

Kapitel 3

Messtechnik

Abschnitt 3.1

Strom- und Spannungsmessung

Messgeräte

- ▶ Ströme und Spannungen werden mit dafür vorgesehenen Messgeräten gemessen.
- ▶ Messgeräte werden charakterisiert durch ihren Messbereich und ihren Innenwiderstand.
- ▶ Ein Innenwiderstand von $R_i \neq R_{i,ideal}$ kann eine Messung stark verfälschen!
- ▶ Ströme werden mit Amperemetern, Spannungen mit Voltmetern gemessen.



(Einbau-)
Amperemeter
und Voltmeter



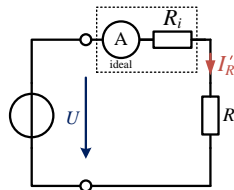
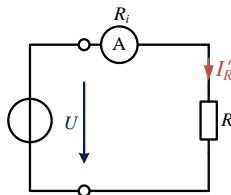
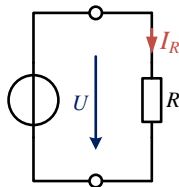
Analogmultimeter



Digitalmultimeter



Oszilloskop



$$I'_R = \frac{U}{R + R_i} < I$$

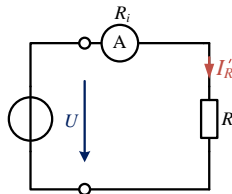
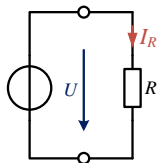
⇒ Der Innenwiderstand verfälscht den Messwert.

$$I_R = \frac{U}{R} \quad I'_R = \frac{U}{R_i + R}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_R}{I'_R} &= \frac{\frac{U}{R}}{\frac{U}{R_i + R}} = \frac{R_i + R}{R} \\ &= 1 + \frac{R_i}{R} \end{aligned}$$

⇒ für kleinen Messfehler:
 $R_i \ll R_L$
(Amperemeter mit kleinem Innenwiderstand, ideal $R_i = 0 \Omega$)

Strommessung (Beispiele)



Beispiel 1: $R_i \ll R$

$$U = 10 \text{ V}; \quad R = 1000 \, \Omega = 1 \text{ k}\Omega; \quad R_i = 1 \, \Omega$$

$$\Rightarrow I_R = 0,01 \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

$$I'_R = 0,0099900999 \text{ A} \approx 10 \text{ mA}$$

\Rightarrow Fehler vernachlässigbar

Beispiel 2: $R_i = \frac{1}{10} R$

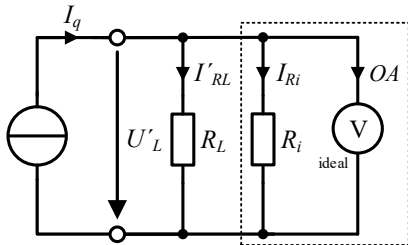
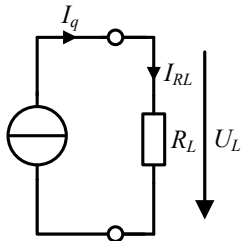
$$U = 10 \text{ V} \quad R = 10 \, \Omega \quad R_i = 1 \, \Omega$$

$$\Rightarrow I_R = U = 1 \text{ A}$$

$$I'_R = 0,9090909 \text{ A} \approx 0,91 \text{ A}$$

\Rightarrow Fehler nicht vernachlässigbar

Spannungsmessung I



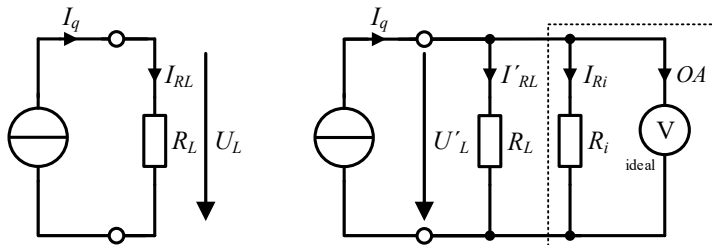
ideal (links): $U_L = I_q R_L = I_{R_L} R_L$

Messung (rechts): $U'_L = I'_{R_L} R_L = I_q \cdot (R_L \parallel R_i)$

$$= \underbrace{I_q R_L}_{=U_L} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{R_L}{R_i}}}_{\text{Fehlerfaktor}}$$

Durch den Innenwiderstand R_i des Strommessers entsteht ein zusätzlicher Strompfad. Der Strom durch die Last I_{R_L} verringert sich und der Meßwert U_L wird verfälscht.

Spannungsmessung II

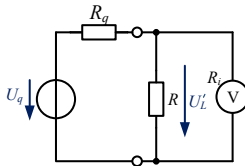
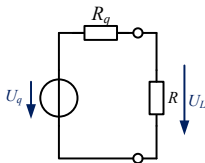


Spannungsmessung mit geringem Messfehler:

$R_i \gg R_L$ Voltmeter mit möglichst hohem Innenwiderstand

$R_i \rightarrow \infty \Omega$ Idealerweise unendlich hoher Innenwiderstand

Spannungsmessung (Beispiele)



Beispiel 1: $R_i \gg R_L$

$$I_q = 1 \text{ mA}; \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega; \quad R_i = 10 \text{ M}\Omega$$

$$\Rightarrow U_L = 1 \text{ V}$$

$$U'_L = 0,9999 \text{ V} \approx 1 \text{ V}$$

\Rightarrow Fehler vernachlässigbar

Beispiel 2: $R_i \approx R_L$

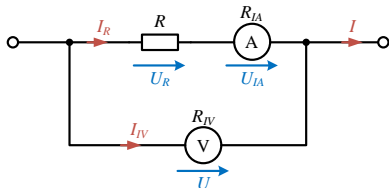
$$I_q = 1 \text{ }\mu\text{A}; \quad R_L = 1 \text{ M}\Omega; \quad R_i = 10 \text{ M}\Omega$$

$$\Rightarrow U_L = 1 \text{ V}$$

$$U'_L = 0,9101 \text{ V}$$

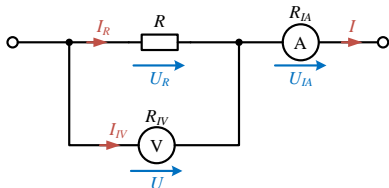
\Rightarrow Fehler ca. 9 %; nicht vernachlässigbar

Simultanmessung



$$U = U_R + U_{IA}$$

$$U \neq U_R$$



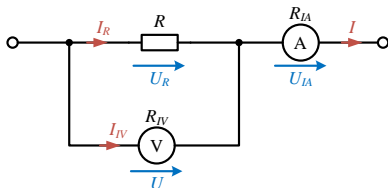
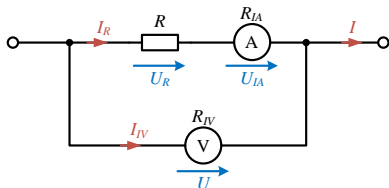
$$I = I_R + I_{IV}$$

$$I \neq I_R$$

Es ist nicht möglich, gleichzeitig Strom und Spannung exakt zu messen!

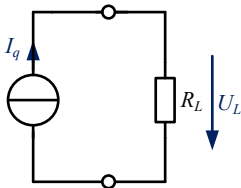
LTSpice Beispiel 2: Simultanmessung

Simultanmessung (simultanmessung.asc)



Widerstandsmessung

- ▶ Widerstandsmessung in digitalen Multimetern mittels Konstantstromquelle.
- ▶ Stromquelle in glatten Zehnerpotenzen.
- ▶ Spannung repräsentiert Zahlenwert des Widerstandes (ohne Zenerpotenz)
- ▶ Zusätzliche Anzeige der Zehnerpotenz (üblich: Kommaverschiebung und Präfix Milli, Kilo, Mega)

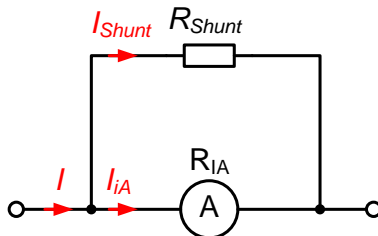
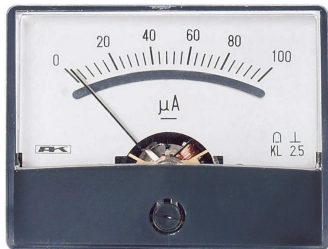


$$R_L = \frac{U_L}{I_q} \propto U_L$$

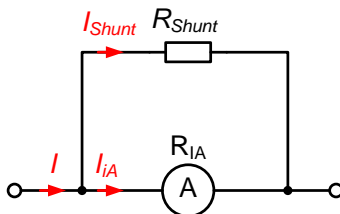
- ▶ Messung kleiner Widerstände mit Kelvin-Messung (nicht hier)
- ▶ Anderes Prinzip: Wheatstonebrücke (später)

Messbereichserweiterung beim Amperemeter I

Das dargestellte Messgerät kann Eingangsströme bis zu $I_{max} = 100 \mu A$ darstellen. Dieser Messbereich soll nun durch Einfügen eines Nebenwiderstandes (Shunt) auf Ströme $I > I_{max}$ erweitert werden.



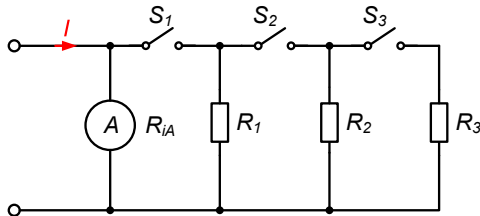
Messbereichserweiterung beim Amperemeter II



Bei passender Auswahl des Shuntwiderstandes kann ein größerer Strom $I > I_{iA,max}$ gemessen werden. R_{Shunt} kann mit Hilfe des Stromteilers aus $I_{iA,max,neu}$ und $I_{iA,max,alt}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{I_{iA}}{I} &= \frac{R_{Shunt}}{R_{Shunt} + R_{iA}} \\ \Rightarrow R_{Shunt} &= \frac{I_{iA}}{I} \cdot (R_{Shunt} + R_{iA}) \\ \Rightarrow R_{Shunt} &= R_{iA} \cdot \frac{I_{iA}}{I - I_{iA}} \end{aligned} \quad (2)$$

Beispiel Amperemeter



$$I_{A,max} = 100 \mu A$$

$$R_{iA} = 100 \Omega$$

$$R_1 = ? \Omega$$

$$R_2 = ? \Omega$$

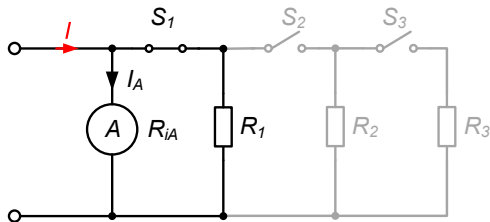
$$R_3 = ? \Omega$$

Der Messbereich soll durch das Schließen der Schalter $S_1 \dots S_3$ auf $500 \mu A$, 1 mA , 5 mA vergrößert werden.



Links: Skalen für
DC/AC Strom/Spannung,
Widerstand, Leistung
Rechts: Multiplikatoren oder
Skalenendwerte je Messbereich

Beispiel Amperemeter



$$I_{A,max} = 100 \mu\text{A}$$

$$R_{iA} = 100 \Omega$$

$$R_1 = ? \Omega$$

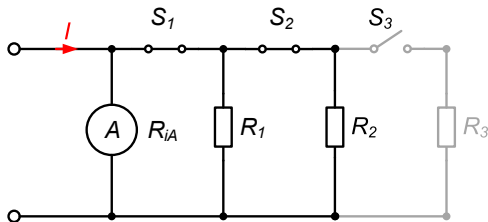
$$R_2 = ? \Omega$$

$$R_3 = ? \Omega$$

Für den neuen Messbereich $I_{max} = 500 \mu\text{A}$ berechnet sich der Shuntwiderstand R_1 zu

$$R_1 = R_{iA} \cdot \frac{100 \mu\text{A}}{500 \mu\text{A} - 100 \mu\text{A}} = 25 \Omega.$$

Beispiel Amperemeter



$$I_{A,max} = 100 \mu\text{A}$$

$$R_{iA} = 100 \Omega$$

$$R_1 = 25 \Omega$$

$$R_2 = ? \Omega$$

$$R_3 = ? \Omega$$

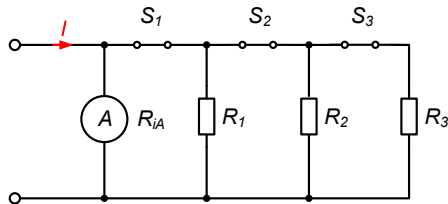
Hier muss zunächst der Innenwiderstand der Parallelschaltung von R_{iA} und R_1 berechnet werden. Dieser ist

$$R_{iA}^* = R_{iA} \parallel R_1 = 20 \Omega.$$

Für den Messbereich $I_{max} = 1 \text{ mA}$ berechnet sich R_2 zu

$$R_2 = R_{iA}^* \cdot \frac{500 \mu\text{A}}{1 \text{ mA} - 500 \mu\text{A}} = 20 \Omega.$$

Beispiel Amperemeter



$$I_{A,max} = 100 \mu\text{A}$$

$$R_{iA} = 100 \Omega$$

$$R_1 = 25 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega$$

$$R_3 = ? \Omega$$

Wieder muss zunächst der Innenwiderstand der Parallelschaltung von R_{iA} , R_1 und R_2 berechnet werden. Dieser ist

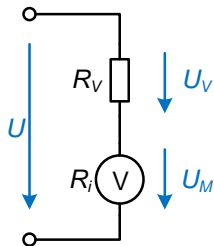
$$R_{iA}^{**} = R_{iA} \parallel R_1 \parallel R_2 = 10 \Omega.$$

Für den Messbereich $I_{max} = 5 \text{ mA}$ berechnet sich R_3 zu

$$R_3 = R_{iA}^{**} \cdot \frac{1 \text{ mA}}{5 \text{ mA} - 1 \text{ mA}} = 2,5 \Omega.$$

Messbereichserweiterung beim Voltmeter

Maximal messbare Spannung (Vollausschlag) eines Messgerätes: $U_{V,max}$.
 Beim Messen von Spannungen $U > U_{V,max}$ wird ein Vorwiderstand in Reihe mit dem Messgerät geschaltet:



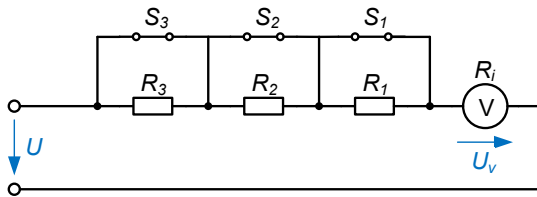
Bei passender Auswahl des Vorwiderstandes kann nun jede Spannung $U > U_{V,max}$ gemessen werden.

$$U_M = U \cdot \frac{R_i}{R_i + R_V} \quad (\text{Spannungsteiler})$$

mit $\frac{U_{V,max,neu}}{U_{V,max,alt}} = \alpha$ folgt.

$$\boxed{R_V = R_i \cdot (\alpha - 1)} \quad (3)$$

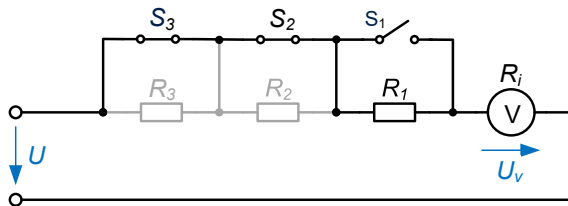
Beispiel Voltmeter



$$\begin{aligned}
 U_{V,max} &= 10 \text{ mV} \\
 R_i &= 100 \text{ k}\Omega \\
 R_1 &= ? \Omega \\
 R_2 &= ? \Omega \\
 R_3 &= ? \Omega
 \end{aligned}$$

Der Messbereich soll durch das Öffnen der Schalter $S_1 \dots S_3$ in Schritten erweitert werden.

Beispiel Voltmeter

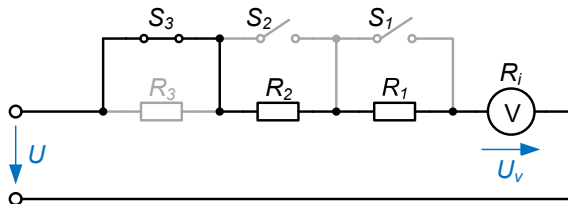


$$\begin{aligned}
 U_{V,max} &= 10 \text{ mV} \\
 R_i &= 100 \text{ k}\Omega \\
 R_1 &= ? \Omega \\
 R_2 &= ? \Omega \\
 R_3 &= ? \Omega
 \end{aligned}$$

Für den Messbereich $U_{max} = 100 \text{ mV}$ berechnet sich R_1 zu

$$R_1 = R_i \cdot (10 - 1) = 900 \text{ k}\Omega.$$

Beispiel Voltmeter



$$U_{V,max} = 10 \text{ mV}$$

$$R_i = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 900 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = ? \Omega$$

$$R_3 = ? \Omega$$

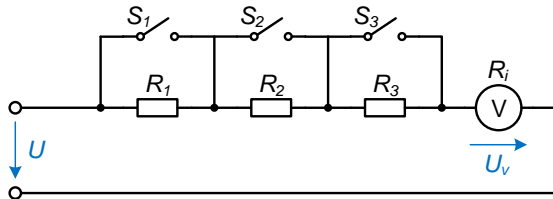
Aus der Reihenschaltung von R_i und R_1 folgt

$$R_i^* = R_i + R_1 = 1 \text{ M}\Omega.$$

Für den Messbereich $U_{max} = 1 \text{ V}$ berechnet sich R_2 zu

$$R_2 = R_i^* \cdot (10 - 1) = 9 \text{ M}\Omega.$$

Beispiel Voltmeter



$$U_{V,max} = 10 \text{ mV}$$

$$R_i = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 900 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 9 \text{ M}\Omega$$

$$R_3 = ? \Omega$$

Aus der Reihenschaltung von R_i , R_1 und R_2 folgt

$$R_i^{**} = R_i + R_1 + R_2 = 10 \text{ M}\Omega.$$

Für den Messbereich $U_{max} = 10 \text{ V}$ berechnet sich R_3 zu

$$R_3 = R_i^{**} \cdot (10 - 1) = 90 \text{ M}\Omega.$$

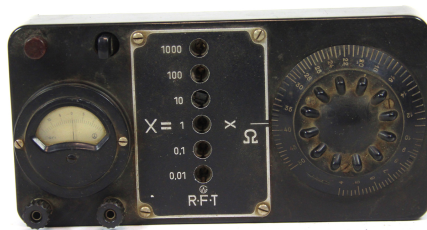
Abschnitt 3.2

Wheatstonesche Messbrücke

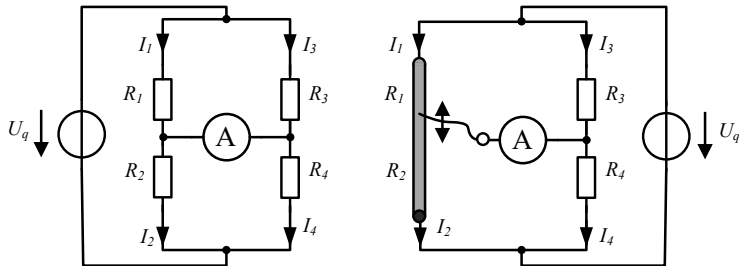
Bestimmung eines Widerstandes

Historische Widerstandsbestimmung:

- ▶ Unbekannten Widerstand an Messgerät anschließen.
- ▶ Anzeige (links) mittels Drehregler (rechts) auf null abgleichen.
- ▶ Wert an Skala ablesen (Skala rechts, Multiplikator Mitte).
- ▶ Messprinzip wird auch heute noch verwendet (z. B. in der Sensorik).
- ▶ **Funktion?**



Wheatstonesche Messbrücke



R_1, R_2 : Werte irrelevant R_2/R_1 : Verhältnis einstellbar, bekannt
 R_3 : Referenz, bekannt R_4 : unbekannt, gesucht

Das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ wird als Schleifkontakt über Widerstandsdraht realisiert.
 Einstellung von R_2/R_1 so, dass $U_{R_2} = U_{R_4}$ (kein Querstrom):

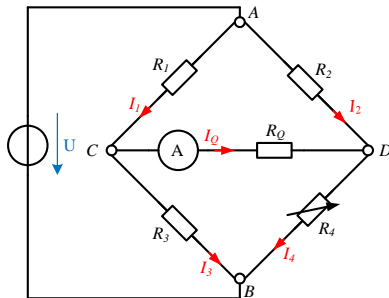
Mit $\frac{U_{R_4}}{U_{R_3}} = \frac{U_{R_2}}{U_{R_1}}$ und $I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$ folgt:

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

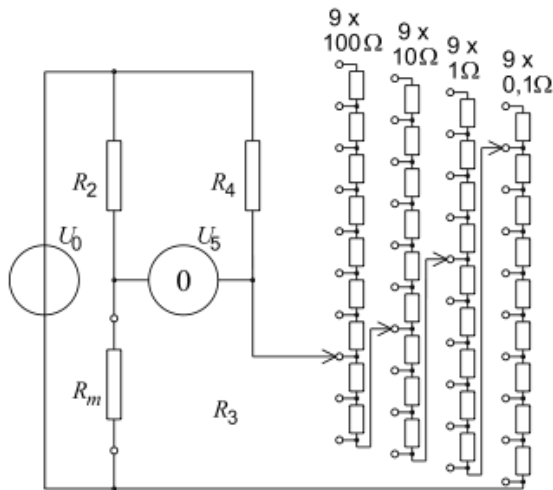
LTSpice Beispiel 3: Wheatstonesche Messbrücke

Wheatstonesche Messbrücke

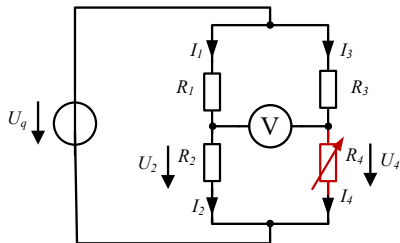
(wheatstone_bruecke.asc)



Wheatstonesche Messbrücke - Anwendung

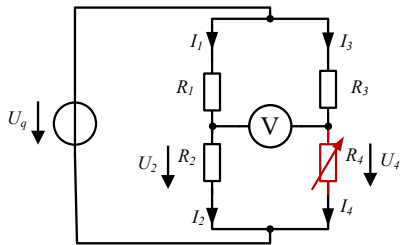


Wheatstonesche Messbrücke



Anstelle des Amperemeters kann auch ein Voltmeter zur Messung des Nulldurchganges eingesetzt werden.

Beispiel: Dehnungsmesstreifen I



► $R_{DMS} = R_1 \dots R_4 = 100 \Omega$
(ohne mechanische Belastung)

► $U_q = 10 \text{ V}$

► Brücke ist abgeglichen für :
 $U_2 = U_4$

► Bei Dehnung ändert sich R_{DMS}
(Annahme hier 1%)

$$I_1 = I_2 = \frac{10 \text{ V}}{200 \Omega} = 50 \text{ mA}$$

$$U_2 = 100 \Omega \cdot 50 \text{ mA} = 5 \text{ V}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{10 \text{ V}}{201 \Omega} \approx 49,751 \text{ mA};$$

$$U_4 = 101 \Omega \cdot 49,751 \text{ mA} \approx 5,0249 \text{ V}$$

$$\Rightarrow U_2 - U_4 \approx 24,9 \text{ mV}$$

Beispiel: Dehnungsmesstreifen II

- ▶ Mit der Brückenschaltung muss ein Messgerät mit einem Messbereich von 100 mV Vollausschlag eingesetzt werden.
 - ▶ Ohne Brückenschaltung müsste der Spannungsabfall über R_{DMS} selbst gemessen werden, d.h. der Vollausschlag des Messgerätes müsste, um 5,0249 V messen zu können 10 V sein.
 - ▶ Ohne Brückenschaltung muss das Messgerät mehrere Stellen hinter dem Komma genau messen können, was für die Anwendung i. d. R. zu aufwändig ist.
- ⇒ Erhebliche Verbesserung mit der Brückenschaltung, da „einfaches“ Messgerätes verwendet werden kann.

Allgemeiner Hinweis:

Sofern nicht ausdrücklich auf das Gegenteil hingewiesen wird, betrachten wir die verwendeten Messgeräte immer als ideal!

Das bedeutet im Einzelnen:

- ▶ Der Innenwiderstand von Amperemetern ist verschwindend gering:
 $R_{in,A} \rightarrow 0 \Omega$
- ▶ Der Innenwiderstand von Voltmetern strebt gegen unendlich:
 $R_{in,V} \rightarrow \infty \Omega$

Zusammenfassung Kapitel 3

- ▶ Messgeräte haben einen Innenwiderstand ungleich dem idealen $R_i \neq R_{i,ideal}$
- ▶ Das Messen mit dem Messgerät kann die Messung stark verfälschen
- ▶ Strommessgeräte sollen einen möglichst kleinen Innenwiderstand haben
- ▶ Spannungsmessgeräten sollen einen möglichst hohen Innenwiderstand haben
- ▶ Strom und Spannung können nicht gleichzeitig exakt gemessen werden
- ▶ Mit Hilfe einer Wheatstoneschen Messbrücke können kleine Widerstände genau bestimmt werden