پروژه پایانی

کنترل خطی

نام استاد: دکتر شریفی

اعضای گروه:

فروغ افخمی: ۹۸۲۳۰۰۶

ریحانه آهنی: ۹۸۲۳۰۰۹

فاطمه رفیعی: ۹۸۲۳۰۳۹

محمد مسیح شالچیان: ۹۸۲۳۰۵۱

پاندول معکوس

چکیده

حفظ تعادل آونگ معکوس در امتداد یک موقعیت عمودی با اعمال نیرو به ارابه یک مسئله متداول در مهندسی کنترل است.

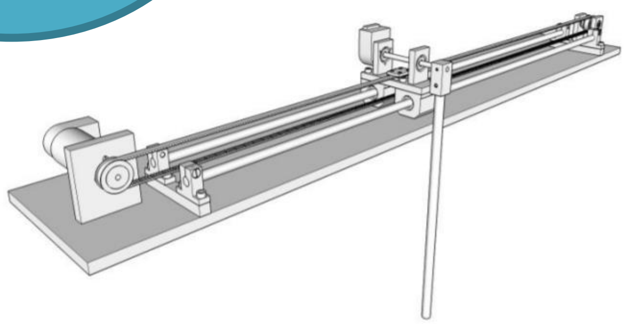
در زمینه کنترل خودکار محبوبیت این مسئله از این واقعیت نشأت گرفته است که این سیستم ذاتا ناپایدار است بنابراین در این پروژه سعی ما بر این است که با ایجاد مدل ریاضی، تجزیه و تحلیل رفتار آن بتوانیم یک کنترل کننده طراحی کنیم.

برای انجام اینکار مراحل زیر بصورت پله به پله انجام شدند:

- خطی سازی معادلات غیرخطی پاندول
- بدست آوردن تابع تبدیل و مدل فضای حالت سیستم
- بدست آوردن قطب های غالب
- رسم مکان هندسی و نمودار بود و نمودار نایکوئیست

عملکرد و کاربرد

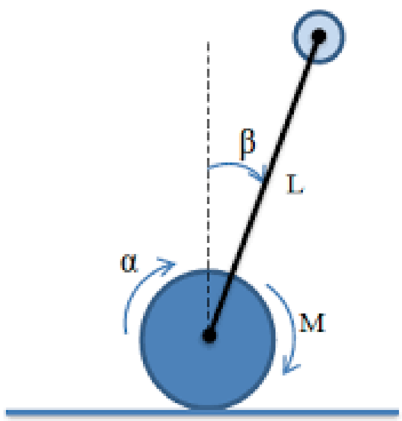
کنترل آونگ معکوس دقیقا معادل با عملکردی ست که هنگام متعادل کردن یک چوب بلند روی کف دست خود انجام می‌دهید. اگر دست را ثابت نگه دارید، چوب به سادگی می افتد. اگر می‌خواهید چوب را در تعادل نگه دارید، باید دست خود را حرکت دهید تا با حرکت افتادن چوب مقابله کنید.



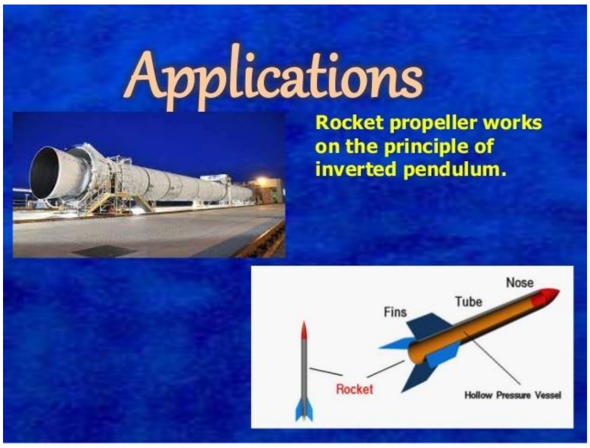
Physical model of inverted pendulum

آونگی که میله‌ی آن مستقیماً در زیر محور تکیه گاه آویزان است در نقطه تعادل پایدار قرار دارد. هیچ گشتاوری روی آونگ وجود ندارد، بنابراین بدون حرکت می‌ماند و اگر از این موقعیت جابجا شود، بدون نیاز به کنترلر به حالت تعادل بازمی‌گرداند. آونگی که میله‌ی آن در موقعیت معکوس قرار دارد (یعنی در ۱۸۰ درجه از موقعیت تعادل پایدار خود) در یک نقطه تعادل ناپایدار قرار دارد. در این مرحله مجدداً گشتاوری روی آونگ وجود ندارد، اما حتی کوچکترین جابه‌جایی از این موقعیت باعث ایجاد گشتاور گرانشی روی آونگ می‌شود که آن را از حالت تعادل دور می‌کند و سقوط می‌کند.

به منظور تثبیت آونگ در این موقعیت معکوس، می توان از یک سیستم کنترل فیدبکی استفاده کرد که زاویه آونگ را کنترل می کند و هنگام شروع به افتادن پاندول، موقعیت نقطه محوری را به طرفین حرکت می دهد تا آن را متعادل نگه دارد و این کار را با حرکت ارابه انجام می‌دهد در حین حفظ آونگ فرمان داده شود و سیستم ارابه-آونگ را بر روی یک اره مویی متعادل می‌کند. آونگ معکوس مربوط به هدایت موشک یا موشک است، جایی که مرکز ثقل در پشت مرکز پسا قرار دارد و باعث ناپایداری آیرودینامیکی می شود.



شاید ابتدا به نظر برسد که یک آونگ که به صورت معکوس کار می‌کند، در دنیای واقعی کاربرد قابل توجهی نداشته باشد اما برای نقض این ادعا دلایل متعددی وجود دارد. آونگ معکوس نشان دهنده بسیاری از سیستم های دنیای واقعی است. به عنوان مثال می‌توان به Segway، سیستم های وضعیت بدن انسان، پرتاب موشک و غیره اشاره کرد. اساساً، هر سیستمی که نیاز به تثبیت عمودی دارد، دینامیک-هایی شبیه به آونگ معکوس دارد. مطمئناً، پویایی در سیستم‌های دنیای واقعی پیچیده‌تر است، اما اصل و اساس کارشان شبیه به هم است. کار مربوط به مدل سازی و کنترل یک آونگ معکوس به بسیاری از زمینه های مهندسی انجام می شود.

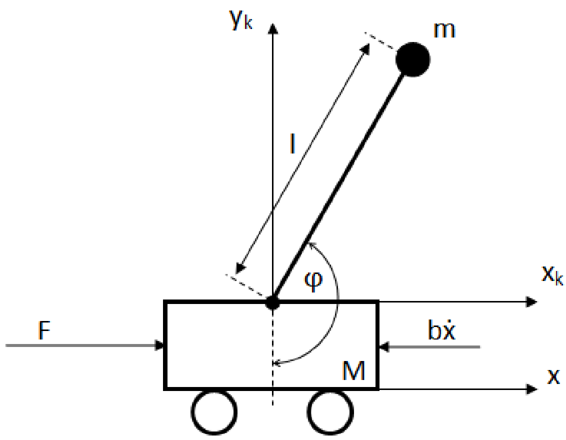


اغلب اوقات، سیستم‌ها از قبل یا پایدار هستند یا تا حدی پایدار هستند، و کنترل‌کننده طوری طراحی شده است که سیستم به نحوی خاص رفتار کند، ولی درمورد پاندول معکوس اوضاع کمی متفاوت است. در این سیستم، هم زاویه‌ی پاندول و هم مکان ارابه (cart) ذاتا ناپایدار هستند و در سمت راست یک قطب دارند و همین موضوع یکی از چالش‌های اصلی به شمار می‌رود.

خطی سازی حول نقطه تعادل

برای انجام اینکار، از معادلات لاگرانژ نوع دوم استفاده میکنیم. برای ادامه تحلیل کل سیستم را به عنوان سیستم مشترک در نظر میگیریم که نقاط جرمی متصل یک حرکت کلی را طی میکنند، این روش یکی از پرکاربردترین روش‌ها در تحلیل مسائل مکانیکی با معادلات جنبشی پیچیده می‌باشد.

متغییر	مقدار	یکا
جرم ارابه (M)	۰.۵	Kg
جرم پاندول (m)	۰.۲	Kg
طول پاندول (l)	۰.۳	m
ضریب اصطکاک ارابه (b1)	۰.۲	Nm^-1s^-1
ضریب اصطکاک پاندول (b2)	۰.۰۰۲	$Nrad^-1s^-1$
اینرسی پاندول (I)	۰.۰۰۶	Kg/m^2
نیروی جاذبه زمین (g)	۹.۸۱	m/s^2
نیروی اعمال شده به ارابه (F)	–	N
مکان ارابه (x)	–	m
زاویه پاندول (Φ)	–	Rad



انرژی جنبشی ارابه برابر است با:

$$E_{kv} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

مختصات x_k و y_k موقعیت پاندول را بصورت زیر توصیف می کنند:

$$x_k = x + l\sin\phi$$

$$y_k = l\cos\phi$$

مشتق مکان نسبت به زمان سرعت را به ما می‌دهد:

$$v_{kx} = x^{\cdot} + l\phi\cos\phi^{\cdot}$$

$$v_{ky} = -l\phi\sin\phi^{\cdot}$$

توان دوم سرعت پاندول:

$$v_k^2 = v_{kx}^2 + v_{ky}^2 = x^{\cdot 2} + 2lx^{\cdot}\phi^{\cdot} + l^2\phi^{\cdot 2}\cos^2\phi + l^2 + \phi\sin^{\cdot 2}\phi \; :$$

بعد از ساده سازی داریم:

$$v_k^2 = x^{\cdot 2} + 2lx^{\cdot}\phi^{\cdot}\cos\phi + l^2\phi^{\cdot 2}$$

در نهایت انرژی جنبشی پاندول عبارت است از:

$$E_{kk} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$$

در نهایت انرژی کلی جنبشی سیستم عبارت است از:

$$E_k = E_{kk} + E_{kv} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I+ml^2)\dot{\phi}^2 + ml\dot{x}\dot{\phi}cos\phi$$

مشتقات منفرد از معادله لاگرانژ متغییر **x** برای ارابه:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}cos\phi$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}cos\phi - ml\dot{\phi}^2 sin\phi$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$$
$$Q_x = F - b_1\dot{x}$$

و همچنین مشتقات منفرد معادله لاگرانژ برای زاویه ϕ عبارتند از:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} = (I+ml^2)\dot{\phi} + ml\dot{x}cos\phi$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}}) = (I+ml^2)\ddot{\phi} + ml\ddot{x}cos\phi - ml\dot{x}\dot{\phi}sin\phi$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}sin\phi$$
$$Q_\phi = -mglsin\phi - b_2\dot{\phi}$$

معادلات کلی لاگرانژ برای سرعت ارابه و زاویه پاندول برابر اند با:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}}) - \frac{\partial E_k}{\partial \phi} = Q_\phi$$

با قرار دادن این دو معادله بالا در معادلات مشتقات منفرد، بعد از ساده کردن، معادلات حرکت بصورت زیر هستند:

معادلات زیر دینامیک سیستم را نشان می‌دهد.

اکنون می‌خواهیم با تقریب مناسب برای عبارت غیرخطی مثل سینوسی و کسینوسی به یک مدل خطی با تقریب قابل قبولی برسیم.

$$\ddot{x} = \frac{-ml}{(M+m)}\ddot{\phi}cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2 sin\phi - \frac{b_1}{M+m}\dot{x} + \frac{F}{M+m}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-ml}{I+ml^2}\ddot{x}cos\phi - \frac{b_2}{I+ml^2}\dot{\phi} - \frac{mgl}{I+ml^2}sin\phi$$

خطی سازی معادلات دیفرانسیلی

در ادامه کار میخواهیم معادلات دیفرانسیلی را خطی سازی بکنیم. نقطه تعادل در مسئله ما در $\theta = \pi$ است وفرض کنیم که ϕ نشان دهنده انحراف از نقطه تعادل می باشد. بنابراین داریم:

$$\theta = \pi + \phi$$

هنگامی که پاندول در وضعیت عمودی است داریم:

$$cos\theta \approx -1$$

$$sin\theta \approx -\phi$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0$$

با استفاده از تقریب بالا معادلات خطی ما به شکل زیر بدست می آیند:

$$\ddot{x} = \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} - \frac{b_1}{M+m}\dot{x} + \frac{F}{M+m}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{ml}{I+ml^2}\ddot{x} - \frac{b_2}{I+ml^2}\dot{\phi} + \frac{mgl}{I+ml^2}\phi$$

با جایگزاری معادله خطی سازی شده مشتق دوم زاویه ϕ درون مشتق دوم x و پس از مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\ddot{x} = \frac{F(I+ml^2) - b_1(I+ml^2)\dot{x} - mlb_2\dot{\phi} + m^2l^2g\phi}{q}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{mlF - mlb_1\dot{x} - b_2(M+m)\dot{\phi} + mlg(M+m)\phi}{q}$$

که q به شکل زیر تعریف میشود:

$$q = ((I+ml^2)(M+m) - ml^2)$$

متغییر های حالت:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x_1} = \dot{x}$$
$$x_3 = \phi$$
$$x_4 = \dot{\phi}$$

میدانیم که فرم کلی معادلات حالت بصورت زیر است:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = C^T x(t) + Du(t)$$

ماتریس حالت سیستم برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_1(I+ml^2)}{q} & \frac{m^2l^2g}{q} & \frac{-mlb_2}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb_1}{q} & \frac{mlg(M+m)}{q} & -\frac{b_2(M+m)}{q} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{q} \\ 0 \\ \frac{ml}{q} \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل از فرمول کلی زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

نتیجه بصورت زیر است:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b_1(I+ml^2)+b_2(M+m)}{q}s^2 - \frac{b_1b_2+mlg(M+m)}{q}s - \frac{b_1mlg}{q}}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{(I+ml^2)}{q}s^2 + \frac{b_2}{q}s - \frac{mlg}{q}}{s^4 + \frac{b_1(I+ml^2)+b_2(M+m)}{q}s^3 - \frac{b_1b_2+mlg(M+m)}{q}s^2 - \frac{b_1mlg}{q}s}$$

- **صفر های تابع تبدیل پاندول و ارابه:**

$$s = 0$$

صفر های تابع تبدیل پاندول:

سیستم مربوط به پاندول مینیمم فاز است.

$$s_1 \approx -4.99499$$
$$s_2 \approx 4.91166$$

صفر های تابع تبدیل ارابه:

به دلیل وجود صفر در سمت راست صفحه **jw** سیستم مربوط به ارابه نامینیمم فاز است.

- **قطب های تابع تبدیل پاندول و ارابه:**

$$s_1 = -5.687$$
$$s_2 = -0.284$$
$$s_3 = 5.502$$

قطب های تابع تبدیل پاندول:

به دلیل وجود قطب در سمت راست صفحه **jw** سیستم مربوط به پاندول، ناپایدار است.

$$s_1 = -5.687$$

$$s_2 = -0.284$$

$$s_3 = 5.502$$

$$s_4 = 0$$

قطب های تابع تبدیل ارابه:

به دلیل وجود قطب در سمت راست صفحه **jw** سیستم مربوط به ارابه، ناپایدار است.

- **نوع سیستم**

در تابع تبدیل پاندول به دلیل اینکه $N=0$ است، نوع سیستم صفر می‌باشد. اما در تابع تبدیل ارابه به دلیل اینکه $N=1$ است، سیستم نوع یک است.

- **مقادیر ویژه**

با حل معادله $\det(sI - A) = 0$ میتوان مقادیر ویژه را بدست آورد. همانطور که میدانیم برای پایداری ما نیاز داریم که قسمت حقیقی تمام مقدار ویژه ها منفی باشد، اما چون این سیستم ذاتا ناپایدار است ما انتظار مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت داریم.

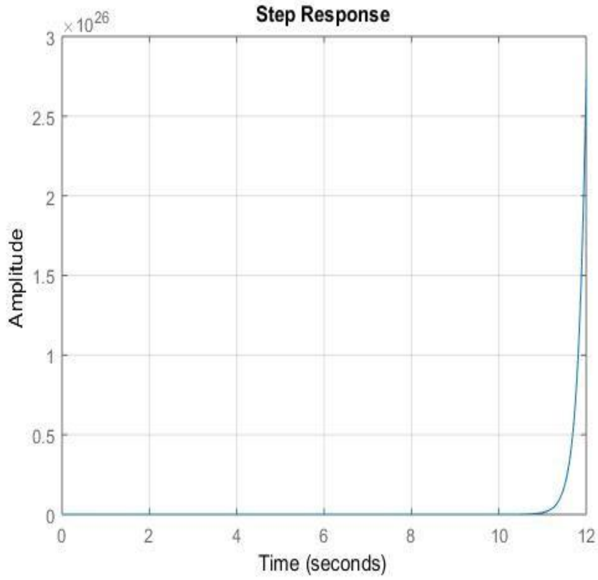
با حل معادله، مقادیر ویژه برابر اند با:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -5.6818$$
$$\lambda_3 = -0.2855$$
$$\lambda_4 = 5.4976$$

علاوه بر حل معادله $\det(sI - A) = 0$ ، میتوانستیم از دستور **eig(A)** در متلب نیز برای بدست آوردن مقدار ویژه ها استفاده بکنیم.

رسم پاسخ پله، بررسی پایداری و کاهش مرتبه

برای بررسی پایداری سیستم لازم است که ابتدا پاسخ پله آن را رسم کنیم. نتیجه بصورت زیر است:

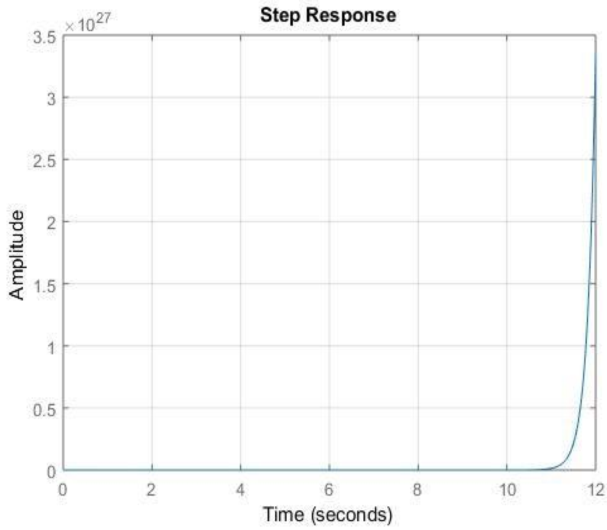


پاسخ پله ارابه

همانطور که از نمودار واضح است این سیستم کاملا ناپایدار است و به مقدار نهایی مشخصی میل نمی‌کند.

پاسخ پله پاندول

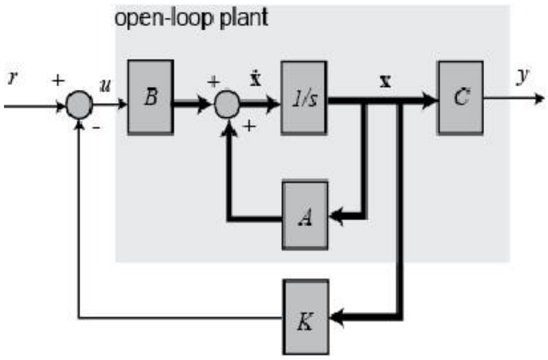
همانطور که از نمودار واضح است این سیستم کاملا ناپایدار است و به مقدار نهایی مشخصی میل نمی‌کند.



ناپایداری پاسخ پله سیستم ارابه و پاندول ناشی از وجود قطب سمت راست محور jw می‌باشد، برای انجام بخش های بعدی پروژه ما نیاز داریم که سیستم پایدار شود، بنابراین از روش فیدبک حالت می‌توان استفاده کرد تا قطب سمت راست را به سمت چپ محور jw انتقال دهیم.

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که با وجود اینکه دو قطب دورتر از دو قطب دیگر قرار گرفته اند ولی سیستم قابلیت تقریب زدن و کاهش مرتبه ندارد، چرا که صورت آن یا درجه یک و یا درجه دو می‌باشد در صورتی که برای یک سیستم درجه دو استاندارد، صفری وجود نداشت.

پایدارسازی از روش فیدبک حالت



$$rank(Ctrb) = rank([B, AB, AB^2, AB^3]) = n$$

$$rank(Obsv) = rank(\begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \\ C^T A^3 \end{bmatrix}) = n$$

ابتدا باید کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم را بررسی کنیم تا بتوانیم تشخیص دهیم که آیا میتوان

$$U = r - Kx$$

$$x = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br$$

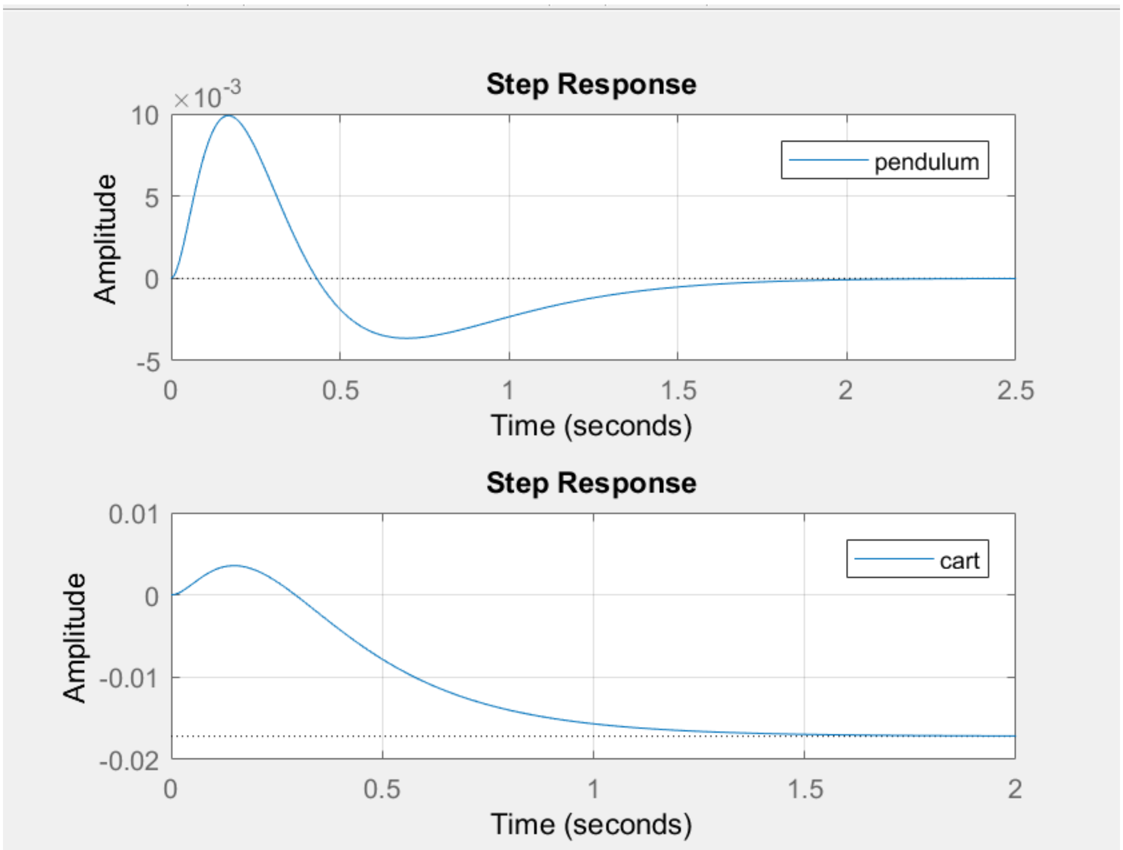
$$y = Cx$$

بافیدبک سیستم را پایدار کرد. از این رو ماتریس های **Ctrb** و **Obsv** را تشکیل میدهیم و رنک این ماتریس ها راحساب میکنیم:

دینامیک کنترلر به صورت زیر خواهد بود:

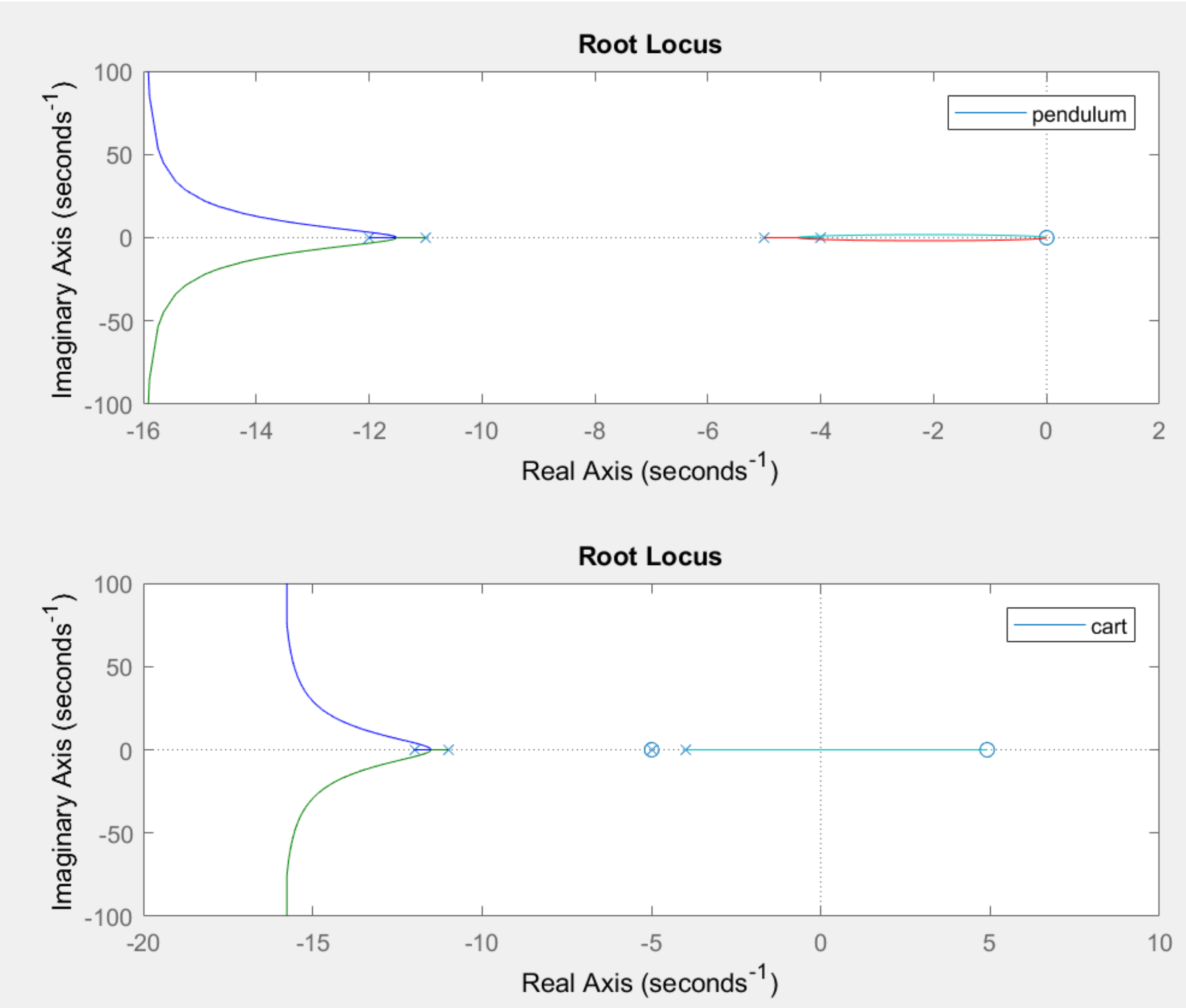
با انتخاب بردار **K** بصورت زیر و تعریف این دستور در متلب دوباره پاسخ پله های سیستم را رسم می‌کنیم:

```
p = [-4 -5 -11 -12];  % chosen arbitrary
k = place(A,B,p);

sys_ss = ss(A-B*k,B,C,D);
[Gnum, Gdnum] = ss2tf(A-B*k, B, C, D);
cart = tf(Gnum(1,:), Gdnum);
pend = tf(Gnum(2,:), Gdnum);
```



با انجام روش فیدبک حالت مشاهده میشود که هم تابع تبدیل پاندول و هم تابع تبدیل ارابه به یک مقدار نهایی میل میکنند. که این نشان دهنده پایداری می باشد. البته در بخش قبل رنک ماتریس های Ctrb(AB) و Obsv(AC) حساب شده اند که از آن‌جا متوجه شدیم این سیستم هم کنترل پذیر و هم رویت پذیر می‌باشد بنابراین توانستیم با استفاده از روش فیدبک حالت و جابه‌جایی قطب سمت راست محور jw سیستم را پایدار بکنیم.

رسم مکان هندسی و بررسی پایداری

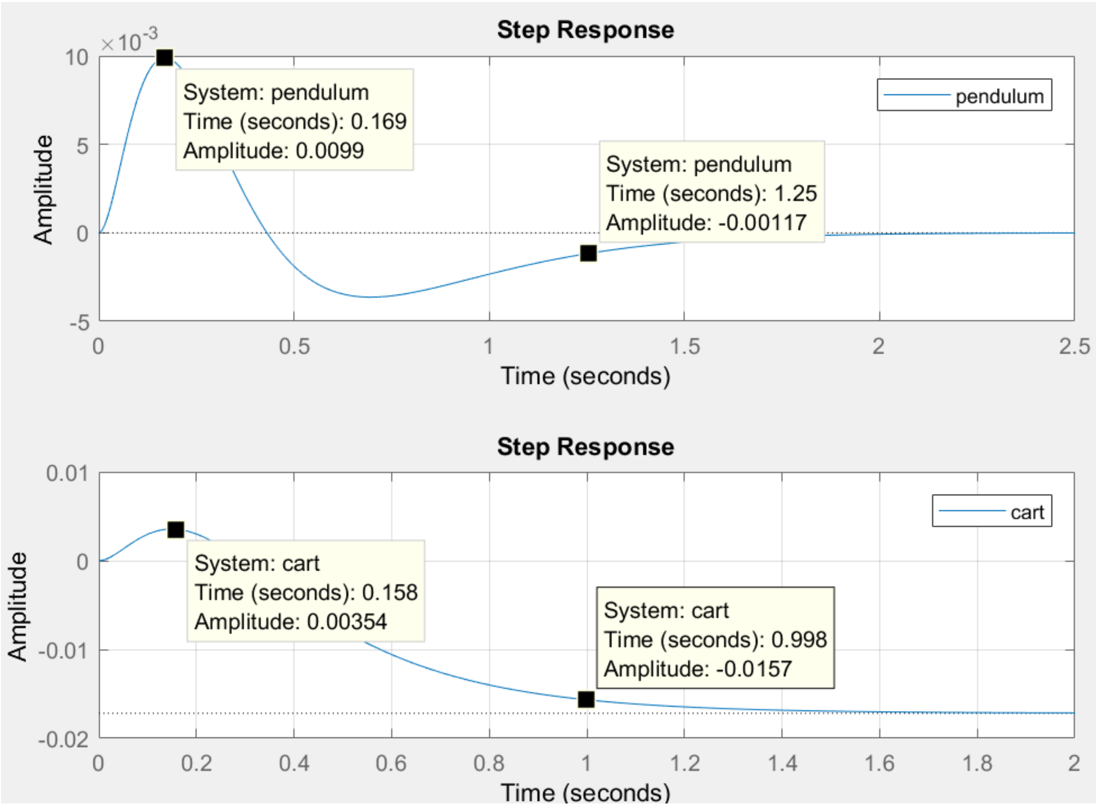


همانطور که از نمودار مکان ریشه پاندول معلوم است، مشاهده می‌شود که این سیستم پایدار می‌باشد، همچنین می‌توان این پایداری را با استفاده از نمودار نایکوئیست هم نتیجه گرفت، اما در نمودار مکان ریشه ارابه سیستم زمانی پایدار است که ما قطب سمت راست نداشته باشیم، بنابراین باید از روش فیدبک حالت استفاده کنیم تا قطب سمت راست را به سمت چپ انتقال دهیم. قبل از استفاده از روش فیدبک حالت این قطب در حوالی مثبت ۵ قرار داشت، که با استفاده از فیدبک حالت، به سمت چپ محور jw انتقال یافت.

بررسی پارامتر های حوزه زمانی

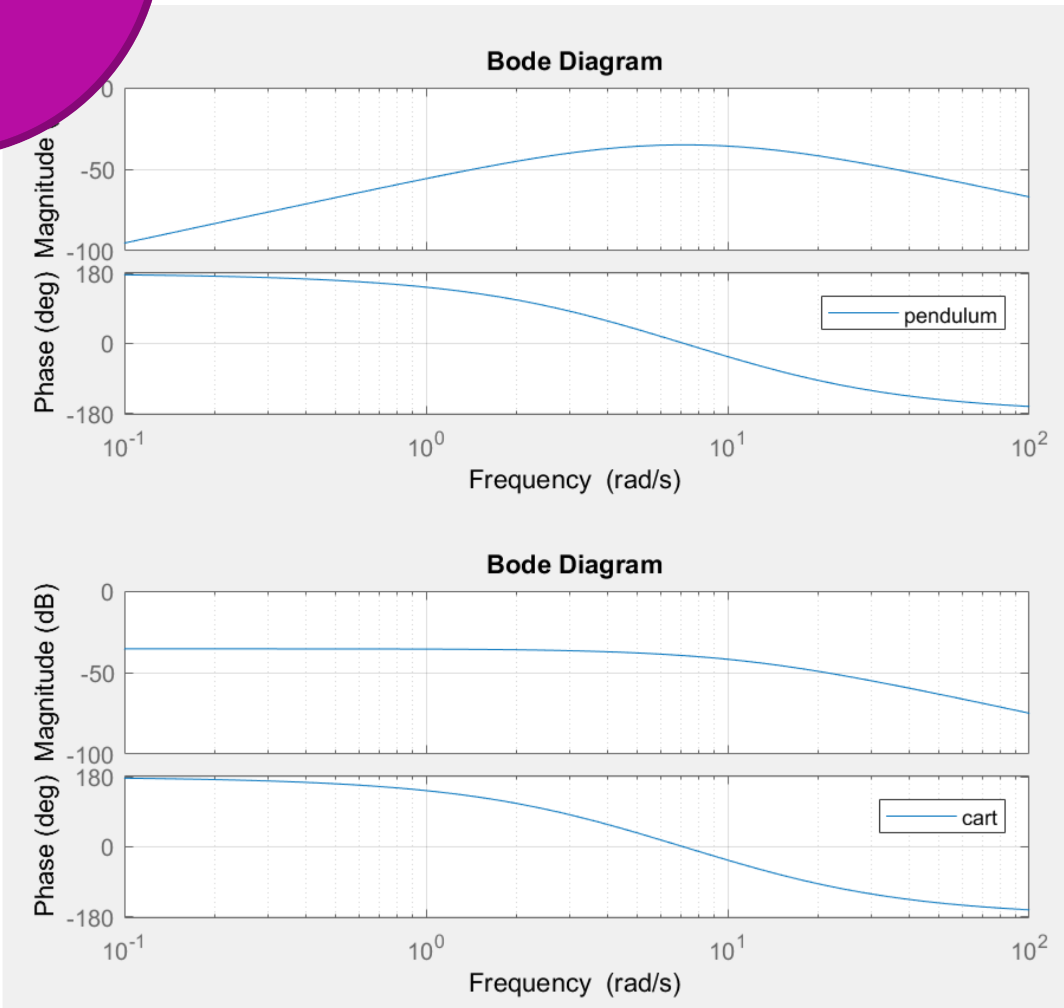
به دلیل اینکه هم تابع تبدیل پاندول و هم تابع تبدیل ارابه هر دو از مرتبه های بالاتر از دو میباشند، برای بدست آوردن پارامتر هایی از قبیل فراجهش درصد فراجهش، زمان صعود و زمان نشست باید از پاسخ پله سیستم ها کمک بگیریم.

لازم به ذکر است که چون مقدار نهایی زاویه پاندول و موقعیت ارابه باید به صفر میل کند، از این جهت تعریف کردن فراجهش و زمان نشست پیچیده می‌شود. در عوض از مقداری که در مقاله به عنوان انحراف قابل قبول برای زاویه پاندول استفاده شده (یعنی ۲ درجه) تبعیت می‌کنیم.



مشخصه زمانی	مقدار مشخصه زمانی پاندول	مقدار مشخصه زمانی ارابه
فراجهش	۰,۰۱ رادیان (۰,۵ درجه)	۰,۰۰۳
درصد فراجهش	–	–
زمان صعود	۰,۱۶۹	۰,۱۵۸
زمان نشست	۱,۲۵ ثانیه	۱ ثانیه

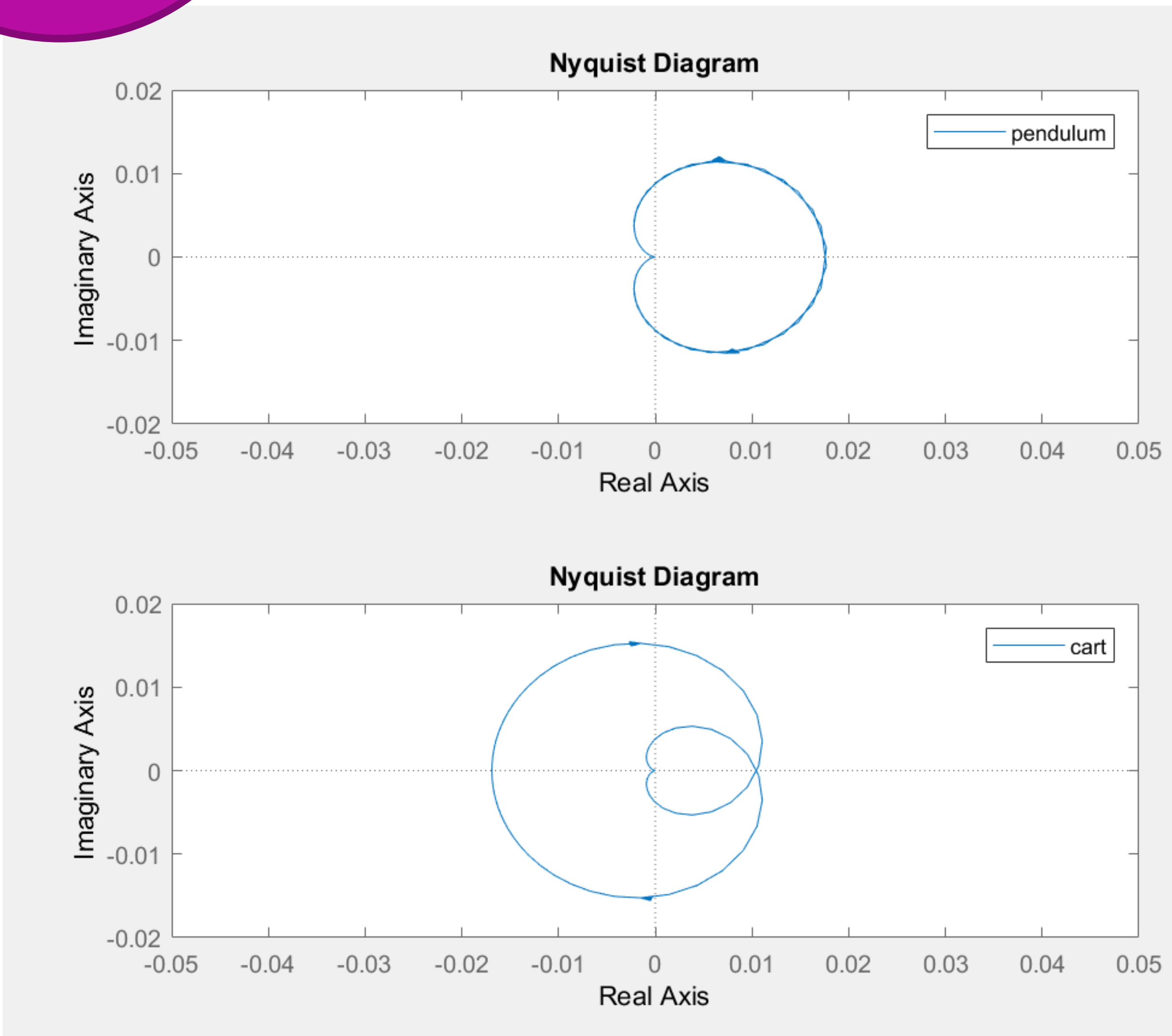
رسم نمودار بودی



همانطور که در نمودار زاویه مشاهده می‌کنیم، به دلیل وجود دو صفر بسیار نزدیک به مبدا، ابتدا کمی گین ما افزایش یافته و سپس با ظهور چهار قطب (که دو تای آن‌ها به نسبت دوتای دیگر دورتر از مبدأ هستند) دوباره گین روند نزولی پیدا کرده است.. همچنین نمودار فاز پاندول به خوبی نمایانگر حضور قطب ها می-باشد. توجه داریم که درجه صورت ۲ و درجه مخرج ۴ است و این یعنی باید زاویه‌ی نهایی به ۹۰- * ۲ = ۱۸۰- میل کند که همینطور هم می‌باشد.

درمورد نمودار ارابه، قطب‌ها تغییری نکرده اند ولی دو صفر در سمت راست و چپ داریم که دیگر به مبدأ نزدیک نیستند، به همین خاطر، نمودار گین اندازه اش در صفر کمتر شده است. همچنین نمودار اندازه تا فرکانس‌های ۷ یا ۸ تقریبا ثابت است و از آن به بعد اثر قطب‌های ۱۲- و ۱۱- بیشتر مشخص می‌شود.

رسم نمودار نایکوئیست



بررسی مقادیر
حاشیه فاز و
حاشیه بهره

در این مرحله علاوه بر استفاده از نمودار های بودی میتوان از دستور متلب زیر استفاده کرد و مقادیر دقیق حاشیه فاز و حاشیه بهره را بدست آورد.

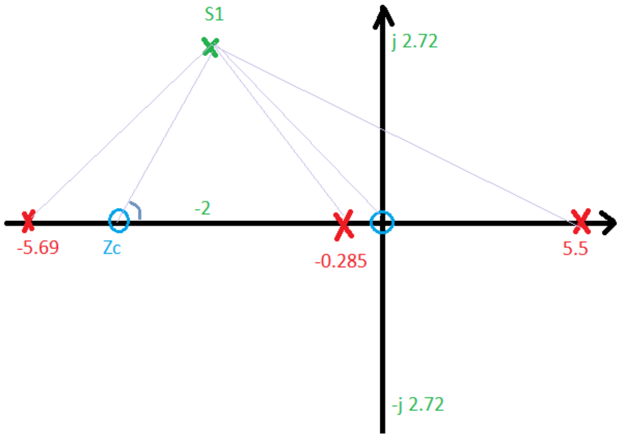
```
%%gm , pm , wgc , wpc

[gm_p, pm_p, wpc_p, wgc_p]= margin(pend)
[gm_c, pm_c, wpc_c, wgc_c]= margin(cart)
```

	پاندول	ارابه
حاشیه فاز	بی نهایت	بی نهایت
حاشیه بهره	۱۰۰	۱٤٦

طراحی PID برای سیستم

در این مرحله نیاز است که از یک کنترل‌کننده **PID** جهت پایدارسازی سیستم پاندول استفاده کنیم.

برای این کار ابتدا یک کنترل‌کننده **PD** طراحی کرده و سپس برای کل سیستم جدید این بار یک **PI** طراحی می‌کنیم.



$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \zeta = 0.59$$

$$S_1, S_2 = -2 \pm j2.72$$

$$Pend_{initial} = \frac{1.045s}{0.23s^3 + 0.108s^2 - 7.186s - 2.051}$$

$$\theta_z - (\pi - tan^{-1}(\frac{2.72}{7.5}) + \pi - tan^{-1}(\frac{2.72}{1.715}) + tan^{-1}(\frac{2.72}{3.69})) = -\pi$$

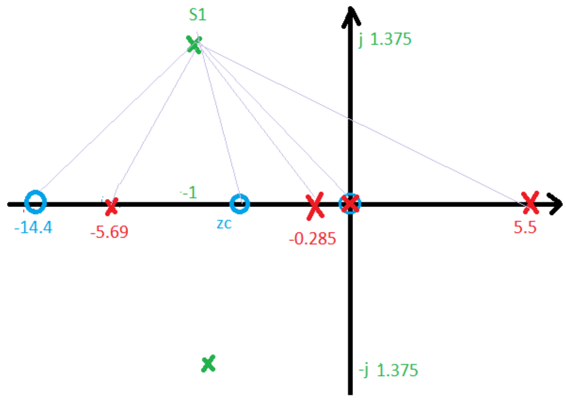
$$\Rightarrow \theta_z = 12.37 = tan^{-1}(\frac{2.72}{z_c}) \Rightarrow z_c = -14.4$$

$$K_D = |\frac{0.23(-2+j2.72)^3 + 0.108(-2+j2.72)^2 - 7.186(-2+j2.72) - 2.051}{-2+j2.72+14.4}| = 2.13$$

$$K_P = Z_c K_D = 30.67$$

$$C(s) = 30.67 + 2.13s$$

پس از اتمام این مرحله، این دو جبران‌ساز را در تابع تبدیل سیستم ضرب می‌کنیم و با مشاهده پاسخ پله درمی‌یابیم که زاویه‌ی پاندول به پایداری رسیده است و حال باید ویژگی‌های دیگر این سیستم از جمله زمان نشست و اورشوت را توسط یک کنترلر دیگر کنترل کنیم.



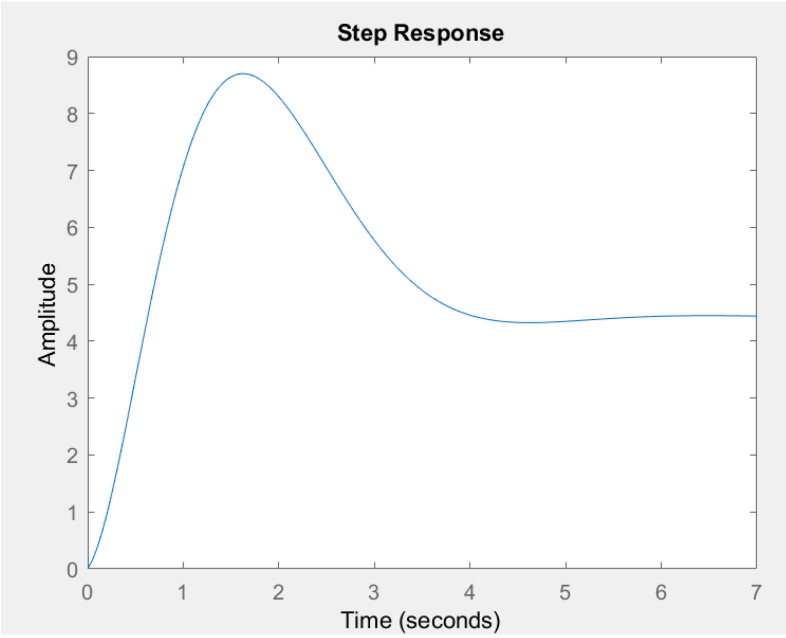
$$T = \frac{2.227s^2 + 32.16s}{0.23s^3 + 0.108s^2 - 7.186s - 2.051}$$

$$\theta_z + \pi - tan^{-1}(1.375) + tan^{-1}(\frac{1.375}{13.4}) - (\pi - tan^{-1}(\frac{1.375}{6.5}) - tan^{-1}(\frac{1.375}{0.715}) + \pi + tan^{-1}(\frac{1.375}{4.69}))$$

$$tan(\theta_z) = \frac{1.37}{z_c}, \theta_z - 116 \Rightarrow z_c = 0.33, k_p = 0.25, k_I = 0.082$$

$$C(s) = 0.25 + \frac{0.082}{s}$$

پس از طراحی PID، یک‌بار دیگر شبیه‌سازی را با فیدبک واحد انجام می‌دهیم تا خروجی به پاسخ پله را مشاهده و ارزیابی کنیم.



همانطور که از شکل مشخص است، پاسخ نهایی خطای بسیار زیادی دارد و فراجهش آن هم قابل قبول نیست.

بنابراین طراحی را باید ادامه دهیم.

این بار برای سیستم (با توجه به ویژگی‌های حوزه فرکانس) یک کنترلر پیش‌فاز-پس‌فاز طراحی می‌کنیم.

$$e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{10}{100} \Rightarrow \zeta = 0.7 \Rightarrow \theta = 45.6$$

Imaginary part of the pole: $tan(45.6) = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5.1$

$$\Rightarrow s_1, s_2 = -5 \pm j5.1$$

$$-\pi = \theta_z - (63.88 + 73.61 + \pi - 55.53 + \pi - 54.78 - 45.56) \Rightarrow \theta_z = -161.62$$

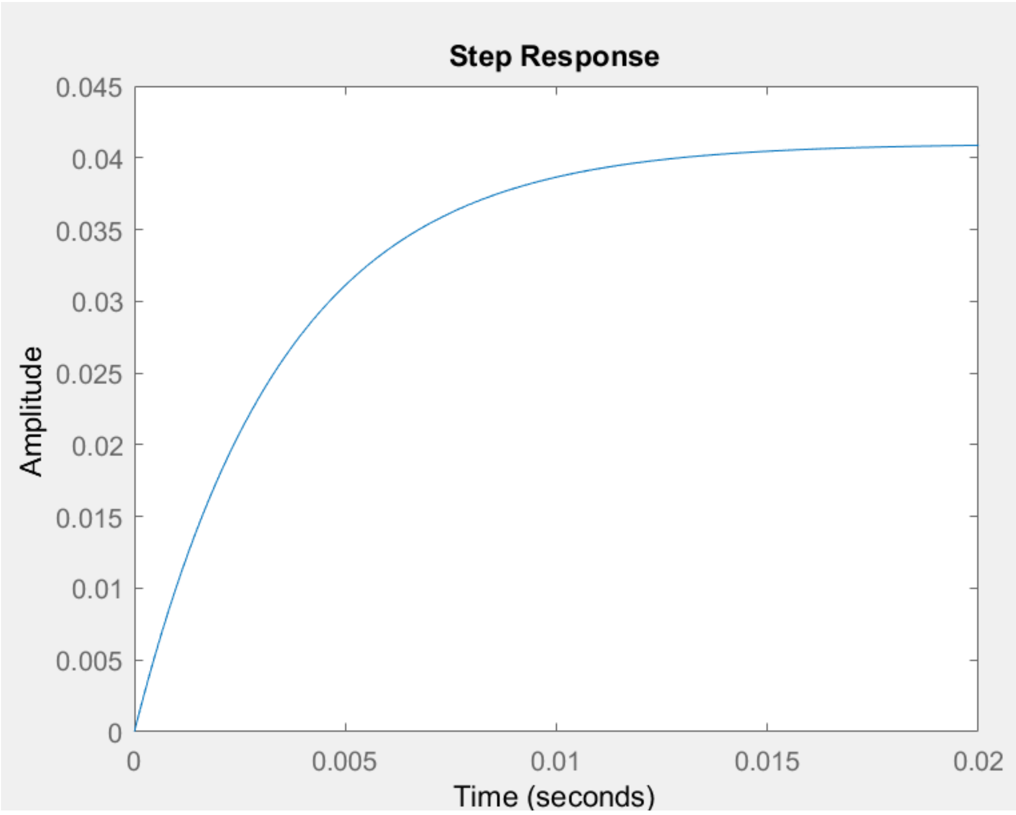
$$z_c = -5, p_c = -6.69$$

$$|k\frac{s+5}{s+6.69}|_{s=-5+j5} = 1 \Rightarrow k = 5.3$$

$$c_{lead} = 5.3\frac{s+5}{s+6.69}$$

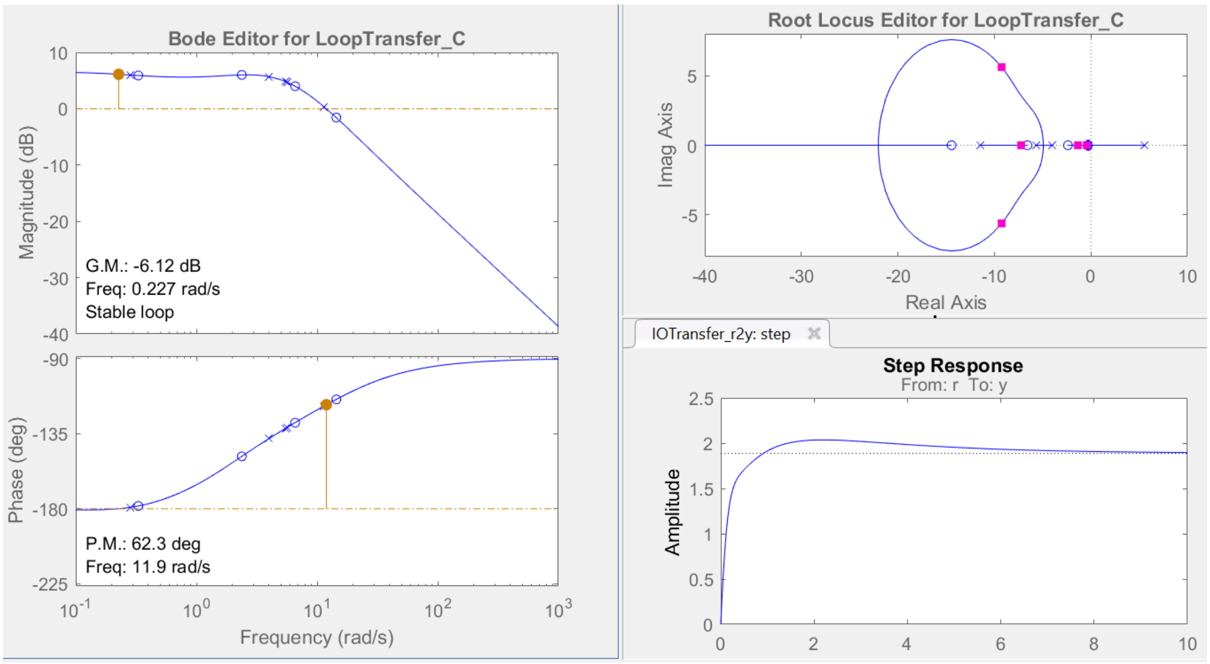
مشاهده نتیجه

در نهایت با وجود یک کنترلر lead-lag و یک کنترلر PID شکل خروجی بسیار بهبود یافت یعنی خطای آن چند برابر کمتر شد و اورشوت آن قابل مقایسه با حالت قبلی‌اش نیست.



حال می‌خواهیم به بررسی حاشیه بهره و حاشیه فاز در دو حالت فیدبک حالت و PID بپردازیم

همانطور که مشاهده می‌شود، وقتی lead-lag و PID داریم، حاشیه فاز مثبت می‌شود (به راحتی) اما حاشیه بهره منفی است، حتی وقتی قطب‌ها را در sisotool جابه‌جا نیز کردیم، این تغییر حاصل نشد، البته تا حد اندکی می‌توانست مثبت باشد ولی با عدد مطلوب فاصله‌ی زیادی داشت.

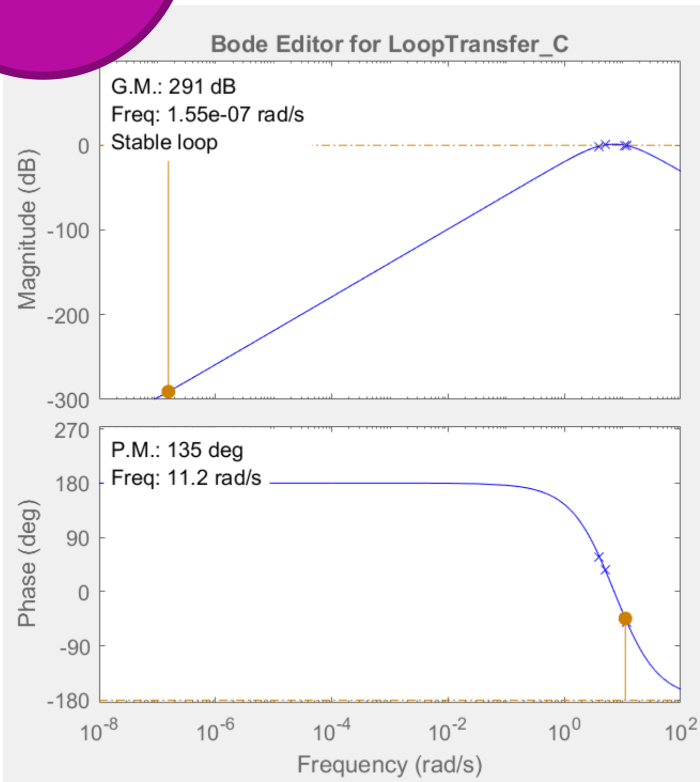


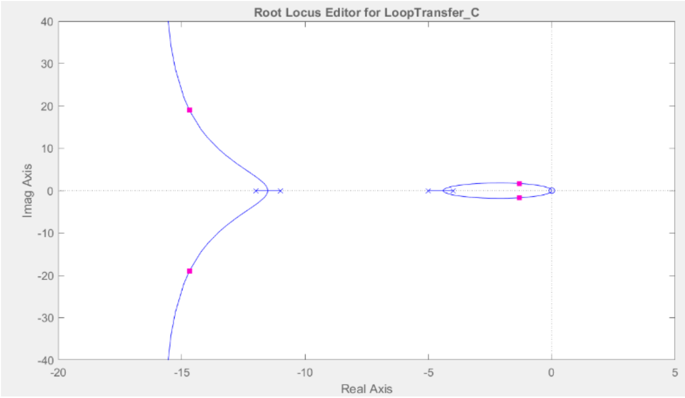
به همین دلیل به سراغ یک روش دیگر رفتیم تا با استفاده از آن بتوانیم هم حاشیه بهره و هم حاشیه فاز مثبت داشته باشیم. البته با فیدبک حالت نیز نمی‌توانیم به نمودارهای زیر برسیم، و باید قطب‌ها را جابجا کنیم، که خوشبختانه این اعداد در حال حاضر روی نمودار روت لوکاس وجود دارند، پس فقط نیاز به یک گین داریم که با کمک sisotool دریافتیم که این ضریب ۶۵٫۸۷۵ است. یعنی

```
Pend_new = 65.875*pend;
```

حاشیه بهره و
حاشیه فاز

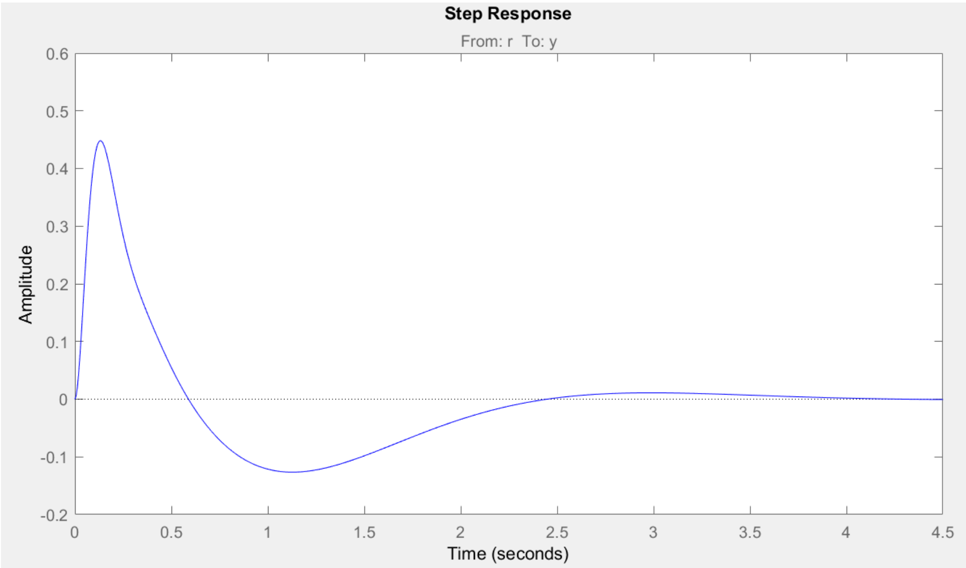
پس این بار داریم:





همانطور که می‌بینیم، هم **GM** و هم **PM** شرایط مطلوب را برآورده کردند.

شکل زیر هم پاسخ پله در این حالت را نمایش می‌دهد.



چالش‌ها

در این بخش به بیان برخی از چالش‌هایی که با آن‌ها رو به رو شدیم می‌پردازیم.

مورد اول اینکه برای بخش ب، پارامترهای که از ما خواسته شده بود که به دست آوریم برای سیستمی معنا داشت که پایدار باشد، در نتیجه ما با استفاده از فیدبک حالت سیستم خود را پایدار کردیم و سپس به بررسی پارامترهای مورد سؤال پرداختیم.

همچنین در طراحی فرکانسی جبران‌ساز در حوزه‌ی فرکانس مشکل اصلی این بود که نوع سیستم پایین بود و در نتیجه امکان به دست آوردن Kv وجود نداشت، بنابراین به نظر می‌رسید که ویژگی‌های سیستم اصلی نمی‌توانند در طراحی کنترلر نقش خود را ایفا کنند در نتیجه برای رفع این مشکل برای سیستمی که یک بار برایش قبلا PID قرار داده بودیم این بار یک PI طراحی کردیم که نوع سیستم بالاتر رود.

در طراحی جبران‌ساز lead، پس از مشاهده پاسخ، نتیجه نهایی مطابق با انتظار نبود یعنی حاشیه بهره به عدد ۱۲ که خواسته‌ی سؤال بود نمی‌رسید؛ به همین دلیل با استفاده از ابزار sisotool متلب، به صورت دستی قطب‌ها را حرکت دادیم تا دریابیم که آیا با افزودن یک گین K می‌توانیم به مقصود مورد نظر برسیم یا خیر.

در ادامه به خاطر حساسیت بالای سیستم و ناپایداری ذاتی آن، به جای PID، از فیدبک حالت برای کنترل سیستم استفاده کردیم و به حاشیه فاز و بهره‌ی بالایی دست پیدا کردیم.

جمع‌بندی

در آخر به این نتیجه رسیدیم که سیستم پاندول معکوس که شامل دو بخش پاندول و ارابه می‌باشد که هر دو به طور طبیعی ناپایدار هستند و برای آن‌ها حتما باید کنترلر طراحی شود. این کنترلر می‌تواند ترکیبی از PID و lead-lag باشد یا به صورت فیدبک حالت باشد که در این سیستم خاص، فیدبک حالت کمک شایانی به پایداری ارابه می‌کند؛ چرا که معادلات ارابه علاوه بر قطب سمت راست، یک صفر نامینیمم فاز هم دارد که باعث پیچیده‌تر شدن مکان ریشه‌ها می‌گردد و انتقال ریشه‌ها را به سمت چپ محور سخت‌تر می‌کند.

اما در نهایت با توجه به پاسخ پله‌ای که مشاهده کردیم توانستیم پاندول را تا حد خوبی کنترل کنیم و برخی ویژگی‌های آن را بهبود ببخشیم.