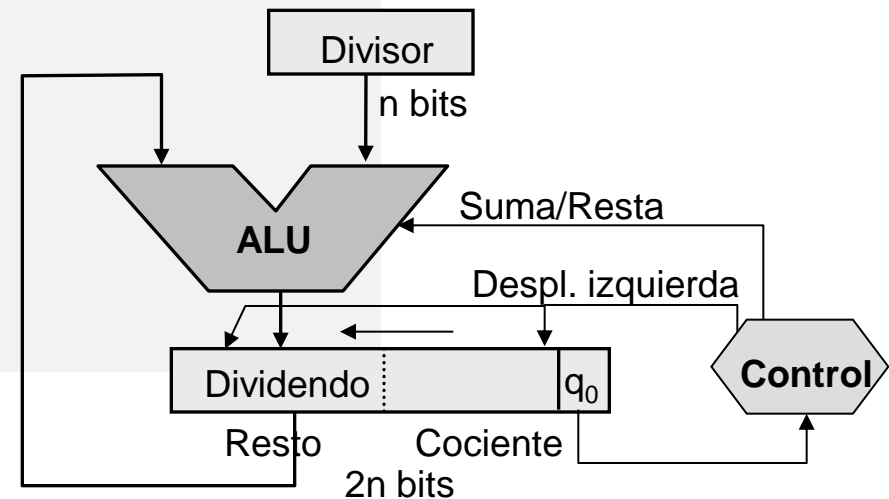
$$\begin{array}{r} \text{Dividendo} \rightarrow 10010011 \quad \overline{1011} \quad \leftarrow \text{Divisor} \\ 10010 \quad 01101 \quad \leftarrow \text{Cociente} \\ \underline{1011} \\ 001110 \\ \underline{1011} \\ 001111 \\ \underline{1011} \\ 0100 \quad \leftarrow \text{Resto} \end{array}$$

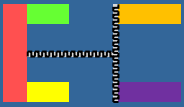


ALGORITMO SIN RESTAURACIÓN

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

$\text{Dividendo}_h = \text{Dividendo}_h - \text{Divisor}$
Repetir n veces
 Si $\text{Dividendo}_h < 0$ entonces
 Desplazar el Dividendo a la izquierda
 $\text{Dividendo}_h = \text{Dividendo}_h + \text{Divisor}$
 Sino
 Desplazar el Dividendo a la izquierda
 $\text{Dividendo}_h = \text{Dividendo}_h - \text{Divisor}$
 Fin Si
Si $\text{Dividendo}_h < 0$ entonces
 $q_0 = 0$
Sino
 $q_0 = 1$
Fin Si
Fin Repetir
Si $\text{Dividendo}_h < 0$ entonces
 $\text{Dividendo}_h = \text{Dividendo}_h + \text{Divisor}$
Fin Si





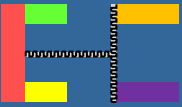
ALGORITMO SIN RESTAURACIÓN

Unidad
aritmética
entera.
Multiplicar y
dividir

Dividendo	Divisor	Acción	Iteración
0000 0111	0010	Valores iniciales	0
1110 0111	0010	$\text{Dividendo}_h - \text{Divisor}$	0
1100 111_	0010	$\text{Dividendo}_h < 0 \Rightarrow$ Desplazar Izda	1
1110 111_	0010	$\text{Dividendo}_h + \text{Divisor}$	1
1110 1110	0010	$\text{Dividendo}_h < 0 \Rightarrow q_0 = 0$	1
1101 110_	0010	$\text{Dividendo}_h < 0 \Rightarrow$ Desplazar Izda	2
1111 110_	0010	$\text{Dividendo}_h + \text{Divisor}$	2
1111 1100	0010	$\text{Dividendo}_h < 0 \Rightarrow q_0 = 0$	2
1111 100_	0010	$\text{Dividendo}_h < 0 \Rightarrow$ Desplazar Izda	3
0001 100_	0010	$\text{Dividendo}_h + \text{Divisor}$	3
0001 1001	0010	$\text{Dividendo}_h \geq 0 \Rightarrow q_0 = 1$	3
0011 001_	0010	$\text{Dividendo}_h > 0 \Rightarrow$ Desplazar Izda	4
0001 001_	0010	$\text{Dividendo}_h - \text{Divisor}$	4
0001 0011	0010	$\text{Dividendo}_h > 0 \Rightarrow q_0 = 1$	4

↑ ↑

Resto Cociente



- ⊙ Representación para números fraccionarios
 - ⊙ Coma fija $1234,567$
 - ⊙ Logarítmica $\log 123,456 = 2,0915122$
 - ⊙ Coma flotante $1,234566 \times 10^3$
 - ⊙ Otras
- ⊙ Ventajas de estandarizar una representación determinada
 - ⊙ Posibilidad de disponer de bibliotecas de rutinas aritméticas
 - ⊙ Técnicas de implementación en hardware de alto rendimiento
 - ⊙ Construcción de aceleradores aritméticos estándar, etc.
- ⊙ El estándar más empleado es el 754-1985 del IEEE.



ESTÁNDAR IEEE 754 PARA COMA FLOTANTE

Unidad
aritmética
flotante.
IEEE 754

Formatos

Simple precisión (32 bits)

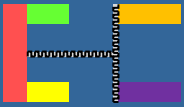
1 bit	8 bits	23 bits
signo	exponente	mantisa

Doble precisión (64 bits)

1 bit	11 bits	52 bits
signo	exponente	mantisa

Cuádruple precisión (128 bits)

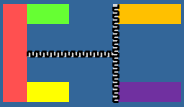
1 bit	15 bits	111 bits
signo	exponente	mantisa



ESTÁNDAR IEEE 754 PARA COMA FLOTANTE

Unidad
aritmética
flotante.
IEEE 754

- ⊙ Base del exponente 2
- ⊙ Exponente representado en exceso $2^{q-1}-1$
 - ⊙ Exceso a 127 en simple precisión
 - ⊙ Exceso a 1023 en doble precisión
- ⊙ Mantisa en valor absoluto; fraccionaria y normalizada con un uno implícito a la izquierda de la coma decimal.
 - ⊙ Mantisa de la forma 1,XXXXXX
 - ⊙ El primer uno nunca estará representado
 - ⊙ Valores posibles entre 1,00000..... y 1,11111....
- ⊙ S es el signo de la mantisa
- ⊙ Números
 - ⊙ $(-1)^S \times 1,M \times 2^{E-127}$ simple precisión
 - ⊙ $(-1)^S \times 1,M \times 2^{E-1023}$ doble precisión



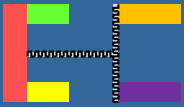
ESTÁNDAR IEEE 754 PARA COMA FLOTANTE

Unidad
aritmética
flotante.
IEEE 754

⊙ Casos especiales

E	M	Valores
2^{q-1}	$\neq 0$	NaN (no un Número)
2^{q-1}	0	$+\infty$ y $-\infty$ según el signo de S
0	0	Cero
0	$\neq 0$	Números desnormalizados

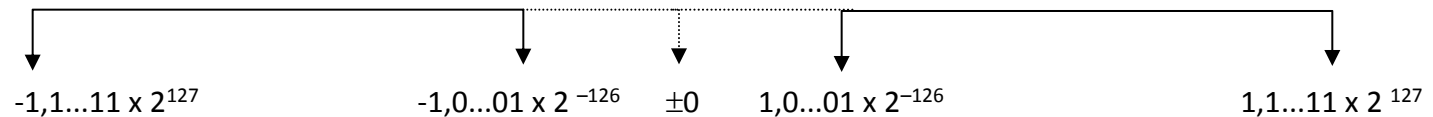
- ⊙ NaN resultado de operaciones tales como $0/0$, $\sqrt{-1}$
- ⊙ El valor cero tiene dos representaciones $+0$ y -0 .



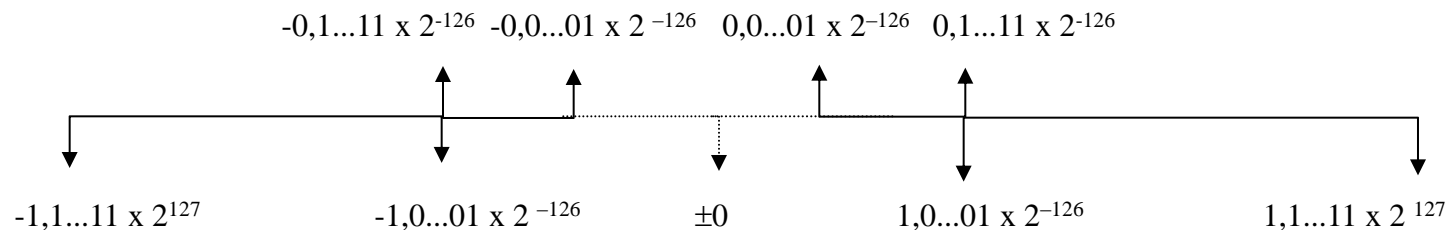
ESTÁNDAR IEEE 754 PARA COMA FLOTANTE

Unidad
aritmética
flotante.
IEEE 754

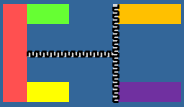
- Formato desnormalizado
 - $0, M \times 2^{-126}$ simple precisión
 - $0, M \times 2^{-1022}$ doble precisión



Sin números desnormalizados



Con números desnormalizados

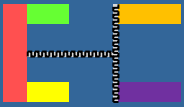


CONVERSIÓN DECIMAL-IEEE 754

Unidad
aritmética
flotante.
Sumar y
restar

🎯 Procedimiento

- 🕒 1. Representar en coma fija el número decimal.
- 🕒 2. Pasar número decimal a binario.
- 🕒 3. Normalizar mantisa.
- 🕒 4. Normalizar exponente.
- 🕒 5. Representar en formato IEEE 754

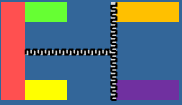


CONVERSIÓN DECIMAL-IEEE 754

Unidad
aritmética
flotante.
Sumar y
restar

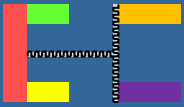
- ⊙ Ejemplo: -0.81375×10^2
 - ⊙ 1. Representar en coma fija el número decimal.
 - -81.375
 - ⊙ 2. Pasar número decimal a binario.
 - Parte entera: 81 $\rightarrow 1010001_2$
 - Parte decimal: 0.375 $\rightarrow 0.011_2$
 - 1010001.011_2
 - ⊙ 3. Normalizar mantisa.
 - 1.010001011×2^6
 - ⊙ 4. Normalizar exponente.
 - $E=6+127=133 \rightarrow 10000101_2$
 - ⊙ 5. Representar en formato IEEE 754

1 bit	8 bits	23 bits
1	10000101	010001011000.....00



⊙ Reglas de Suma/Resta

- ⊙ 1. Seleccionar el número de menor exponente y desplazar su mantisa hacia la derecha tantas posiciones como la diferencia de los exponentes en valor absoluto.
- ⊙ 2. Igualar el exponente del resultado al exponente mayor.
- ⊙ 3. Operar las mantisas (según operación seleccionada y signos de ambos números) y obtener el resultado en signo y valor absoluto.
- ⊙ 4. Normalizar el resultado y redondear la mantisa al número de bits apropiado.

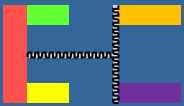


LA SUMA Y LA RESTA

Unidad
aritmética
flotante.
Sumar y
restar

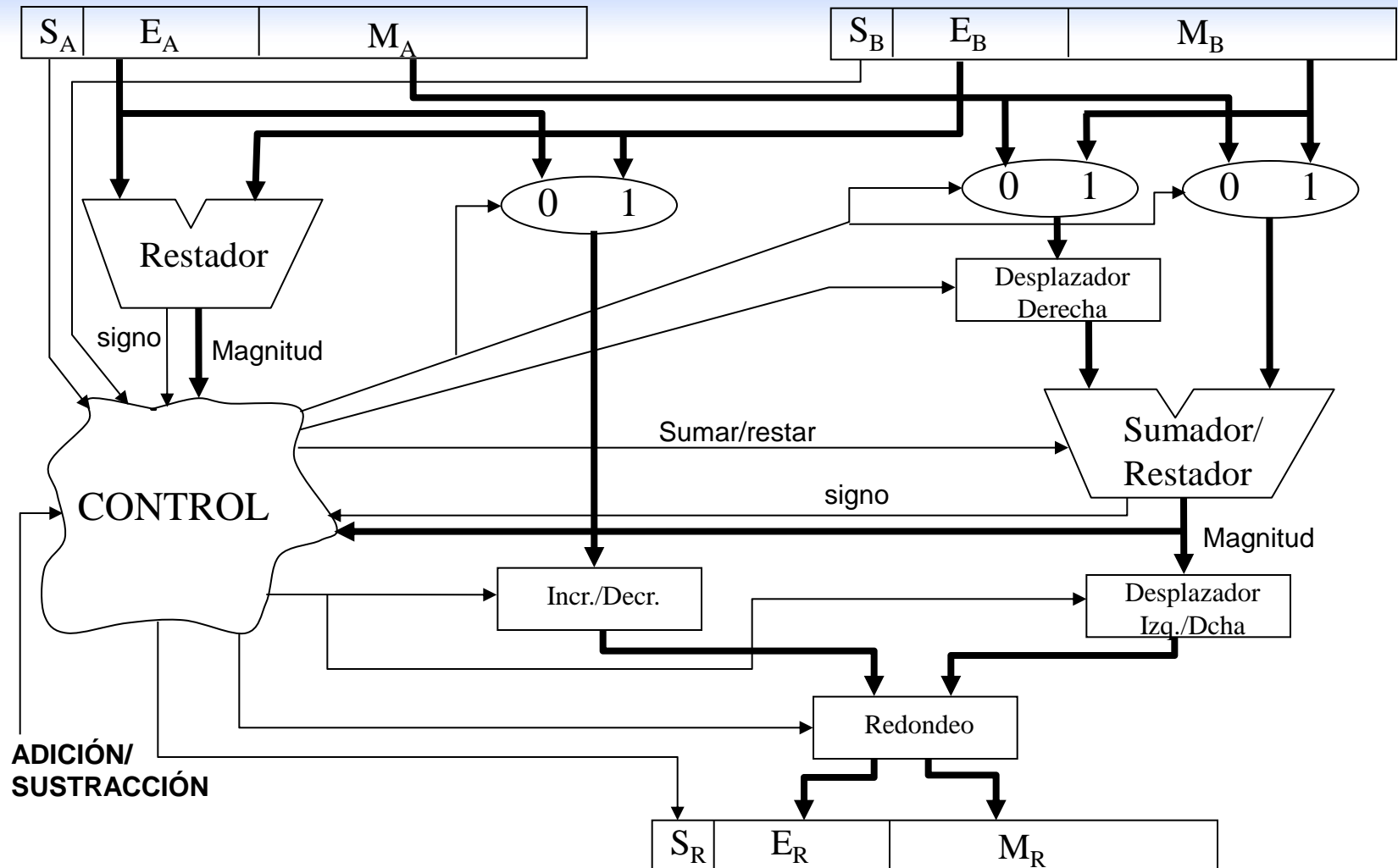
🎯 Selección de la operación real

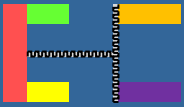
SA	SB	Operación	Operación Real	Valores
0	0	Suma	$A+B$	0
0	1	Suma	$A-B$	Según resultado
1	0	Suma	$B-A$	Según resultado
1	1	Suma	$A+B$	1
0	0	Resta	$A-B$	Según resultado
0	1	Resta	$A+B$	0
1	0	Resta	$A+B$	1
1	1	Resta	$A-B$	Según resultado



CIRCUITO SUMADOR/RESTADOR

Unidad
aritmética
flotante.
Sumar y
restar





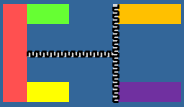
LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

Unidad
aritmética
flotante.
Multiplicar y
dividir

⊙ Reglas de Multiplicación

- ⊙ 1. Sumar los exponentes y restar el exceso para obtener el exponente del resultado
- ⊙ 2. Multiplicar las mantisas para determinar la mantisa del resultado
- ⊙ 3. Procesar los signos
- ⊙ 4. Normaliza y redondear si es necesario





LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

Unidad
aritmética
flotante.
Multiplicar y
dividir

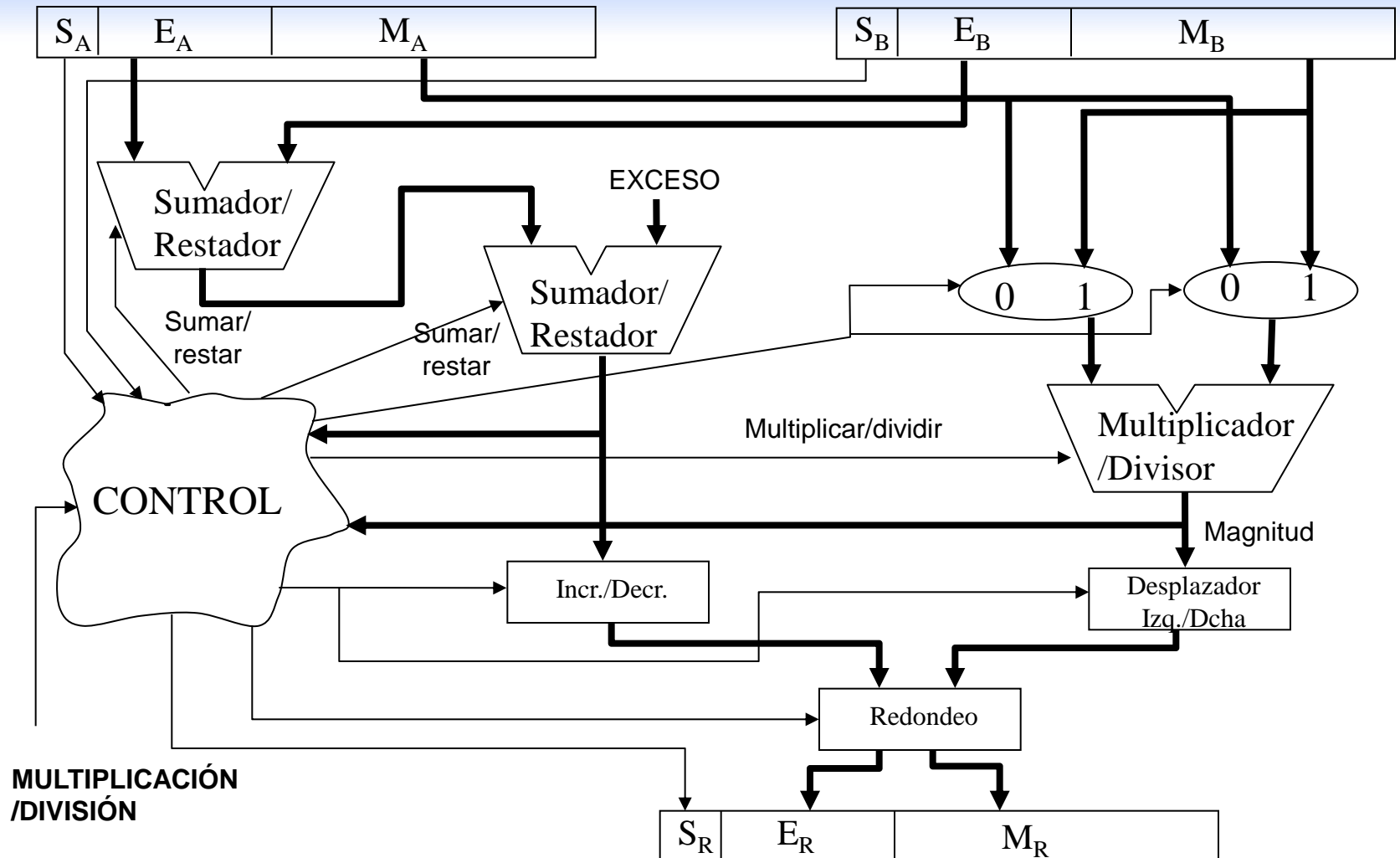
- ⊙ Reglas de División
 - 1. Restar los exponentes y sumar el exceso para obtener el exponente resultado
 - 2. Dividir las mantisas para determinar la mantisa del resultado.
 - 3. Procesar los signos.
 - 4. Normalizar y redondear si es necesario.

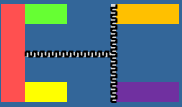
- ⊙ Procesamiento de los signos

S_A	S_B	S_R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0
$S_R = S_A \oplus S_B$		

CIRCUITO MULTIPLICADOR/DIVISOR

Unidad
aritmética
flotante.
Multiplicar y
dividir





TÉCNICAS DE REDONDEO

Unidad aritmética flotante. Técnicas de redondeo

- ⊙ Las técnicas de redondeo consisten en limitar el número de bits al disponible en el sistema de representación utilizado.
- ⊙ Dada una cantidad C , y un sistema de representación que permite representar los valores $V_0, V_1, \dots V_r$.
- ⊙ El redondeo consiste en asignar a C una representación R que se le aproxime.

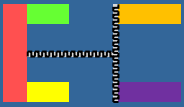
Si $V_{i-1} < C < V_i$ el redondeo consiste en asignar V_{i-1} o V_i como representación R de la cantidad C

- ⊙ El error absoluto se define como: $\varepsilon = |R - C|$
- ⊙ La resolución se define como: $\Delta = |V_i - V_{i-1}|$
- ⊙ Técnicas de redondeo
 - ⊙ Truncamiento
 - ⊙ Redondeo propiamente dicho
 - ⊙ Bit menos significativo forzado a “uno”



- ⊙ Elimina los bits a la derecha que no caben en la representación.
- ⊙ Es fácil de implementar.
- ⊙ El error del resultado es siempre por defecto.
- ⊙ El error puede crecer rápidamente





REDONDEO AL MÁS PRÓXIMO

Unidad
aritmética
flotante.
Técnicas de
redondeo

- ⊙ Toma el valor más próximo al que se quiere representar

$$\text{Si } |V_{i-1} - C| < |V_i - C| \rightarrow R \equiv V_{i-1} \text{ si no } V_i$$

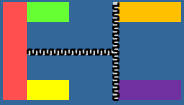
Ejemplo: representación con 8 bits de punto implícito

$$C = 0,01100000\ 01 \quad \equiv 0,375976563$$

$$V_{i-1} = 0,01100000 \quad \equiv 0,375$$

$$V_i = 0,01100001 \quad \equiv 0,37890625$$

$$\begin{array}{l|l} |V_{i-1} - C| = 0,000976563 & \\ |V_i - C| = 0,00390625 & \end{array} \longrightarrow R = 0,01100000$$



BIT MENOS SIGNIFICATIVO FORZADO A “UNO”

Unidad
aritmética
flotante.
Técnicas de
redondeo

- ⊙ Consiste en truncar y forzar el bit menos significativo a “uno”
- ⊙ Es muy rápido, tanto como el truncamiento
- ⊙ Sus errores son tanto por defecto como por exceso.

