«« قسمت تئوری پروژه جبر خطی »»

سوال اول)

گام نخست: محاسبه میانگین به صورت زیر

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

گام دوم: محاسبه ماتریس $\bar{D}$ با داشتن μ و D

$$\bar{D} = D - 1.\mu^T$$

گام سوم: محاسبه ماتریس کوواریانس

$$\Sigma = \frac{1}{n-1}\bar{D}^T\bar{D}$$

سوال دوم)

$$proj_{u_1} x_i = u_1^T x_i$$

$$\sigma_{u_1}^2 = E(u_1^T D - u_1^T\mu)^2 = \frac{1}{n}(u_1^T D - u_1^T\mu)^2 = \frac{1}{n}(u_1^T\bar{D})^2 = \frac{1}{n}u_1^T(\bar{D}^T\bar{D})u_1$$
$$= u_1^T\Sigma u_1 \quad \boxed{\checkmark}$$

سوال سوم)

$$0 = \frac{\partial(u^T\Sigma u - \lambda(-1+u^Tu))}{\partial u} = u^T\Sigma - \lambda u^T \Rightarrow \Sigma u^T = \lambda u^T$$

با توجه به $Av = xv$ متوجه می‌شویم که u^T بردار ویژه ماتریس کوواریانس می‌باشد، λ نیز مقدار ویژه متناظر با آن است.

سوال چهارم)

$$X = \frac{\partial\left(v^T \Sigma v - a(v^T v - 1) - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i (u_i^T v - 0)\right)}{\partial v}$$

$$X = v^T \Sigma - a v^T - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i (u_i^T) = 0 \longrightarrow \Sigma v^T = a v^T \rightarrow$$

v^T بردار ویژه Σ و a مقدار ویژه متناظر با آن می باشد

سوال پنجم)

با توجه به اینکه:

$$\text{proj}_{u_r} x = x_i' = \sum_{i=1}^{r} u_i \cdot x \bar{x}_i$$

و اینکه:

$$\text{Eigenvectors}(\Sigma) = u_r = \text{new basis}$$

نتیجه می گیریم که:

$$x_i' = u_r^T \bar{x}_i$$

سوال ششم) ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$

$$\sigma_i^2 = u_i^T \Sigma u_i \text{ (در سوال اول اثبات شد)}$$

از طرفی می دانیم:

$$\Sigma u_i^T = \lambda_i u_i^T$$

با ضرب u_i از سمت چپ داریم:

$$u_i \Sigma u_i^T = \lambda_i \longrightarrow (u_i \Sigma u_i^T) = \lambda_i^T = \lambda_i = u_i^T \Sigma u_i$$

در نتیجه داریم:

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{r} u_i^T \Sigma u_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$