

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Lehrstuhl B für Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Alice Niemeyer

# Thema

Masterarbeit

Reymond Oluwaseun Akpanya

Matrikelnummer: 357115

Vorgelegt am:

...

Gutachter:

Prof. Dr. Alice Niemeyer

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Wilhelm Plesken



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                       | <b>1</b>  |
| 1.1      | Herangehensweise . . . . .                              | 1         |
| 1.2      | Aufbau dieser Arbeit . . . . .                          | 1         |
| 1.3      | Vorkenntnisse und Notationen . . . . .                  | 1         |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>                                       | <b>1</b>  |
| 2.1      | Definition . . . . .                                    | 1         |
| 2.2      | Homomorphismen . . . . .                                | 7         |
| 2.3      | Vertex-treue Sphären . . . . .                          | 9         |
| <b>3</b> | <b>Manipulation simplizialer Flächen</b>                | <b>10</b> |
| 3.1      | Tetraeder . . . . .                                     | 11        |
| 3.2      | Butterfly Deletion . . . . .                            | 12        |
| 3.3      | Butterfly Insertion . . . . .                           | 15        |
| 3.4      | Kantendrehung . . . . .                                 | 17        |
| <b>4</b> | <b>Der Flächengraph simplizialer Flächen</b>            | <b>19</b> |
| 4.1      | Grundlagen . . . . .                                    | 20        |
| 4.2      | Manipulation des Flächengraphen . . . . .               | 22        |
| <b>5</b> | <b>Kantendrehungen</b>                                  | <b>29</b> |
| 5.1      | Kantendrehung als Gruppenoperation . . . . .            | 41        |
| <b>6</b> | <b>Multi-Tetraeder</b>                                  | <b>43</b> |
| 6.1      | Konstruktion und Klassifikation . . . . .               | 43        |
| 6.2      | Kaktus-Distanz . . . . .                                | 55        |
| 6.3      | wilde Färbungen auf Multi-Tetraedern . . . . .          | 70        |
| 6.4      | Flächengraph von Multi-Tetraedern . . . . .             | 79        |
| <b>7</b> | <b>Sphären ohne 2-Waist</b>                             | <b>83</b> |
| 7.1      | vertex-treue Sphären mit genau einem 3-Waists . . . . . | 83        |
| 7.2      | Flächengraphen von Sphären mit 3-Waists . . . . .       | 89        |
| 7.3      | Färbungen auf Sphären mit 3-Waist . . . . .             | 91        |
| <b>8</b> | <b>Multi-Sphären</b>                                    | <b>92</b> |
| <b>9</b> | <b>Gap</b>  | <b>98</b> |

# 1 Einleitung

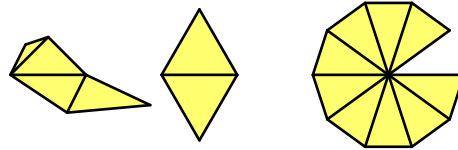
## 1.1 Herangehensweise

## 1.2 Aufbau dieser Arbeit

## 1.3 Vorkenntnisse und Notationen

# 2 Grundlagen

Zunächst werden in diesem Kapitel grundlegende Definitionen und einführende Beispiele präsentiert, um ein tieferes Verständnis von simplizialen Flächen zu entwickeln. Diese basieren auf dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles*. Da dieses Kapitel nur als Einführung in die Thematik dienen soll, werden die benötigten Resultate ohne Beweise angeführt. Da in diesem Teil der Arbeit keine neuen Resultate präsentiert werden, sondern lediglich bekannte Erkenntnisse reproduziert werden, kann dieses Kapitel bei bereits vorhandener Vertrautheit mit simplizialen Flächen übersprungen werden.



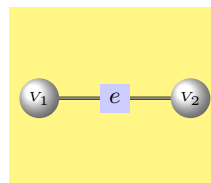
## 2.1 Definition

### Resultate

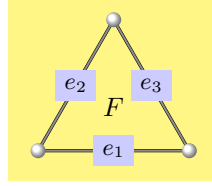
- Definition einer simplizialen Fläche
- elementare Eigenschaften simplizialer Flächen

**Definition 2.1.** Seien  $X_0, X_1, X_2$  nichtleere Mengen so, dass  $X = X_0 \uplus X_1 \uplus X_2$  eine abzählbare Menge und  $<$  eine transitive Relation auf  $(X_0 \times X_1) \cup (X_1 \times X_2) \cup (X_0 \times X_2)$  ist. Man nennt  $X_0$  die Menge der Ecken,  $X_1$  die Menge der Kanten,  $X_2$  die Menge der Flächen und  $<$  die Inzidenz einer simplizialen Fläche  $(X, <)$ , falls folgende Axiome erfüllt sind:

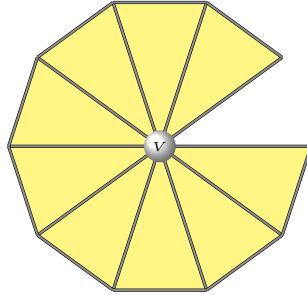
1. Für jede Kante  $e \in X_1$  existieren genau zwei Ecken  $V_1, V_2 \in X_0$  mit  $V_1, V_2 < e$ .



2. Für jede Fläche  $F \in X_2$  gibt es genau drei Kanten  $e_1, e_2, e_3 \in X_1$  mit der Eigenschaft  $e_1, e_2, e_3 < F$ .



3. Für jede Kante  $e \in X_1$  gibt es entweder genau zwei Flächen  $F_1, F_2 \in X_2$  mit  $e < F_1, F_2$  oder genau eine Fläche  $F \in X_2$  mit  $e < F$ . Im ersten Fall sind  $F_1$  und  $F_2$  ( $e$ )-Nachbarn und  $e$  ist eine innere Kante, im zweitem Fall ist  $e$  eine Randkante.
4. Für jede Ecke  $V \in X_0$  existieren endlich viele Flächen  $F \in X_2$  mit  $V < F$ . Diese  $F_i \in X_2$  können in einem Tupel  $(F_1, \dots, F_n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  angeordnet werden so, dass  $e_i < F_i$  und  $e_i < F_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  ist, wobei  $e_i \in X_1$  eine Kante in  $X$  ist, für die ebenfalls  $V < e_i$  gilt. Das Tupel  $(F_1, \dots, F_n)$  wird auch Schirm genannt. Falls es auch eine Kante  $e \in X_1$  mit  $e < F_1, F_n$  gibt, so ist  $V$  eine innere Ecke. Ist  $V$  keine innere Ecke, so ist er eine Randecke.



5. Seien  $V \in X_0$  eine Ecke in  $X$  und  $(F_1, \dots, F_n)$  der zu  $V$  gehörige Schirm, wobei die  $F_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $n \in \mathbb{N}$  Flächen in  $X$  sind. Dann ist  $n$  der Grad der Ecke  $V$ . Für den Grad einer Ecke  $V$  in  $X$  schreibt man  $\deg_X(V)$ . Falls  $X$  aus dem Kontext heraus klar ist, so schreibt man nur  $\deg(V)$ .

**Bemerkung 2.2.** • Für eine gegebene Ecke  $V \in X_0$  einer simplizialen Fläche gibt es eine endliche Anzahl von Schirmen. Diese sind jedoch alle äquivalent, da sie durch zyklische Permutationen umgeordnet werden können.

- Zur Vereinfachung identifiziert man  $(X, <)$  mit der Menge  $X$ .
- Die Definition einer simplizialen Fläche  $(X, <)$  lässt abzählbar unendliche Mengen  $X_i$  für  $i = 0, 1, 2$  zu, jedoch sind für diese Arbeit nur endliche simpliziale Flächen von Interesse. Das heißt im Folgendem sei ohne Einschränkung  $|X_0|, |X_1|, |X_2| < \infty$ .

**Beispiel 2.3.** 1. Bis auf Isomorphie gibt es genau eine simpliziale Fläche bestehend aus einer Fläche, welche durch

$$D_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, D_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}, D_2 = \{ F_1 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (V_1, e_2), (V_1, e_3), (V_1, F_1), (V_2, e_1), (V_2, e_3), \\ (V_2, F_1), (V_3, e_1), (V_3, e_2), (V_3, F_1) \}$$

beschrieben wird. Man nennt diese simpliziale Fläche Dreieck.

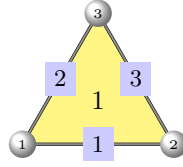


Abbildung 1: Dreieck

2. Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir das  $n$ -fache Dreieck  $n\Delta$  durch die Mengen  $n\Delta_0, n\Delta_1, n\Delta_2$ , wobei

$$n\Delta_0 = \{ V_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n \}, n\Delta_1 = \{ e_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n \}, \\ n\Delta_2 = \{ F_1, \dots, F_n \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) \in \{ (e_1^k, F_k), (e_2^k, F_k), (e_3^k, F_k), (V_1^k, e_2^k), (V_1^k, e_3^k), (V_1^k, F_k), (V_2^k, e_1^k), \\ (V_2^k, e_3^k), (V_2^k, F_k), (V_3^k, e_1^k), (V_3^k, e_2^k), (V_3^k, F_k) \mid k = 0, \dots, n \}$$

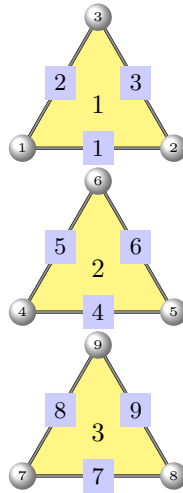


Abbildung 2:  $n\Delta$  im Fall  $n = 3$

3. Der Janus-Head ist eine geschlossene simpliziale Fläche, die aus zwei Flächen besteht. Sie besitzt 3 innere Ecken und 3 innere Kanten und wird definiert

durch

$$J_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, J_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}, J_2 = \{ F_1, F_2 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_2, F_2), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1), (V_3, e_2),$$

$$(V_3, F_1), (V_3, F_2) \}.$$

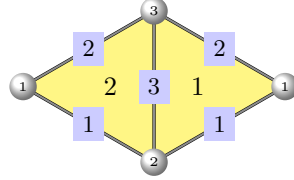


Abbildung 3: Janus-Kopf

4. Die offene Tasche ist eine simpliziale Fläche, die aus dem Janus-Kopf hervorgeht, wenn man die Kante  $e_2$  verdoppelt, das heißt sie wird beschrieben durch

$$OB_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, OB_1 = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}, OB_2 = \{ F_1, F_2 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (e_4, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, e_4), (V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1),$$

$$(V_3, e_2), (V_3, e_4), (V_3, F_1), (V_3, F_2) \}.$$

Um simpliziale Flächen vollständig und vor allem einfacher beschreiben zu können, führt man eine weitere Notation ein. Diese hängt von der Nummerierung der Knoten, Kanten und Flächen ab. Abgesehen davon ist sie eindeutig.

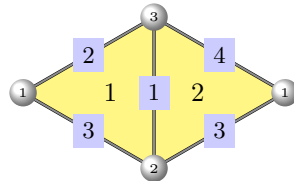


Abbildung 4: offene Tasche

**Definition 2.4.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche, deren Knoten  $V_1, \dots, V_n$ , Kanten  $e_1, \dots, e_k$  und Flächen  $F_1, \dots, F_m$  ausgehend von ihrer Nummerierung linear geordnet sind. Das Symbol von  $(X, <)$  ist definiert durch

$$\mu((X, <)) := (n, k, m; (X_0(e_1), \dots, X_0(e_k)), (X_1(F_1), \dots, X_1(F_m))).$$

Man kann im Symbol die Knoten  $V_i$  durch  $i$ , die Kanten  $e_j$  durch  $j$  und die Flächen  $F_l$  durch  $l$  ersetzen und nennt dann das resultierende Symbol das *ordinale Symbol*  $\omega((X, <))$  von  $(X, <)$ .

**Beispiel 2.5.** Beispielsweise kann der Tetraeder  $(T, <)$  durch das Symbol

$$\mu((T, <)) := (4, 6, 4; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}))$$

beschrieben werden.

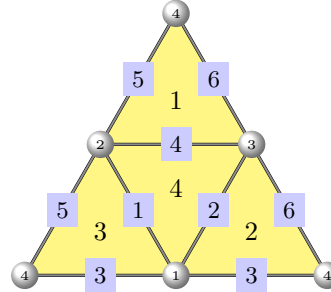


Abbildung 5: Tetraeder

Diese Notation wird später behilflich sein, einen vereinfachten Zugang zu der Manipulation simplizialer Flächen zu finden. Hier soll nun für gewisse Sphären skizziert werden, wie diese durch die Inzidenzen zwischen den Ecken und Flächen bis auf Isomorphie Eindeutig festgelegt werden können. Hierzu benötigt man jedoch folgende Definition.

**Definition 2.6.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  definiert man die Euler-Charakteristik  $\chi(X)$  als

$$\chi(X) := |X_0| - |X_1| + |X_2|.$$

**Beispiel 2.7.** Betrachtet man die im obigem Beispiel eingeführten simplizialen Flächen, so erhält man folgende Euler-Charakteristiken:

1.  $\chi(D) := |D_0| - |D_1| + |D_2| = 3 - 3 + 1 = 1$
2.  $\chi(n\Delta) := |n\Delta_0| - |n\Delta_1| + |n\Delta_2| = 3n - 3n + n = n$
3.  $\chi(J) := |J_0| - |J_1| + |J_2| = 3 - 3 + 2 = 2$
4.  $\chi(OB) := |OB_0| - |OB_1| + |OB_2| = 4 - 6 + 4 = 2$

**Bemerkung 2.8.** Die Anzahl der Flächen einer geschlossenen simplizialen Fläche ist durch 2 teilbar, da

$$|X_2| = \frac{2|X_1|}{3}$$

gilt. Die Anzahl der Kanten ist insbesondere durch 3 teilbar. Genauer gesagt, existiert ein  $\epsilon \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass

$$|X_2| = 2\epsilon, |X_1| = 3\epsilon, |X_0| = \epsilon + \chi(X)$$

Man nennt  $\epsilon$  den Flächen-Kanten-Parameter. Dieser erfüllt die Identitäten

$$\epsilon = \text{ggt}(|X_1|, |X_2|) = \frac{|X_1|}{3} = \frac{|X_2|}{2} = |X_1| - |X_2|.$$



**Definition 2.9.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche und  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  mit  $i \neq j$ . Dann definiert man für ein  $x \in X_i$  die Menge  $X_j(x)$  als

$$X_j(x) := \{y \in X_j \mid x < y\}, \text{ falls } i < j$$

bzw.

$$X_j(x) := \{y \in X_i \mid y < x\}, \text{ falls } j < i.$$

Für  $S \subseteq X_i$  ist

$$X_j(S) := \bigcup_{x \in S} X_j(x).$$

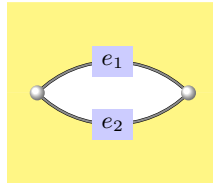
**Bemerkung 2.10.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  können die Axiome aus Definition 2.1 mit obiger Definition neu umformuliert werden:

- $|X_0(e)| = 2$  für alle  $e \in X_1$ ,
- $|X_0(F)| = 3$  für alle  $F \in X_2$ ,
- $|X_1(F)| = 3$  für alle  $F \in X_2$ ,
- $1 \leq |X_2(e)| \leq 2$  für alle  $e \in X_1$ .

**Definition 2.11.** Eine geschlossene simpliziale Fläche ist eine simpliziale Fläche, deren Kanten alle innere Kanten sind. Eine geschlossene simpliziale Fläche der Euler-Charakteristik 2 nennt man Sphäre.

**Definition 2.12.** Sei  $X$  eine simpliziale Fläche.

Falls es verschiedene Kanten  $e_1, e_2$  in  $X$  mit  $X_0(e_1) = X_0(e_2)$  gibt, dann nennt man  $(e_1, e_2)$  einen 2-Waist.



Falls es paarweise verschiedene Kanten  $e_1, e_2, e_3$  in  $X$  gibt, die  $|X_0(e_1) \cup X_0(e_2) \cup X_0(e_3)| = 3$  und  $X_2(e_i) \cap X_2(e_j) = \emptyset$  für  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$  erfüllen, dann nennt man  $(e_1, e_2, e_3)$  einen 3-Waist.

Mit dem Open-Bag ist bereits ein Beispiel für eine simpliziale Fläche mit einem 2-Waist bekannt. Beispiele für simpliziale Flächen mit einem 3-Waist folgen mit der Einführung der Multi-Tetraeder.

**Definition 2.13.** Sei  $X$  eine Sphäre mit einem 3-Waist  $(e_1, e_2, e_3)$ . Dann lässt sich  $X_2$  in Mengen  $M_1, M_2$  aufteilen, die Folgendes erfüllen:

- $M_1, M_2$  sind nichtleer und disjunkt

- $M_1 \cup M_2 = X_2$
- $|M_i \cap X_2(e_j)| = 1$  für  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2, 3$ .
- $M_1, M_2$  sind maximal bezüglich Inklusion mit der Eigenschaft, dass es für jedes  $F$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$  eine benachbarte Fläche  $F'$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$  gibt.

Man nennt  $M_1, M_2$  die 3-Waist Komponenten.

Analog definiert man auch 2-Waist Komponenten.

**Definition 2.14.** Sei  $X$  eine Sphäre mit einem 2-Waist  $(e_1, e_2)$ . Dann lässt sich  $X_2$  in Mengen  $M_1, M_2$  aufteilen, die Folgendes erfüllen:

- $M_1, M_2$  sind nichtleer und disjunkt
- $M_1 \cup M_2 = X_2$
- $|M_i \cap X_2(e_j)| = 1$  für  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2$ .
- $M_1, M_2$  sind maximal bezüglich Inklusion mit der Eigenschaft, dass es für jedes  $F$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$  eine benachbarte Fläche  $F'$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$  gibt.

Man nennt  $M_1, M_2$  die 2-Waist Komponenten.

## 2.2 Homomorphismen

### Resultate

- elementare Eigenschaften von Homomorphismen simplizialer Flächen

Nachdem im letzten Abschnitt ein grundlegendes Verständnis für simpliziale Flächen erzielt wurde, führen wir in diesem Abschnitt Homomorphismen zwischen simplizialen Flächen ein. aus.

**Definition 2.15.** Seien  $(X, <)$  und  $(Y, \prec)$  simpliziale Flächen.

1. Man nennt eine bijektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  einen Isomorphismus, falls  $A < B$  in  $(X, <)$  genau dann gilt, wenn  $\alpha(A) \prec \alpha(B)$  in  $(Y, \prec)$  gilt. In diesem Fall schreibt man  $X \cong Y$ .
2. Eine surjektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  heißt Überdeckung, falls aus  $A < B$  in  $(X, <)$  folgt, dass  $\alpha(A) \prec \alpha(B)$  in  $(Y, \prec)$  gilt.

**Bemerkung 2.16.** • Für  $i = 0, 1, 2$  induziert eine Überdeckung  $\alpha : X \rightarrow Y$  surjektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$ .

- Für  $i = 0, 1, 2$  induziert ein Isomorphismus  $\beta : X \rightarrow Y$  bijektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$ .
- Für eine simpliziale Fläche  $X$  und eine Fläche  $F$  in  $X$  sei  $X(F)$  die simpliziale Fläche, die mit

$$X(F)_0 := X_0(F)$$

$$X(F)_1 := X_1(F)$$

$$X(F)_2 := \{F\}$$

identifiziert wird. Dann gilt für simpliziale Flächen  $X$  und  $Y$  mit Flächen  $F \in X_2$  und  $F' \in Y_2$ , dass  $X(F)$  und  $Y(F')$  isomorph sind. Für einen Isomorphismus  $\alpha : X(F) \mapsto Y(F')$  gibt es genau 6 Möglichkeiten.

- Zwei isomorphe simpliziale Flächen  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  haben dieselbe Euler-Charakteristik, denn eine bijektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  impliziert, wie oben schon erwähnt, bijektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$  für  $i = 0, 1, 2$ . Damit ist  $|X_i| = |Y_i|$ , woraus man

$$\chi(X) = |X_0| - |X_1| + |X_2| = |Y_0| - |Y_1| + |Y_2| = \chi(Y)$$

folgern kann.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Definition 2.17.** Sei  $X$  eine simpliziale Fläche. Einen Isomorphismus  $\phi$  von  $X$  nach  $X$  nennt man Automorphismus. Die Menge aller Automorphismen von  $X$  nach  $X$  mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung nennt man Automorphismengruppe von  $X$  und bezeichnet sie mit  $\text{Aut}(X)$ .

**Beispiel 2.18.** Die Automorphismengruppe des Dreiecks  $D$  besteht aus drei Spiegelungen und 3 Drehungen. Also ist

$$\text{Aut}(D) \cong D_3.$$

**Bemerkung 2.19.** Sei  $X$  eine Sphäre und  $F$  eine Fläche in  $X$ . Für  $i = 0, 1$  sei

$$f : X_i(F) \mapsto X_i(F)$$

eine bijektive Abbildung. Dann gibt es höchstens einen Automorphismus  $\phi \in \text{Aut}(X)$  mit

$$\phi(x) = f(x)$$

für  $x \in X_i(F)$ .

## 2.3 Vertex-treue Sphären

Vom besonderem Interesse sind jene simpliziale Flächen für die es reicht, die Menge der Ecken der zu den jeweiligen Flächen anzugeben, um so die Kanten und Flächen und somit auch die simpliziale Fläche eindeutig festzulegen. An dieser Stelle werden einführende Beispiel und Definitionen präsentiert, damit im Kapitel .. und Kapitel .. tiefere Resultate formuliert werden können.

**Definition 2.20.** *Man nennt eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  vertex-treu, falls die Abbildung*

$$X_1 \cup X_2 \rightarrow \text{Pot}(X_0), S \mapsto X_0(S)$$

*injektiv ist.*

*Falls dies der Fall ist, identifiziert man die Kanten und Flächen mit ihren Bildern unter obiger Abbildung, das heißt  $X_1 \subseteq \text{Pot}_2(X_0)$  bzw.  $X_2 \subseteq \text{Pot}_3(X_0)$ .*

**Beispiel 2.21.** • *Eine simpliziale Fläche mit einem 2-Waist ist nicht vertex-treu.*

- *Der Janus-Head ist nicht vertex-treu, da die beiden Flächen zu den selben drei Ecken inzident sind.*

**Definition 2.22.** *Sei  $P$  eine endliche Menge mit mindestens 3 Elementen. Eine nicht-leere Menge  $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$  für die  $P = \bigcup_{F \in \xi} F$  gilt, nennt man einen Flächenträger auf  $P$ , falls für alle  $V \in P$  die Menge aller  $F_i \in \xi$  mit  $V \in F_i$  in einen Zykel  $(F_1, \dots, F_n)$  geschrieben werden kann, sodass  $|F_i \cap F_{i+1}| = 2$  für  $i = 1, \dots, n-1$  gilt und aus  $|F_i \cap F_{i+1}| = 2$  entweder  $|i - j| = 1$  oder  $\{i, j\} = \{1, n\}$  folgt.*

**Lemma 2.23.** *Sei  $P$  eine endliche Menge und  $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$  ein Flächenträger. Dann definiert  $\mathcal{S}(\xi)$  mit den Mengen*

$$\mathcal{S}(\xi)_i := \{A \subseteq F \mid F \in \xi, |A| = i + 1\} \text{ fuer } i = 0, 1, 2$$

*eine vertex-treue simpliziale Fläche, wobei die Inzidenz  $<$  durch Mengeninklusion gegeben ist. Man nennt  $\mathcal{S}$ , die durch  $\xi$  getragene Fläche.*

*Beweis.* Der Beweis kann dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* entnommen werden. □

**Beispiel 2.24.** *Der Flächenträger*

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

*bildet eine getragene simpliziale Fläche, die zum Tetraeder isomorph ist.*

1. Der Butterfly lässt sich durch

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

darstellen.

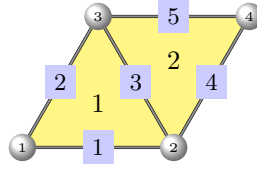


Abbildung 6: Butterfly

2. Für  $n \geq 3$  definiert man den Doppel- $n$ -gon  $(n)^2$  durch den Flächenträger

$$\zeta = \{\{1, i, i+1\}, \{i, i+1, n+2\} \mid i = 2 \dots n-1\} \cup \{\{1, 2, n+1\}, \{2, n+1, n+2\}\}$$

3. Für  $n = 4$  erhält man beispielsweise den Oktaeder  $O$  mit dem Flächenträger

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 3, 4\}, \{6, 4, 5\}, \{6, 2, 5\}\}$$

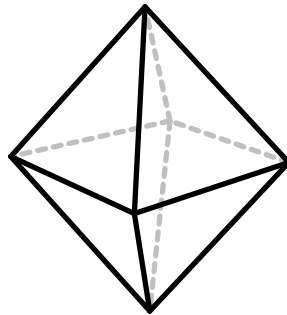


Abbildung 7: Oktaeder

### 3 Manipulation simplizialer Flächen

Dieses Kapitel beschreibt das Manipulieren simplizialer Flächen, um neue simpliziale Flächen konstruieren. Im Genauerem werden nun die Operationen

- Butterfly Deletion,
- Kantendrehung,
- Butterfly Insertion
- und Tetraedererweiterung

eingeführt. Diese Operationen kann man ebenfalls dem Skript entnehmen und sind somit nur als eine Wiederholung zu verstehen. Im Teil der die Kantendrehung näher erläutert, ist es Ziel die Transitivität dieser Operation unter strikteren Bedingungen zu formulieren und zu beweisen. Für die Definition der Konstruktionen nimmt man an, dass  $X$  eine simpliziale Fläche mit  $|X_2| \geq 4$  ist.

### 3.1 Tetraeder

Um das Erweitern durch Tetraeder zu beschreiben, wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass die betrachteten Sphären vertex-treu sind. Es ist möglich, eine Definition der Erweiterungen auch in dem allgemeinen Fall anzugeben, aber hierauf wird an dieser Stelle verzichtet. Hilfreich hierfür ist die Definition von getragenen Flächen. Man betrachte zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 3.1.** *Seien  $U, P, Q$  endliche Mengen für die  $U = P \cup Q$  und  $|P \cap Q| \geq 3$  gilt. Außerdem sind  $U \setminus P \neq \emptyset$  und  $U \setminus Q \neq \emptyset$ . Weiter seien  $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$  ein Flächenträger auf  $P$  und  $\zeta \subseteq \text{Pot}_3(Q)$  ein Flächenträger auf  $Q$  so, dass  $\zeta \cap \xi$  ein Flächenträger auf  $P \cap Q$  ist. Dann ist die symmetrische Differenz  $\pi := \xi \Delta \zeta$  ein Flächenträger einer simplizialen Fläche, falls es einen Knoten gibt, der in all den Mengen  $\mathcal{S}(\xi), \mathcal{S}(\zeta), \mathcal{S}(\xi \cap \zeta)$  liegt.*

**Definition 3.2.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre, beschrieben durch den Flächenträger  $\xi$  und  $F$  eine Fläche in  $X$  mit  $X_0(F) = \{V_1, V_2, V_3\}$ . Sei nun  $P \notin X_0$ , dann definieren wir einen Tetraeder durch den Flächenträger*

$$\xi_T = \{\{V_1, V_2, V_3\}, \{P, V_1, V_2\}, \{P, V_1, V_3\}, \{P, V_2, V_3\}\}$$

und damit die simpliziale Fläche  $Y$ , die durch  $\xi \Delta \xi_T$  getragen wird. Man sagt  $Y$  entsteht durch das Anhängen eines Tetraeders an  $X$  an der Fläche  $F$  und bezeichnet sie mit  $T^F(X)$ .

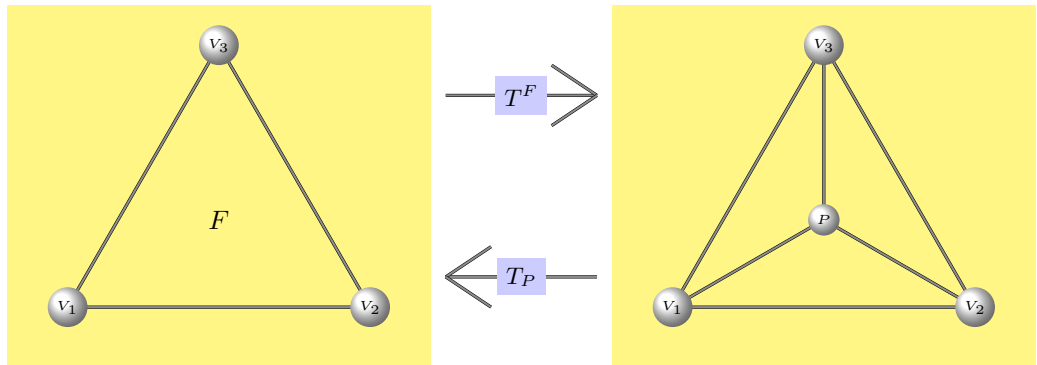


Abbildung 8: Tetraedererweiterung

**Definition 3.3.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre, die durch den Träger  $\xi$  beschrieben wird und  $P \in X_0$  eine Ecke vom Grad 3. Dann gibt es Ecken  $V_1, V_2, V_3$ , sodass

$$X_0(X_2(P)) = \{P, V_1, V_2, V_3\}$$

ist. Da  $X$  vertex-treu ist, identifiziert man die Flächen in  $X_2$  mit den inzidenten Ecken. Man definiert nun einen Tetraeder durch den Träger

$$\xi_T = \{\{V_1, V_2, V_3\}, \{P, V_1, V_2\}, \{P, V_1, V_3\}, \{P, V_2, V_3\}\}.$$

Dadurch entsteht die simpliziale Fläche  $Y$ , die durch  $\xi \Delta \xi_T$  getragen wird. Man sagt  $Y$  ist dadurch entstanden, das der Tetraeder an der Stelle  $P$  entfernt wurde und bezeichnet sie mit  $T_P(X)$ .

### 3.2 Butterfly Deletion

**Definition 3.4.** Sei  $X$  eine Sphäre mit paarweise verschiedenen Ecken  $V_1 \dots, V_4$ , Kanten  $e_1, \dots, e_5$  und Flächen  $F_1, F_2$ , die folgende Relationen erfüllt:

- $X_2(e_1) = \{F_1, F_2\}$
- $X_0(X_2(e_1)) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
- $X_1(X_2(e_1)) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- $(X_0(e_1), X_0(e_2), X_0(e_3), X_0(e_4), X_0(e_5)) = (\{V_2, V_4\}, \{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_1, V_4\})$
- $(X_1(F_1), X_1(F_2)) = (\{e_1, e_2, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4\})$

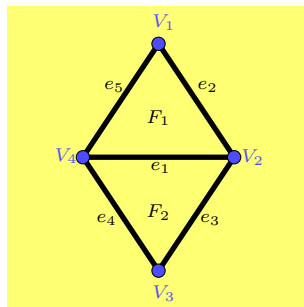


Abbildung 9: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Man erhält die simpliziale Fläche  ${}^{e_1}\beta(X)$ , die durch das Symbol  $\mu({}^{e_1}\beta(X))$  beschrieben wird, durch das Anwenden der folgenden Schritte beim ordinalen Symbol  $\mu((X, <))$ :

- die Anzahl der Ecken wird um 1, die Flächenanzahl um 2 und die Kantenanzahl um 3 verringert.

- der Eintrag  $X_0(e_1)$  an der Stelle  $e_1$ , der Eintrag  $X_0(e_2)$  an der Stelle  $e_2$  und Eintrag  $X_0(e_3)$  an der Stelle  $e_2$  werden gelöscht.
- der Eintrag  $X_1(F_1)$  an der Stelle  $F_1$  und der Eintrag  $X_1(F_2)$  an der Stelle  $F_2$  werden gelöscht.
- an jeder Stelle  $\bar{F}$  in der  $e_2$  in  $X_1(\bar{F})$  vorkommt, wird  $e_2$  durch  $e_5$  ersetzt
- an jeder Stelle  $\bar{F}$  in der  $e_3$  in  $X_1(\bar{F})$  vorkommt, wird  $e_3$  durch  $e_4$  ersetzt,
- an jeder Stelle  $\bar{e}$  an der  $V_2$  in  $X_0(\bar{e})$  vorkommt, wird  $V_2$  durch  $V_4$  ersetzt.

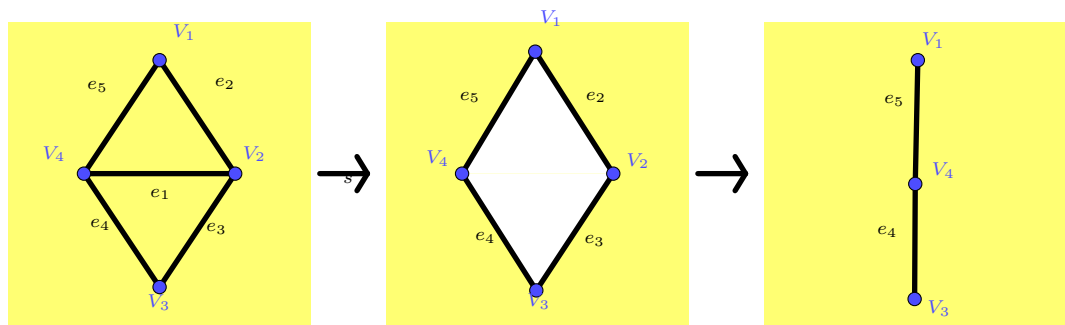


Abbildung 10: Butterfly Deletion

Zur Durchführung der Butterfly-Deletion reicht jedoch die Angabe der Kante  $e_1$ , da die Flächen durch  $X_2(e_1)$ , die Kanten durch  $X_1(X_2(e_1))$  und die Ecken  $X_0(X_2(e_1))$  eindeutig festgelegt sind. Es gibt 2 Möglichkeiten die obigen Kanten und Flächen zu wählen, doch beide Wahlen liefern isomorphe simpliziale Flächen.

Dies soll an dieser Stelle mit dem Oktaeder  $O$  und der Kante 1 durchgeführt werden. Außerdem gebraucht, wird die Wahl

$$(V_1, V_2, V_3, V_4, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, F_1, F_2) = \\ (3, 1, 5, 2, 1, 2, 4, 6, 5, 1, 3)$$

Dieser wird durch das Symbol

$$\mu((O, <)) = (6, 12, 8; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\}))$$

beschrieben.



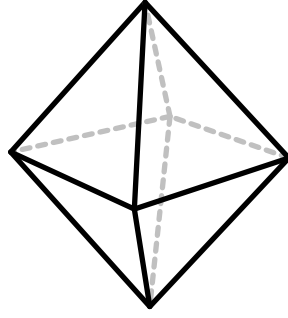


Abbildung 11: Oktaeder

Zunächst werden die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen angepasst.

$$(5, 9, 6; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Nun werden die Einträge  $X_0(1)$ ,  $X_0(2)$ ,  $X_0(4)$  gelöscht

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Löschen der Einträge  $X_1(1)$ ,  $X_1(3)$  führt zu:

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Nun ersetzt in der Beschreibung für die Kanten-Flächen-Inzidenz jedes Vorkommen der Kante 2 bzw. 4 durch die Kante 5 bzw. 6.

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 6, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{3, 8, 10\}, \{10, 11, 12\})))$$

Durch Ersetzen der Ecke 1 durch die Ecke 2 in der Beschreibung der Ecken-Kanten-Inzidenz erhält man letztlich das ordinale Symbol:

$$(5, 9, 6; (\{2, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 6, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{3, 8, 10\}, \{10, 11, 12\}))),$$

welches eine simpliziale Fläche beschreibt, die isomorph zum Doppel-Tetraeder ist.

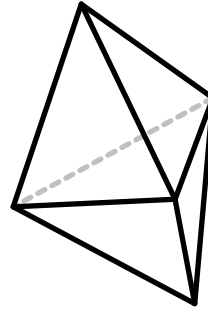


Abbildung 12: Doppel-Tetraeder

### 3.3 Butterfly Insertion

**Definition 3.5.** Sei  $X$  eine Sphäre Fläche mit paarweise verschiedenen Ecken  $V, V_1, V_2$ , Kanten  $e_1, \dots, e_5 \in X_1$  und Flächen  $F, F_1, F_2 \in X_2$ , die  $X_0(e_1) \cap X_0(e_2) = \{V\}$  erfüllen.

Falls  $X_2(e_1) \cap X_2(e_2) = \{F\}$  für ein  $F \in X_2$  ist, dann kann man folgende Relationen festsetzen:

- $(X_0(e_1), X_0(e_2)) = (\{V, V_1\}, \{V, V_2\})$
- $(X_2(e_1), X_2(e_2)) = (\{F, F_1\}, \{F, F_2\})$  für Flächen  $F_1, F_2$ .

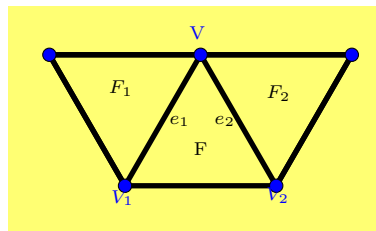


Abbildung 13: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Die simpliziale Fläche  $\beta(X)_{e_1, e_2}$  wird dann durch

$$\beta(X)_{e_1, e_2} = T^F(X)$$

definiert. Falls aber  $X_2(e_1) \cap X_2(e_2) = \emptyset$  ist, so erhält man folgende Relationen:

- $(X_0(e_1), X_0(e_2)) = (\{V, V_1\}, \{V, V_2\})$
- $(X_2(e_1), X_2(e_2)) = (\{F_1^1, F_1^2\}, \{F_2^1, F_2^2\})$  für Flächen  $F_1^1, F_1^2, F_2^1, F_2^2$ .

- $(F_1^1, F_1^2, \dots, F_2^2, F_2^1 \dots)$  ist der zu  $V$  zugehörige Schirm.
- Es gibt Kanten  $M = \{i_1, \dots, i_k\}$ , sodass  $\{e_j, i_j\} = X_1(F_j^2)$  und  $i_l, i_{l+1}$  in  $X_2(F)$  für ein  $F \in X_2(V)$  gilt. Außerdem ist

$$X_0(e_1) \cap X_0(i_1) \cap \dots \cap X_0(i_k) \cap X_0(e_2) = \{V\}.$$

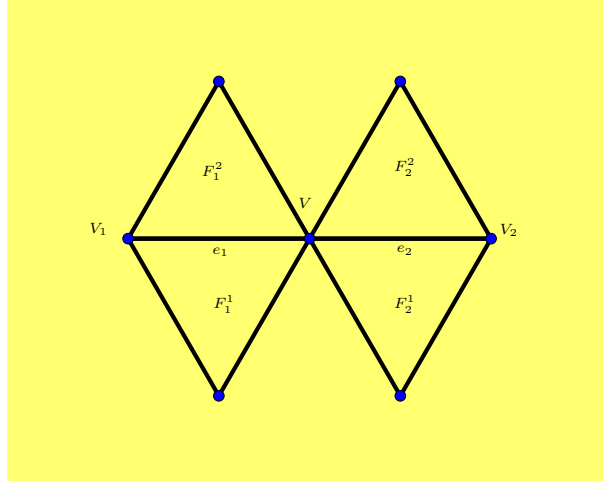


Abbildung 14: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Man erhält die simpliziale Fläche  $\beta(X)_{e_1, e_2}$ , welche durch das ordinale Symbol  $\mu(\beta(X)_{e_1, e_2})$  beschrieben wird, indem man eine neue Ecke  $V'$ , Kanten  $e, e'_1, e'_2$  und Flächen  $F', F''$  einführt und beim ordinale Symbol  $\mu((X, <))$

- Die Eckenzahl wird um 1, die Flächenanzahl um 2 und die Kantenanzahl um 3 erhöht
- an der Stelle  $F_1^1$  beim Eintrag  $X_0(F_1^1)$  die Kante  $e_1$  durch  $e'_1$  ersetzt,
- an der Stelle  $F_2^1$  beim Eintrag  $X_0(F_2^1)$  die Kante  $e_2$  durch  $e'_2$  ersetzt,
- an jeder Stelle  $i$  aus  $M$  in der  $V$  in  $X_0(i)$  vorkommt, ersetzt man  $V$  durch  $V'$ ,
- bei der Beschreibung für die Ecken-Kanten-Inzidenz fügt man  $\{V, V'\}$  für die Kante  $e$ ,  $\{V, V_1\}$  für die Kante  $e'_1$  und  $\{V, V_2\}$  für die Kante  $e'_2$  hinzufügt,
- und bei der Beschreibung für die Kanten-Flächen Inzidenz man  $\{e, e_1, e'_1\}$  für die Fläche  $F'$  und  $\{e, e_2, e'_2\}$  für die Fläche  $F''$  hinzufügt

Klarerweise sind Butterfly Deletion und Butterfly Insertion invers zueinander.

### 3.4 Kantendrehung

**Definition 3.6.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre. Man nennt eine Kante  $e \in X_1$  drehbar, falls es keine Kante  $e' \in X_1 \setminus \{e\}$  mit  $X_0(e') = X_0(X_2(e)) - X_0(e)$  gibt.

**In Gap:**

```
gap>IsTurnableEdge:=function(S,e)
>   local g,voe;
>   voe:=VerticesOfEdge(S,e);
>   for g in Edges(S) do
>       if g<> e and Set(VerticesOfEdge(S,g))=Set(voe) then
>           return false;
>       fi;
>   od;
>   return true;
>end;
```

**Definition 3.7.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre,  $\xi$  der zugehörige Flächenträger und  $e$  eine drehbare Kante in  $X$ . Dann definiert man die durch die Kantendrehung  $e$  entstandene Sphäre  $X^e$  durch den Flächenträger  $\xi\Delta Pot_3(X_0(X_2(e)))$ .

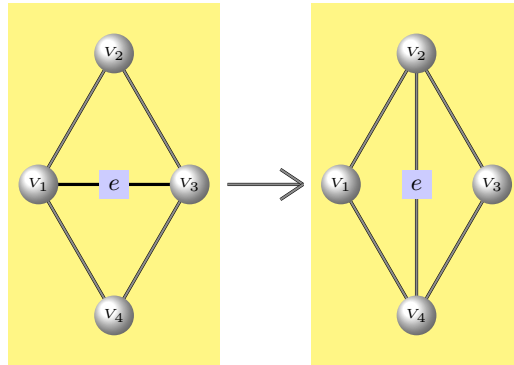


Abbildung 15: Kantendrehung

Man führt nun die Kantendrehung am Beispiel des  $(6)^2$  durch, welcher durch den Flächenträger

$$\xi = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 2, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 3, 4\}, \{8, 4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

dargestellt wird.

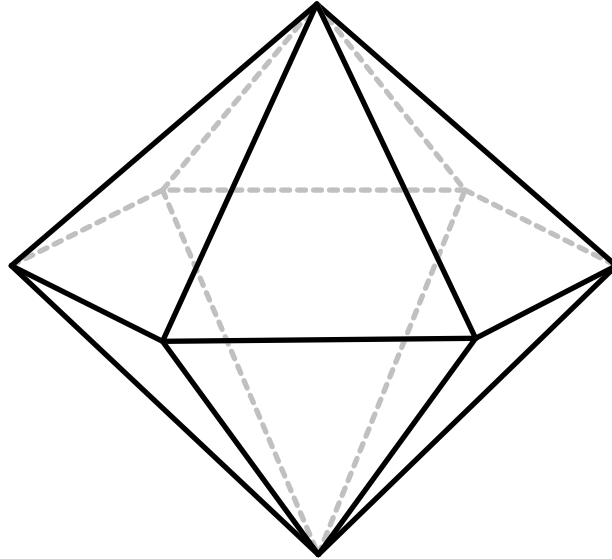


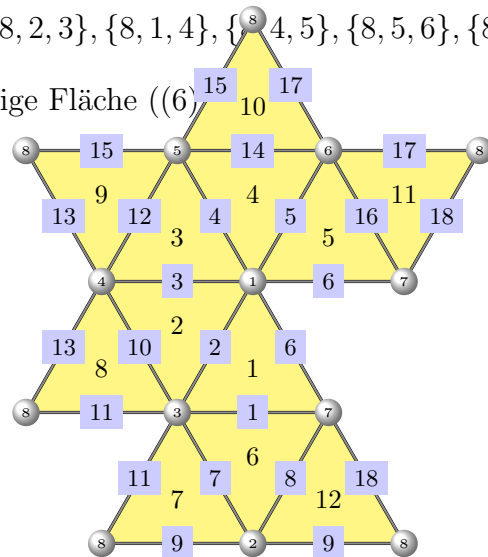
Abbildung 16: Doppel-6-gon

Durch näheres Betrachten erkennt man, dass alle Kanten des Doppel-6-gons drehbar sind. Bis auf Isomorphie gibt es jedoch nur zwei Kanten in dem Doppel-6-gon, nämlich

- Kanten, die zu zwei Ecken vom Grad 4 inzident sind und
- Kanten, die zu einer Ecke vom Grad 6 und zu einer Ecke vom Grad 4 inzident sind.
- Die Kante  $e$ , die zu den Ecken 3 und 4 inzident ist, gehört zu den ersteren Kanten und durch Drehen dieser erhält man den Flächenträger

$$\xi = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 2, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 1, 4\}, \{4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

und die zugehörige Fläche  $((6)^2)$

Abbildung 17: Kantendrehung am  $(6)^2$

- Durch Drehen der Kante  $e'$ , die zu den Ecken 1 und 2 inzident ist, wird der Flächenträger

$$\xi = \{\{1, 3, 7\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 1, 4\}, \{8, 4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

erzeugt und somit die Sphäre  $((6)^2)^{e'}$  konstruiert.

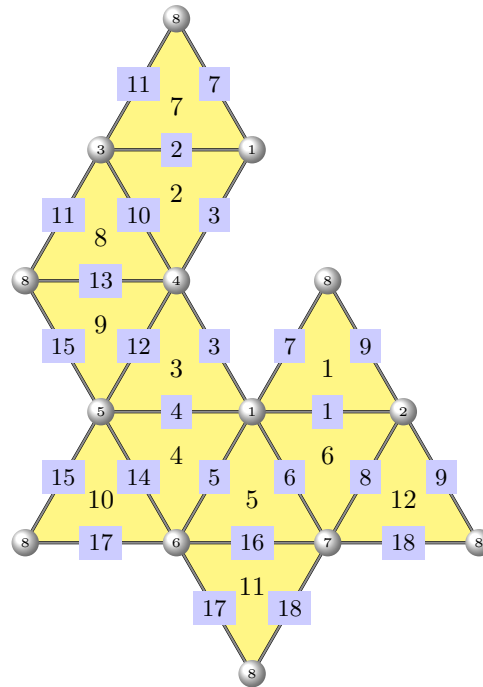


Abbildung 18: Kantendrehung am  $(6)^2$

Beachte, die obigen Sphären sind nicht isomorph und enthalten beide nicht drehbare Kanten.

## 4 Der Flächengraph simplizialer Flächen

### benötigte Vorkenntnisse

- elementare Eigenschaften simplizialer Flächen
- Manipulation simplizialer Flächen

In diesem Abschnitt der Arbeit wird der Flächengraph einer simplizialen Fläche behandelt. Genauer gesagt wird thematisiert, wie viel Struktur die Kanten-Flächen-Inzidenzen in einer simplizialen Fläche liefern können. Deshalb wird im ersten Teil des Kapitels eine Einleitung in die Thematik der Flächengraphen gegeben. Der erste

Teil dieser Einleitung kann also bei bereits vorhandenen Kenntnissen übersprungen werden. Das Hauptresultat des ersten Kapitels ist, jedoch das Aufstellen einer Normalform der Flächen-Inzidenz Matrix einer Sphäre mit einem 2- oder 3-Waist. Im zweiten Teil widmen wir uns dann den in Kapitel 3 vorgestellten Prozeduren zum Manipulieren einer Sphäre. Genauer untersuchen wir, wie sich eine Manipulation der Sphäre auf den zugehörigen Flächengraph auswirkt. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Flächenmenge einer simplizialen Fläche mit  $n$  Flächen durch  $\{1, \dots, n\}$  gegeben ist.

## 4.1 Grundlagen

**Definition 4.1.** Sei  $X$  eine Sphäre. Wir definieren den Flächengraph  $G_X = (V, E)$  von  $X$  durch die Knotenmenge  $V = X_2$  und die Kantenmenge  $E = X_1$ . Zwei Knoten  $F, F'$  des Graphen sind adjazent, falls es eine Kante  $e \in X_1$  gibt, die  $X_2(e) = \{F, F'\}$  erfüllt.

**Bemerkung 4.2.** Da wir in diesem Abschnitt nur geschlossene simpliziale Flächen betrachten, sind die zugehörigen Graphen einfach und kubisch.

**Beispiel 4.3.** Der Flächengraph des Tetraeders bildet einen vollständigen Graphen mit vier Knoten.

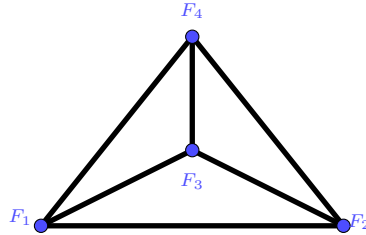


Abbildung 19: Flächengraph des Tetraeders

**Bemerkung 4.4.** Abgesehen vom Tetraeder ist jeder Flächengraph einer Sphäre mit höchstens 3 Farben färbbar.

**Definition 4.5.** Sei  $X$  eine Sphäre. Dann definieren wir die Matrix  $F_X \in \{0, 1\}^{n \times n}$  durch

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in X_2(X_1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nennen  $F_X$  die Flächen-Inzidenz Matrix.

**Beispiel 4.6.** Für einen Tetraeder erhalten wir die Flächen-Inzidenz-Matrix durch

$$F_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 4.7.** • In jeder Spalte und Zeile der Flächen-Inzidenz-Matrix einer vertex-treuen simplizialen Fläche befinden sich genau 3 Einsen.

- Die Flächen-Inzidenz-Matrix einer simplizialen Fläche ist symmetrisch.
- $\lambda = 3$  ist ein Eigenwert der Flächen-Inzidenz-Matrix einer vertex-treuen Sphäre.

**Lemma 4.8.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei isomorphe Sphären. Dann existiert eine Permutationsmatrix  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$  so, dass

$$F_X = PF_Y P^{-1}$$

*Beweis.* Dieser Zusammenhang ist dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* zu entnehmen.  $\square$

**Bemerkung 4.9.** Die Umkehrung ist jedoch nur richtig, wenn man sich auf den Fall  $\chi(X) = 2$  beschränkt. Dies wird hier jedoch nicht ausgeführt.

In Kapitel 2 haben wir bereits Sphären mit 2-Waist kennengelernt. Die Flächen-Inzidenz Matrix solcher Sphäre lässt sich als eine Blockmatrix schreiben, was im Folgenden skizziert wird.

**Definition 4.10.** Für  $k \leq l$  und  $k \leq m$  definiert man  $I_k^{l,m} \in \{0, 1\}^{l \times m}$  als

$$\begin{pmatrix} I_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{l-k,k} & 0_{l-k,m-k} \end{pmatrix}.$$

**Satz 4.11.** Sei  $X$  eine Sphäre mit einem 2-Waist. Dann gibt es eine Permutationsmatrix  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$  so, dass die Flächen-Inzidenz Matrix  $F_X$  sich in die Gestalt

$$PF_X P^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A & I_2^{k,n-k} \\ \hline I_2^{n-k,k} & B \end{array} \right]$$

bringen lässt, wobei  $k$  die Anzahl der Flächen in der 2-Waist Komponente  $M_1$  ist und  $A, B$  symmetrische Matrizen sind.

*Beweis.* Sei  $W = (e_1, e_2)$  für Kanten  $e_1, e_2 \in X_1$  ein 2-Waist in  $X$ . Dann gibt es die zu  $W$  zugehörigen 2-Waist Komponenten  $M_1, M_2 \subseteq X_2$  mit  $M_1 = \{i_1, \dots, i_k\}$  und  $M_2 = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ . Zudem seien ohne Einschränkung  $i_1 \in M_1$  und  $j_1 \in M_2$  inzident zu  $e_1$  und die Flächen  $i_2 \in M_1$  und  $j_2 \in M_2$  durch  $e_2$  verbunden. Dann werden die folgenden Zeilen und Spalten der Matrix  $F_X$  vertauscht:

- Die  $i_1$ -te Zeile wird mit der ersten Zeile und die  $i_1$ -te Spalte mit der ersten Spalte vertauscht.
- Die  $i_2$ -te Zeile wird mit der zweiten Zeile und die  $i_2$ -te Spalte mit der zweiten Spalte vertauscht.



- Die  $j_1 - te$  Zeile wird mit der  $k + 1$ -ten Zeile und die  $j_1$ -te Spalte mit der  $k + 1$ -ten Spalte vertauscht.
- Die  $j_2 - te$  Zeile wird mit der  $k + 2$ -ten Zeile und die  $j_2$ -te Spalte mit der  $k + 1$ -ten Spalte vertauscht.
- Falls  $i \in M_2$  für  $3 \leq i \leq k$  ist, dann existiert ein  $k + 3 \leq j \leq n$  mit  $j \in M_1$ . Wir tauschen dann die  $i$ -te Zeile mit der  $j$ -ten Zeile und die  $i$ -te Spalte mit der  $j$ -ten Spalte.

So erhalten wir eine Flächen-Inzidenz Matrix, in der die ersten  $k$  Zeilen bzw. Spalten zu Flächen in  $M_1$  und die restlichen  $n - k$  Zeilen bzw. Spalten zu Flächen in  $M_2$  gehören. Bei genauerer Betrachtung ist die gewünschte Gestalt bei der durch Vertauschen der Zeilen und Spalten entstandenen Matrix zu erkennen. Da diese Gestalt ausschließlich durch simultanes Vertauschen der Zeilen bzw. Spalten der Matrix  $F_X$  erzielt wurde, existiert also eine Permutationsmatrix  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ , sodass die Multiplikation von links und die Multiplikation des Inversen von rechts die skizzierte Form hervorbringt.  $\square$

**Satz 4.12.** *Sei  $X$  eine Sphäre mit einem 3-Waist. Dann gibt es eine Permutationsmatrix  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$  so, dass  $F_X$  sich auf die Gestalt*

$$PF_X P = \left[ \begin{array}{c|c} A & I_3^{l, n-l} \\ \hline I_3^{n-l, l} & B \end{array} \right]$$

bringen lässt, wobei  $A \in \{0, 1\}^l$  und  $B \in \{0, 1\}^{n-l}$ .

*Beweis.* Diese Aussage wird analog zum Beweis von Satz 4.11 geführt.  $\square$

## 4.2 Manipulation des Flächengraphen

Wie bereits erwähnt studieren wir hier den Zusammenhang der Flächengraphen von Sphären, die durch eine Manipulation der Ecken, Kanten und Flächen auseinander hervorgehen. Es sei hier angemerkt, dass hier die korrekte Definition der in Kapitel 3 vorgestellten Prozeduren eher nebensächlich ist. Deswegen werden die Voraussetzungen zum Anwenden dieser eher oberflächlich aufgestellt. Diese können jedoch bei Bedarf in Kapitel 3 nachgelesen werden. Zur Vereinfachung nehmen wir hier zur Annahme  $|X_2| = \{1, \dots, n\}$  zusätzlich an, dass  $X$  eine Sphäre mit zugehörigem Flächengraph  $G_X$  und zugehöriger Flächen-Inzidenz Matrix  $F_X$  ist.

### 1. Butterfly Deletion

- Sei  $e$  eine Kante in  $X$ , sodass die Butterfly Deletion durchführbar ist. Dann ist  $X_2(e) = \{i', j'\}$  für geeignete  $i', j'$ . Es gibt dann genau zwei

Flächen  $i_1, i_2 \in X_2$ , die zu  $i'$  und genau zwei Flächen  $j_1, j_2 \in X_2$ , die zu  $j'$  adjazent sind.

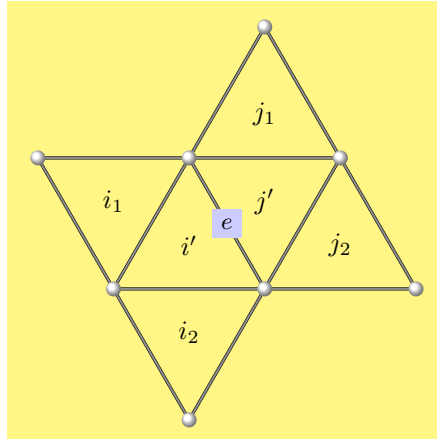


Abbildung 20: Ausschnitt der Sphäre  $X$

Zudem sei  $F \in \{0, 1\}^{n \times n}$  die Matrix, die durch

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in \{(i_1, i_2), (i_2, i_1)\} \\ 1, & (i, j) \in \{(j_1, j_2), (j_2, j_1)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Dann geht die Flächen-Inzidenz Matrix der Sphäre  ${}^e\beta(X)$  durch Streichen der Zeilen  $i', j'$  und der Spalten  $i', j'$  aus  $F$  hervor.

Beim Betrachten des zugehörigen Flächengraphen  $G_X$  und den zu den obigen Flächen zugehörigen Knoten in  $G_X$  ergibt sich folgender Zusammenhang:

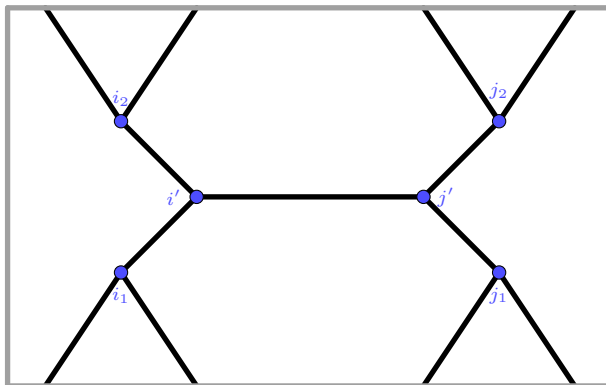


Abbildung 21: Ausschnitt des Flächengraphen der Sphäre  $X$

Zunächst werden die zu  $i'$  und  $j'$  zugehörigen Knoten und damit auch die inzidenten Kanten aus dem Graphen entfernt.

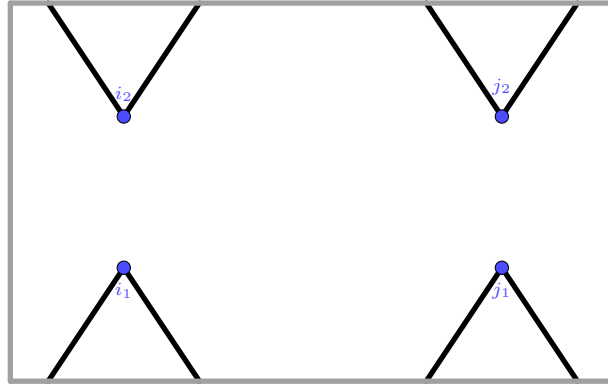


Abbildung 22: Ausschnitt eines aus dem Flächengraph der Sphäre  $X$  konstruierten Graph

Daraufhin werden die Kanten  $\{i_1, i_2\}$  und  $\{j_1, j_2\}$  hinzugefügt, um so den Flächengraph der Sphäre  ${}^e\beta(X)$  zu konstruieren.

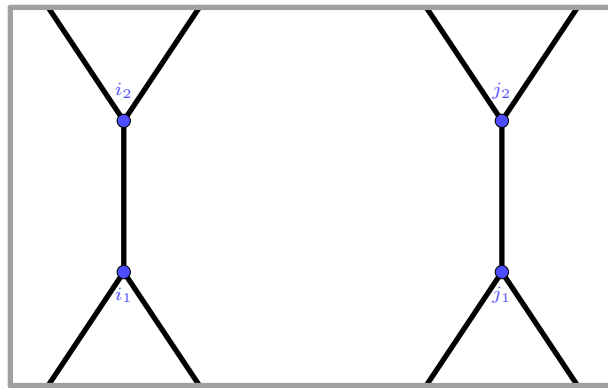


Abbildung 23: Ausschnitt des Flächengraphen der Sphäre  ${}^e\beta(X)$

## 2. Butterfly Insertion

- Seien  $e_1, e_2$  Kanten in  $X$ , für die eine Butterfly Insertion durchführbar ist. Dann existieren geeignete Flächen, sodass  $X_2(e_1) = \{i_1, i_2\}$  und  $X_2(e_2) = \{j_1, j_2\}$  gilt.

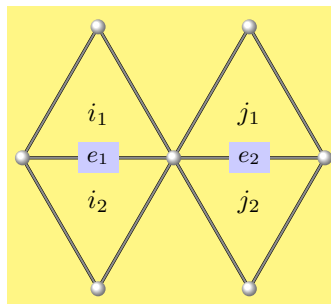


Abbildung 24: Ausschnitt der Sphäre  $X$

Zudem sei  $F \in \{0, 1\}^{n \times n}$  die Matrix, die durch

$$F_{i,j} = \begin{cases} 0, & (i, j) \in \{(i_1, i_2), (i_2, i_1)\} \\ 0, & (i, j) \in \{(j_1, j_2), (j_2, j_1)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Mithilfe der Vektoren  $v \in \{0, 1\}^n$  mit

$$v_i = \begin{cases} 1, & i = i_1, i_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $w \in \{0, 1\}^n$  mit

$$w_i = \begin{cases} 1, & i = j_1, j_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten wir die Flächen-Inzidenz Matrix der Sphäre  $\beta_{e_1, e_2}(X)$ , indem wir die Blockmatrix

$$\left[ \begin{array}{c|cc} F & v & w \\ \hline v^{tr} & 0 & 1 \\ w^{tr} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

zusammensetzen. Betrachten wir nun die Auswirkungen dieser Manipulation auf den Flächengraph.

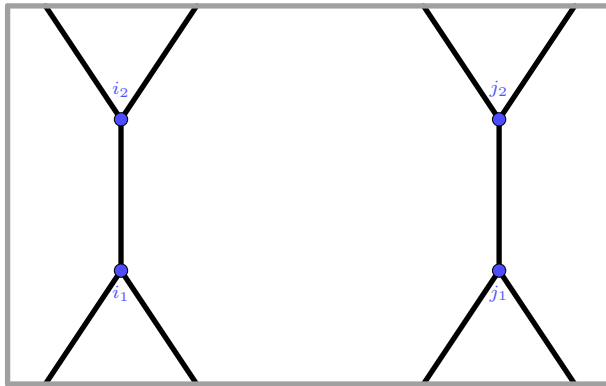


Abbildung 25: Ausschnitt des Flächengraphen von  $X$

Im ersten Schritt werden  $\{i_1, i_2\}$  und  $\{j_1, j_2\}$  aus der Menge der Kanten entfernt.

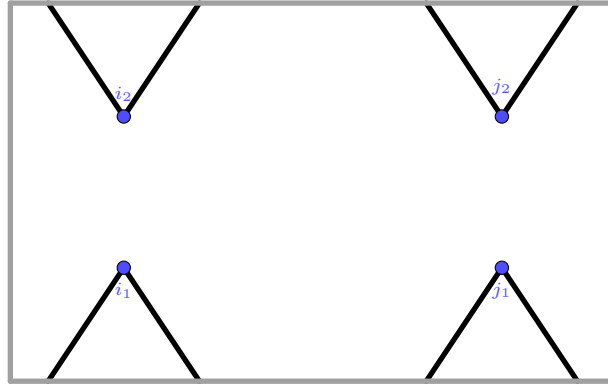


Abbildung 26: Ausschnitt eines aus dem Flächengraph der Sphäre  $X$  konstruierten Graph

Dann werden neue Knoten  $i'$  und  $j'$  eingeführt. Außerdem müssen die Kanten

$$\{i', i_1\}, \{i', i_2\}, \{j', j_1\}, \{j', j_2\}, \{i', j'\}$$

ergänzt werden, um so den Flächengraph der Sphäre  $\beta_{e_1, e_2}(X)$  zu erhalten.

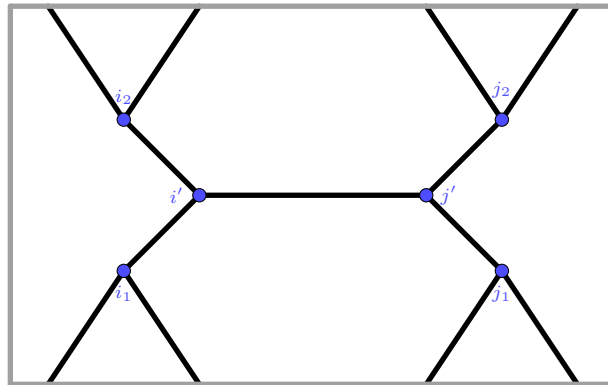


Abbildung 27: Ausschnitt des Flächengraphen der Sphäre  $\beta_{e_1, e_2}(X)$

In den Flächengraphen der Sphären ist also der Zusammenhang zwischen der Butterfly Insertion und Butterfly Deletion ebenfalls erkennbar.

### 3. Kantendrehung

- Sei  $e \in X_1$  eine drehbare Kante und  $X_2(e) = \{i_1, i_2\}$ . Dann existieren geeignete Flächen  $j_1, j_2, j_3, j_4$ , die

$$X_2(X_1(i_1)) - \{i_1, i_2\} = \{j_1, j_3\},$$

$$X_2(X_1(i_2)) - \{i_1, i_2\} = \{j_2, j_4\},$$

und

$$X_0(e) \cap X_0(j_1) \cap X_0(j_2) \neq \emptyset$$

$$X_0(e) \cap X_0(j_3) \cap X_0(j_4) \neq \emptyset$$

erfüllen.

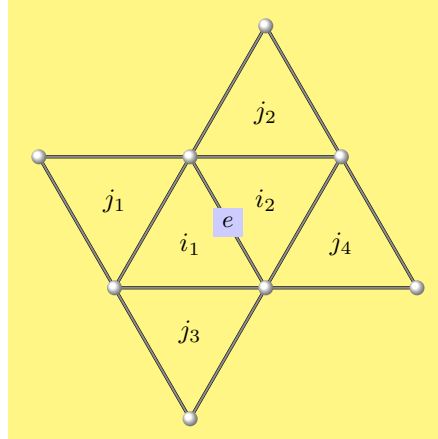


Abbildung 28: Ausschnitt der Sphäre  $X$

Die Flächen-Inzidenz-Matrix  $F_{X^e} \in \{0, 1\}^{n \times n}$  erhalten wir bis auf Äquivalenz durch

$$F_{X^e_{i,j}} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in \{(i_1, j_2), (j_2, i_1)\} \\ 0, & (i, j) \in \{(i_1, j_3), (j_3, i_1)\} \\ 1, & (i, j) \in \{(i_2, j_3), (j_3, i_2)\} \\ 0, & (i, j) \in \{(i_2, j_2), (j_2, i_2)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten wir nun wieder den zugehörigen Flächengraph  $G_X$ .

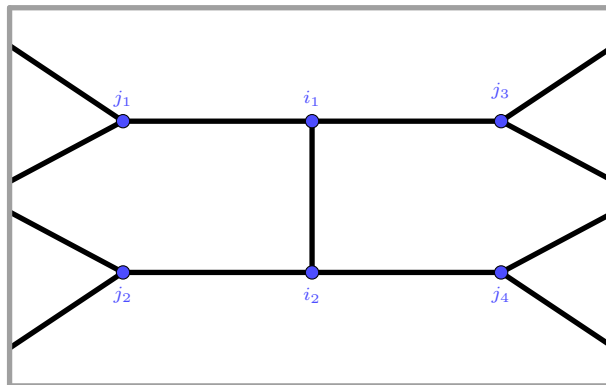


Abbildung 29: Face-Graph des Tetraeders

Beim Drehen der Kanten  $e$  werden die Kanten  $\{i_1, j_3\}$  und  $\{i_2, j_2\}$  aus dem Graphen entfernt und die Kanten  $\{i_2, j_2\}$  und  $\{i_2, j_2\}$  zu der Kanten-

menge hinzugefügt. Auf diese Art und Weise erhalten wir den Flächengraph der Sphäre  $X^e$ .

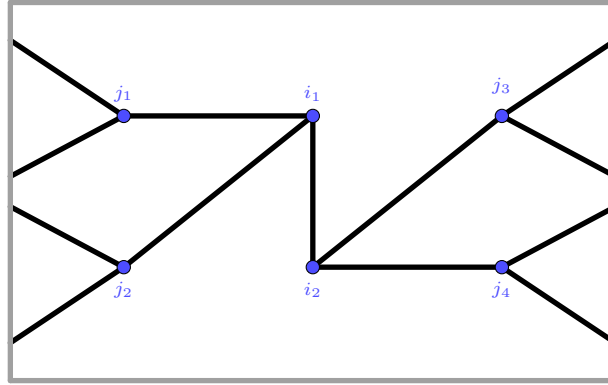


Abbildung 30: Face-Graph des Tetraeders

#### 4. Tetraedererweiterung

- Sei  $i$  eine Fläche in  $X$  und  $X_2(X_1(i)) - \{i\} = \{j, k, l\}$  für geeignete  $j, k, l$  die Nachbar-Flächen von  $i$  in  $X$ .

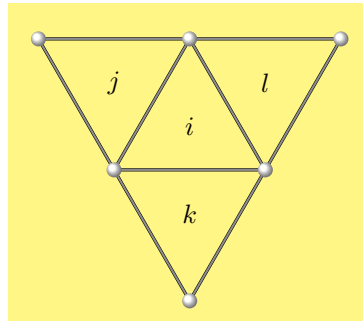


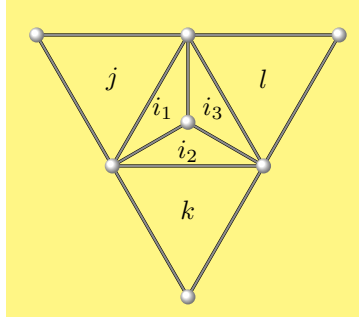
Abbildung 31: Ausschnitt der Sphäre  $X$

Weiterhin sei  $F$  die Matrix, die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und Spalte aus  $F_X$  hervorgeht. Dann ergibt sich die Flächen-Inzidenz Matrix von  $T^i(X)$  durch die Blockmatrix

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} F & e_j & e_k & e_l \\ \hline e_j^{tr} & 0 & 1 & 1 \\ e_k^{tr} & 1 & 0 & 1 \\ e_l^{tr} & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

wobei  $e_j, e_k, e_l$  die zugehörigen Einheitsvektoren in  $n - 1$  Einträgen sind.

- Sei  $V \in X_0$  eine Ecke vom Grad 3 in  $X$  mit  $X_2(V) = \{i_1, i_2, i_3\}$ . Dann ist  $X_2(X_1(X_2(V))) - X_2(V) = \{j, k, l\}$  für geeignete  $j, k, l$ . Diese bilden die Nachbarn der Flächen  $i_1, i_2, i_3$ . Genauer nehmen wir an, dass  $i_1$  zu  $j$ ,  $i_2$  zu  $k$  und  $i_3$  zu  $l$  benachbart ist.

Abbildung 32: Ausschnitt der Sphäre  $X$ 

Sei  $F \in \{0, 1\}^{n-3 \times n-3}$  die Matrix, die durch Streichen der  $i_1$ -ten,  $i_2$ -ten und  $i_3$ -ten Zeilen und Spalten aus  $F_X$  entsteht und  $v \in \{0, 1\}^{n-3}$  der Vektor mit

$$v_i = \begin{cases} 1, & i \in \{j, k, l\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann erhält man  $F_{T_V(X)}$  durch

$$\left[ \begin{array}{c|c} F & v \\ \hline v^{tr} & 0 \end{array} \right]$$

Die Auswirkungen auf den Flächengraph werden wir zu einem späteren Zeitpunkt noch genauer formulieren. Dies wird im Kontext der Multi-Tetraeder geschehen.

## 5 Kantendrehungen

Dieses Kapitel soll als Wiederholung der Resultate der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" dienen und zugleich einen anderen Zugang zu der Thematik der Kantendrehungen liefern. Dort wurde der Zugang durch die Mender- und Cutteroperatoren ermöglicht, wohingegen hier versucht wird, die symmetrische Differenz zur Durchführung der Kantendrehungen auszunutzen. Deshalb werden hier zunächst die einführenden Definitionen umformuliert und die daraus entstehenden Resultate ohne Beweis zusammengefasst, um so die Transitivität der Kantendrehungen auf der Menge der Sphären ohne 2-Waist unter strikteren Einschränkungen zu beweisen.

**Definition 5.1.** Für eine Sphäre  $(X, <)$  und Kanten  $e_1, \dots, e_n$  in  $X$  führt man die folgende Konstruktion durch

- Sei  $e_1$  eine drehbare Kante in  $X$  und  $e_2$  eine drehbare Kante in  $X^{e_1}$ , dann definiert man  $X^{(e_1, e_2)}$  als  $(X^{e_1})^{e_2}$ .



- Falls  $e_{i+1}$  eine drehbare Kante in  $X^{(e_1, \dots, e_i)}$  ist, dann definiert man für  $2 \leq i \leq n-1$  die Sphäre  $X^{(e_1, \dots, e_{i+1})}$  als  $(X^{(e_1, \dots, e_i)})^{e_{i+1}}$ .

Man nennt  $E = (e_1, \dots, e_n)$  eine drehbare Kantensequenz in  $X$  und  $X^E$  die durch die Kantensequenz entstandene simpliziale Fläche.

**In Gap:**

```
gap>EdgeTurnSequene:=function(S,TurnEdges)
>    local tempS;
>    tempS:=S;
>    for e in TurnEdges do
>        if IsTurnableEdge(tempS,e) then
>            tempS:=EdgeTurn(tempS,e);
>        else
>            return false;
>        fi;
>    od;
>    return tempS;
>end;
```

**Bemerkung 5.2.** Kantendrehungen sind nicht kommutativ. Das heißt im Allgemeinen gilt für drehbare Kanten  $e_1, e_2$  in  $X$  zwischen  $X^{(e_1, e_2)}$  und  $X^{(e_2, e_1)}$  keine Gleichheit.

Wie oben schon erwähnt wurden die Kantendrehungen in der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" allgemeiner formuliert. Es wurde zugelassen, dass Kantendrehungen auch an nicht vertex-treuen Sphären durchgeführt werden konnten. Für die Formulierung des Hauptresultates der Bachelorarbeit bezeichnet man diese Kantensequenzen mit *allgemeinen Kantensequenzen*.

**Satz 5.3.** Sei  $(X, <)$  eine Sphäre. Dann ist das iterierte Anwenden von Kantendrehungen auf  $X$  transitiv, das heißt für alle Sphären  $Y$  mit  $|X_2| = |Y_2|$  existiert eine allgemeine Kantensequenz  $E$  in  $X$  so, dass

$$X^E \cong Y$$

ist.

Einen Beweis dieser Aussage haben wir bereits in der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" gesehen. An dieser Stelle wird nun ein weiterer

Beweis vorgestellt, der erlaubt die Voraussetzungen des Satzes schärfer zu formulieren. Doch hierfür benötigt man zunächst noch etwas Vorarbeit.

Im Folgenden wird eine vertex-treue Sphäre  $X$  betrachtet.

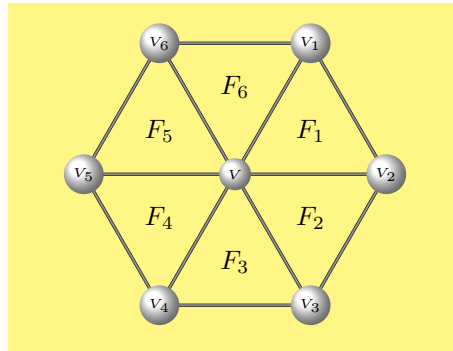
**Bemerkung 5.4.** Diese Bemerkung beschreibt, wie sich die Orientierungen von Flächen in dem Schirm einer Ecke in  $X$  verhalten. Seien deshalb  $V \in X_0$  und  $U(V) = ((F_1, \dots, F_n))$  der für Flächen  $F_1, \dots, F_n$  zu  $V$  zugehörige Schirm. Im Folgenden nennen wir ein Tupel  $(F_1, \dots, F_n) \in U(V)$  ein Schirm-Tupel von  $V$ . Weiterhin gibt es  $V_1, \dots, V_n \in X_0$ , die

$$X_0(F_i) = \{V, V_i, V_{i+1}\}$$

für  $i = 0, \dots, n-1$  und

$$X_0(F_n) = \{V, V_1, V_n\}$$

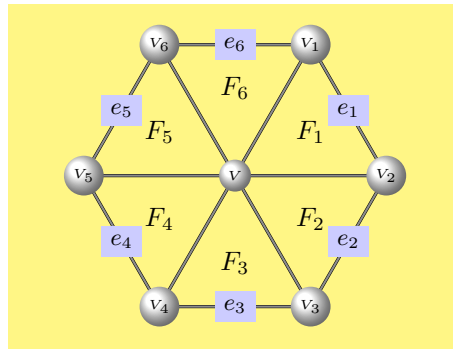
erfüllen.



Dann gibt es Kanten  $e_1, \dots, e_n$  in  $X$ , sodass wir

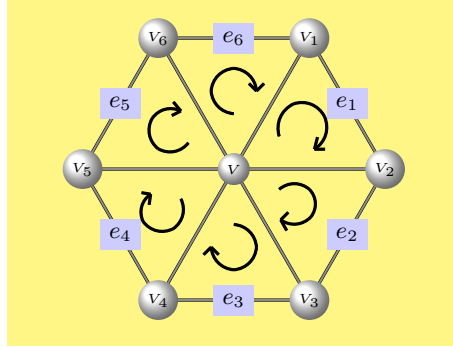
$$(V_1, e_1, V_2, e_2, \dots, V_n, e_n)$$

als Ecken-Kanten-Pfad in  $X$  erhalten.

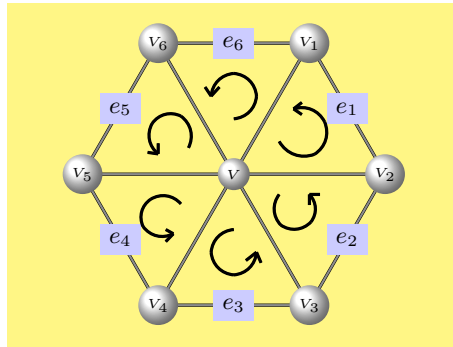


Wir bezeichnen die Orientierung einer Fläche  $F \in X_2$  im Folgenden mit  $o(F)$ . Wir wollen nun Orientierungen der  $F_i$  so angeben, dass die Orientierungen von je zwei benachbarten Flächen kohärent sind. Geben wir nun die Orientierung  $o(F_1) =$

$(V, V_1, V_2)$  vor, dann lässt sich, die Orientierung einer beliebigen Fläche in dem Schirm bestimmen. Diese ergibt sich nämlich durch  $o(F_i) = (V, V_i, V_{i+1})$  bzw.  $o(F_n) = (V, V_n, V_1)$ . Man liest also die zwei von  $V$  verschiedenen Ecken in der Reihenfolge, wie sie auch im Ecken-Kanten Pfad vorkommen. Beispielsweise ist die Orientierung von  $F_4$  durch  $(V, V_4, V_5)$  gegeben, da im Pfad  $V_4$  vor  $V_5$  besucht wird.



Analoges Vorgehen liefert uns ebenfalls im Fall  $o(F_1) = (V, V_2, V_1)$  die Orientierung der restlichen Flächen des Schirmes. Diese ergibt sich nämlich durch  $o(F_i) = (V, V_{i+1}, V_i)$  bzw.  $o(F_n) = (V, V_1, V_n)$ . Denn in diesem Fall liest man die beiden von  $V$  verschiedenen Ecken in umgekehrter Reihenfolge. Beispielsweise ist die Orientierung von  $F_3$  durch  $(V, V_4, V_3)$  gegeben, da  $V_4$  nach  $V_3$  besucht wird.



Wir nennen den oben konstruierten Ecken-Kanten-Pfad einen Schirm-Pfad von  $V$ . Weiterhin nennen wir  $\mathcal{O}_X = \{o(F) \mid F \in X_2\}$  eine Orientierung der Sphäre  $X$ , falls die Orientierungen  $o(F), o(F') \in \mathcal{O}$  von zwei benachbarten Flächen  $F$  und  $F'$  in  $X$  kohärent sind. Falls  $X$  aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch  $\mathcal{O}$  für die Orientierung  $\mathcal{O}_X$ . Da Sphären zusammenhängend sind, ist die Orientierung einer Sphäre durch Angabe der Orientierung einer beliebigen Fläche der Sphäre eindeutig festgelegt. Durch eine Orientierung der Sphäre entstehen zwei Arten von Schirm-Tupeln der Ecke  $V \in X_0$ . Hierzu sei  $U \in U(V)$  ein Schirm-Tupel von  $V$ . Mit  $i_1$  bezeichnen wir die Position von  $F_1$  und mit  $i_n$  die Position von  $F_n$  in  $U$ .

- Sei  $(V, V_1, V_2) \in \mathcal{O}$ . Falls entweder  $\{i_1, i_n\} \neq \{1, n\}$  und  $i_1 \geq i_n$  oder  $(i_1, i_n) = (1, n)$  ist, dann nennen wir  $U$   $\mathcal{O}$ -positiv orientiert. Andernfalls nennen wir  $U$   $\mathcal{O}$ -negativ orientiert.

- Sei  $(V, V_2, V_1) \in \mathcal{O}$ . Falls entweder  $\{i_1, i_n\} \neq \{1, n\}$  und  $i_1 \leq i_n$  oder  $(i_1, i_n) = (n, 1)$  ist, dann nennen wir  $U$   $\mathcal{O}$ -positiv orientiert. Andernfalls nennen wir  $\mathcal{O}$ -negativ orientiert.

Falls die Orientierung  $\mathcal{O}$  im Kontext klar ist, nennt man  $U$  einfach nur positiv bzw. negativ orientiert. Für  $n = 6$  zeigt die untenstehende Tabelle alle positiv und negativ orientierten Schirm-Tupel der Ecke  $V$  im Fall  $(V, V_1, V_2) \in \mathcal{O}$ .

| $\mathcal{O}$ -positiv orientiert | $\mathcal{O}$ -negativ orientiert |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(F_1, \dots, F_6)$               | $(F_6, \dots, F_1)$               |
| $(F_6, F_1, \dots, F_5)$          | $(F_1, F_6, \dots, F_2)$          |
| $(F_5, F_6, F_1, \dots, F_4)$     | $(F_2, F_1, F_6, \dots, F_3)$     |
| $(F_4, F_5, F_6, F_1, F_2, F_3)$  | $(F_3, F_2, F_1, F_6, F_5, F_4)$  |
| $(F_3, F_4, F_5, F_6, F_1, F_2)$  | $(F_4, F_3, F_2, F_1, F_6, F_5)$  |
| $(F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_1)$  | $(F_5, F_4, F_3, F_2, F_1, F_6)$  |

**Bemerkung 5.5.** Seien  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $\mathcal{O}$  eine Orientierung von  $X$ . Weiterhin seien  $V_1, V_2$  zwei benachbarte Ecken in  $X$  zusammen mit positiv orientierten Schirm-Tupeln  $U_1 \in U(V_1)$  und  $U_2 \in U(V_2)$ . Für zwei benachbarte Flächen  $F_1, F_2 \in X_2$  mit

$$X_2(V_1) \cap X_2(V_2) = \{F_1, F_2\},$$

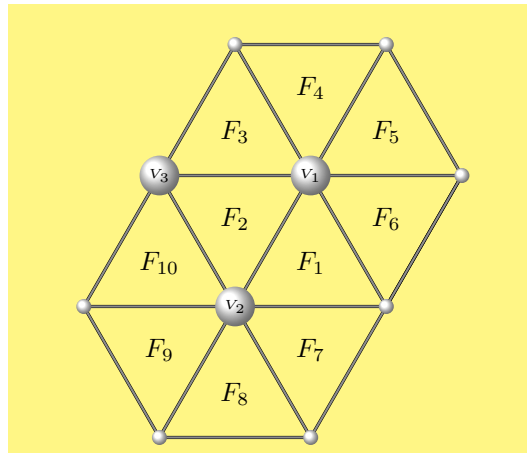
erhalten wir den Zusammenhang, dass die beiden Flächen in  $U_1$  und  $U_2$  in jeweils umgekehrter Reihenfolge auftauchen.

Genauer wird in diesem Zusammenhang Folgendes unter dem Auftauchen in umgekehrter Reihenfolge verstanden:

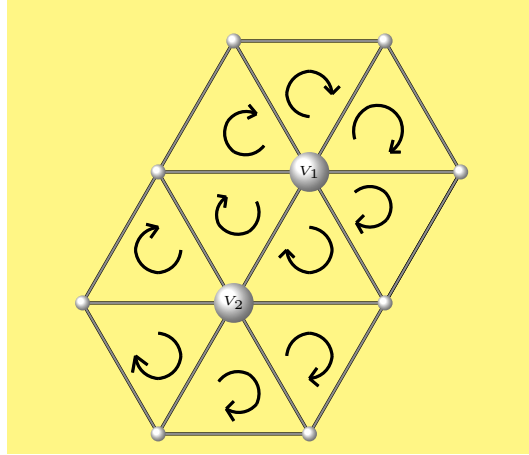
Bezeichnen wir die Position von  $F_j$  in  $U_l$  mit  $i_j^l$  für  $j, l = 1, 2$ , dann gilt:

$$i_1^1 \leq i_2^1 \text{ oder } (i_1^1, i_2^1) = (n_1, 1) \Leftrightarrow i_1^2 \geq i_2^2 \text{ oder } (i_1^2, i_2^2) = (1, n_2),$$

wobei  $\deg(V_1) = n_1$  und  $\deg(V_2) = n_2$  ist. Zur Veranschaulichung betrachten wir für geeignete Flächen und Ecken folgenden Ausschnitt einer Sphäre.



Sei nun  $\mathcal{O}$  eine Orientierung von  $X$  mit  $(V_1, V_2, V_3) \in \mathcal{O}$ , wobei  $X_0(F_2) = \{V_1, V_2, V_3\}$  ist.



Dann erhalten wir durch

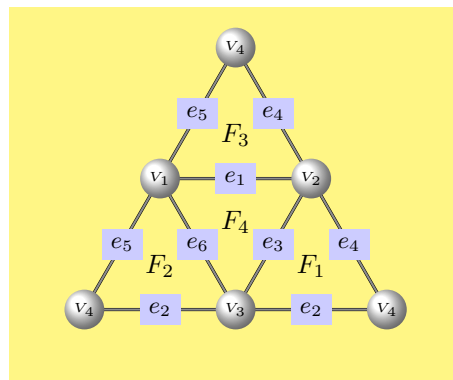
$$U_1 = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)$$

bzw.

$$U_2 = (F_2, F_1, F_7, F_8, F_9, F_{10})$$

zwei positiv orientierte Schirm-Tupel von  $V_1$  bzw.  $V_2$ . In diesen tauchen die Flächen  $F_1, F_2$  in jeweils umgekehrter Reihenfolge auf.

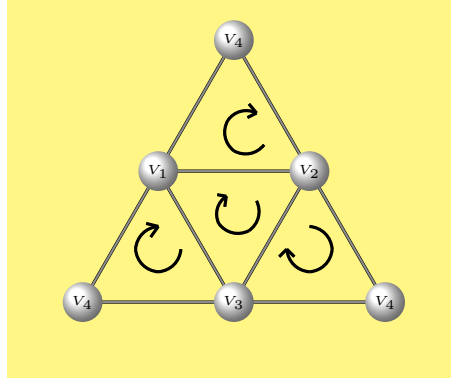
Zum tieferen Verständnis der oben eingeführten Definitionen betrachten wir als Beispiel einen Tetraeder, wobei an dieser Stelle auf die formale Definition verzichtet wird und uns die Definition durch die folgende Skizze genügt.



Durch Angabe der Orientierung  $o(F_1) = (V_2, V_4, V_3)$  erhalten wir

$$\mathcal{O} = \{(V_2, V_4, V_3), (V_1, V_4, V_2), (V_1, V_2, V_3), (V_1, V_3, V_4)\}$$

als Orientierung des obigen Tetraeders.



Für zwei benachbarte Ecken, beispielsweise  $V_1$  und  $V_2$ , bilden  $U_1 = (F_3, F_4, F_2)$  und  $U_2 = (F_1, F_4, F_3)$  zwei positiv orientierte Schirm-Tupel in denen die zu beiden Ecken inzidenten Flächen  $F_3$  und  $F_4$  in jeweils umgekehrter Reihenfolge vorkommen.

**Lemma 5.6.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $V$  eine beliebige Ecke in  $X$ , die  $\deg(X) \geq 4$  erfüllt. Dann gibt es eine drehbare Kante in  $X_1(V)$ .*

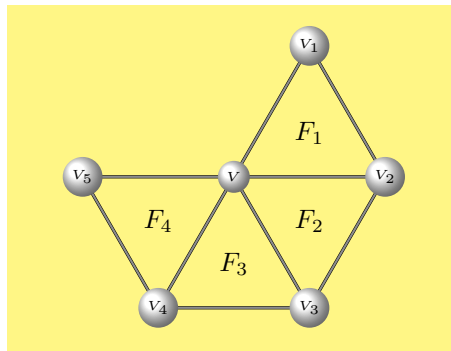
*Beweis.* Man beweist diese Aussage per Widerspruch und folgert dann, dass  $X$  nicht orientierbar ist, also keine Sphäre sein kann. Angenommen es existiert eine Ecke  $V$  in  $X$ , sodass keine Kante in  $X_1(V)$  drehbar ist. Dann gibt es für alle  $e \in X_1(V)$  eine Kante  $e' \in X_1 \setminus e$ , sodass

$$(X_0(X_2(e)) - X_0(e)) = X_0(e')$$

ist. Für  $n \geq 4$  sei nun  $U(V) = ((F_1, \dots, F_n))$  der Schirm von  $V$  und  $V_1, \dots, V_5$  Ecken in  $X$ , sodass

$$X_0(F_i) = \{V, V_i, V_{i+1}\}$$

für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ist.



Da  $X$  vertex-treu ist, können wir die Kanten mit den inzidenten Ecken identifizieren. Da also  $\{V, V_2\}$  und  $\{V, V_4\}$  nicht drehbar sind, gibt es bereits die Kanten  $\{V_1, V_3\}$  und  $\{V_3, V_5\}$  in  $X$ . Für diese gibt es Flächen  $F_1^{1,3}, F_2^{1,3}, F_1^{3,5}, F_2^{3,5} \in X_2$  mit  $X_2(\{V_1, V_3\}) = \{F_1^{1,3}, F_2^{1,3}\}$  und  $X_2(\{V_3, V_5\}) = \{F_1^{3,5}, F_2^{3,5}\}$ . Wir wollen nun einen Flächen-Pfad ohne Wiederholung und eine Orientierung entlang dieses Pfades angeben, um dann den gewünschten Widerspruch zu erzeugen. Hierzu brauchen wir

geeignete Schirm-Tupel der Ecken  $V_1, V_3$  und  $V_5$ . Da  $X$  orientierbar ist, existiert eine Orientierung  $\mathcal{O}_X$  mit  $(V, V_1, V_2) \in \mathcal{O}_X$ . Den gewünschten Schirm-Tupel von  $V_1$  erhalten wir durch folgende Überlegung: Aus obiger Voraussetzung wissen wir, dass  $\{F_n, F_1, F_1^{1,3}, F_2^{1,3}\} \subset X_2(V_1)$  ist und die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $F_1^{1,3}$  und  $F_2^{1,3}$  benachbarte Flächen in  $X$  sind. Da jedoch die  $F_i$  und die  $F_j^{1,3}$  im Allgemeinen nicht benachbart sind, gibt es also geeignete Flächen, sodass

$$U(V_1) = ((F_n, F_1, F_a, \dots, F_b, F_1^{1,3}, F_2^{1,3}, \dots))$$

den Schirm von  $V_1$  bildet, woraus wir das negativ orientierte Schirm-Tupel

$$U_1 = (F_n, F_1, F_a, \dots, F_b, F_1^{1,3}, F_2^{1,3}, \dots)$$

konstruieren können. Analog erhalten wir ebenfalls

$$U_5 = (F_5, F_4, F_e, \dots, F_f, F_1^{3,5}, F_2^{3,5}, \dots)$$

als positiv orientiertes Schirm-Tupel von  $V_5$  in  $X$ . Da  $\{F_2, F_3, F_1^{3,5}, F_2^{3,5}, F_1^{1,3}, F_2^{1,3}\} \subseteq X_2(V)$  ist, erhalten wir wegen Bemerkung 0.2 ohne Einschränkung der Allgemeinheit für geeignete Flächen ein negativ-orientiertes Schirm-Tupel von  $V_3$  durch

$$U_3 = (F_2, F_3, F_d, \dots, F_c, F_2^{1,3}, F_1^{1,3}, \dots, F_1^{3,5}, F_2^{3,5}, F_g, \dots, F_h).$$

Außerdem seien  $V_i^{k,l}$  Ecken in  $X$ , sodass für die obigen Flächen der Form  $F_i^{k,l}$  die Gleichheit

$$X_0(F_i^{k,l}) = \{V_k, V_l, V_i^{k,l}\}$$

für geeignete  $i, j, k$  gilt. Also ist beispielsweise  $X_0(F_1^{1,3}) = \{V_1, V_3, V_1^{1,3}\}$ .

Um nun den Pfad zu konstruieren, bewegen wir uns mithilfe der angegebenen Schirm-Tupel entlang der Schirme der jeweiligen Ecken. Zunächst bewegen wir uns auf dem Schirm von  $V_1$  ausgehend von  $F_1$  über die Flächen  $F_a, \dots, F_b$  zu den Flächen  $F_1^{1,3}, F_2^{1,3}$ , wo wir dann auf den Schirm von  $V_3$  wechseln können. Daraufhin gelangen wir über die Flächen  $F_c, \dots, F_d$  zu  $F_3$  und dann zu  $F_4$ , wodurch wir uns nun auf dem Schirm von  $V_5$  befinden. Über die Flächen  $F_e, \dots, F_f$  gelingt uns nun wieder der Tausch zum Schirm von  $V_3$ , weshalb die Flächen  $F_g, \dots, F_h$  uns schließlich das Erreichen der Fläche  $F_2$  ermöglichen. Dadurch erhalten wir

$$(F_1, F_a, \dots, F_b, F_1^{1,3}, F_2^{1,3}, F_c, \dots, F_d, F_3, F_4, F_e, \dots, F_f, F_1^{3,5}, F_2^{3,5}, F_g, \dots, F_h, F_2)$$

als geschlossenen Pfad. Wegen der Orientierung  $o(F_1) = (V, V_1, V_2)$  erhalten wir aufgrund der obigen Bemerkung 0.1

$$o(F_1^{1,3}) = (V_1, V_1^{1,3}, V_3),$$

denn der Pfad

$$(V, \{V, V_2\}, V_2, \dots, V_1^{1,3}, \{V_1^{1,3}, V_3\}, V_3, \{V_3, V_2^{1,3}\}, \dots)$$

bildet einen Schirm-Pfad von  $V_1$ . Analoges Vorgehen liefert die Orientierungen:

$$\begin{aligned} o(F_2^{1,3}) &= (V_1, V_3, V_2^{1,3}) \\ \Rightarrow o(F_3) &= (V, V_3, V_4) \\ \Rightarrow o(F_4) &= (V, F_4, V_5) \\ \Rightarrow o(F_1^{3,5}) &= (V_5, V_3, V_1^{3,5}) \\ \Rightarrow o(F_2^{3,5}) &= (V_3, V_5, V_2^{3,5}) \\ \Rightarrow o(F_2) &= (V, V_3, V_2) \end{aligned}$$

Durch Betrachtung von  $o(F_1)$  und  $o(F_2)$  erhalten wir den gewünschten Widerspruch, denn diese sind nicht kohärent.  $\square$

Durch näheres Betrachten des obigen Beweises erhalten wir eine neue Charakterisierung der Orientierbarkeit einer vertex-treuen Sphäre.

**Satz 5.7.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre mit  $n$  Flächen. Dann existiert eine drehbare Kantensequenz  $E$ , sodass  $X^E$  zum Doppel- $n$ -gon isomorph ist.*

*Beweis.* Man beweist die Aussage induktiv. Für  $n = 4$  ist nichts zu zeigen. Sei nun also  $n > 4$  und  $X$  eine vertex-treue Sphäre, die nicht zum Double  $n$ -gon isomorph ist. Wegen Lemma 5.6 kann man die Existenz einer Ecke  $V$  vom Grad 3 in  $X$  annehmen. Für  $Y = T_V(X)$  gilt dann

$$|Y_2| = n - 2.$$

Deshalb existiert eine drehbare Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_m)$  in  $Y$ , sodass  $Y^E \cong (n - 1)^2$  ist. Sei  $F$  die Fläche, die in  $Y$  den Tetraeder ersetzt. Ziel ist es, aus der Kantensequenz in  $Y$  eine Kantensequenz  $E' = (e'_1, \dots, e'_k)$  in  $X$  zu konstruieren, die folgendes erfüllt:

- $E'$  ist eine drehbare Kantensequenz.
- Die Kantensequenz erlaubt, dass die Entfernung des Tetraeders und die Durchführung der Kantensequenz vertauschbar sind. Genauer heißt dies, dass es für alle  $1 \leq i \leq m$  ein  $1 \leq j \leq k$  mit

$$\begin{aligned} T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) &\cong X^{(e'_1, \dots, e'_j)} \\ \Leftrightarrow Y^{(e_1, \dots, e_i)} &\cong T_V(X^{(e'_1, \dots, e'_j)}) \end{aligned}$$

existiert.



Sei dafür  $X^0 := X$  und  $E_0 := ()$ . Man konstruiert die Kantensequenz wie folgt: Seien die Sphären  $X^i$  und die Kantensequenz  $E_i = (e_1, \dots, e_l)$  in  $X$  für  $0 \leq i \leq m$  schon konstruiert. Man führt folgende Fallunterscheidung durch:

- Falls die Kante  $e_i$  der Kantensequenz  $E$  in  $Y^{(e_1, \dots, e_i)}$  nicht zu  $F$  inzident ist, so wähle  $X^{i+1} := (X^i)^{e_i}$  und  $E_{i+1} := (e_1, \dots, e_l, e_i)$ . Damit ist

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) \cong X^{E_{i+1}}$$

und in  $X^{E_{i+1}}$  existiert kein 2-Waist, denn sonst wäre dieser schon in  $Y^{(e_1, \dots, e_i)}$  enthalten. Damit ist  $E_{i+1}$  drehbar.

- Falls die Kante  $e_i$  der Kantensequenz  $E$  in  $Y^{(e_1, \dots, e_i)}$  zu  $F$  inzident ist, muss man Kantendrehungen wie im Folgendem beschrieben anwenden. Da die Kante  $e_i$  in  $Y^{(e_1, \dots, e_i)}$  zu  $F$  inzident ist, liegt die Kante in  $X^i$  am Tetraeder an der Stelle  $V$ .

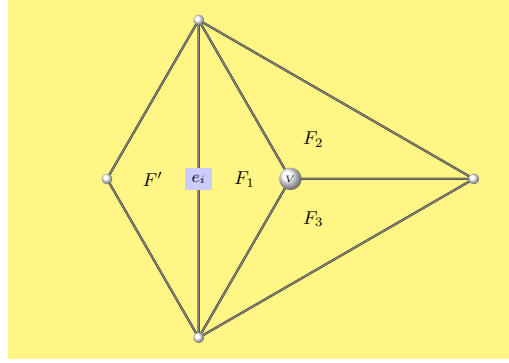


Abbildung 33: Kantendrehung

Seien  $F_1, F_2, F_3 \in X^i$ , die zu  $V$  inzidenten Flächen. Sei ohne Einschränkung  $e_i < F_1$  und  $e$  die Kante, die  $|(X^i)^{e_i}_2(e) \cup \{F_1, F_2, F_3\}| = 1$  erfüllt.

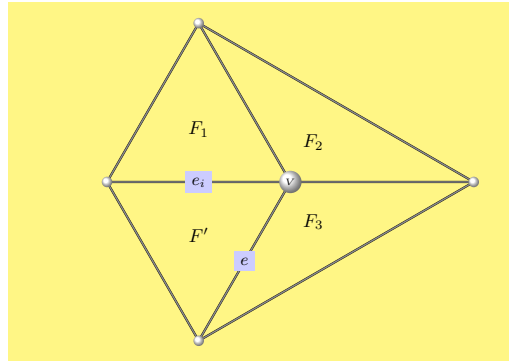


Abbildung 34: Kantendrehung

Dann definiert man  $X^{i+1} := X^{i(e_i, e)}$  und  $E^{i+1} := (e'_1, \dots, e'_l, e_i, e)$ . Dies liefert erneut

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) \cong X^{E_{i+1}}$$

Durch das Drehen der Kanten  $e_i$  und  $e$  können keine 2-Waists entstehen, wodurch  $E_{i+1}$  drehbar ist. Nach endlich vielen Schritten erhält man also eine vertex-treue Kantensequenz  $E^*$  in  $X$  sodass

$$X^{E^*} \cong T^F(Y^E) \cong T^F((n-1)^2)$$

ist. Sei  $e$  nun die Kante, die die beiden Ecken vom Grad 5 verbindet. Dann ist  $(X^{E^*})^e \cong (n)^2$ .  $\square$

**Bemerkung 5.8.** Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären und  $\phi$  ein Isomorphismus von  $X$  nach  $Y$ . Für alle Kanten  $e \in X_1$  und  $e' \in Y_1$  mit  $\phi(e) = e'$  gilt dann

$$X^e \cong Y^{e'}$$

Für eine Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_n)$  in  $X$  bedeutet dies

$$X^E \cong Y^{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}$$

**Satz 5.9.** Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären mit  $|X_2| = |Y_2| = n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine drehbare Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_n)$  in  $X$ , sodass  $X^E$  zu  $Y$  isomorph ist.

*Beweis.* Nach vorherigem Satz existieren drehbare Kantensequenzen  $E = (e_1, \dots, e_m)$  in  $X$  und  $E' = (e'_1, \dots, e'_k)$  in  $Y$ , sodass

$$x^E \cong (n)^2 \cong Y^{E'}$$

ist. Da  $X^E$  und  $Y^{E'}$  isomorph sind, existiert ein Isomorphismus

$$\phi : X^E \rightarrow Y^{E'}$$

Somit bildet  $E^* = (e_1, \dots, e_m, \phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))$  eine Kantensequenz in  $X$  und es gilt:

$$\begin{aligned} X^{E^*} &= X^{(e_1, \dots, e_m, \phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong (X^{(e_1, \dots, e_m)})^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong ((n)^2)^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong ((\phi^{-1}(Y^{E'})))^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong Y. \end{aligned}$$

Da  $E$  und  $E'$  drehbar sind, gilt dies auch für Kantensequenz  $E^*$ .  $\square$

**Bemerkung 5.10.** Bisher wurden nur drehbare Kanten für die Durchführung von Kantendrehungen betrachtet, es ist möglich Kantendrehungen auch allgemeiner zu formulieren. Falls die Kantendrehung an einer nicht drehbaren Kante durchgeführt wird, entsteht eine Sphäre mit einem 2-Waist und die Sphäre wird wie in Definition 2.13 in zwei Komponenten aufgeteilt. Sei  $X$  eine Sphäre. Zum Durchführen der allgemeinen Kantendrehung an einer Kante  $e \in X_1$  muss  $\deg(V) > 3$  für alle  $V \in X_0(e)$  gelten. Im Falle einer Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_n)$  in  $X$ , die die obige Bedingung erfüllt, schreiben wir  $X^{[e_1, \dots, e_n]}$ .

Führen wir diese allgemeine Kantendrehung am Beispiel des Tetraeders durch, indem wir das Symbol der resultierenden Sphäre angeben. Das Symbol des Tetraeders

$$\begin{aligned} \mu(T) = (4, 6, 4; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4\})) \end{aligned}$$

ist aus vorherigen Beispielen bereits bekannt.

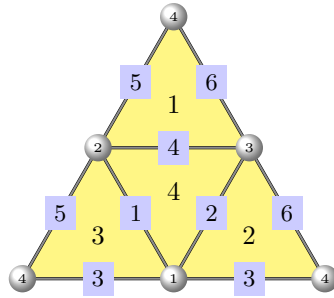


Abbildung 35: Tetraeder

Die Kante 1 des Tetraeders ist nicht drehbar, aber ist zu zwei Ecken inzident deren Grad 3 ist. Durch Drehen der Kante erhält man die Sphäre  $T^{[1]}$ , die durch folgendes Symbol beschrieben wird.

$$\begin{aligned} \mu((T, <)) := (4, 6, 4; (\{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\})) \end{aligned}$$

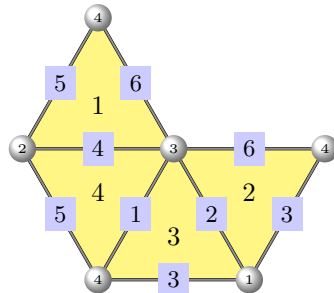


Abbildung 36: Kantendrehung am Tetraeder

*ist – es – allgemein – kuerzer – X – in – Y – mit – oder – ohne – das  
 – Erzeugen – von – 2 – Waists – umzuformen  
 Sprich : ist – das – Erzeugen – eines – 2 – Waists – ein – Umweg?*

## 5.1 Kantendrehung als Gruppenoperation

Ziel dieses Kapitels ist es die oben definierte Kantendrehung als Operation einer Gruppe auf den Sphären aufzufassen. Als erste Beobachtung wird skizziert, wie man die Kantendrehung mithilfe von Transpositionen bewerkstelligen kann. Hierzu benötigt man folgende Definition.

**Definition 5.11.** Sei  $X$  eine geschlossene simpliziale Fläche und  $V \in X_0$  eine Ecke in  $X$ . Dann definiert man  $u(V)$  als  $((F_1, \dots, F_n))$ , wobei  $(F_1, \dots, F_n)$  der zu  $V$  zugehörige Schirm in  $X$  ist und nennt  $u(V)$  den Schirmzeiger von  $V$ . Der Schirmzeiger  $U(X)$  von  $X$  definiert man als

$$U(X) := \{u(V) \mid V \in X_0\}$$

**Beispiel 5.12.** • Den Schirmzeiger eines Tetraeders formt die Menge

$$U(T) = \{((1, 2, 3)), ((1, 2, 4)), ((1, 3, 4)), ((2, 3, 4))\}$$

• Der Janus-Head hat den Schirmzeiger

$$\{((1, 2))\}$$

**Bemerkung 5.13.** Falls der Minimalgrad einer geschlossenen simplizialen Fläche  $X$  3 ist, so lässt sich  $X$  aus dem Schirmzeiger rekonstruieren. Dieser Sachverhalt kann dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* entnommen werden und wird deshalb hier nicht ausgeführt.

**Lemma 5.14.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre,  $U(X)$  der Schirmzeiger von  $X$  und  $e \in X_1$  eine drehbare Kante in  $X$  mit  $X_0(e) = \{F_1, F_2\}$ . Für eine Ecke  $V \in X_0$  definiert man

$$u_V := \begin{cases} u(V), & (F_1, F_2)u(V)(F_1, F_2) = u(V) \\ (F_1, F_2)u(V), & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist der Schirmzeiger von  $X^e$  gegeben durch

$$\{u_V \mid V \in X_0\}.$$

*Beweis.* Es gibt genau 4 Ecken in  $X$  bei denen  $F_1$  oder  $F_2$  im zugehörigen Schirm vorkommen. Genauer gilt: Es existieren  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , sodass

- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_1) = \{F_1\}$
- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_2) = \{F_2\}$
- und  $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_3) = \{F_1, F_2\} \cap X_0(V_4) = \{F_1, F_2\}$  gilt.

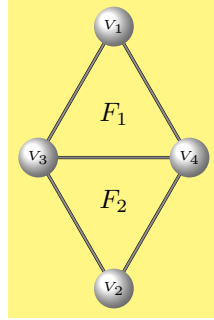


Abbildung 37: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

In der Sphäre  $X^e$  gilt dann bis auf Isomorphie

- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_3) = \{F_1\}$
- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_4) = \{F_2\}$
- und  $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_1) = \{F_1, F_2\} \cap X_0(V_2) = \{F_1, F_2\}$  gilt.

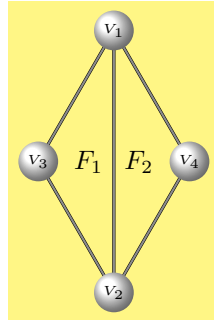


Abbildung 38: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Beim Übertragen der obigen Beobachtung auf den Schirmzeiger von  $X^e$  erkennt man:

- Für alle  $V \in X_0 - \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  gilt  $u_V = u(V) = (F_1, F_2)u(V)(F_1, F_2)$ .

Für alle  $V \in \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  gilt

$$(F_1, F_2)u_X(V)(F_1, F_2) \neq u_X(V)$$

Genauer gilt:

- $u_{X^e}(V_1) = (F_1, F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_2, F_3, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_1)$
- $u_{X^e}(V_2) = (F_2, F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, \tilde{F}, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_2)$
- $u_{X^e}(V_3) = (F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2)(F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_2, F_1, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_3)$
- $u_{X^e}(V_4) = (F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2)(F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_3)$

Somit folgt die Behauptung. □

*Sphaeren – so – auffassen, –dass – man – die – Menge – der – Sphaeren  
–als – Bahn – unter – einer – Gruppenoperation – auffassen – kann*

## 6 Multi-Tetraeder

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehungen

In diesem Kapitel werden die sogenannten *Multi-Tetraeder* thematisiert. Diese bilden eine Klasse von vertex-treuen Sphären. Die hier einführenden Definitionen sind ebenfalls dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* zu entnehmen. Außerdem wird die Kaktusdistanz einer vertex-treuen Sphäre als die minimale Anzahl an Kantendrehungen, um aus der Sphäre einen Multi-Tetraeder zu erschaffen, definiert. Ziel dieses Kapitels ist es einen Algorithmus für die Bestimmung des Kaktusabstandes anzugeben zu können.

### 6.1 Konstruktion und Klassifikation

Hauptresultate

Liste aller Multi-Tetraeder mit bis zu 28 Flächen

**Definition 6.1.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre mit  $|X_0| \geq 6$ .

1. Man definiert die *simpliciale Fläche*, die durch Entfernen aller Tetraeder entsteht durch  $X^{(1)}$ . Für  $i > 1$  definiert man analog

$$X^{(i)} := (X^{(i-1)})^{(1)}.$$

2. Man nennt  $X$  einen *Multi-Tetraeder* vom Grad  $k$ , falls  $X^{(k-1)}$  ein Tetraeder oder ein Doppel-Tetraeder ist. Hierfür bezeichne  $a_0$  die Anzahl der Ecken vom Grad 3 in  $X_0$  oder anders gesagt die Anzahl der Tetraeder, die von  $X$  entfernt wurden und analog bezeichne  $a_i$  die Anzahl der Ecken vom Grad 3 in  $X^{(i)}$ . Falls  $X^{(i)}$  ein Tetraeder ist, so definiert man  $a_i$  als 1. Das damit konstruierte Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  nennt man den *Typ* von  $X$ . und  $T := \sum_{i=0}^k a_i$  nennt man die *Tetraeder-Zahl* von  $X$ .

**Beispiel 6.2.** • Per Definition bilden der Tetraeder und der Doppel-Tetraeder Multi-Tetraeder.

- Bis auf Isomorphie gibt es genau einen Multi-Tetraeder mit 8 Flächen. Dieser ist ein Multi-Tetraeder vom Typ  $(2, 2, 1)$  und wird durch den Flächenträger  $\xi := \text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 4\}) \Delta \text{Pot}_3(\{2, 3, 4, 5\}) \Delta \text{Pot}_3(\{3, 4, 5, 6\})$  beschrieben.

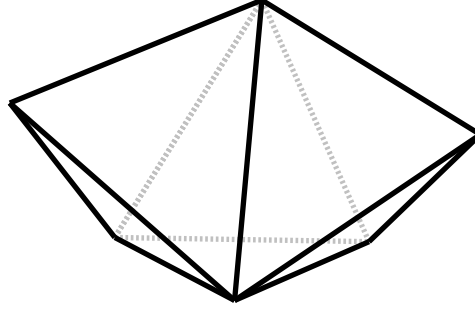


Abbildung 39: Multi-Tetraeder mit 8 Flächen

- Alle *vertex-treuen Sphären* ohne Ecken vom Grad 3 erfüllen  $X^{(1)} = X$  und bilden damit keine Multi-Tetraeder.
- Der *simpliciale Parallelepipiped*  $P$  ist eine Sphäre, beschrieben durch

$$\begin{aligned} \xi = \{ & \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}, \\ & \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{5, 6, 8\} \}. \end{aligned}$$

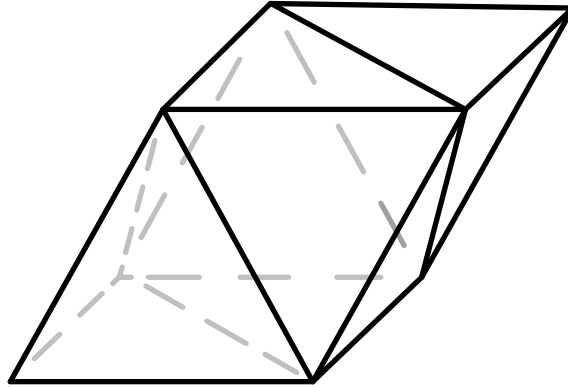


Abbildung 40: Parallelepipied

Also ist  $\deg_P(7) = \deg_P(8) = 3$ . Aber  $P$  bildet dennoch kein Multi-Tetraeder, da  $P^{(1)}$  ein Oktaeder ist und damit  $P^{(2)} = P^{(1)}$  gilt.

Für einen Multi-Tetraeder erhalten wir also eine Kette

$$X^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(t)} = X^{(t+1)},$$

sodass  $X^{(t)}$  zum Tetraeder oder Doppel-Tetraeder isomorph ist. Diese wird später von besonderem Interesse sein, wenn maximale Multi-Tetraeder thematisiert werden. Zunächst fassen wir aber in der folgenden Bemerkung elementare Eigenschaften der Multi-Tetraeder zusammen.

**Bemerkung 6.3.** • Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder vom Typ  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Der nicht isomorph zum Doppel-Tetraeder oder zum Tetraeder ist. Dann ist  $Y = X^{(1)}$  eine Sphäre, denn beim Übergang von  $X$  zu  $X^{(1)}$  werden  $a_0$  Tetraeder durch Flächen ersetzt. Da beim Ersetzen eines Tetraeders durch eine Fläche die Flächenanzahl um 2, die Kantenanzahl um 3 und die Eckenanzahl um 1 verringert wird, erhalten wir

$$|Y_0| = |X_0| - a_0$$

$$|Y_1| = |X_1| - 3a_0$$

$$|Y_2| = |X_2| - 2a_0$$

Somit gilt für die Euler-Charakteristik

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= |Y_0| - |Y_1| + |Y_2| \\ &= |X_0| - a_0 - (|X_1| - 3a_0) + |X_2| - 2a_0 \\ &= \chi(X) \end{aligned}$$



Also erhalten wir induktiv

$$\chi(X) = \chi(X^{(1)}) = \dots = \chi(X^{(k)}) = 2,$$

da  $X^{(k)}$  isomorph zum Tetraeder oder Doppel-Tetraeder ist.

- Multi-Tetraeder enthalten Ecken vom Grad 3 und somit auch 3-Waists. Vielmehr sind Multi-Tetraeder die Sphären mit maximaler Anzahl an 3-Waists unter den Sphären mit derselben Flächenanzahl.
- Da beim Anhängen von Tetraedern keine 2-Waists entstehen, sind Multi-Tetraeder Sphären ohne 2-Waist.
- Multi-Tetraeder sind vertex-treue Sphären.

**Bemerkung 6.4.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder,  $(a_0, \dots, a_k)$  der Typ von  $X$  und  $n = \sum_{i=1}^k a_i$  die Tetraeder-Zahl von  $X$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- $X$  hat genau  $2(n+1)$  Flächen. Insbesondere ist  $\epsilon(X) = n+1$ .
- Der Typ  $(a_0, \dots, a_k)$  von  $X$  ist monoton fallend und es gilt  $a_i \neq 1$  für  $i = 0, \dots, k-1$ .
- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine simpliziale Fläche mit Tetraeder-Zahl  $n$ .

*Beweis.* • klar

- Sei  $0 \leq i \leq k-1$  mit  $1 < a_i < a_{i+1}$ . Das heißt es werden mindestens zwei Ecken vom Grad 3 in  $X^{i+1}$ , die von einem Tetraeder überdeckt werden. Damit muss aber  $X^{i+1}$  zum Tetraeder isomorph sein, was  $a_{i+1} = 1$  impliziert und damit einen Widerspruch erzeugt.
- Der Tetraeder  $T$  bildet den kleinsten Multi-Tetraeder und durch iteratives Anheften eines Tetraeders folgt die Behauptung.

□

**Lemma 6.5.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder und  $F$  eine Fläche in  $X$ . Dann ist  $Y = T^F(X)$  ebenfalls ein Multi-Tetraeder.

*Beweis.* noch zeigen

□

Als erste Erkenntnis über Multi-Tetraeder halten wir folgendes Lemma fest.

**Lemma 6.6.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder und  $\text{Aut}(X)$  die Automorphismengruppe von  $X$ . Dann ist  $\text{Aut}(X)$  auflösbar. Weiterhin seien  $l, l'$  minimal mit der Eigenschaft, dass

$$|\text{Aut}(X)^l| = |\text{Aut}(X^{(1)})^{l'}| = 1$$

ist. Dann  $l \leq l'$ .

*Beweis.* Man führt den Beweis induktiv. Die Automorphismengruppe des Tetraeders ist die Tetraeder-Gruppe der Ordnung 24 und die des Doppel-Tetraeders ist das direkte Produkt einer  $C_2$  und der symmetrischen Gruppe der Ordnung 6, also insgesamt Ordnung 12. Bei beiden Gruppen lässt sich leicht nachrechnen, dass sie auflösbar sind.

Sei  $X$  nun ein Multi-Tetraeder mit mehr als 6 Flächen und  $G = \text{Aut}(X)$  seine Automorphismengruppe. Für die Ecken  $V_1, \dots, V_k$  vom Grad 3 definiert man zudem

$$M_t := \{V_t\} \cup X_1(V_t) \cup X_2(V_t).$$

Da Ecken unter einem Automorphismus auf Ecken mit demselben Grad abgebildet werden, werden die Ecken vom Grad 3 untereinander permutiert. Vielmehr gilt

$$\phi(M_i) = M_{\pi(i)}$$

für alle  $\phi \in G, i \in \{1, \dots, k\}$  und eine geeignete Permutation  $\pi$ . Sei weiterhin  $Y = X^{(1)}$ , die Sphäre, die durch Entfernen aller Tetraeder von  $X$  entsteht und  $F_1, \dots, F_k$  die Flächen, die die Tetraeder an den Stellen  $V_1, \dots, V_k$  ersetzen. Man betrachte nun den Homomorphismus  $\psi : G \mapsto \text{Aut}(Y)$ , der durch

$$\psi(\phi)(x) = \begin{cases} F_j, & \text{falls } x \in M_j \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird. Es ist leicht nachzurechnen, dass  $\psi(G)$  eine Untergruppe von  $\text{Aut}(Y)$  bildet. Da nach Induktionsvoraussetzung  $\text{Aut}(Y)$  auflösbar ist, ist  $\psi(G)$  als Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ebenfalls auflösbar. Sei also nun  $l$  minimal mit der Eigenschaft, dass  $(\text{Aut}(\psi(G)))^l = \{id\}$  ist. Dann gilt für alle  $x \in X - \bigcup_{i=1}^k M_t$  die Gleichheit

$$\phi(x) = \psi(\phi)(x) = x$$

für ein  $\phi \in G^l$ . Da  $\phi$  die Inzidenzen in der simplizialen Fläche  $X$  respektiert, gilt  $\phi(M_i) = M_i$  und genauer sogar  $\phi = id$ . Damit ist  $G^l = \{id\}$  und  $G$  ist auflösbar. □

**Definition 6.7.** Seien  $X$  und  $Y$  Multi-Tetraeder. Man nennt  $Y$  ein Kind von  $X$ , falls  $T_V(Y) \cong X$  für ein  $V \in Y_0$  ist.

Also sind die Kinder eines Multi-Tetraeders  $X$  genau die Multi-Tetraeder, die durch genau eine Tetraedererweiterung aus  $X$  hervorgehen. Damit ist beispielsweise der Doppel-Tetraeder bis auf Isomorphie das einzige Kind des Tetraeders.

Zur Motivation der nächsten Fragestellung betrachten wir folgendes Beispiel in Gap: Sei  $X$  der bis auf Isomorphie eindeutige Multi-Tetraeder mit 8 Flächen, den wir bereits in Beispiel 6.2 kennengelernt haben.

```

gap> L:=[[1,2,3],[1,2,4],[1,3,4],[2,3,5],[2,4,5],[3,4,6],[4,5,6],[3,5,6]];;
gap> s:=SimplicialSurfaceByVerticesInFaces(last);
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> IsCactus(s);
true

```

Durch Tetraedererweiterungen an den Flächen von  $X$  können wir die Kinder von  $X$  bestimmen.

```

gap> List(Faces(s), f->AddTetraF(s,f));
[ simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ,
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ]

```

Die durch die obigen Tetraedererweiterungen konstruierten Multi-Tetraeder müssen jedoch nun auf Isomorphie untersucht werden.

```

gap> IsomorphismRepresentatives(last);
[ simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces),
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ,
  simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ]

```

Also hat  $X$  bis auf Isomorphie genau 3 Kinder.

Es stellt sich also die Frage, wie viele Kinder ein Multi-Tetraeder bis auf Isomorphie haben kann. Denn das Erweitern durch Tetraeder an verschiedenen Flächen des Multi-Tetraeders bringt nicht unbedingt nicht-isomorphe Kinder hervor. Hierfür muss jedoch etwas Vorarbeit geleistet werden.

**Bemerkung 6.8.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $G$  die Automorphismengruppe von  $X$ . Dann wird durch*

$$\Phi_X : G \times X \mapsto X, (\phi, x) \rightarrow \phi(x)$$

*eine Gruppenoperation definiert. Denn klarerweise ist*

- $id(x)=x$  für alle  $x \in X$  und
- $\phi_1(\phi_2(x)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(x)$  für alle  $\phi_1, \phi_2 \in G$  und  $x \in X$ .

Aber auch die Einschränkung

$$\Phi_{X_i} : G \times X_i \mapsto X_i, (\phi, x) \rightarrow \phi(x)$$

für  $i \in \{0, 1, 2\}$  liefert eine Gruppenoperation, da für ein  $x \in X_i$  und ein  $\phi \in G$  stets  $\phi(x) \in X_i$  gilt. Mithilfe dieser Gruppenoperation kann man nun die Anzahl der Kinder eines Multi-Tetraeders bestimmen.

Zunächst betrachten wir aber folgende Beispiele.

- Beispiel 6.9.** • Sei  $T$  ein Tetraeder. Dann ist die Operation der Automorphismengruppe auf  $T$  und damit auch auf den Mengen  $T_i$  transitiv.
- Sei  $X$  der bis auf Isomorphie eindeutige Multi-Tetraeder mit 8 Flächen. Nutzen wir Gap, um die Bahnen von  $X_2$  unter der Automorphismengruppe von  $X$  zu bestimmen.

```
gap>S;
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> IsCactus(S);
true
gap> VerticesOfFaces(S);
[ , [ 1, 3, 4 ], [ 1, 2, 4 ],, [ 2, 3, 5 ], [ 3, 4, 5 ], [ 2, 4, 5 ], [ 1, 2, 6 ],
[ 1, 3, 6 ], [ 2, 3, 6 ] ]
gap> FaceDegreesOfVertices(S);
[ 4, 5, 5, 4, 3, 3 ]
gap> G:=AutomorphismGroupOnFaces(S);
Group([ (2,3)(6,7)(8,9), (5,10)(6,9)(7,8) ])
gap> Orbits(G,Faces(S));
[ [ 2, 3 ], [ 5, 10 ], [ 6, 7, 9, 8 ] ]
```

Mithilfe dieser Gruppenoperation können wir nun die Anzahl der Kinder eines Multi-Tetraeders bestimmen.

**Lemma 6.10.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Dann ist die Anzahl der Kinder von  $X$  die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation  $\Phi_{X_2}$ .

*Beweis.* Wir müssen zunächst zeigen, dass das Erweitern durch Tetraeder an Flächen, die in einer Bahn unter  $\Phi_{X_2}$  liegen isomorphe Kinder von  $X$  hervorbringt. Seien also  $F_1, F_2$  solche Flächen, dann existiert also ein  $\phi \in \text{Aut}(X)$ , der  $F_1$  auf  $F_2$  abbildet. Dieser Isomorphismus lässt sich dann aber durch Ergänzen der fehlenden Bilder des zuletzt angehängten Tetraeders zu einem Isomorphismus

$$\phi' : T^{F_1}(X) \mapsto T^{F_2}(X)$$

erweitern.

Seien also nun  $F_1$  und  $F_2$  zwei Flächen aus verschiedenen Bahnen. Angenommen es existiert ein Isomorphismus  $\phi' : T^{F_1}(X) \mapsto T^{F_2}(X)$ , dann erhält man dadurch durch leichtes Abändern einen Automorphismus, der  $F_1$  auf  $F_2$  abbildet, was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Definition 6.11.** *Seien  $X$  und  $Y$  Multi-Tetraeder. Falls  $X = Y^{(1)}$  ist, dann nennt man  $Y$  einen Enkel von  $X$ .*

Hier stellt sich nun die Frage, wie viele Enkel ein Multi-Tetraeder besitzt. Zur Motivation dieser Fragestellung schauen wir uns den Doppel-Tetraeder an. Diesen erhalten wir durch

```
gap> L:=[[1,2,3],[1,2,4],[1,3,4],[2,3,5],[2,4,5],[3,4,5]];
gap> DT:=SimplicialSurfaceByVerticesInFaces(L);
simplicial surface (5 vertices, 9 edges, and 6 faces)
gap> IsCactus(DT);
true
```

Ein Enkel des Doppel-Tetraeders  $DT$  muss vom Typ  $(a_0, 2)$ , wobei  $2 \leq a_0 \leq 6$  ist, sein. Um einen Multi-Tetraeder  $X$  mit  $X^{(1)} \cong DT$  zu konstruieren, muss bei jeder Ecke vom Grad 3 mindestens eine inzidente Fläche durch einen Tetraeder ersetzt werden. Die Ecken vom Grad 3 in der Sphäre  $DT$  sind die Ecken 1 und 5. Die Enkel von  $DT$  vom Typ  $(2, 2)$  erhalten wir durch

```
gap> L:=[];;
gap> Cartesian(FacesOfVertex(DT,1),FacesOfVertex(DT,5));
[ [ 1, 4 ], [ 1, 5 ], [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 3, 6 ] ]
gap> for g in last do
> s:=DT;
> for f in g do
> s:=AddTetraF(s,f);
> od;
> Add(L,s);
> od;
gap> IsomorphismRepresentatives(L);
[ simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ,
simplicial surface (7 vertices, 15 edges, and 10 faces) ]
```

Die Enkel vom Typ  $(3, 2)$  werden auf ähnliche Art und Weise konstruiert. Hierbei muss bei einer der beiden Ecken vom Grad 3 an zwei Flächen und bei der anderen Ecke eine Fläche durch eine Tetraedererweiterung ersetzt werden.

```

gap> L:=[];;
gap> Combinations(Faces(DT),3);;
gap> List(last,g->List(g,h->VerticesOfFace(DoubleTet,h)));;
gap> Filtered(last,g->Intersection(Union(g),[1,5])<>[]);;
gap> List(last,g->List(g,h->Position(VerticesOfFaces(DoubleTet),h)));
[ [ 1, 2, 3 ], [ 1, 2, 4 ], [ 1, 2, 5 ], [ 1, 2, 6 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 3, 5 ], [ 1, 3, 6 ],
[ 1, 4, 5 ], [ 1, 4, 6 ], [ 1, 5, 6 ], [ 2, 3, 4 ], [ 2, 3, 5 ], [ 2, 3, 6 ], [ 2, 4, 5 ],
[ 2, 4, 6 ], [ 2, 5, 6 ], [ 3, 4, 5 ], [ 3, 4, 6 ], [ 3, 5, 6 ], [ 4, 5, 6 ] ]
gap> for g in last do
> s:=DoubleTet;
> for f in g do
> s:=AddTetraF(s,f);
> od;
> Add(L,s);
> od;
gap> IsomorphismRepresentatives(last);
[ simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces) ,
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces) ,
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces) ]

```

Durch analoge Vorgehensweise erhalten wir

| Typ    | Tetraeder-<br>zahl | Anzahl |
|--------|--------------------|--------|
| (4, 2) | 6                  | 3      |
| (5, 2) | 7                  | 1      |
| (6, 2) | 8                  | 1      |

Wir werden jedoch sehen, dass die Enkel eines Multi-Tetraeders mit sehr viel mehr Systematik bestimmt werden können. Dies wird zu einem späteren Zeitpunkt bei den Multi-Tetraedern vom Typ (2, 2, 1) vorgerechnet. Zuerst fassen wir aber die derzeitigen Erkenntnisse über die Tetraederzahl und Typen von Multi-Tetraeder in der folgenden Tabelle zusammen.

| Tetraeder-<br>zahl | Typ       | Anzahl |
|--------------------|-----------|--------|
| 1                  | (1)       | 1      |
| 2                  | (2)       | 1      |
| 3                  | (2, 1)    | 1      |
| 4                  | (3, 1)    | 1      |
|                    | (2, 2)    | 2      |
| 5                  | (4, 1)    | 1      |
|                    | (3, 2)    | 3      |
|                    | (2, 2, 1) | ?      |

**Bemerkung 6.12.** Sei  $X$  eine Sphäre und  $G$  die Automorphismengruppe von  $X$ . Dann kann eine Gruppenoperation auf  $Pot_k(X_2)$  für  $k \leq |X_2|$  durch

$$G \times Pot_k(X_2) \rightarrow Pot_k(X_2), (\phi, M) \mapsto \{\phi(x) \mid x \in M\}$$

definiert werden. Die Wohldefiniertheit dieser Gruppenoperation folgt dabei direkt, da  $|M| = |\{\phi(x) \mid x \in M\}|$  für ein  $M \in Pot_k(X_2)$  und ein  $\phi \in G$  gilt.

**Definition 6.13.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder vom Typ  $(a_0, \dots, a_k)$ . Wir nennen eine Menge  $M \subseteq X_2$  eine Überdeckung, falls für alle Ecken  $V \in X_0$  vom Grad 3 ein  $F \in M$  mit  $F \in X_2(V)$  existiert. Die Überdeckung  $M$  ist minimal, falls  $|M| = a_k$  gilt. Weiterhin definieren wir für  $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$  die Mengen der  $a_k + l$ -elementigen Überdeckungen als  $U_X^l$ .

**Beispiel 6.14.** • Für einen Tetraeder  $T$  bildet eine nicht-leere Menge  $M \subseteq Pot(T_2)$  eine Überdeckung. Die minimalen Überdeckungen sind genau die ein-elementigen Teilmengen von  $T_2$ .

- Für den Doppel-Tetraeder definiert durch den Flächenträger

$$\xi = Pot_3(\{1, 2, 3, 4\}) \Delta Pot_3(\{2, 3, 4, 5\})$$

liefert beispielsweise  $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\}$  eine minimale Überdeckung. Vielmehr liefern alle Mengen der Form  $\{m, m'\} \subset \xi$  mit  $1 \in m$  und  $5 \in m'$  minimale Überdeckungen des Doppel-Tetraeders.

**Lemma 6.15.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder und  $\phi \in Aut(X)$ . Für eine Überdeckung  $M \in U_X^l$  mit  $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$  ist  $\{\phi(x) \mid x \in M\}$  wieder eine Überdeckung.

*Beweis.* Klarerweise ist  $|M| = |\{\phi(m) \mid m \in M\}|$ , da  $\phi$  ein Automorphismus ist. Da  $F \in M$  zu einer Ecke vom Grad 3 inzident ist, muss dies auch für  $\phi(F)$  gelten. Somit werden also genau  $a_k$  Ecken vom Grad 3 durch die  $a_k + l$ -elementige Menge  $M' = \{\phi(m) \mid m \in M\}$  überdeckt. Also ist  $M' \in U_X^l$ .  $\square$

**Bemerkung 6.16.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder vom Typ  $(a_0, \dots, a_k)$  und  $G$  seine Automorphismengruppe. Durch die obige Erkenntnis kann nun die in Bemerkung 6.12 eingeführte Gruppenoperation leicht abgeändert werden, um so die Anzahl der Enkel eines Multi-Tetraeders bestimmen zu können. Durch obiges Lemma ist für  $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$  die Abbildung

$$\theta_l : G \times U_X^l \rightarrow U_X^l, (\phi, M) \mapsto \phi(M) := \{\phi(F) \mid F \in M\}$$

wohldefiniert und es lässt sich leicht nachprüfen, dass diese eine Gruppenoperation bildet.

**Satz 6.17.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder vom Typ  $(a_0, \dots, a_k)$  und  $\theta_l$  für  $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$  die Gruppenoperation auf  $U_X^l$ . Sei  $u_l$  die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation. Dann gibt es  $u_l$  Enkel vom Typ  $(a_k + l, a_k, \dots, a_1)$ .

*Beweis.* Um aus  $X$  einen Multi-Tetraeder vom Typ  $(r, a_k, \dots, a_1)$  zu konstruieren, müssen bei allen  $a_k$  Ecken vom Grad 3 mindestens eine inzidente Fläche durch einen Tetraeder ersetzt werden. Damit bildet für  $M \in U_X^l$  das Erweitern von  $X$  durch Tetraeder-Erweiterungen an allen Flächen  $F \in M$  einen Enkel von  $X$ . Seien nun  $G$  die Automorphismengruppe von  $X$  und  $M_1, M_2$  zwei Überdeckung, die in derselben Bahn unter  $\theta_l$  liegen. Somit existiert ein  $\phi \in G$  mit  $\phi(M_1) = M_2$ . Sei  $Y_1$  bzw.  $Y_2$  der Multi-Tetraeder, der durch Tetraeder-Erweiterungen an allen Flächen  $F \in M_1$  bzw.  $F \in M_2$  entstanden ist. Man kann den Automorphismus  $\phi$  nun zu einem Isomorphismus zwischen  $Y_1$  und  $Y_2$ , indem die fehlenden Bilder der Tetraeder so ergänzt werden, dass Inzidenzen berücksichtigt werden. Falls  $F_1, F_2$  in zwei verschiedenen verschiedenen Bahnen liegen, aber dennoch ein Isomorphismus  $\phi'$  zwischen  $Y_1$  und  $Y_2$  kann man diesen zu einem Automorphismus  $\phi'$  auf  $X$  mit  $\phi'(M_1) = M_2$  abändern, was ein Widerspruch ist.  $\square$

Nun können wir also die Multi-Tetraeder vom Typ  $(2, 2, 1)$  bestimmen. Sei dazu  $X$  der Multi-Tetraeder mit 8 Flächen. Damit ist die Anzahl der Multi-Tetraeder vom Typ  $(2, 2, 1)$  die Anzahl der Bahnen auf  $U_X^0$ . Durch Auslagern der Rechnung in Gap ergibt sich, dass es genau 4 Bahnen gibt.

**Folgerung 6.18.** Sei  $X$  eine Sphäre vom Typ  $(a_k, \dots, a_1)$  und  $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$ . Sei zudem  $u_l$  die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation  $\theta_l$  auf  $U_X^l$ . Dann ist

$$\sum_{i=l}^{|X_2|-a_k} u_i$$

die Anzahl der Blätter von  $X$ .

Mithilfe von GAP können wir bestimmen, wie viele Multi-Tetraeder es mit einer bestimmten Flächenanzahl gibt. Die untenstehende Tabelle beinhaltet die Anzahlen der Multi-Tetraeder mit bis zu 28 Flächen.



| 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18  | 20   | 22    | 24    | 26     | 28      |
|---|---|---|----|----|----|----|-----|------|-------|-------|--------|---------|
| 1 | 1 | 1 | 3  | 7  | 24 | 93 | 434 | 2110 | 11003 | 58598 | 321726 | 1614848 |

Um die Multi-Tetraeder in den drei-dimensionalen reellen Raum einzubetten, muss jeder Ecke eine reelle Koordinatenspalte zugeordnet werden. Diese Vorgehensweise soll an dieser Stelle formuliert werden:

Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Zur Vereinfachung bezeichnen wir die zu  $V \in X_0$  zugehörige Koordinatenspalte mit  $x_V \in \mathbb{R}^3$ . Wir sind im Folgenden nur an Einbettungen von  $X$  interessiert, in der die Kanten alle dieselbe Länge haben. Das heißt, es existiert ein  $d \in \mathbb{R}^+$ , sodass

$$\|x_V - x_{V'}\| = d$$

für alle benachbarten Ecken  $V, V' \in X_0$  ist. Zudem nennen wir eine Einbettung von  $X$  *vertex-treu*, falls für zwei Ecken  $V \neq V'$  der Zusammenhang  $x_V \neq x_{V'}$  gilt. Für einen Tetraeder  $T$  mit  $T_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  ist eine reelle vertex-treue Einbettung beispielsweise durch

$$x_{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{V_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Durch eine Tetraeder-Erweiterung an einem Multi-Tetraeder  $X$  an der Stelle  $F$  erhalten wir eine neue Ecke  $\bar{V}$ , dessen Koordinatenspalte noch zu bestimmen ist. Seien also  $V_1, V_2, V_3 \in X_0(F)$  mit den zugehörigen Koordinatenspalten  $x_{V_1}, x_{V_2}, x_{V_3} \in \mathbb{R}^3$ . Es existiert eine Ecke  $V \in X_0$ , die zu allen Ecken der Fläche  $F$  inzident ist. Wir erhalten die Koordinatenspalte  $x_{\bar{V}}$  durch Spiegeln der Koordinatenspalte  $x_V$  an der durch  $x_1, x_2, x_3$  aufgespannten Ebene.

Wir sagen, dass  $X$  sich selbst durchbohrt, falls es eine Fläche  $F \in X_2$  und eine Kante  $e \in X_1$  gibt, sodass die Kante das Dreieck  $F$  durchbohrt. Genauer ist damit gemeint, dass die durch  $x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3}$  aufgespannte Ebene einen Schnittpunkt mit der Geraden, die durch die Punkte  $x_v, v_{v'}$  definiert wird, hat, wobei  $X_0(F) = \{v_1, v_2, v_3\}$  und  $X_0(e) = \{v, v'\}$  ist. Zusätzlich muss dieser Schnittpunkt auf der Geraden echt zwischen  $x_{v'}$  und  $x_v$  liegen und sich als eine echte konvex Kombination von  $x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3}$  schreiben lassen. Mithilfe von Gap lässt sich leicht nachrechnen, ob die reelle vertex-treue Einbettung eines Multi-Tetraeders in den  $\mathbb{R}^3$  sich selbst durchbohrt.

*code zum Bestimmen der Durchbohrung hierhin? ja oder nein?*

Die folgende Tabelle präsentiert die Anzahlen der Multi-Tetraeder mit geringer Flächenanzahl, die sich bei reeller vertex-treuer Einbettung nicht selbst durchbohren.

| $ X_2 $ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18  | 20   | 22   |
|---------|---|---|---|----|----|----|----|-----|------|------|
| #       | 1 | 1 | 1 | 3  | 7  | 23 | 89 | 398 | 1859 | 9161 |

Für Multi-Tetraeder mit geringerer Flächenanzahl geben wir nun auch elementare Eigenschaften an.

| $ X_2 $ | Symbol            | Vertex counter                  | Facecounter   | Aut. gruppe      |
|---------|-------------------|---------------------------------|---|------------------|
| 4       | ()                | $v_3^4$                         | $f_{3,3}^4$   | $S_4$            |
| 6       | $1_1$             | $v_3^2 v_4^3$                   | $f_{3,4^2}^6$   | $C_2 \times D_6$ |
| 8       | $1_1 1_2$         | $v_3^2 v_4^3$                   | $f_{3,4,5}^4 f_{3,5^2}^2 f_{4^2,5}^2$   | $D_4$            |
| 10      | $1_1 1_2 1_3$     | $v_3^3 v_5^3 v_6^1$             | $f_{3,5^2}^3 f_{3,5,6}^6 f_{5^3}^1$   | $D_6$            |
|         | $1_1 1_3 2_1$     | $v_3^2 v_4^2 v_5^2 v_6^1$       | $f_{3,4,5}^2 f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^2 f_{4,5^2}^2 f_{4,5,6}^2$   | $C_2$            |
|         | $1_1 1_2 2_2$     | $v_3^2 v_4^3 v_6^2$             | $f_{3,4,6}^4 f_{3,6^2}^2 f_{4^2,6}^4$   | $D_4$            |
| 12      | $1_1 1_3 2_3 2_2$ | $v_3^3 v_4^1 v_5^2 v_6^1 v_7^1$ | $f_{3,4,6}^1 f_{3,4,7}^1 f_{3,5^2}^1 f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^3 f_{3,6,7}^2 f_{4,5,6}^1 f_{4,5,7}^1 f_{5^2,6}^1$             | $\{id\}$         |
|         | $1_1 1_2 1_3 1_4$ | $v_3^4 v_4^6$                   | $f_{3,6^2}^{12}$  | $S_4$            |
|         | $1_1 2_4 1_3 2_2$ | $v_3^3 v_4^1 v_5^1 v_6^3$       | $f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^4 f_{3,6^2}^3 f_{4,6^2}^2 f_{5,6^2}^1$   | $C_2$            |
|         | $1_2 1_1 2_4 3_2$ | $v_3^2 v_4^3 v_5^1 v_6^1 v_7^1$ | $f_{3,4,5}^1 f_{3,4,6}^1 f_{3,4,7}^2 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4^2,6}^1 f_{4^2,7}^2 f_{4,5,6}^1 f_{4,5,7}^1 f_{4,6,7}^1$ | $\{id\}$         |
|         | $1_2 1_1 2_4 3_3$ | $v_3^2 v_4^2 v_5^2 v_6^2$       | $f_{3,4,5}^2 f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^2 f_{4,5,6}^2 f_{4,6^2}^2 f_{5^2,6}^2$   | $C_2$            |
|         | $1_3 1_2 2_4 3_4$ | $v_3^2 v_4^2 v_5^3 v_7^1$       | $f_{3,4,5}^2 f_{4,5,7}^2 f_{5^3}^1 f_{5^2,7}^1$   | $C_2$            |
|         | $1_3 1_2 2_2 3_3$ | $v_3^2 v_4^4 v_7^2$             | $f_{3,4,7}^4 f_{3,7^2}^2 f_{4^2,7}^6$   | $D_4$            |

## 6.2 Kaktus-Distanz

### Einleitung

**Definition 6.19.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre. Die minimale Anzahl an Kantendrehungen, die man braucht, um aus  $X$  einen Multi-Tetraeder zu konstruieren, nennt man den Kaktus-Distanz  $\xi(X)$  von  $X$ .

**Beispiel 6.20.** • Für jeden Multi-Tetraeder  $X$  gilt  $\xi(X) = 0$ .

- Der Oktaeder ist eine vertex-treue Sphäre mit Kaktus-Distanz 1. Dies zeigt sich durch eine simple Rechnung in Gap:

```
gap> IsCactus(O);
false
gap> O;
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> EdgeTurn(O,1);
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> IsCactus(last);
true
```

**Lemma 6.21.** 1. Für jedes gerade  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 2$  existiert ein Multi-Tetraeder  $X$  mit  $|X_2| = n$ .

2. Für alle Sphären ist die Kaktus-Distanz endlich.

*Beweis.* 1. Da der Tetraeder vertex-treu ist, kann man ihn durch den Flächenträger  $\xi = \text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 4\})$  beschreiben. Durch  $\text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 5\})\Delta\xi$  erhält man den Doppel-Tetraeder mit 6 Flächen. Iterativ kann man also für ein  $F \in X_2$  und ein  $P \notin X_0$  durch  $\text{Pot}_3(X_0(F) \cup \{P\})\Delta\xi$  einen Multi-Tetraeder mit 2 Flächen mehr konstruieren.

2. Sei  $X$  eine Sphäre. Wegen 1) existiert ein Multi-Tetraeder  $Y$  mit  $|Y_2| = |X_2|$  und wegen Satz 5.9 existiert eine Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_n)$  mit  $X^E \cong Y$ . Daraus folgt  $\chi(X) \leq n < \infty$ .

□

Es ist klar, dass die simplizialen Flächen mit Kaktus-Distanz 0 genau die Multi-Tetraeder sind.

**Lemma 6.22.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre ohne 3-Waist, die sich durch eine Kantendrehung in einen Multi-Tetraeder umformen lässt. Dann ist  $X$  zum Doppel  $n$ -Gon isomorph.

*Beweis.* Der Beweis ist dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Surfaces* zu entnehmen". □

**Bemerkung 6.23.** Wenn die Voraussetzung fallen gelassen wird, dass  $X$  eine Fläche ohne 3-Waist ist, so ist die Aussage falsch.

- Der simpliziale Parallelepiped  $P$  aus Beispiel 6.2 ist eine vertex-treue Sphäre mit Kaktusdistanz 1, denn das Drehen der Kante  $e \in P_1$  mit

$$P_0(e) \in \{\{1, 4\}, \{1, 5\}\{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \}$$

liefert einen Multi-Tetraeder vom Typ  $(2, 2, 1)$ .

- Nutzen wir GAP zum Erzeugen einer Sphäre mit Kaktus-Distanz 1, die nicht isomorph zum Doppel  $n$ -gon isomorph ist.

*gap* >  $L := [[2, 3, 5], [2, 4, 5], [3, 4, 5], [1, 3, 6], [1, 4, 6], [3, 4, 6], [1, 7, 8], [1, 4, 7], [2, 4, 7], [2, 7, 8], [1, 3, 8], [2, 3, 8]];$

Durch den Flächenträger  $L$  definieren wir die simpliziale Fläche  $S$ .

```

gap> SimplicialSurfaceByVerticesInFaces(L);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> S := last;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> FaceDegreesOfVertices(S);
[ 5, 5, 6, 6, 3, 3, 4, 4 ]
gap> IsCactus(S);
false

```

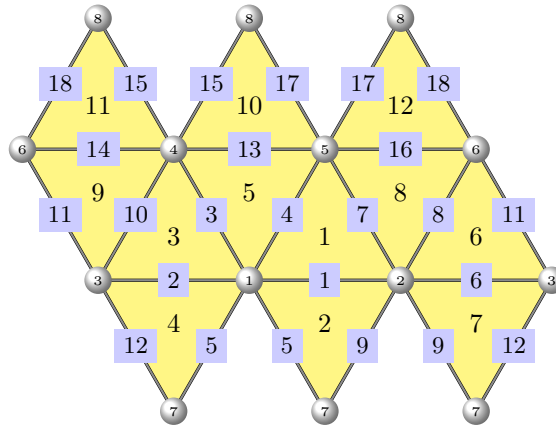


Abbildung 41: Parallelepiped

Durch das Drehen der Kante, die zu den beiden Ecken vom Grad 4 inzident ist, erhalten wir einen Multi-Tetraeder.

```

gap> VerticesOfEdges(S);
[[1, 3], [1, 4], [1, 6], [1, 7], [1, 8], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 7], [2, 8], [3, 4], [3, 5], [3, 6],
[3, 8], [4, 5], [4, 6], [4, 7], [7, 8]]
gap> EdgeTurn(S, 18);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> IsCactus(last);
true

```

Die obigen Sphären sind nicht isomorph und gehen aus dem Oktaeder durch das Durchführen von genau zwei Tetraedererweiterungen an verschiedenen Flächen hervor.

**Satz 6.24.** Sei  $(X, <)$  eine vertex-treue Sphäre und  $V_1, V_2$  zwei nicht benachbarte Ecken, die  $X_1(V_1) \cap X_1(V_2) \neq \emptyset$  und  $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$  erfüllen. Dann ist  $X$  isomorph zum Doppel  $n$ -gon.

*Beweis.* Wir führen den Beweis per vollständiger Induktion. Für  $n = 3$  finden wir den Doppel-3-gon als einzige Sphäre, die die Behauptung erfüllt. Nehmen wir nun an,

dass es eine vertex-treue Sphäre  $X$  und Ecken  $V_1, V_2 \in X_0$  gibt, die die Voraussetzung erfüllen. Somit gibt es eine Ecke  $V$  und Kanten  $e_1 \in X_1(V_1)$  und  $e_2 \in X_1(V_2)$  in  $X$ , die  $X_0(e_1) \cap X_0(e_2) = \{V\}$  erfüllen. Ziel ist es,  $X \cong (n+1)^2$  zu zeigen. Hierfür nutzt man die zuvor eingeführte Butterfly-Deletion. Wegen der fehlenden Adjazenz von  $V_1$  und  $V_2$  und  $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$ , ist jede Fläche  $F \in X_2$  entweder zu  $V_1$  oder zu  $V_2$  inzident. Somit existiert also eine Kante  $e \in X_1$ , sodass  $|X_0(e) \cap X_0(e_1) \cap X_0(e_2)| = \{V\}$  ist und  $V_1, V_2$  in  $X_0(X_2(e))$  enthalten sind, woraus die Wohldefiniertheit der Sphäre  ${}^e\beta(X)$  folgt. In dieser Sphäre gibt es zwei nicht benachbarte Ecken  $V'_1, V'_2$ , die durch die Butterfly Deletion aus  $V_1$  und  $V_2$  hervorgehen und deshalb die Knotengrade  $\deg(V'_1) = \deg(V'_2) = n+1-1 = n$  besitzen. Damit gilt  ${}^e\beta(X) \cong (n)^2$  und dies führt schließlich dazu, dass man

$$X \cong (n+1)^2$$

schließen kann. □

```

gap> Schranke:=function(S)
>   local g,tempV;
>   tempV:=[];
>   vert:=VerticesOfEdges(S);
>   for v in vert do
>     temp:=Filtered(vert,g->Length(Intersection(v,g))=1);
>     temp:=Filtered(temp,g->not Union(g,v) in VerticesOfFaces(S));
>     temp:=List(temp,g->Difference(Union(g,v),Intersection(v,g)));
>     Append(tempV,temp);
>   od;
>   tempV:=Set(tempV);
>   tempV:=List(tempV,v->
>     AbsoluteValue(NumberOfFaces(S)/2-FaceDegreeOfVertex(S,v[1]))+
>     AbsoluteValue(NumberOfFaces(S)/2-FaceDegreeOfVertex(S,v[2]));
>   return Minimum(tempV)+1;
> end;

```

Diese Beobachtung wird nützlich sein, um erste Beobachtungen über die Kaktus-Distanz einer vertex-treuen Sphäre anzustellen. Hierfür definieren wir anlehnend an den obigen Satz die Menge  $D$  als die Menge aller Tupel  $(V_1, V_2) \in X_0 \times X_0$ , die nicht benachbart sind und  $X_0(X_1(V_1)) \cap X_0(X_1(V_2)) \neq \emptyset$  erfüllen.

**Satz 6.25.** *Sei  $(X, <)$  eine vertex-treue Sphäre, die kein Multi-Tetraeder ist. Dann ist*

$$\zeta(X) \leq m + 1,$$

wobei  $m := \min_{(V, V') \in D} \{|\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V')|\}$  ist.

*Beweis.* Sei  $(V_1, V_2) \in D$  ein Ecken-Paar, dass  $|\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V_1)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V_2)| = m$  erfüllt. Man führt nun für  $V \in \{V_1, V_2\}$  und  $l := \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V)$  folgende Fallunterscheidung durch:

- Falls  $l = 0$  ist, ist nichts zu tun.
- Sei  $l > 0$ , dann existieren Flächen  $F_1, F_2 \in X_2(V)$  und eine Kante  $e \in X_1(V)$ , die zu den Flächen  $F_1$  und  $F_2$  inzident ist. Damit ist  $V$  eine Ecke, die in der Sphäre  $X^e$  die Gleichung  $\deg_{X^e}(V) = l - 1$  erfüllt. Das  $l - 1$ -fache Anwenden der obigen Prozedur liefert uns eine durch eine Kantensequenz entstandene Sphäre  $Y$ , in der  $\deg_Y(V) = 0$  erfüllt ist
- Für den Fall, dass  $l < 0$  ist, findet man eine Kante  $e \in X_1$  und Flächen  $F_1, F_2$ , sodass  $F_1 \in X_2(V), V_1, V_2 \notin X_0(F_2)$  und  $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$  ist. Somit liefert die Kantendrehung an der Kante  $e$  eine Sphäre  $X^e$ , in der  $\deg_{X^e}(V) = l + 1$  gilt. Hier liefert uns erneut das  $l + 1$ -fache Anwenden der obigen Prozedur eine durch eine Kantensequenz entstandene Sphäre  $Y$  in der  $\deg_Y(V) = 0$  erfüllt ist.

Anwenden der in der Fallunterscheidung vorgestellten Prozeduren auf  $V_1$  und  $V_2$  bringt eine durch eine Kantensequenz entstandene simpliziale Fläche  $Z$ , in der  $|\frac{|X_2|}{2} - \deg_Z(V)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_Z(V')| = 0$  ist. Mit obigen Satz folgert man also  $Z \cong (n)^2$  und deshalb  $\zeta(Z) = 1$ , woraus  $\zeta(X) \leq m + 1$  gefolgert wird.  $\square$

Für kleine natürliche Zahlen  $n$  liefert der oben skizzierte Algorithmus die exakte Kaktusdistanz, wie folgende Folgerung zusammenfasst.

**Folgerung 6.26.** *Seien  $X$  eine Sphäre, die kein Multi-Tetraeder ist und  $m$  definiert wie im obigem Satz. Dann gilt*

$$\zeta(X) = m + 1$$

für  $|X_2| \in \{4, 6, 8\}$

*Beweis.* Für  $|X_2| \in \{4, 6, 8\}$  gibt es bis auf Isomorphie nur einen Multi-Tetraeder  $Y$  mit  $|Y_2| = |X_2|$ .  $\square$

**Bemerkung 6.27.** *Beim Betrachten des Term  $m$  ergibt sich*

$$\begin{aligned}
 m &= \min_{(V,V') \in D} \left\{ \left| \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V) \right| + \left| \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V') \right| \right\} \\
 &\leq \left| \frac{|X_2|}{2} - |X_2| \right| + \left| \frac{|X_2|}{2} - |X_2| \right| \\
 &= \frac{|X_2|}{2} + \frac{|X_2|}{2} \\
 &= |X_2|.
 \end{aligned}$$

*Bei genauerem Hinschauen erkennt man, dass für diese Abschätzung die Gleichheit  $\deg_X(V) = \deg_X(V') = |X_2|$  verwendet wurde. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn  $X \cong OB^n$ , wobei  $OB^n$  der im folgenden definierte  $n$ -fache Open-Bag ist. Damit ist  $\zeta(X) \leq |X_2|$  für alle Sphären  $X$ .*

**Lemma 6.28.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq i \leq n$ . Dann ist*

$$\xi((n)2l(n)) \leq 2l + 1$$

*Beweis.* Wir zeigen diese Aussage, indem wir die Sphäre  $X = (n)2l(n)$  mit  $2l$  Kantendrehungen in die Sphäre  $(n+l)^2$  umformen. Seien  $V_1$  und  $V_2$  die inneren Ecken der beiden  $n$ -gons, also  $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$ . Dann gilt es zwei Arten von Kanten in  $X$ :

- Es gibt Kanten  $e_1, \dots, e_l \in X_1$ , sodass

$$X_1(X_2(V_1)) - X_1(V_1) - X_1(V_2) = \{e_1, \dots, e_l\}$$

gilt,

- es gibt Kanten  $e'_1, \dots, e'_l \in X_1$ , die

$$X_1(X_2(V_2)) - X_1(V_2) - X_1(V_1) = \{e'_1, \dots, e'_l\}$$

erfüllen.

*bild*

Die Kanten  $e_i, e'_i$  sind also die Randkanten des eingesetzten  $2l$ -Strips. Es gilt also  $\{e_1, \dots, e_l\} \cap \{e'_1, \dots, e'_l\} = \emptyset$ . Durch Anwenden der drehbaren Kantensequenz  $(e_1, \dots, e_l)$  auf  $X$  erhalten wir eine Sphäre  $Y$  mit  $\deg_Y(V_1) = n + l$ . Dadurch erhalten wir durch drehen der Kanten  $e'_1, \dots, e'_l$  die Sphäre  $Z$  mit

$$\deg_Z(V_1) = \deg_Z(V_2) = n + l.$$

Da für alle  $V \in Z_0 - \{V_1, V_2\}$  die Gleichheit

$$\deg_Z(V) = 4$$

gilt und  $V_1, V_2$  in  $Z$  nicht benachbart sind, muss schon  $Z \cong (n+l)^2$  gelten. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

In der Formulierung des Lemmas gilt aber keine Gleichheit. Denn für die Sphäre  $X = (4)\bar{2}(4)$  ergibt sich die Schranke  $\xi(X) \leq 3$ . Die Sphäre kann jedoch mithilfe von 2 Kantendrehungen in einen Multi-Tetraeder umgeformt werden. Für die Sphären der Form können wir jedoch schärfere Schranken der Kaktus-Distanz formulieren. Hierfür benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 6.29.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre mit einer Ecke  $V \in X_0$  vom Grad 3,  $Y$  die Sphäre die durch das Entfernen des Tetraeders entsteht, also  $Y = T_V(X)$ , und  $\zeta := \zeta(Y)$  die Kaktus-Distanz von  $Y$ . Weiterhin seien  $e_1, \dots, e_\zeta$  drehbare Kanten in  $Y$ , sodass  $Y^{(e_1, \dots, e_\zeta)}$  ein Multi-Tetraeder ist. Dann gilt*

$$\zeta(X) \leq |\{e_i \mid e_i \notin M_X\}| + 2 * |\{e_j \mid e_j \in M_X\}|,$$

wobei  $M_X = \{e \in X_2 \mid \exists V \in X_0 : \deg_X(V) = 3 \wedge e \in X_1(X_2(V)) - X_1(V)\}$

Die wesentliche Idee für den Beweis wurde bereits im Beweis von Satz 5.7 präsentiert. Diese muss nur auf diese Situation angepasst werden.

*Beweis.* Die Aussage ist gezeigt, wenn wir die drehbare Kantensequenz  $E := (e_1, \dots, e_\zeta)$  in  $Y$  in eine drehbare Kantensequenz in  $X$  umstrukturieren können, die aus  $X$  einen Multi-Tetraeder hervorbringt. Dabei halten wir fest, wieviele Kantendrehungen angewendet wurden, um das Übersetzen der Kantensequenz zu ermöglichen. Hierfür sei  $X^0 := X$  und  $E_0 := ()$ . Weiterhin seien  $X^i$  und  $E_i := (e'_1, \dots, e'_l)$  für  $0 \leq i < \zeta$  und ein geeignetes  $l$  schon konstruiert. Dann führen wir folgende Fallunterscheidung an:

- Falls  $e_{i+1} \notin M_X$  ist, so wähle  $X^{i+1} := (X^i)^{e_{i+1}}$  und  $E_{i+1} := (e'_1, \dots, e'_l, e_{i+1})$ .  
Damit ist

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_{i+1})}) \cong X^{E_{i+1}}$$

und in  $X^{E_{i+1}}$  existiert kein 2-Waist, denn sonst wäre dieser schon in  $Y^{(e_1, \dots, e_{i+1})}$  enthalten. Damit ist  $E_{i+1}$  eine drehbare Kantensequenz.

- Falls  $e_{i+1} \in M_X$  ist, muss man Kantendrehungen wie im Folgendem beschreiben anwenden:  
Seien weiterhin  $F_1, F_2, F_3$ , die zu  $V$  inzidenten Flächen und ohne Einschränkung  $e_{i+1} < F_1$  und  $e$  die Kante, für die  $|(X^i)^{e_{i+1}}_2(e) \cup \{F_1, F_2, F_3\}| = 1$  gilt.



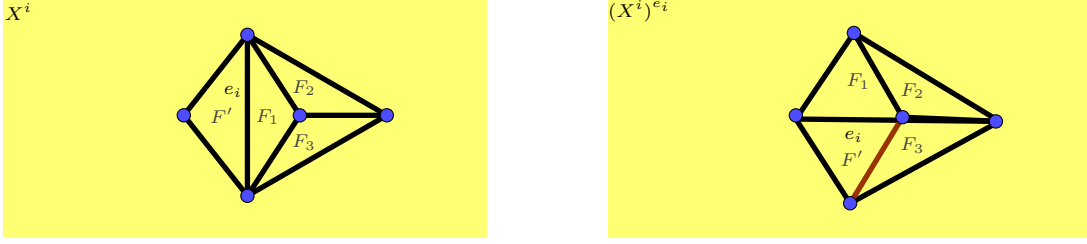


Abbildung 42: Kantendrehung

Dann definiert man  $X^{i+1} := X^{i(e_{i+1}, e)}$  und  $E^{i+1} := (e'_1, \dots, e'_l, e_{i+1}, e)$ . Dies liefert erneut

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_{i+1})}) \cong X^{E_{i+1}}$$

Durch das Drehen der Kanten  $e_{i+1}$  und  $e$  können keine 2-Waists entstehen, wodurch  $E_{i+1}$  drehbar ist. Nach endlich vielen Schritten erhält man also eine drehbare Kantensequenz  $E'$  in  $X$  sodass

$$X^{E'} \cong T^F(Y^E)$$

ist. Also erhalten wir durch Anwenden der drehbaren Kantensequenz  $E'$  auf  $X$  einen Multi-Tetraeder. Die Abschätzung in der Formulierung des Lemmas erhalten wir durch die obige Fallunterscheidung.  $\square$

**Bemerkung 6.30.** *Dieses Lemma bildet die Grundidee für den folgenden Algorithmus, der die Kaktus-Distanz einer Sphäre annähert. Und zwar wählen wir eine Ecke mit minimalen Grad. An dieser Ecke führen wir solange Kantendrehungen durch, bis eine Ecke vom Grad 3 erzeugt wird. Dann entfernen wir diesen Tetraeder und führen diese Prozedur erneut aus. Durch Iterieren dieses Vorgehens tritt nach endlich vielen Schritten der Fall ein, dass die konstruierte Sphäre isomorph zu einem Multi-Tetraeder ist. Durch obiges Lemma werden die in den Zwischenschritten des beschriebenen Verfahrens konstruierten Kantensequenzen zu einer Kantensequenz in der ursprünglichen Sphäre übersetzt. Somit liefert diese Kantensequenz einen Multi-Tetraeder und wir erhalten die gewünschte Abschätzung der Kantensequenz*

**Bemerkung 6.31.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder und  $V$  eine Ecke vom Grad 3 in  $X$ . Seien  $e_1, e_2 \in X_1(X_2(V)) - X_1(V)$  zwei Kanten des Tetraeders an der Stelle  $V$ . Dann ist  $Y = \beta_{e_1, e_2}(X)$  ein Multi-Tetraeder. Durch das Einsetzen des Schmetterlings entstehen zwei neue Ecken  $V', V''$ , wobei  $V' \in X_0(X_2(V))$  ist. Da  $V'$  zu den beiden Flächen vom Schmetterling und zu zwei Flächen des Tetraeders an der Stelle  $V$  inzident ist gilt  $\deg_Y(V') = 4$ . Durch Entfernen des Tetraeder an der Stelle  $V$  erhalten wir  $\deg(V') = 3$  in  $T_F(Y)$ , also ist  $T_F(Y)$  und somit auch  $Y$  ein Multi-Tetraeder*

**Definition 6.32.** Sei  $n \geq 1$ . Wir definieren die simpliziale Fläche  $n$ -Bag durch folgende Konstruktion:

- Für  $n = 1$  ist der  $OB^1 = OB$ , wobei  $OB$  der Open-Bag ist.
- Für  $n = 2$  ist  $OB^2$ , die durch die Kantendrehung  $e \in T_1$  entstandene Sphäre  $T^e$ .
- Für  $n \geq 3$  nutzen wir den Doppel  $n$ -gon, um die gewünschte Sphäre zu konstruieren. Seien  $V_1, V_2$  die nicht benachbarten Ecken vom Grad  $n$  und  $e_1, \dots, e_n$  die Kanten, die weder zu  $V_1$  oder  $V_2$  inzident sind. Dann ist Sphäre  $OB^n$  gegeben durch

$$((n)^2)^{[e_1, \dots, e_n]}$$

**Bemerkung 6.33.** Die Sphäre  $OB^n$  besitzt genau 2 Ecken mit Flaechengrad  $2n$  und die restlichen  $n$  Ecken haben alle den Grad 2. Damit ist  $OB^n$  nicht vertex-treu, da sie  $n$  2-Waists enthält.

Wenn wir den Begriff der Kaktus-Distanz an dieser Stelle auf nicht vertex-treue Sphären ausweiten, erhalten wir hier ein erstes Beispiel für eine Klasse von Sphären, deren Kaktus-Distanz wir bestimmen können.

**Lemma 6.34.** Sei  $X$  eine Sphäre, die für ein  $n > 1$  zu  $OB^n$  isomorph ist, dann ist  $\chi(X) = n - 1$ .

*Beweis.* Um die Aussage zu zeigen, orientieren wir uns an der Konstruktion der Sphäre und nutzen die Distanz von  $OB^n$  zum Doppel- $n$ -gon. Seien  $V_1, V_2 \in X_0$  mit  $\deg(V_1) = \deg(V_2) = 2n$ . Hierzu existieren  $n$  Kanten  $e_1, \dots, e_n$ , sodass

$$X_0(e_1) = X_0(e_2) = \dots = X_0(e_n) = \{V_1, V_2\}$$

gilt. In der Sphäre  $X^{e_1}$  gilt nun  $\deg(V_1) = \deg(V_2) = 2n - 1$ . Also erhalten wir durch die Kantensequenz  $E = (e_1, \dots, e_{n-1})$  die Sphäre  $Y$ , die

$$Y^{e_n} \cong (n)^2$$

erfüllt. Die Kante  $e_n$  ist in  $Y^{e_n}$  eine Kante, die zwei Kanten vom Grad 4 verbindet. Also muss schon  $(Y^{e_n})^{e_n} \cong Y$  ein Multi-Tetraeder sein und es folgt  $\chi(X) \leq n - 1$ . Da eine Sphäre mit einem Ecken von Grad 2 kein Multi-Tetraeder sein kann, muss der Grad von den  $n + 2$  Knoten vom Grad 2 durch Kantendrehungen angehoben werden. Man braucht mindestens  $n - 1$  Kantendrehungen, um aus  $X$  eine Sphäre zu erhalten, die keine Ecken von Grad 2 besitzt. Somit folgt  $\zeta(X) = n - 1$ .  $\square$

**Folgerung 6.35.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es eine Sphäre mit  $X$  mit  $\zeta(X) = n$ .

*Beweis.* Der  $n+1$ -fache Open-Bag liefert die Behauptung, da  $\zeta(OB^{n+1}) = n+1-1 = n$  ist.  $\square$

*ein – Algorithmus – zumbestimmen – der – Kaktusdistanz*

**Definition 6.36.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $D \subseteq \text{Pot}_4(X_0)$ . Man nennt eine Tetraederzerlegung von  $X$ , falls  $D$  folgende Eigenschaften erfüllt:

- Für jedes  $F \in X_2$  gibt es genau ein  $d \in D$ , sodass  $X_0(F) \subseteq d$  ist.
- Für jedes  $N \in \text{Pot}_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$  gibt es entweder kein oder genau zwei  $d_1, d_2 \in D$  mit  $N \subseteq d_1, d_2$ .

Man nennt  $D$  eine minimale Tetraederzerlegung, falls  $|D| \leq |D'|$  für jede weitere Tetraederzerlegung  $D'$  ist.

Nutzen wir GAP, um Beispiele für Tetraederzerlegungen zu konstruieren. Betrachten wir als vertex-treue Sphäre den Oktaeder.

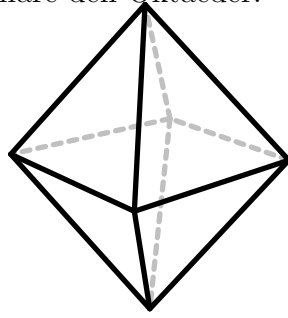


Abbildung 43: Oktaeder

```
gap> O;
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> VerticesOfFaces(O);
[ [ 1, 2, 3 ], [ 2, 5, 6 ], [ 1, 2, 5 ], [ 2, 3, 6 ], [ 1, 4, 5 ], [ 3, 4, 6 ], [ 1, 3, 4 ], [ 4, 5, 6 ] ]
```

Man kann nun auf folgende Weise Tetraederzerlegungen erzeugen. Seien  $V_1, V_2$  zwei nicht benachbarte Ecken des Oktaeders. Die 4-elementigen Teilmengen der Tetraederzerlegung sind genau die Butterflies, die  $V_1$  und  $V_2$  enthalten. Dadurch erhalten wir die folgenden Mengen als Kandidaten für Tetraederzerlegungen.

```
gap> D1:=[[1,2,3,6],[1,2,5,6],[1,4,5,6],[1,3,4,6]];
[ [ 1, 2, 3, 6 ], [ 1, 2, 5, 6 ], [ 1, 4, 5, 6 ], [ 1, 3, 4, 6 ] ]
gap> D2:=[[2,3,1,4],[2,4,5,6],[2,1,5,4],[2,3,4,6]];
[ [ 2, 3, 1, 4 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 2, 1, 5, 4 ], [ 2, 3, 4, 6 ] ]
```

Mit GAP lässt sich leicht verifizieren, dass  $D_1$  und  $D_2$  Tetraederzerlegungen sind.

```
gap> IsTetrahedralDecomposition(O,D1);
true
gap> IsTetrahedralDecomposition(O,D2);
true
```

Vielmehr sind beide minimal. Angenommen es gibt eine Tetraederzerlegung  $D'$  des Oktaeders mit  $|D'| \leq 3$ . Dann muss es ein  $d \in D'$  geben, welches die Eckenmenge von drei paarweise verschiedenen Flächen als Teilmengen enthält. Dies bedeutet aber, dass es im Oktaeder eine Ecke vom Grad 3 geben muss, was ein Widerspruch ist.

**Lemma 6.37.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Dann besitzt  $X$  eine Tetraederzerlegung.*

*Beweis.* Man beweist die Aussage induktiv. Falls  $X$  ein Tetraeder mit  $X_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  ist, dann bildet die Menge  $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$  eine Tetraederzerlegung, die insbesondere minimal ist. Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder mit  $|X_2| = n > 4$ . Sei zudem  $V \in X_0$  eine Ecke vom Grad 3 und  $F_1, F_2, F_3$  die drei Flächen, die  $X_2(V) = \{F_1, F_2, F_3\}$  erfüllen. Dann bildet  $Y = T_V(X)$  einen Multi-Tetraeder mit  $|Y_2| = n - 2$ . Deshalb existiert eine Tetraederzerlegung  $D$  von  $Y$ . Sei  $F$  die Fläche, die in  $Y$  den Tetraeder ersetzt. Man muss nun nachweisen, dass  $D' = D \cup \{X_0(X_2(V))\}$  eine Tetraederzerlegung von  $X$  ist.

- Für alle  $F \in X_2 = Y_2 \Delta \{F, F_1, F_2, F_3\}$  gibt es genau ein  $d \in D'$  mit

$$X_0(F) \subseteq d.$$

- Sei nun  $N \in Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ . Falls die Ecke  $V$  vom Grad 3 in  $N$  enthalten ist, dann gibt es kein  $d \in D$  mit  $N \subseteq d$  und damit auch kein  $d' \in D'$  mit dieser Eigenschaft. Falls  $V \notin N$  ist, dann ist  $N \in Pot_3(Y)$  und die Behauptung folgt direkt, da  $D$  eine Tetraederzerlegung von  $Y$  ist.

□

fehler

**Lemma 6.38.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder und  $e$  eine drehbare Kante in  $X$ . Dann besitzt  $X^e$  eine Tetraederzerlegung.*

*Beweis.* Wegen Lemma 6.37 besitzt  $X$  eine Tetraederzerlegung  $D$ . Seien  $F_1, F_2 \in X_2$  Flächen mit  $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$  und  $Y := X^e$ . Seien zudem  $V_1, \dots, V_4$  paarweise verschiedene Ecken in  $X$ , die  $X_0(F_1) = \{V_1, V_3, V_4\}$  und  $X_0(F_2) = \{V_2, V_3, V_4\}$  erfüllen.

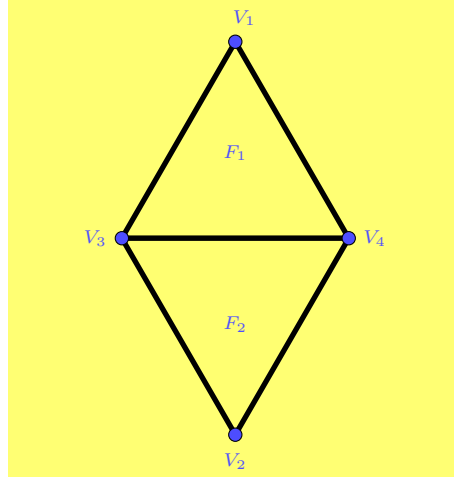


Abbildung 44: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Dann gelten in  $Y$  bis auf Isomorphie die Relationen  $Y_0(F_1) = \{V_1, V_2, V_3\}$  und  $Y_0(F_2) = \{V_1, V_2, V_4\}$ .

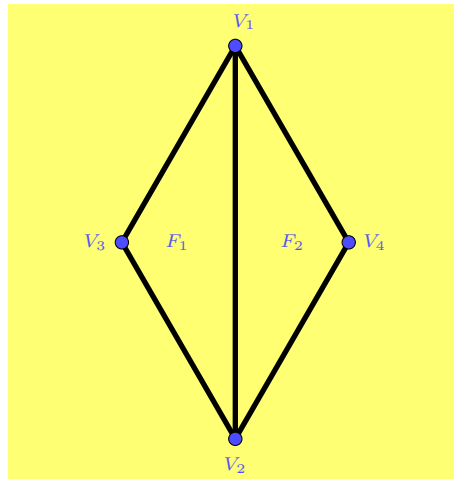


Abbildung 45: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Für die Mengen  $X_0(F_1)$  und  $X_0(F_2)$  können nun genau zwei Fälle auftreten.

1. Entweder es existiert genau ein  $d \in D$ , dass die obigen beiden Mengen als Teilmengen enthält
  2. oder es existieren genau zwei  $d_1, d_2$ , sodass  $X_0(F_1)$  in  $d_1$  enthalten und  $X_0(F_2)$  in  $d_2$  enthalten ist.
1. Falls dieser Fall eintritt, dann bildet  $D' := D - \{d\}$  eine Tetraederzerlegung von  $Y$ . Zunächst ist nachzuprüfen, dass für jedes  $F \in Y_2 = X_2$  genau ein  $d' \in D'$  mit  $Y_0(F) \subseteq d'$  existiert. Da diese Aussage für alle  $F \in Y_2 - \{F_1, F_2\}$  bereits erfüllt ist, reicht es  $F_1, F_2$  zu betrachten. Da  $Y_0(F_1) = \{V_1, V_2, V_3\} \subseteq d$  und

$Y_0(F_1) \in \text{Pot}_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$  ist, gibt es genau ein weiteres  $d' \in D$ , das  $Y_0(F_1)$  als Teilmenge enthält. Daraus folgt direkt, dass es genau ein  $d' \in D'$ , das  $\{V_1, V_2, V_3\}$  enthält. Analog geht man auch für  $Y_0(F_2) = \{V_1, V_3, V_4\}$  vor. Nun muss ebenfalls nachgewiesen werden, dass es für jedes  $N$  in der Menge

$$\begin{aligned} & \text{Pot}_3(Y_0) - \{Y_0(F) \mid F \in Y_2\} \\ &= (\text{Pot}_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}) \cup \{X_0(F_1), X_0(F_2)\} - \{Y_0(F_1), Y_0(F_2)\} \end{aligned}$$

entweder kein  $d' \in D'$  mit  $N \subseteq d'$  oder genau zwei  $d'_1, d'_2 \in D'$  mit  $N \subseteq d'_1, d'_2$  gibt. Es reicht den Fall  $X_0(F_1)$  zu diskutieren. Da  $X_0(F_1) \subseteq d$  ist und  $d$  als einziges Element in  $D$  die Menge  $X_0(F_1)$  als Teilmenge enthält, folgert man, dass es kein  $d' \in D' = D - \{d\}$  mit dieser Eigenschaft geben kann. Analog geht man für  $X_0(F_2)$  vor.

2. In diesem Fall bildet  $D' = D \cup \{X_0(X_2(e))\}$  eine Tetraederzerlegung von  $Y$ . Klarerweise gibt es für alle  $F \in Y_2$  genau ein  $d' \in D^e$  mit  $X^{e_0}(F) \subseteq d'$ . Nun muss wieder nachgewiesen werden, dass es für jedes  $n \in \text{Pot}_3(X^{e_0}) - \{X^{e_0}(F) \mid F \in X^{e_2}\} = (\text{Pot}_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}) \cup \{X_0(F_1), X_0(F_2)\} - \{X^{e_0}(F_1), X^{e_0}(F_2)\}$  entweder kein oder genau zwei  $d' \in D^e$  gibt, die  $n$  enthalten. Es reicht  $X_0(F_1)$  zu betrachten. Da  $X_0(F_1)$  in genau einem  $d \in D$  enthalten ist, gibt es genau zwei  $d' \in D^e$ , sodass  $X_0(F_1)$  eine Teilmenge von den  $d'$  ist. Analog geht man für  $X_0(F_2)$  vor.

□

**Folgerung 6.39.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre. Dann besitzt  $X$  eine Tetraederzerlegung.*

*Beweis.* Es existiert ein Multi-Tetraeder  $Y$  mit  $|X_2| = |Y_2|$ . Nach obigem Lemma hat  $Y$  eine Tetraederzerlegung  $D$ . Da die Kantendrehung transitiv ist, existiert eine Kantensequenz  $E$ , sodass  $Y^E$  isomorph zu  $X$  ist. Durch iteratives Anwenden von Lemma 6.38, erhält man eine Tetraederzerlegung  $D'$  von  $X$ . □

Wir nutzen diese Erkenntnis, um Tetraederzerlegungen von komplizierteren Sphären zu konstruieren.

```
gap > S;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap > VerticesOfFaces(S);
[[1, 4, 6], [1, 4, 8], [1, 6, 7], [1, 7, 8], [2, 3, 5], [2, 3, 6], [2, 4, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7],
[3, 6, 7], [4, 5, 8], [5, 7, 8]]
gap > FaceDegreesOfVertices(S);
[4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 4]
```

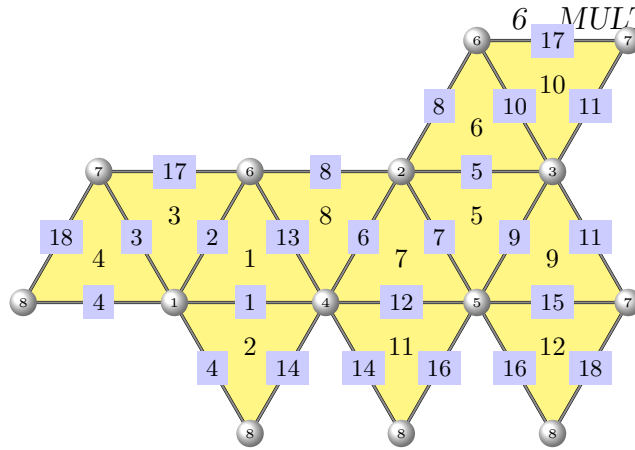


Abbildung 46: vertex-treue Sphäre mit 12 Flächen

Durch den oben eingeführten Algorithmus zum Annähern der Kaktusdistanz, lässt sich in diesem Fall sogar die exakte Kaktusdistanz bestimmen. Anhand der Grade der Ecken erkennen wir, dass  $S$  nicht isomorph zum Doppel-6-gon ist. Also ist die Kaktusdistanz mindestens zwei.

```
gap> AlgorithmCactus(S);
2
gap> EdgeTurn(S,4);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> EdgeTurn(last,5);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> C:=last;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> IsCactus(C);
true
```

Da es sich bei der Sphäre  $C$  um einen Multitetraeder handelt, liefert Lemma 6.37 eine Tetraederzerlegung von  $C$ .

```
gap> VerticesOffFaces(s);
[[1, 4, 6], [1, 4, 7], [1, 6, 7], [4, 7, 8], [2, 5, 6], [3, 5, 6], [2, 4, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7],
[3, 6, 7], [4, 5, 8], [5, 7, 8]]
gap >d:=[ [1, 4, 6, 7], [3, 5, 6, 7], [2, 4, 5, 6], [8, 4, 5, 7], [4, 5, 6, 7]];
gap > IsTetrahedralDecomposition(C,d);
true
```

Ausgehend von der Tetraederzerlegung des Multitetraders  $C$  können wir gezielt durch Anwenden der Kantendrehungen an den Kanten 4 und 5 und der im Beweis von Lemma 6.38 präsentierten Fallunterscheidung gezielt eine Tetraederzerlegung der Sphäre  $S$  konstruieren.

```

gap> FacesOfEdge(C,4);
gap> Union(VerticesOfFace(C,last[1]),VerticesOfFace(C,last[2]));
[ 1, 4, 7, 8 ]
gap> dd:= [ [ 1, 4, 6, 7 ], [ 3, 5, 6, 7 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 8, 4, 5, 7 ],
[ 4, 5, 6, 7 ], [ 1, 4, 7, 8 ] ];
gap> IsTetrahedralDecomposition(s1,dd);
true
gap> FacesOfEdge(s1,4);
gap> Union(VerticesOfFace(s1,last[1]),VerticesOfFace(s1,last[2]));
[ 2, 3, 5, 6 ]
gap> ddd:= [[1,4,6,7],[3,5,6,7],[2,4,5,6],[8,4,5,7],[4,5,6,7],[4,7,1,8],[2,3,5,6]];
gap> IsTetrahedralDecomposition(S,ddd);
true

```

**Lemma 6.40.** *Seien  $X$  und  $Y$  Sphären und  $\phi : X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus von  $X$  nach  $Y$ . Für eine Tetraederzerlegung  $D$  von  $X$  ist*

$$\phi(D) := \{\phi(d) \mid d \in D\}$$

*eine Tetraeder Zerlegung von  $Y$ .*

*Beweis.* Sei  $F$  eine Fläche in  $X$ , dann existiert genau eine Fläche  $F'$  mit  $\phi(F') = F$ . Da es zu  $F'$  genau ein  $d \in D$  mit  $X_0(F') \subseteq d$  gibt, folgt  $X_0(F) \subseteq \phi(d)$ . Angenommen es existiert ein weiteres  $d' \in \phi(D)$  mit  $X_0(F) \subseteq d'$ . Dann folgt direkt  $X_0(F) \in \phi^{-1}(d')$ . Da  $d$  eindeutig mit der Eigenschaft  $X_0(F') \subseteq d$ , muss also  $\phi^{-1}(d') = d$  sein. Dies bedeutet aber  $d' = \phi(d)$ . Sei nun  $n \in \text{Pot}_3(X_2) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ . Angenommen es existiert ein  $d \in \phi(D)$  mit  $n \subseteq d$ . Somit erhalten wir  $\phi^{-1}(n) \in d_1 := \phi^{-1}(d) \in D$ . Da  $D$  eine Tetraederzerlegung ist existiert ein weiteres  $d_2$  mit  $\phi^n \subseteq d_2$ , woraus wir  $n \in \text{subseq}\phi(d_1)\phi(d_2)$ . Die Aussage, dass es genau zwei Elemente in  $\phi(D)$  mit dieser Eigenschaft gibt erhalten wir mit analoger Begründung wie oben.  $\square$

Mithilfe der Tetraederzerlegung erhalten wir eine neue Anschauung der vertex-treuen Sphären. Durch eine Tetraederzerlegung erhalten wir nämlich eine Repräsentation unserer Sphären durch eine Menge 4-elementiger Mengen. Den Übergang von dieser zu der Sphäre liefert uns die symmetrische Differenz. Hierfür definieren wir die symmetrische  $\Delta D$  einer Tetraederzerlegung  $D$  :

- Falls  $|D| = 1$ , also  $D = \{d\}$  ist, dann ist  $\Delta D := \text{Pot}_3(d)$ .
- Falls  $|D| > 1$ , also  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  für ein  $n > 1$  ist, erhalten wir  $\Delta D$  durch

$$\text{Pot}_3(d_1)\Delta \dots \Delta \text{Pot}_3(d_n).$$



Dies liefert uns die Gestalt

$$\Delta D = \bigcup_{i=1}^n Pot_3(d_i) \setminus \left( \bigcup_{i,j=1, i \neq j}^n Pot_3(d_i) \cap Pot_3(d_j) \right)$$

Beispiele hierfür haben wir bereits gesehen.

- $Pot_3(\{1, 2, 3, 4\})$  bildet die Tetraederzerlegung eines Tetraeders und gleichzeitig auch den Flächenträger des Tetraeders.
- Eine Tetraederzerlegung des Oktaeders aus obigen Beispiels lautet

$$D = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}\}.$$

Aus dieser erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta D &= Pot_3(\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}) \\ &= \{\{1, 2, 3\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\} \end{aligned}$$

und dies bildet erneut den Flächenträger des Oktaeders.

Diese Beispiele motivieren folgendes Lemma.

**Lemma 6.41.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $D$  eine Tetraederzerlegung von  $X$ . Dann ist  $\Delta D$  ein Flächentraeder von  $X$ .*

*Beweis.* Sei  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  für ein  $n > 1$ . Weiterhin sei  $F$  eine beliebige Fläche in  $X$ . Dann existiert genau ein  $i$  mit  $X_0(F) \subseteq d_i$ . Damit ist  $X_0(F) \in \Delta D$ . Sei nun  $N \in Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ . da  $D$  eine Tetraederzerlegung ist, gibt es entweder kein  $d \in D$  mit  $N \subseteq d$  oder genau zwei  $d_1, d_2$  mit  $N \subseteq d_1, d_2$ . Falls ersteres der Fall ist, dann ist  $N \notin \Delta$ . Im zweiten Fall erhalten wir  $N \in \bigcup Pot_3(d_i)$ , aber auch  $N \in \bigcup Pot_3(d_i) \cap Pot_3(d_j)$ , wodurch  $N \notin \Delta D$  ist. Also ist  $\Delta D = \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ .  $\square$

### 6.3 wilde Färbungen auf Multi-Tetraedern

**Satz 6.42.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetreader. Dann besitzt  $X$  eine wilde Färbung.*

*Beweis.* Wir weisen diese Aussage per Induktion nach. Für einen Tetraeder mit dem Flächenträger

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

erhalten wir eine wilde Färbung durch die Abbildung

$$\omega(e) = \begin{cases} a, & \text{falls } e = \{1, 2\}, \{3, 4\} \\ b, & \text{falls } e = \{1, 3\}, \{2, 4\} \\ c, & \text{falls } e = \{1, 4\}, \{2, 3\} \end{cases}.$$

Da der Tetraeder eine vertex-treue Sphäre ist, wurden an dieser Stelle die Kanten mit den inzidenten Ecken identifiziert.

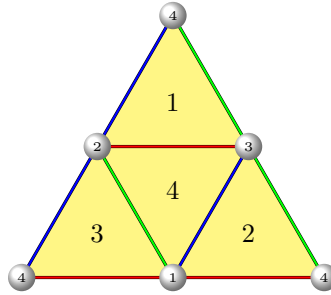


Abbildung 47: wild gefärbter Tetraeder

Sei nun  $X$  ein Multi-Tetraeder mit  $n = |X_2| > 4$  und  $V \in X_0$  eine Ecke vom Grad 3. Dann erhalten wir durch Entfernen des Tetraeders an der Stelle  $V$  den Multi-Tetraeder  $Y = T_V(X)$  mit  $|Y_2| = n - 2$ . Deshalb erhalten wir für  $Y$  eine wilde Färbung  $\omega : Y_1 \rightarrow \{a, b, c\}$ . Diese kann auf genau eine Art und Weise zu einer wilden Färbung auf  $X$  erweitert werden. Denn seien  $F_1, F_2, F_3$  die Flächen des angehängten Tetraeders. Dann gilt  $X_1(X_2(V)) = \{e_1, e_2, e_3\} \cup \{e_a, e_b, e_c\}$ , wobei  $e_1, e_2, e_3$  geeignete Kanten in  $X_1 - Y_1$  und  $e_a, e_b, e_c$  geeignete Kanten in  $Y$  sind. Da die letzteren Kanten zu derselben Fläche  $F \in Y_2$  inzident sind, müssen diese Kanten paarweise verschieden gefärbt sein, also muss ohne Einschränkung  $\omega(e_a) = a, \omega(e_b) = b$  und  $\omega(e_c) = c$  gelten.

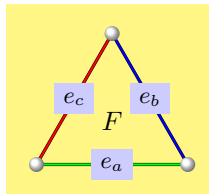


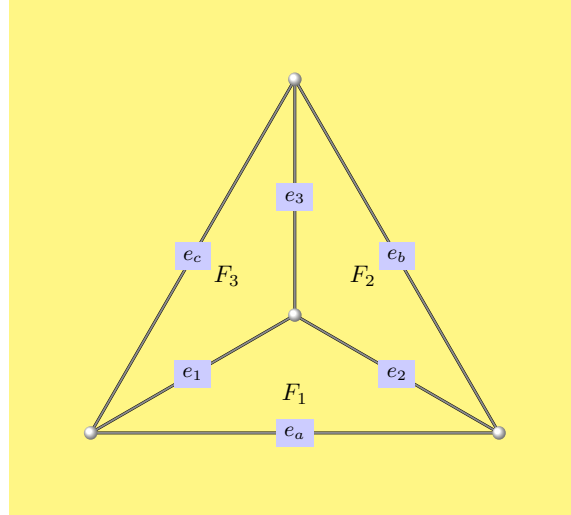
Abbildung 48: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $Y$

Die Flächen des Tetraeders an der Stelle  $V$  sind zu genau einer Kante aus der Menge  $\{e_a, e_b, e_c\}$  und genau zwei Kanten aus der Menge  $\{e_1, e_2, e_3\}$  inzident. Deshalb erhalten wir ohne Einschränkung

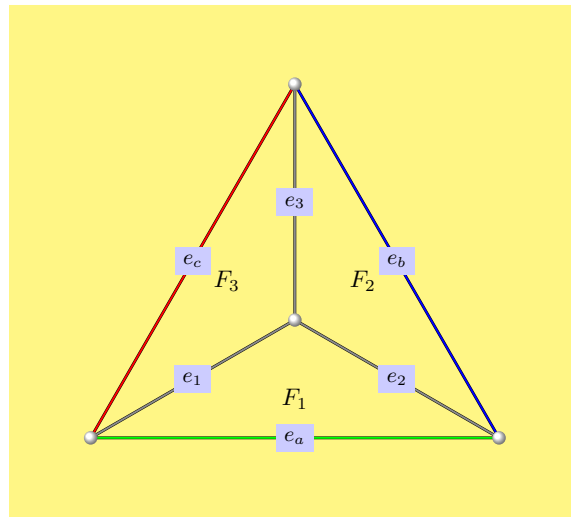
$$X_1(F_1) = \{e_1, e_2, e_a\},$$

$$X_1(F_2) = \{e_2, e_3, e_b\}$$

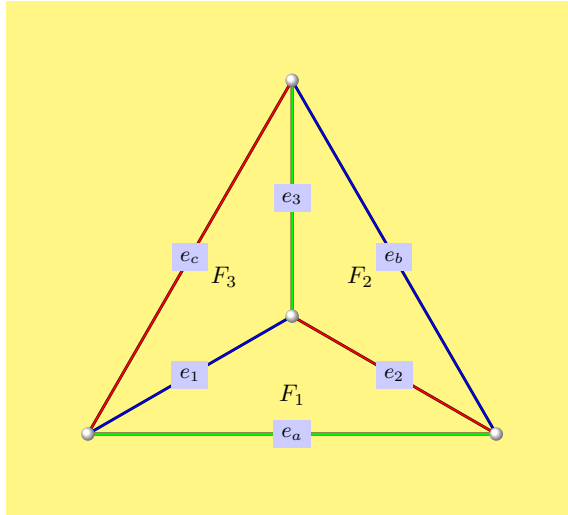
$$X_1(F_3) = \{e_1, e_3, e_a\}.$$

Abbildung 49: Ausschnitt der Sphäre  $X$ 

Die wilde Färbung  $\omega$  auf  $Y$  muss nun durch Ergänzen der fehlenden Bilder zu einer wilden Färbung  $\omega_X$  auf  $X$  erweitert werden. Für  $e \in Y_1 \subseteq X_1$  gilt also  $\omega_X(e) = \omega(e)$ .

Abbildung 50: Ausschnitt der teilweise wild-gefärbten Sphäre  $X$ 

Da  $e_1 \in X_1(F_1) \cap X_1(F_3)$  ist und die Gleichheiten  $\omega_X(e_c) = \omega(e_c) = c$  und  $\omega_X(e_a) = \omega(e_a) = a$  gelten, muss  $\omega_X(e_1) = b$  sein, da sonst keine wilde Färbung zustande kommt. Analog erhalten wir  $\omega_X(e_2) = c$  und  $\omega_X(e_3) = a$  und schlussendlich eine Färbung der Sphäre  $X$ .

Abbildung 51: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $X$ 

□

Durch analoge Beweisführung kann ebenfalls gezeigt werden, dass für Multi-Tetraeder eine gleichschenklige Färbung existiert.

**Satz 6.43.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Dann besitzt  $X$  bis auf Permutation der Farben  $a, b, c$  genau eine wilde Färbung.*

*Beweis.* Angenommen obige Aussage gilt nicht. Dann gibt es einen bezüglich der Flächenanzahl minimalen Multi-Tetraeder  $X$ , sodass  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zwei wilde Färbungen mit

$$\{\omega_1^{-1}(\{a\}), \omega_1^{-1}(\{b\}), \omega_1^{-1}(\{c\})\} \neq \{\omega_2^{-1}(\{a\}), \omega_2^{-1}(\{b\}), \omega_2^{-1}(\{c\})\} \quad (6.1)$$

sind. Wir können  $|X_2| > 4$  annehmen, da die wilde Färbung des Tetraeders eindeutig ist. Zudem sei  $V$  eine Ecke vom Grad 3 in  $X$ . Da jeweils zwei der drei Kanten in  $X_1(V)$  inzident zu derselben Fläche sind, müssen die Kanten in  $X_1(V)$  unter den Färbungen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  paarweise verschiedene Farben erhalten. Deshalb können wir ohne Einschränkung

$$\omega_1(e) = \omega_2(e)$$

für alle  $e \in X_1(V)$  annehmen. Beachte, dass hierdurch die Bedingung (6.1) nicht verletzt wird. Durch Entfernen des Tetraeders an der Stelle  $V$  erhalten wir den Multi-Tetraeder  $Y = T_V(X)$  und durch Einschränken der Färbungen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  auf  $Y_1 - X_1(V)$  erhalten wir wilde Färbungen auf  $Y$ . Da  $X$  minimal mit der Eigenschaft der nicht eindeutigen Färbung war, muss

$$\omega_1(e) = \omega_2(e)$$

für alle  $e \in Y_1$  gelten, woraus direkt  $\omega_1 = \omega_2$  folgt. Somit erhalten wir den gewünschten Widerspruch.  $\square$

Jedoch sind gleichschenklige Färbungen von Multi-Tetraedern nicht eindeutig. Dieser Sachverhalt lässt sich am Beispiel des Doppel-Tetraeders erkennen.

```
gap> DT;
simplicial surface (5 vertices, 9 edges, and 6 faces)
```

Die gleichschenklige gefärbten Doppel-Tetraeder erhalten wir durch Aufrufen des Befehls `AllIsoscelesColouredSurfaces`.

```
gap> AllIsoscelesColouredSurfaces(DT);
[ isosceles coloured surface (5 vertices, 9 edges and 6 faces),
  isosceles coloured surface (5 vertices, 9 edges and 6 faces) ]
```

Dabei zeigt die nächste Abbildung die erste Färbung des Doppel-Tetraeders

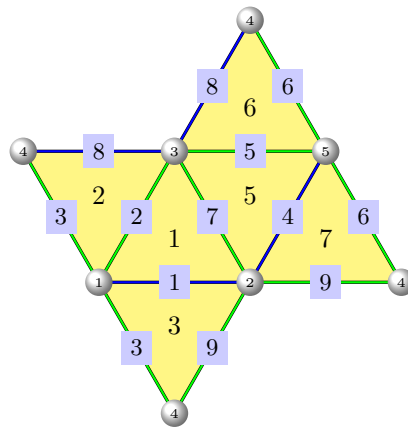


Abbildung 52: gleichschenklige gefärbter Doppel-Tetraeder

und folgendes Bild die zweite berechnete Färbung des Doppel-Tetraeders.

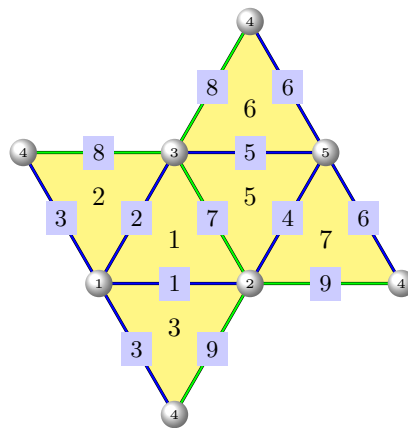


Abbildung 53: gleichschenklige gefärbter Doppel-Tetraeder

**Lemma 6.44.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Falls  $X$  eine zahme Färbung besitzt, muss diese eine rrr-Struktur sein.*

*Beweis.* Sei  $\omega$  eine zahme Färbung auf  $X$  und  $V$  eine Ecke vom Grad 3 in  $X$ . Weiterhin seien  $F_1, F_2, F_3 \in X_2(V)$  und  $e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c \in X_1$  paarweise verschieden, sodass

$$X_1(F_1) = \{e_1, e_2, e_a\},$$

$$X_1(F_2) = \{e_2, e_3, e_b\},$$

$$X_1(F_3) = \{e_1, e_3, e_c\},$$

gilt.

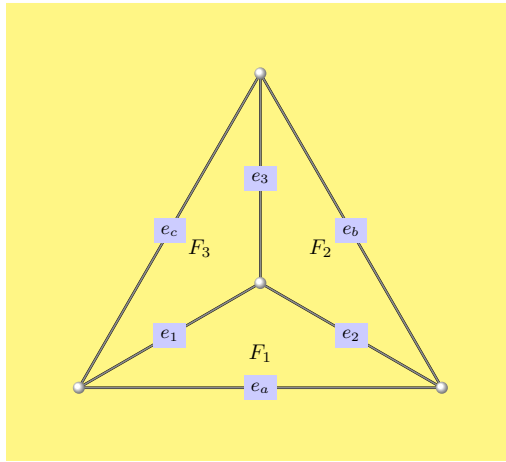


Abbildung 54: Ausschnitt der Sphäre  $X$

Da jeweils zwei der drei Kanten  $e_1, e_2, e_3$  inzident zu derselben Fläche sind, muss ohne Einschränkung  $\omega(e_1) \neq \omega(e_2) \neq \omega(e_3)$  gelten. Durch setzen der Farben  $\omega(e_1) = b, \omega(e_2) = c, \omega(e_3) = a$  folgt direkt  $\omega(e_a) = a, \omega(e_b) = b, \omega(e_c) = c$ . Durch Betrachten der Typen der Kanten  $e_1, e_2, e_3$  folgt die Behauptung.

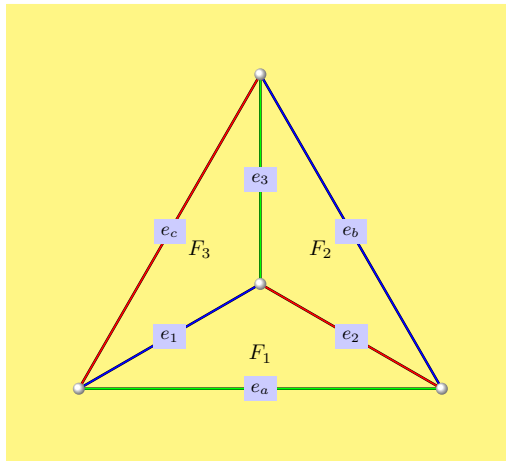


Abbildung 55: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $X$

□

Im Folgenden wollen wir untersuchen, welche Multi-Tetraeder eine zahme Färbung besitzen. Mit dem Tetraeder haben wir bereits ein Beispiel gesehen. Mit der Definition des *Sterns*, erhalten wir ein weiteres Beispiel.

**Definition 6.45.** Der Stern  $S$  ist der Multi-Tetraeder, der durch das Symbol  $1_1 1_2 1_3 1_4$  konstruiert wird.



Abbildung 56: Stern

**Definition 6.46.** Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Durch das iterative Entfernen aller Tetraeder entsteht im Sinne von Definition ?? eine Kette

$$X = X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(t)} \cong X^{(t+1)}$$

Wir nennen einen Multi-Tetraeder maximal, falls  $X^{(t)} \cong T$  ist und für alle  $0 \leq i < t$  die Gleichheit

$$|\{V \in X_0^{(i)} \mid \deg(V) = 3\}| = |X_2^{(i+1)}|$$

gilt.

Damit sind der Tetraeder und der oben definierte Stern maximal. Denn für den Stern ergibt sich die Kette

$$S \rightarrow S^{(1)} = T.$$

und es gilt

$$|\{V \in S_0 \mid \deg(V) = 3\}| = 4 = |T_2|.$$

Der Multi-Tetraeder  $X$ , den wir durch das Symbol  $1_1 1_2 1_3$  erhalten, ist jedoch nicht maximal. Es gilt zwar

$$X \rightarrow X^{(1)} = T,$$

aber zweite Teil der Definition wird von der Sphäre  $X$  nicht erfüllt, denn

$$|\{V \in X_0 \mid \deg(V) = 3\}| = 2 \neq 4 = |T_2|.$$

**Lemma 6.47.** Sei  $X$  ein maximaler Multi-Tetraeder. Dann existiert eine zahme Färbung auf  $X$ .

*Beweis.* Wir weisen die Aussage induktiv nach. Bei dem Tetraeder und dem Stern kann nachgerechnet werden, dass eine zahme Färbung existiert und dass diese eine *rrr*-Struktur bildet. Sei nun  $X$  ein maximaler Multi-Tetraeder, der nicht isomorph zum Stern oder Tetraeder ist. Dann ist  $Y = X^{(1)}$  ebenfalls maximal und nach

Induktionsvoraussetzung erhalten wir eine zahme Färbung  $\omega$  auf  $Y$ , die eine  $rrr$ -Struktur bildet. Seien nun  $F_1$  und  $F_2$  zwei beliebige benachbarte Flächen in  $Y$ , die  $Y_1(F_1) = \{e_a, e_b, e_c\}$  und  $Y_1 = \{e_a, e'_b, e'_c\}$  und  $Y_0(e_b) \cap Y_0(e'_c) \neq \emptyset$  für geeignete Kanten erfüllen. Da  $Y$  eine zahme Färbung besitzt und diese eine  $rrr$ -Struktur bildet, gilt ohne Einschränkung

$$\omega(e_a) = a$$

$$\omega(e_b) = b = \omega(e'_b)$$

$$\omega(e_c) = c = \omega(e'_c)$$

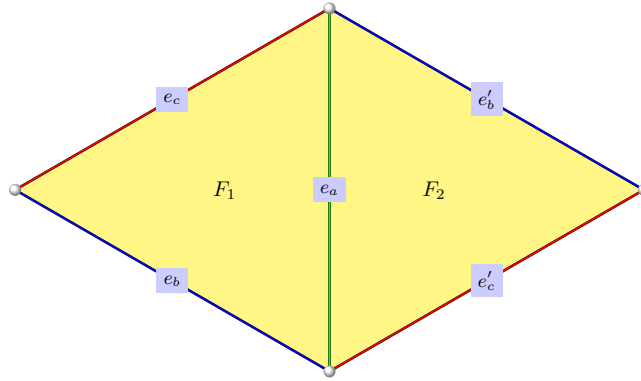


Abbildung 57: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $Y$

In  $X$  werden die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  durch Tetraeder ersetzt. Und die wilde Färbung auf  $Y$  muss nun durch Ergänzen der fehlenden Farben der neuen Kanten zu einer wilden Färbung auf  $X$  ergänzt werden. Seien nun also  $f_1, f_2, f_3$  die Flächen des Tetraeders, der  $F_1$  ersetzt und  $f'_1, f'_2, f'_3$  die Flächen des Tetraeders der  $F_2$  ersetzt, sodass für geeignete Kanten folgende Relationen erfüllt sind:

$$X_1(f_1) = \{e_a, e_1, e_2\}$$

$$X_1(f_2) = \{e_b, e_2, e_3\}$$

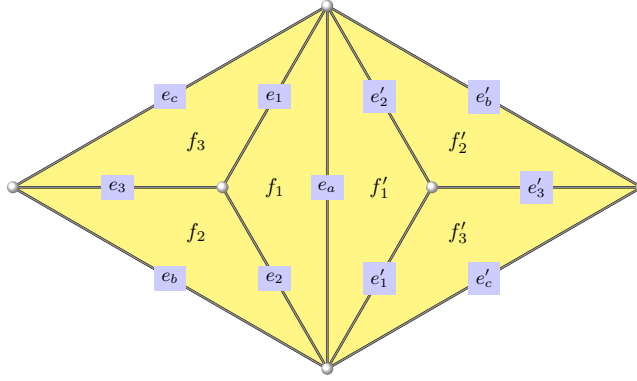
$$X_1(f_3) = \{e_c, e_1, e_3\}$$

$$X_1(f'_1) = \{e_a, e'_1, e'_2\}$$

$$X_1(f'_2) = \{e'_b, e'_2, e'_3\}$$

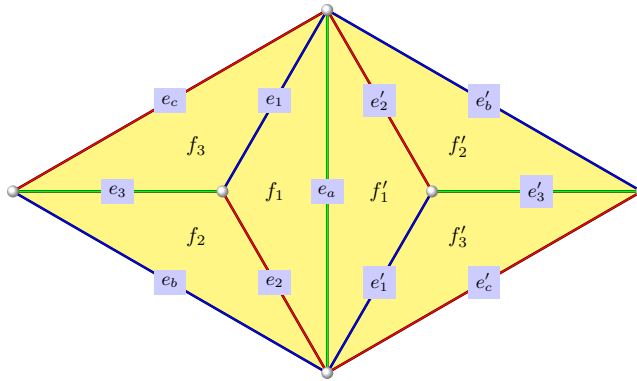
$$X_1(f'_3) = \{e'_c, e'_1, e'_3\}$$



Abbildung 58: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $X$ 

Dann erhalten wir durch analoges Vorgehen wie im Beweis von Satz 6.42, eine wilde Färbung  $\omega_X$  auf  $X$  als eine eindeutige Erweiterung der Färbung auf  $Y$ , welche insbesondere die  $rrr$ -Struktur auf dem Multi-Tetraeder  $X$  fortführt. Für  $e \in X_1$  ergibt sich diese durch

$$\omega_X(e) = \begin{cases} a, & \text{falls } e = e_3, e'_3 \\ b, & \text{falls } e = e_1, e'_1 \\ c, & \text{falls } e = e_2, e'_2 \\ \omega(e), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Abbildung 59: Ausschnitt der wild-gefärbten Sphäre  $X$ 

□

Wenn man den Beweis genauer betrachtet, kann man folgende Folgerung formulieren.

**Folgerung 6.48.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder mit einer zahmen Färbung. Sei  $Y$  der Mlti-Tetraeder, der dadurch entsteht, dass an allen Flächen von  $Y$  Tetraedererweiterungen durchgeführt werden. Dann existiert eine zahme Färbung auf  $Y$ .*

Die Rückrichtung von ?? gilt jedoch nicht, dies halten wir mit folgendem Beispiel fest:

Die Sphäre, die wir betrachten ist der Multi-Tetraeder mit 20 Flächen, der durch das Symbol  $1_2 1_1 2_4 2_3 2_1 3_4 3_3 3_2$  beschrieben wird.

```
gap> s;
simplicial surface (12 vertices, 30 edges, and 20 faces)
gap> GetSymbol(s);
[[ 1, 2 ], [ 1, 1 ], [ 2, 4 ], [ 2, 3 ], [ 2, 1 ], [ 3, 4 ], [ 3, 3 ], [ 3, 2 ]]
gap> Length(AllTameColouredSurfaces(s));
1
```

Dieser besitzt also eine zahme Färbung. Jedoch ist  $s$  nicht maximal wie durch folgende Rechnung gezeigt werden kann.

```
gap> RemoveAllTetra(s);
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> Length(Filtered(Vertices(s), g->FaceDegreeOfVertex(s,g)=3));
6
```

**Satz 6.49.** *Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder. Dann besitzt  $X$  genau dann eine zahme Färbung, wenn  $X$  maximal ist,*

## 6.4 Flächengraph von Multi-Tetraedern

In Kapitel 3 haben wir uns den Flächengraphen simplizialer Flächen gewidmet. In diesem Abschnitt betrachten wir im Genauen die Flächengraphen von Multi-Tetraedern. Es lässt sich nämlich ein Zusammenhang zwischen dem Flächengraphen eines Multi-Tetraeders und der Sphäre, die durch eine Tetraedererweiterung konstruiert wird, erkennen.

Den Flächengraphen des Tetraeders haben wir bereits kennengelernt. Dieser wird bis auf Isomorphie durch  $G_T = (V, E)$  mit  $V = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$  und  $E = Pot_2(V)$  dargestellt.

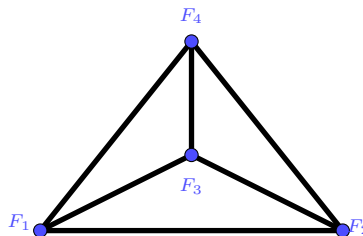


Abbildung 60: Flächengraph des Tetraeders

Durch eine Tetraedererweiterung am Tetraeder wird der Doppel-Tetraeder mit zugehörigem Flächengraph  $G_{DT}$  konstruiert. Diesen enthalten wir bis auf Isomorphie

durch die Knoten  $V = \{F_1, \dots, F_6\}$  und die Kanten

$$E = \{\{F_1, F_2\}, \{F_1, F_3\}, \{F_1, F_4\}, \{F_2, F_4\}, \\ \{F_2, F_5\}, \{F_3, F_5\}, \{F_3, F_6\}, \{F_4, F_6\}, \{F_5, F_6\}\}.$$

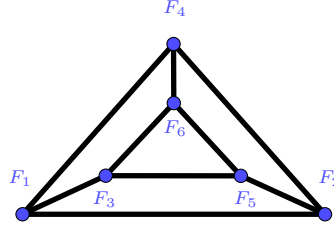


Abbildung 61: Face-Graph des Doppel-Tetraeders

Durch genaueres Hinschauen lässt sich erkennen, dass der zu der Fläche  $F_3$  zugehörige Knoten im ursprünglichen Graphen des Tetraeders durch die Erweiterung unter Berücksichtigung der Inzidenzen in drei neue Knoten aufgeteilt wird. Im Allgemeinen ist dieses Phänomen weiterhin erkennbar, weshalb wir dieses an dieser Stelle beschreiben wollen.

Sei  $X$  ein Multi-Tetraeder mit zugehörigem Flächengraph  $G_X$  und  $F \in X_2$  eine Fläche mit  $X_2(X_1(F)) = \{F, F_1, F_2, F_3\}$  für geeignete Flächen. Da für die Skizzierung des erwähnten Zusammenhangs nur die Knoten der Flächen  $F, F_1, F_2, F_3$  relevant sind, wird in den folgenden Abbildungen auch nur dieser Ausschnitt des Flächengraphen dargestellt. Der Flächengraph kann mehr Knoten und Inzidenzen enthalten, diese sind aber für unsere Zwecke nicht von Bedeutung.

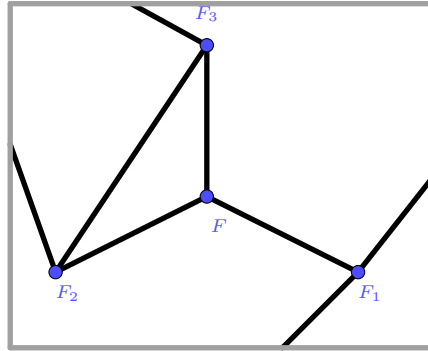


Abbildung 62: Ausschnitt eines Flächengraphen eines Multi-Tetraeders

Auf Ebene der simplizialen Flächen wird bei einer Tetraedererweiterung die Fläche  $F$  entfernt und durch den 3-gon mit den Flächen  $\{F_a, F_b, F_c\}$  so ersetzt, dass  $F_1$  und  $F_a$ ,  $F_2$  und  $F_b$  bzw.  $F_3$  und  $F_c$  benachbarte Flächen in der konstruierten Sphäre sind. Dieses Vorgehen muss nun nur noch auf der Ebene der Flächengraphen nachgeahmt werden.

Bei einer Tetraedererweiterung wird in einem ersten Schritt der Knoten  $F$  durch

die Knoten  $F_a, F_b, F_c$  ersetzt, wobei  $F_a, F_b, F_c$  die Flächen des angehängten Tetraeders sind. Dann werden die Kanten  $\{F, F_1\}, \{F, F_2\}$  und  $\{F, F_3\}$  in dem Graphen gelöscht.

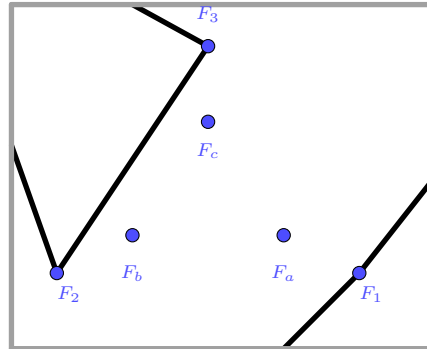


Abbildung 63: Ausschnitt eines Flächengraphen eines Multi-Tetraeders

Daraufhin werden die Inzidenzen

$$\{F_a, F_b\}, \{F_a, F_c\}, \{F_b, F_c\}, \{F_1, F_a\}, \{F_2, F_b\}, \{F_3, F_c\}$$

in dem letzterem Graphen hergestellt, um so schließlich den Flächengraph des Multi-Tetraeders, der durch die Tetraedererweiterung entstanden ist, zu erzeugen.

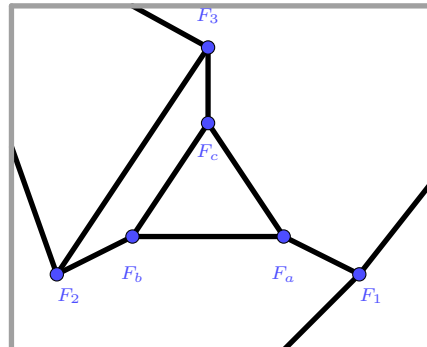


Abbildung 64: Ausschnitt eines Flächengraphen eines Multi-Tetraeders

**Beispiel 6.50.** *Im folgenden Beispiel steht die Verdeutlichung der obigen Prozedur im Vordergrund. Deshalb soll auf eine genaue Definition der zugehörigen Flächengraphen durch Knoten und Kanten verzichtet werden. Wir geben uns an dieser Stelle mit den Abbildungen der jeweiligen Graphen zufrieden.*

*Den Flächengraph des Tetraeders haben wir bereits in dem einführenden Beispiel gesehen.*

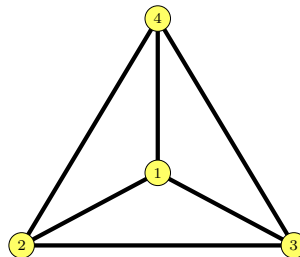


Abbildung 65: Ausschnitt eines Flächengraphen eines Multi-Tetraeders

Durch eine Tetraederweiterung an der Fläche 1 erhalten wir die neuen Flächen 5,6,7 und den zugehörigen Graphen unter Beachtung der neuen Inzidenzen.

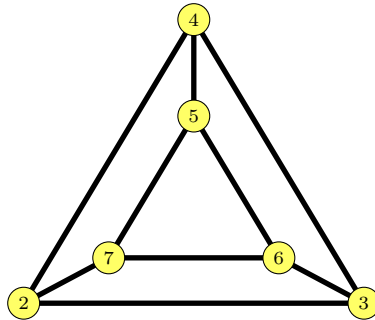


Abbildung 66: Flächengraph des Doppel-Tetraeders

Durch eine Tetraedererweiterung am Doppel-Tetraeder an der Fläche 2 erhalten wir bis auf Isomorphie den Multi-Tetraeder mit 8 Flächen, der folgenden Flächengraphen besitzt.

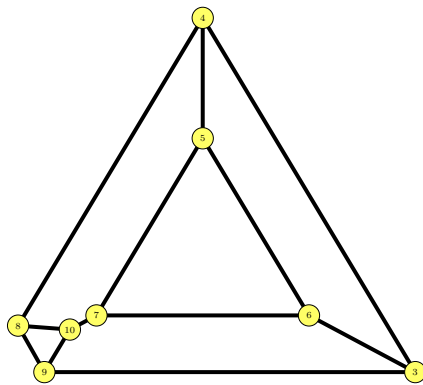


Abbildung 67: Flächengraph eines Multi-Tetraeders

Anhängen eines Tetraeders an der Fläche 3 liefert uns einen Multi-Tetraeder mit 10 Flächen und folgendem Flächengraph.

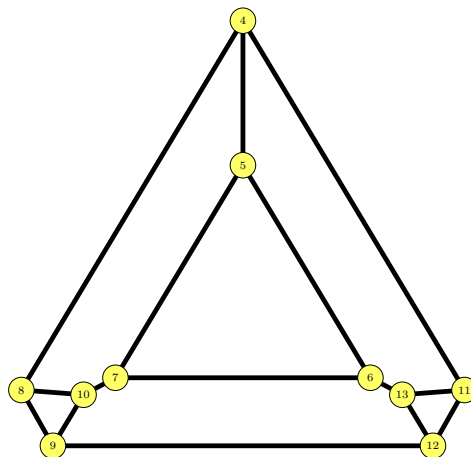


Abbildung 68: Flächengraph eines Multi-Tetraeders

Schließlich kommt durch eine Erweiterung an der Fläche 7 folgender Flächengraph zustande.

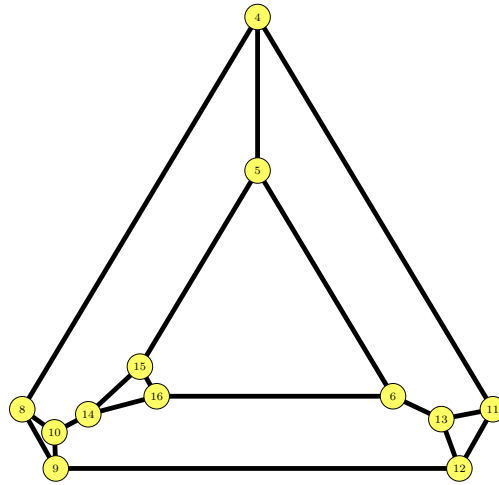


Abbildung 69: Flächengraph eines Multi-Tetraeders

## 7 Sphären ohne 2-Waist

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehung

### 7.1 vertex-treue Sphären mit genau einem 3-Waists

*small – introduction*

**Definition 7.1.** Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären, die durch die Flächenträger  $\xi_X$  bzw.  $\xi_Y$  dargestellt werden. Um  $X$  und  $Y$  durch einen 3-Waist an Flächen  $F \in X_2$  und  $F' \in Y_2$  zu verbinden, muss die Annahme getroffen werden, dass  $X_0(F) = Y_0(F')$  und  $X_0 \setminus X_0(F) \cap Y_0 \setminus Y_0(F') = \emptyset$ . Dann bildet die Sphäre  $X \# Y$  repräsentiert durch  $\xi_W = \xi_X \Delta \xi_Y$  eine wohldefinierte simpliziale Fläche.

**Bemerkung 7.2.** Obige Definition lässt sich leicht verallgemeinern. Falls  $X_0$  und  $Y_0$  disjunkt sind, kann das Zusammensetzen der Sphären mithilfe einer Permutation  $\phi = (v_1 v'_1)(v_2 v'_2)(v_3 v'_3)$  für  $X_0(F) = \{v_1, v_2, v_3\}$  und  $Y_0(F') = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$  durchgeführt werden. Wir identifizieren  $\xi_Y$  mit der Menge

$$\{\phi(y) \mid y \in \xi_Y\}.$$

und bezeichnen die Sphäre, die durch das Zusammensetzen entsteht mit  $X \#_{\phi} Y$ . Das Unterteilen einer vertex-treuen Sphäre mit einem 3-Waist in die disjunkte Vereinigung zweier vertex-treuer Sphären kann in ähnlicher Form skizziert werden. Sei  $W \subseteq X_1$  ein 3-Waist. Nach Definition ?? kann die Flächenmenge  $X_2$  in die 3-Waist Komponenten  $M_1, M_2$  bezüglich  $W$  aufgeteilt werden. Weiterhin seien  $\{v_1, v_2, v_3\} = X_0(W)$  die Ecken des 3-Waists und  $\{P_1, P_2, P_3\} \cap X_0 = \emptyset$ , dann erhalten wir die Sphäre  $X^W$  durch die Ecken-Flächen-Inzidenzen

$$\xi_W = (\{\phi(X_0(m_1)) \mid m_1 \in M_1\} \cup \{\{P_1, P_2, P_3\}\}) \cup (\{X_0(m_2) \mid m_2 \in M_2\} \cup \{\{V_1, V_2, V_3\}\}),$$

wobei  $\phi = (V_1 P_1)(V_2 P_2)(V_3 P_3)$  ist.

Seien  $X$  und  $Y$  zwei Sphären. Weiterhin seien  $F$  eine Fläche in  $X$  und  $F'$  eine Fläche in  $Y$  zusammen mit einer Bijektion  $\phi : X_0(F) \rightarrow X_0(F')$ . Beim Übergang von den Sphären  $X$  und  $Y$  zu der simplizialen Fläche  $X \#_{\phi} Y$  werden die zwei Flächen  $F, F'$  aus der konstruierten Fläche herausgenommen. Außerdem werden jeweils eine Ecke in  $X$  und eine Ecke in  $Y$  in  $X \#_{\phi} Y$  zu einer Ecke zusammengeführt. Selbiges gilt für die Kanten. Es werden jeweils eine Kante in  $X$  und eine Kante in  $Y$  zu einer Kante in  $X \#_{\phi} Y$  zusammengefasst. Deshalb ergibt sich für die Euler-Charakteristik

$$\begin{aligned} \chi(X \#_{\phi} Y) &= |(X \#_{\phi} Y)_0| - |(X \#_{\phi} Y)_1| + |(X \#_{\phi} Y)_2| \\ &= (|X_0| + |Y_0| - 3) - (|X_1| + |Y_1| - 3) + (|X_2| + |Y_2| - 2) \\ &= |X_0| - |X_1| + |X_2| + |X_0| - |X_1| + |X_2| - 2 \\ &= 2 + 2 - 2. \end{aligned}$$

Also ist die simpliziale Fläche  $(X \#_{\phi} Y)$  eine Sphäre.

**Beispiel 7.3.** Der zweite Teil der obigen Bemerkung wird nun am Beispiel des Doppel-Tetraeders veranschaulicht. Zur Erinnerung geben wir an dieser Stelle den Flächenträger eines Doppel-Tetraeders an.

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{5, 2, 3\}, \{5, 2, 4\}, \{5, 3, 4\}\}$$

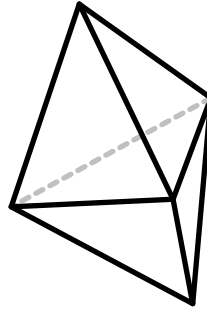


Abbildung 70: Doppel-Tetraeder

Dann bilden die Kanten  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$  und  $\{2, 4\}$  einen 3-Waist. Also sind  $M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$  und  $M_2 = \{\{5, 2, 3\}, \{5, 2, 4\}, \{5, 3, 4\}\}$  die 3-Waist Komponenten bezüglich  $W$ , wobei die Flächen durch die inzidenten Flächen repräsentiert werden. Durch Einführen von neuen Ecken 6, 7, 8 und der Permutation  $\phi = (26)(37)(48)$  erhalten wir nun durch die simpliziale Fläche  $DT^W$  als disjunkte Vereinigung von zwei Tetraedern mit zugehörigem Flächenträger

$$\begin{aligned} \xi_W &= (\{\phi(X_0(m_2)) \mid m_2 \in M_2\} \cup \{\{6, 7, 8\}\}) \cup \\ &\quad (\{X_0(m_1) \mid m_1 \in M_1\} \cup \{\{2, 3, 4\}\}) \\ &= Pot_3(\{1, 2, 3, 4\}) \cup Pot_3(\{5, 6, 7, 8\}) \end{aligned}$$

**Bemerkung 7.4.** Wenn wir uns die vertex-treue Sphären ohne 3-Waist als konvexe Figuren eingebettet in den  $\mathbb{R}^3$  vorstellen, dann kommt die obige Konstruktion dem Zusammensetzen oder vielmehr dem Zusammenkleben von jeweils Fläche der jeweiligen Sphäre gleich. Dafür gibt es genau 3 Möglichkeiten. Auf rein kombinatorischer Ebene jedoch, gibt es jedoch 6 Möglichkeiten, zwei Sphären  $X$  und  $Y$  auf obige Weise an Flächen  $F \in X_2$  und  $F' \in Y_2$  zusammen zu setzen. Denn dies entspricht der Anzahl der Bijektionen  $\phi : X_0(F) \rightarrow Y_0(F')$ , wobei verschiedene Bijektionen isomorphe Sphären hervorbringen können.

**Bemerkung 7.5.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $W_1, \dots, W_n$  3-Waists in  $X$ . Durch  $n$ -maliges Anwenden der Bemerkung 7.2 erhalten wir eine simpliziale Fläche  $Y$ , die aus  $n+1$  Zusammenhangskomponenten besteht. Es existieren also vertex-treue Sphären  $Z_1, \dots, Z_{n+1}$  ohne 3-waists, sodass

$$Y_i = \bigcup_{j=1}^{n+1} (Z_j)_i$$

für  $i = 0, 1, 2$  ist. Wir nennen  $Z_1, \dots, Z_n$  die Building Blocks von  $X$  und definieren



durch

$$\prod_{i=1}^{n+1} B_i^{t_i},$$

wobei  $t_i = |\{j \mid 1 \leq j \leq n+1, (Z_j)_2 = i\}|$  ist, den Blocktyp von  $X$ .

**Lemma 7.6.** *Seien  $X$  bzw.  $Y$  vertex-treue Sphären mit zugehörigen Blocktypen  $\prod B_i^{t_i}$  bzw.  $\prod B_j^{s_j}$ . Falls  $X \cong Y$  ist, dann gibt es Permutationen  $\pi_1, \pi_2$ , sodass*

$$\prod B_i^{t_i} = \prod B_{\pi_1(i)}^{\pi_2(t_i)}$$

ist.

Diese Aussage ist nur eine Umformung eines Resultates des Skriptes *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* und der zugehörige Beweis kann diesem entnommen werden. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie man am Beispiel der Multi-Tetraeder sieht. Diese bilden vertex-treue Sphären vom Typ  $B_4^n$ . Und für  $n = 3$  gibt es 3 nicht isomorphe Multi-Tetraeder mit demselben Blocktyp.

**Bemerkung 7.7.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $G$  seine Automorphismengruppe. Dann definieren wir die Menge  $FV_X$  durch*

$$\{(F, V_1, V_2, V_3) \mid F \in X_2, X_0(F) = \{V_1, V_2, V_3\}\}$$

In Analogie zu ... kann mithilfe dieser Menge die Gruppenoperation

$$\Phi : G \times FV_x \rightarrow FV_X, (g, (F, V_1, V_2, V_3)) \mapsto (\phi(F), \phi(V_1), \phi(V_2), \phi(V_3))$$

aufgestellt werden. Diese ist vom besonderem Interesse für die Bestimmung der Anzahl der Sphären  $X \# Y$ , die bis auf Isomorphie aus  $X$  und  $Y$  hervorgehen.

**Beispiel 7.8.** • Sei  $T$  der Tetraeder. Dann operiert  $G$  transitiv auf  $FV_T$ .

•

**Lemma 7.9.** *Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären. Weiterhin operiere  $\text{Aut}(Y)$  transitiv auf  $FV_Y$ . Die Anzahl der Sphären der Form  $X \# Y$  erhalten wir dann durch die Anzahl der Bahnen der Operation  $\Phi_{X_2}$ .*

*Beweis.* Dieses Lemma bildet eine Verallgemeinerung von ... und daher erhalten wir die Behauptung durch eine analoge Beweisführung.  $\square$

**Folgerung 7.10.** *Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären. Falls  $\text{Aut}(X)$  transitiv auf  $FV_X$  und  $\text{Aut}(Y)$  transitiv auf  $FV_Y$  operiert, dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine Sphäre  $X \#_\phi Y$  für eine geeignete Abbildung  $\phi$ .*

**Lemma 7.11.** *Seien  $X$  mit  $F \in X_2$  und  $Y$  mit  $F' \in X_2$  vertex-treue Sphären ohne 3-Waists. Weiterhin sei  $f_X$  bzw.  $f_Y$  die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation  $\Phi_{X_2}$  bzw.  $\Phi_{Y_2}$  und  $fv_X$  bzw.  $fv_Y$  die Anzahl der Bahnen von  $FV_X$  unter  $\text{Aut}(X)$  bzw.  $FV_Y$  unter  $\text{Aut}(Y)$ . Falls  $f_X, f_Y \neq 1$  ist, dann ist die Anzahl der Sphären  $Z$  mit  $X$  und  $Y$  als Building-Blocks gegeben durch*

$$f_X fv_Y = f_Y fv_X$$

*Beweis.* Es reicht, die Anzahl der Möglichkeiten zu betrachten, wie  $Y$  durch einen 3-Waist an  $X$  gebunden werden kann. Wir müssen zunächst einmal zeigen, dass das Verwenden von zwei Flächen aus einer Bahn in  $X$  isomorphe Sphären  $X \# Y$  hervorbringt. Seien also  $F, F' \in X_2$ , sodass ein Isomorphismus  $\phi$  mit  $\phi(F') = F$  ist. Weiterhin seien  $X_0(F) = \{V_1^X, V_2, V_3\}$  und  $X_0(F') = \{V_1, V_2, V_3\}$ . Sei  $(F', V_1, V_2, V_3) \in FV_Y$ .  $\square$

Mithilfe des `SimplicialSurfaces` Paket kann man die Sphären mit genau einem 3-Waist berechnen. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl  $k_n$  der Sphären mit genau einem 3 Waist und  $n$  Flächen.

| # 3-Waists | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18  | 20   | 22   | 24     | 26     |
|------------|---|---|---|----|----|----|----|-----|------|------|--------|--------|
| 1          | 0 | 1 | 0 | 1  | 1  | 4  | 14 | 52  | 237  | 1132 | 5729   | 30100  |
| 2          | 0 | 0 | 0 | 0  | 4  | 7  | 30 | 120 | 550  | 2785 | 14803  | 92604  |
| 3          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 11 | 29 | 164 | 837  | 4598 | 26551  | 156029 |
| 4          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 57 | 184 | 1126 | 6358 | 103576 | 236964 |
| 5          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 270 | 1084 | 7422 | 46175  | 299906 |
| 6          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 1564 | 6825 | 54405  | 331985 |
| 7          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0    | 9128 | 42535  | 335990 |
| 8          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0    | 0    | 55288  | 267548 |
| 9          | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0    | 0    | 0      | 337437 |

Für die Sphären mit genau einem 3-Waist und geringer Flächenanzahl listen wir nun den Eckenzähler, den Flächenzähler und die Automorphismengruppe auf.

| n  | Zshngs.-<br>komp. | Vertex<br>counter               | Facecounter   | Aut.<br>gruppe   |
|----|-------------------|---------------------------------|---|------------------|
| 6  | $T, T$            | $v_3^2 v_4^3$                   | $f_{3,4^2}^6$   | $C_2 \times D_6$ |
| 10 | $T, O$            | $v_3^1 v_4^4 v_5^3$             | $f_{3,5^2}^3 f_{4^3}^1 f_{4^2,5}^3 f_{4,5^2}^3$   | $S_3$            |
| 12 | $(5)^2, T$        | $v_3^1 v_4^3 v_5^3 v_6^1$       | $f_{3,5^2}^1 f_{3,5,6}^2 f_{4^2,5}^2 f_{4^6}^2 f_{4,5^2}^2 f_{4,5,6}^2 f_{5^3}^1$                 | $C_2$            |
| 14 | $(6)^2, T$        | $v_3^1 v_4^4 v_5^2 v_6^1 v_7^1$ | $f_{3,5^2}^1 f_{3,5,7}^2 f_{4^2,6}^3 f_{4^2,7}^3 f_{4,5,6}^2 f_{4,5,7}^2 f_{5^2,6}^1$             | $C_2$            |
|    | $S, T$            | $v_3^1 v_4^3 v_5^3 v_6^2$       | $f_{3,5,6}^2 f_{3,6^2}^1 f_{4^2,5}^1 f_{4^2,6}^3 f_{4,5^2}^2 f_{4,5,6}^4 f_{4,6^2}^1 f_{5^2,6}^1$ | $\{id\}$         |
|    | $O, O$            | $v_4^6 v_6^3$                   | $f_{4^3}^2 f_{4^2,6}^6 f_{4,6^2}^6$   | $D_{12}$         |
| 16 | $(7)^2, T$        | $v_3^1 v_4^4 v_5^2 v_6^2 v_7^1$ | $f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4^2,6}^2 f_{4^2,7}^2 f_{4,5^2}^1 f_{4,5,6}^3$             | $\{id\}$         |
|    |                   |                                 | $f_{4,5,7}^1 f_{4,6^2}^2 f_{4,6,7}^1 f_{5^2,7}^1$   |                  |
|    | $(5)^2, O$        | $v_3^1 v_4^5 v_5^2 v_7^1 v_8^1$ | $f_{3,5^2}^1 f_{3,5,8}^2 f_{4^2,7}^4 f_{4^2,8}^4 f_{4,5,7}^2 f_{4,5,8}^2 f_{5^2,7}^1$             | $C_2$            |
|    | $(5)^2, O$        | $v_3^1 v_4^3 v_5^4 v_6^1 v_7^1$ | $f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4^2,5}^1 f_{4^2,7}^1 f_{4,5^2}^3 f_{4,5,6}^1$             | $\{id\}$         |
|    |                   |                                 | $f_{4,5,7}^3 f_{4,6,7}^1 f_{5^3}^1 f_{5^2,6}^2$   |                  |
|    |                   | $v_3^1 v_4^2 v_5^5 v_6^2$       | $f_{3,5,6}^2 f_{3,6^2}^1 f_{4,5^2}^4 f_{4,5,6}^4 f_{5^3}^2 f_{5^2,6}^2 f_{5,6^2}^1$               | $C_2$            |
|    |                   | $v_4^6 v_5^1 v_6^2 v_7^1$       | $f_{4^3}^1 f_{4^2,5}^2 f_{4^2,6}^2 f_{4^7}^3 f_{4,5,6}^2 f_{4,6^2}^1 f_{4,6,7}^4 f_{5,6^2}^1$     | $C_2$            |

Beim Genaueren Hinschauen ist zu erkennen, dass die Sphären, die einen Tetraeder als Zusammenhangskomponente haben, eine Automorphismengruppe von kleiner Ordnung haben. dies halten wir in folgender Bemerkung fest.

**Bemerkung 7.12.** *Sei  $X$  eine Sphäre ohne Ecken vom Grad 3 und  $F$  eine Fläche in  $X$ . Dann ist  $Aut(T^F(X))$  eine Untergruppe von  $S_3$ .*

*Beweis.* Sei  $V$  die Ecke vom Grad 3 in  $T^F(X)$ . Da  $X$  keine Ecken vom Grad 3 besitzt, gilt

- $\phi(V) = V$
- $\phi(X_1(V)) = X_1(V)$
- $\phi(X_2(V)) = X_2(V)$

für jeden Isomorphismus  $\phi : Aut(T^F(X)) \mapsto Aut(T^F(X))$ . Für solch einen Isomorphismus kommen nur die Elemente der Gruppe  $S_3$  in Frage.  $\square$

Diese Beobachtung kann man verallgemeinern. Denn beim Genauerem Hinschauen erkennt man, dass

$$S_3 \cong \{\phi \in Aut(T) \mid \phi(F) = F\}$$

für eine Fläche  $F \in T_2$  ist.

**Bemerkung 7.13.** *Sobald die Voraussetzung fallen gelassen wird, dass  $X$  eine Sphäre ohne Ecke vom Grad 3 ist, ist die Aussage falsch, denn die Automorphismengruppe des Doppel-Tetraeders ist isomorph zu der Gruppe  $C_2 \times S_3$  und wie bereits*

bekannt, geht der Doppel-Tetraeder durch eine Tetraedererweiterung aus dem Tetraeder hervor.

**Lemma 7.14.** *Seien  $X$  und  $Y$  zwei nicht isomorphe vertex-treue Sphären ohne 3-Waist mit Flächen  $F$  in  $X$  bzw.  $F'$  in  $Y$ . Sei zudem  $\phi$  eine bijektive Abbildung von  $X_0(F)$  nach  $Y_0(F')$ . Dann ist  $\text{Aut}(X \#_{\phi} Y)$  isomorph zu einer echten Untergruppe von  $\text{Stab}_X(F)$  und zu einer echten Untergruppe von  $\text{Stab}_Y(F')$ .*

*Beweis.* Sei  $W = (e_1, e_2, e_3)$  der durch das Zusammensetzen entstandene 3-Waist und  $M_1, M_2$  zugehörigen 3 Waist Komponenten. Es gilt  $M_1 = X_2 - \{F\}$  und  $M_2 = Y_2 - \{F'\}$ . Da  $W$  der einzige 3-Waist ist, bildet ein Isomorphismus  $\Phi : X \#_{\phi} Y \mapsto X \#_{\phi} Y$  eine Kante des 3-Waists wieder auf eine Kante des 3-Waists ab. Daraus folgt also entweder  $\Phi(M_i) = M_i$  oder  $\Phi(M_i) = M_{3-i}$ . Da  $X$  und  $Y$  nicht isomorph sind, muss also der erste Fall eintreten. Somit lässt sich  $\Phi|_{M_1}$  zu einem Isomorphismus  $\Phi_X$  auf  $X$  erweitern, der  $F$  fixiert. Analog erweitert man  $\Phi|_{M_2}$  zu einem Isomorphismus  $\Phi_Y$ , der  $F'$  auf sich selber abbildet.  $\square$

**Bemerkung 7.15.** *An dieser Stelle lässt sich wieder erkennen, dass das Abschwächen der Voraussetzung zu einem anderem Ergebnis führt.*

Die Anzahlen aller Sphären mit mindestens einem 3-Waist und bis zu 26 Flächen, die keine Multi-Tetraeder sind, liefert uns folgende Tabelle.

## 7.2 Flächengraphen von Sphären mit 3-Waists

Seien  $X$  mit  $F \in X_2$  und  $Y$  mit  $F' \in Y_2$  vertex-treue Sphären und  $\phi : X_2(F) \rightarrow Y_2(F')$  eine bijektive Abbildung. An dieser Stelle wollen wir beschreiben, wie sich der Flächengraph der Sphäre  $X \#_{\phi} Y$  aus den Flächengraphen der Sphären  $X$  und  $Y$  ergibt. Seien hierzu  $F_1, F_2, F_3$  bzw.  $F'_1, F'_2, F'_3$  die Nachbar-Flächen von  $F$  in  $X$  bzw. von  $F'$  in  $Y$ . Durch das Zusammensetzen der Sphären an den Flächen  $F$  und  $F'$  erhalten wir einen 3-Waist  $W = (e_1, e_2, e_3)$  in  $Z = X \#_{\phi} Y$ , sodass ohne Einschränkung

$$Z_2(e_i) = \{F_i, F'_i\}$$

für  $i = 1, 2, 3$  gilt. also sind  $F_i$  und  $F'_i$  in  $Z$  benachbarte Flächen. Weiterhin sei nun  $G_X = (V_X, E_X)$  bzw.  $G_Y = (V_Y, E_Y)$  der zu  $X$  bzw.  $Y$  gehörige Flächengraph. Den Flächengraph  $G_Z$  erhalten wir durch folgende Konstruktion: Sei  $G = (V_X \cup V_Y, E_X \cup E_Y)$  die Vereinigung der Graphen  $G_X$  und  $G_Y$ .

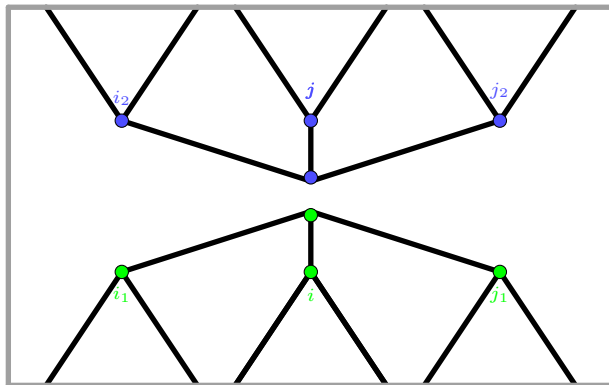


Abbildung 71: Doppel-Tetraeder

Als erstes müssen die zu den Flächen  $F$  und  $F'$  gehörigen Knoten in  $G$  dem Graphen entnommen werden.

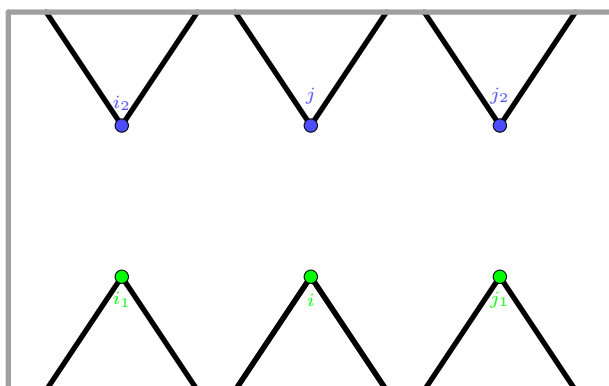


Abbildung 72: Doppel-Tetraeder

Da in  $Z$  die Flächen  $F_i$  und  $F'_i$  benachbart sind, erhalten wir den zugehörigen Flächengraphen, indem wir nun die Kanten  $\{F_1, F'_1\}$ ,  $\{F_1, F'_1\}$ ,  $\{F_1, F'_1\}$  dem zuvor konstruierten Graphen hinzufügen.

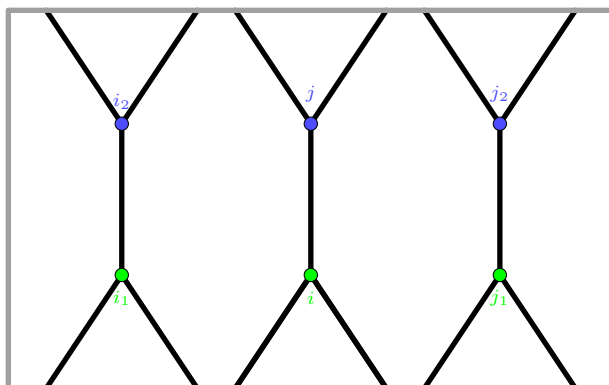


Abbildung 73: Doppel-Tetraeder

### 7.3 Färbungen auf Sphären mit 3-Waist

**Lemma 7.16.** *Seien  $X$  und  $Y$  vertex-treue Sphären und  $\omega_X$  eine zahme Färbung auf  $X$  bzw.  $\omega_Y$  eine zahme Färbung auf  $Y$ . Weiterhin seien  $F \in X_2$  und  $F' \in Y_2$  zusammen mit einer bijektiven Abbildung  $\phi : X_0(F) \rightarrow Y_0(F')$ . Falls  $X$  und  $Y$  eine mmm-Struktur, dann existiert auf  $Z = X \#_\phi Y$  ebenfalls eine mmm-Struktur.*

*Beweis.* Sei  $(e_1, e_2, e_3)$ , der 3-Waist in  $Z = X \#_\phi$  ist, dann existieren Kanten  $e_1^X, e_2^X, e_3^X$  in  $X$  und  $e_1^Y, e_2^Y, e_3^Y$  in  $Y$ , sodass bei der Konstruktion von  $Z$  die Kanten  $e_i^X$  und  $e_i^Y$  zu der Kante  $e_i$  zusammengeführt werden. An dieser Stelle soll skizziert werden, dass solch eine zahme Färbung auf  $Z$  durch eine geeignete Fortsetzung der bereits vorhandenen zahmen Färbungen konstruiert werden kann. Wir können ohne Einschränkung

$$\begin{aligned}\omega_X(e_1^X) &= a = \omega_Y(e_1^X), \\ \omega_X(e_2^X) &= b = \omega_Y(e_2^X), \\ \omega_X(e_3^X) &= c = \omega_Y(e_3^X)\end{aligned}$$

annehmen. Es reicht im Folgenden die Kante  $e_1$ , die durch Zusammensetzen der Kanten  $e_1^X$  und  $e_1^Y$  entsteht, zu betrachten. Da  $e_1^X$  eine Kante in  $X$  ist, existiert eine Fläche  $F_X$  mit  $X_2(e_1^X) = \{F, F_X\}$ . Weiterfinden finden wir zwei Kanten  $e_X, e'_X \in X_1(F_1)$ , die

$$X_0(e_1^X) \cap X_0(e_X) \cap X_0(e_2^X) \neq \emptyset$$

und

$$X_0(e_1^X) \cap X_0(e'_X) \cap X_0(e_3^X) \neq \emptyset$$

erfüllen. Analog erhalten wir eine Fläche  $F_Y$  mit  $Y_2(e_1^Y) = \{F', F_Y\}$  und Kanten  $e_Y, e'_Y$  mit

$$Y_0(e_1^Y) \cap Y_0(e_Y) \cap Y_0(e_2^Y) \neq \emptyset$$

und

$$Y_0(e_1^Y) \cap Y_0(e_Y) \cap Y_0(e_3^Y) \neq \emptyset.$$

*bild*

Somit gibt es in  $Z$  eine Ecke die zu  $e_X$  und  $e_Y$  inzident ist und es existiert eine Ecke in  $Z$  sodass  $e'_X$  und  $e'_Y$  zu dieser inzident sind. Da  $e_1^X$  und  $e_1^Y$  beides m-Kanten sind, muss

$$\omega_X(e_X) = b = \omega_Y(e_Y)\omega_X(e_X) = c = \omega_Y(e'_Y)$$

Wählen wir nun als Kandidaten für unsere zahme Färbung die Abbildung

*abbildung*

dann bilden  $e_1, e_2, e_3$  wieder m-Kanten. Da alle anderen Kanten und Flaechen bei der Konstruktion von  $Z$  unberührt bleiben, bilden diese Kanten ebenfalls wieder m-Kanten und wir erhalten schlussendlich eine mmm-Struktur auf  $Z$ . Damit bildet  $e_1$  eine m-Kante.  $\square$

Salopp formuliert werden Spiegelungskanten unter der obigen Konstruktion wieder zu Spiegelungskanten. Dieselbe Aussage für Sphären mit einer *rrr*-Struktur zu formulieren, liefert kein richtiges Ergebnis. Denn beispielsweise der Tetraeder besitzt eine *rrr*-Struktur, jedoch existiert auf dem Doppel-Tetraeder, der sich bekanntlicher Weise aus Tetraedern zusammensetzt, keine zahme Färbung.

## 8 Multi-Sphären

In diesem Kapitel dieser Arbeit wollen wir die in Kapitel 6 vorgestellte Konstruktion von Multitetraedern durch Tetraedererweiterungen für beliebige vertex-treue Flächen erweitern.

**Definition 8.1.** *Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre. Man nennt  $X$  eine Multi-Sphäre, falls es  $k, n \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $X$  eine Sphäre vom Blocktyp  $B_n^k$  ist und weiterhin*

$$Z_1 \cong \dots \cong Z_k$$

*für die Building-Blocks  $Z_1, \dots, Z_k$  gilt.*

**Bemerkung 8.2.** • *Jede vertex-treue Sphäre ohne 3-Waists ist eine Multi-Sphäre vom Blocktyp  $B_n^1$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .*

• *Multitetraeder sind Multi-Sphären vom Blocktyp  $B_4^k$ .*

**Satz 8.3.** *Sei  $X$  eine Multi-Sphäre mit Basis  $Y$ . Falls  $\text{Aut}(Y)$  auflösbar ist, dann folgt die Auflösbarkeit von  $\text{Aut}(X)$ .*

*Beweis.* Wir führen den Beweis induktiv. Für ,  $\square$

In Analogie zu dem Tetraedersymbol wollen wir nun ein Symbol für Multi-Sphären einführen. Hierfür schauen wir uns als motivierendes Beispiel Multi-Sphären bestehend aus Oktaedern an. Die Bezeichnung der Ecken, Kanten und Knoten ist hier von großer Bedeutung, deshalb geben wir die des Oktaeders durch folgendes

Symbol an:

$$\begin{aligned}\mu((O, <)) = & (6, 12, 8; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ & \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ & (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \\ & \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\}))\end{aligned}$$

An dieser Stelle wurde bewusst auf die Disjunktheit der Mengen  $O_0, O_1$  und  $O_2$  verzichtet. Wir wollen einen Multi-Oktaeder vom Blocktyp  $B_8^2$  konstruieren. Hierfür betrachten wir die Oktaeder  $Y$  und  $Z$ , die durch die Symbole

$$\begin{aligned}\mu((Y, <)) = & (6, 12, 8; (\{1_1, 1_2\}, \{1_1, 1_3\}, \{1_1, 1_4\}, \{1_1, 1_5\}, \{1_2, 1_3\}, \{1_2, 1_5\}, \\ & \{1_2, 1_6\}, \{1_3, 1_4\}, \{1_3, 1_6\}, \{1_4, 1_5\}, \{1_4, 1_6\}, \{1_5, 1_6\}); \\ & (\{1_1, 1_2, 1_5\}, \{1_6, 1_7, 1_{12}\}, \{1_1, 1_4, 1_6\}, \{1_5, 1_7, 1_9\}, \{1_3, 1_4, 1_{10}\}, \\ & \{1_8, 1_9, 1_{11}\}, \{1_2, 1_3, 1_8\}, \{1_{10}, 1_{11}, 1_{12}\}))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mu((Z, <)) = & (6, 12, 8; (\{2_1, 2_2\}, \{2_1, 2_3\}, \{2_2, 2_4\}, \{2_1, 2_5\}, \{2_2, 2_3\}, \{2_2, 2_5\}, \\ & \{2_2, 2_6\}, \{2_3, 2_4\}, \{2_3, 2_6\}, \{2_4, 2_5\}, \{2_4, 2_6\}, \{2_5, 2_6\}); \\ & (\{2_1, 2_2, 2_5\}, \{2_6, 2_7, 2_{12}\}, \{2_1, 2_4, 2_6\}, \{2_5, 2_7, 2_9\}, \{2_3, 2_4, 2_{10}\}, \\ & \{2_8, 2_9, 2_{11}\}, \{2_2, 2_3, 2_8\}, \{2_{10}, 2_{11}, 2_{12}\}))\end{aligned}$$

Die Abbildungen  $\phi_1 : Z \rightarrow X, 1_j \mapsto j$  und  $\phi_2 : Z \rightarrow X, 2_j \mapsto j$  bilden also unter der Berücksichtigung, dass Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen wieder auf Flächen abgebildet werden, Isomorphismen. Die Fläche  $\{1, 2, 3\}$  in  $X$  kann also mit der Fläche  $\{1_1, 1_2, 1_3\}$  in  $Y$  bzw. mit der Fläche  $\{2_1, 2_2, 2_3\}$  in  $Z$  identifiziert werden. Durch  $\phi = (1_1 2_1)(1_2 2_2)(1_3 2_3)$  erhalten wir also den Doppel-Oktaeder  $Y \#_\phi Z$ . Bezeichnen wir die Flächenmenge des Oktaeders  $Y$  bzw.  $Z$  mit  $\{1_1, \dots, 1_8\}$  dann gilt

$$(Y \#_\phi Z)_2 = \{1_2, \dots, 1_8, 2_2, \dots, 2_8\}.$$

Falls wir die Ecken, die durch diese Konstruktion entstanden sind, mit  $\{1_1, 2_1\}^V, \{1_2, 2_2\}^V$  und  $\{1_3, 2_3\}^V$  bezeichnen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}& \{\{\{1_1, 2_1\}^V, \{1_3, 2_3\}^V, 1_4\}, \{\{1_1, 2_1\}^V, 1_4, 1_5\}, \{\{1_1, 2_1\}^V, \{1_2, 2_2\}^V, 1_5\}, \\ & \{1_6, \{1_2, 2_2\}^V, \{1_3, 2_3\}^V\}, \{1_6, \{1_3, 2_3\}^V, 1_4\}, \{1_6, 1_4, 1_5\}, \{1_6, \{1_2, 2_2\}^V, 1_5\}, \\ & , \{\{1_1, 2_1\}^V, \{1_3, 2_3\}^V, 2_4\}, \{\{1_1, 2_1\}^V, 2_4, 2_5\}, \{\{1_1, 2_1\}^V, \{1_2, 2_2\}^V, 2_5\}, \\ & \{2_6, \{1_2, 2_2\}^V, \{1_3, 2_3\}^V\}, \{2_6, \{1_3, 2_3\}^V, 2_4\}, \{2_6, 2_4, 2_5\}, \{2_6, \{1_2, 2_2\}^V, 2_5\}\}\end{aligned}$$



als Flächenträger der neuen Sphäre. Dieses Vorgehen wollen wir nun iterieren und fuer beliebige Sphären ohne 3-Waists formulieren. Sei deshalb  $X$  eine vertex-treue Sphäre ohne 3-Waist mit  $n$  Flächen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass  $X_2$  durch  $\{1, \dots, n\}$ ,  $X_1$  durch  $\{1, \dots, k\}$  und  $X_0$  durch  $\{1, \dots, k\}$  gegeben ist. Es wird an dieser Stelle und in dem nachstehendem Absatz bewusst auf die Disjunktheit der Ecken-, Kanten- und Flächenmengen verzichtet, um das generelle Vorgehen möglichst einfach zu skizzieren. Mit  $l$  bezeichnen wir die Länge des Symbols und ist ebenfalls gleichbedeutend mit der Anzahl der 3-Waists in der Konstruierten Sphäre. Dies werden wir wie folgt aufbauen:

- Mit  $()_X$  bezeichnen wir das leere Symbol und die dadurch konstruierte Sphäre ist die uns bekannte Sphäre  $X$ .
- **Für  $l = 1$  erhalten wir Symbole der Form  $(1_{k_1 k_2})^\phi)_X$ , wobei  $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$  und  $\phi : Y_0() \text{ist}$ .** Für  $l = 1$  wollen wir also ein Symbol für eine Sphäre vom Typ  $B_n^2$  aufstellen. Konstruieren wir zunächst die besagte Sphäre. Hierfür benötigen wir die Sphären  $Y$  und  $Z$  mit  $X \cong Y \cong Z$ . Die Ecken-, Kanten- und Flächenmengen müssen nun zum Wohle der Konstruktion genauer angegeben werden. An dieser Stelle sei wieder angemerkt, dass bewusst auf die Disjunktheit der einzelnen Mengen einer Sphäre verzichtet wurde. Wir nehmen also an, dass die Flächenmengen durch

$$\begin{aligned} Y_2 &= \{1_1, \dots, 1_n\}, \\ Z_2 &= \{2_1, \dots, 2_n\}, \end{aligned}$$

die Kantenmengen durch

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{1_1, \dots, 1_m\}, \\ Z_1 &= \{2_1, \dots, 2_m\}, \end{aligned}$$

und die Eckenmengen durch

$$\begin{aligned} Y_0 &= \{1_1, \dots, 1_k\}, \\ Z_0 &= \{2_1, \dots, 2_k\}, \end{aligned}$$

dargestellt werden. Außerdem nehmen wir an, dass  $\phi_1 : Y \rightarrow X, 1_j \mapsto j$  und  $\phi_2 : Z \rightarrow X, 2_j \mapsto j$  unter der Berücksichtigung, dass Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen wieder auf Flächen abgebildet werden, Isomorphismen bilden. Seien nun  $f_1, f_2 \in \{1, \dots, n\}$ , sodass  $1_{f_1} \in Y_2$  und  $2_{f_2} \in Z_2$  ist und außerdem  $Y_0(1_{f_1}) = \{1_{i_1}, 1_{i_2}, 1_{i_3}\}$  und  $Z_0(2_{f_2}) = \{2_{j_1}, 2_{j_2}, 2_{j_3}\}$  gelte. Mithilfe einer Bijektion  $\phi : Y_0(1_{f_1}) \rightarrow Z_0(2_{f_2})$  erhalten wir dann die

gewünschte Sphäre durch  $Y \#_{\phi} Z$ . Um diese Sphäre zu Charakterisieren, beschreiben wir diese durch das Symbol  $(1_{f_1 f_2}^{\phi})_X$ . Falls  $X$  aus dem Kontext heraus bekannt ist, schreiben wir nur  $1_{f_1 f_2}^{\phi}$ . Die neu entstandenen Ecken bezeichnen wir mit  $\{1_{i_1}, \phi(1_{i_1})\}^V, \{1_{i_2}, \phi(1_{i_2})\}^V, \{1_{i_3}, \phi(1_{i_3})\}^V$ . Falls der Kontext es erlaubt können jedoch auch die alten Bezeichnungen verwendet werden. Das heißt, falls klar ist, dass im Kontext die Sphäre  $Y \#_{\phi} Z$  gemeint ist, machen wir beispielsweise bei  $1_{i_1}, \phi(1_{i_1})$  und  $\{1_{i_1}, \phi(1_{i_1})\}$  keine Unterscheidung und sprechen damit immer dieselbe Ecke in der Sphäre  $Y \#_{\phi} Z$  an.

- Sei nun  $l > 1$  und  $(1_{f_1}^{\phi_1} \dots p_{f_{l-1}}^{\phi_{l-1}})_X$  ein Symbol der Länge  $l - 1$  mit zugehöriger Sphäre  $Y$ . Durch Anhängen der Sphäre  $X$  an  $Y$  durch einen 3-Waists wie in ... beschrieben erhalten wir eine Multi-Sphäre mit Basis  $X$  und wollen nun wieder ein Symbol für diese angeben. Sei  $Z$  eine Sphäre mit  $Z \cong X$ , sodass die Eckenmenge durch

$$Z_0 = \{l_1, \dots, l_k\},$$

die Kantenmenge durch

$$Z_1 = \{l_1, \dots, l_m\},$$

und die Flächenmenge durch

$$Z_2 = \{l_1, \dots, l_n\},$$

gegeben sind. Die Abbildung  $\phi' : Z \rightarrow X, l_i \mapsto i$  soll unter der Berücksichtigung, dass Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen wieder auf Flächen abgebildet werden, einen Isomorphismus bilden. Sei nun  $F_1 \in Y_2$  und  $F_2 \in Z_2$ . Somit gilt  $F_1 = r_f$  und  $F_2 = l_{f'}$  für  $r \in \{1, \dots, l - 1\}$  und  $f, f' \in \{1, \dots, n\}$ . Gelte nun ebenfalls  $Y_0(r_f) = \{r_{i_1}, r_{i_2}, r_{i_3}\}$  und  $Y_0(l_{f'}) = \{l_{j_1}, l_{j_2}, l_{j_3}\}$ . Dann erhalten wir für eine Bijektion  $\phi : Y_0(r_f) \rightarrow l_{f'}$  die gewünschte Sphäre durch  $Y \#_{\phi} Z$ . Diese umschreiben wir mit dem Symbol  $(1_{f_1}^{\phi_1} \dots p_{f_{l-1}}^{\phi_{l-1}}, r_f^{\phi})_X$ . Falls  $X$  Kontext im klar ist, schreiben wir nur  $1_{f_1}^{\phi_1} \dots p_{f_{l-1}}^{\phi_{l-1}}, r_f^{\phi}$ . Falls  $X$

Schauen wir uns beispielsweise Multi-Oktaeder an.

- Der Oktaeder wird durch das leere Symbol  $()_O$  dargestellt.

```
gap> O;
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> VerticesOfFaces(O);
[ [ 1, 2, 3 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 4, 5 ], [ 1, 2, 5 ],
[ 2, 3, 6 ], [ 3, 4, 6 ], [ 4, 5, 6 ], [ 2, 5, 6 ] ]
```

- Bis auf Isomorphie gibt es genau einen Multi-Oktaeder mit einem Symbol der Länge 1. Diesen erhalten wir durch folgende Rechnung in Gap.

```
gap> C3W2([O],[O]);
[ simplicial surface (9 vertices, 21 edges, and 14 faces) ]
```

- Bis auf Isomorphie gibt es genau drei Multi-Oktaeder die sich aus drei Oktaedern Zusammensetzen diese ergeben sich durch die Symbole  $1_11_2$ ,  $1_11_3$  und  $1_11_7$

```
gap>C3W2(last,[O]);
[ simplicial surface (12 vertices, 30 edges, and 20 faces) ,
  simplicial surface (12 vertices, 30 edges, and 20 faces) ,
  simplicial surface (12 vertices, 30 edges, and 20 faces) ]
```

**Definition 8.4.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre ohne 3-Waist.

- Für eine vertex-treue Sphäre  $Y$  mit  $|Y_2| > 2|X_2| - 2$  definieren wir  $Y^{(1)X}$  wie folgt: Seien  $W_1, \dots, W_k$  die 3-Waists der Sphäre  $Y$  und  $Z^0 := Y$ . Zudem sei für  $0 \leq i < k$  die Sphäre  $Z^i$  bereits konstruiert. Falls die simplziale Fläche  $X^{W_{i+1}}$  eine Zusammenhangskomponente  $Z'$  mit  $Z' \cong X$ , dann definieren wir  $Z^{i+1}$  durch die Flächenmenge

$$(Z^{i+1})_2 = ((Z^i)^{W_{i+1}})_2 - Z'_2,$$

die Kantenmenge

$$(Z^{i+1})_1 = ((Z^i)^{W_{i+1}})_1 - Z'_1$$

und die Eckenmenge

$$(Z^{i+1})_0 = ((Z^i)^{W_{i+1}})_0 - Z'_0.$$

und die zugehörige Inzidenz erhalten wir durch Einschränkung der Inzidenz auf  $((Z^i)^{W_{i+1}})$ . Falls jedoch  $X^{W_{i+1}}$  keine Zusammenhangskomponente besitzt, die isomorph zu  $X$  ist, dann definieren wir  $Z^{i+1} = Z^i$ . Wir setzen also  $Y^{(1)X} := Z^k$ . Für  $j > 1$  definieren wir analog

$$Y^{(i)X} := (Y^{(i-1)X})^{(1X)}$$

- Wir nennen  $Y$  eine Multi-Sphäre mit Basis  $X$  vom Grad  $k$  falls  $Y^{(k)X}$  isomorph zu  $X$  oder genau einen 3-Wai  $W$  hat und die beiden Zusammenhangskomponenten von  $(Y^{(k)X})^W$  isomorph zu  $X$  sind.

**Lemma 8.5.** Sei  $X$  eine vertex-treue Sphäre und  $\text{Aut}(X)$  die Automorphismengruppe von  $X$ . Weiterhin ist  $Y$  eine Multi-Sphäre mit Basis  $X$ . Falls  $\text{Aut}(X)$  auflösbar ist, dann ist  $\text{Aut}(Y)$  auflösbar.

*Beweis.* Wir führen den Beweis induktiv. Sei  $Y$  eine Multi-Sphäre mit Basis  $X$ , die nicht isomorph zu  $X$  ist und  $G = \text{Aut}(X)$  die zugehörige Automorphismengruppe. Zudem sei  $Z$  definiert als die Sphäre  $Y^{(1)X}$ . Dann gibt es 3-Waists  $W_1, \dots, W_k$ , sodass das  $k$ -malige Anwenden der zweiten Konstruktion in Bemerkung ... uns die Sphäre  $Z$  hervorbringt. Zu den 3-Waists  $W_1, \dots, W_k$  gibt es zugehörige 3-Waist Komponenten  $Y^1, \dots, Y^k$ . Für  $1 \leq t \leq k$  definieren wir deshalb die Mengen

$$M_t := Y^t \cup Y_1(Y^t) \cup Y_0(Y^t).$$

Da ein 3-Waist unter einem Automorphismus wieder auf einen 3-Waist abgebildet werden, müssen die Mengen  $M_t$  in  $Y$  bei einer Anwendung eines Automorphismus untereinander permutiert werden. In  $Z$  werden die 3-Waistkomponenten durch Fläichen  $F_1, \dots, F_k$  ersetzt. Wir betrachten nun in Analogie zum Beweis ... den Homomorphismus  $\psi : G \rightarrow \text{Aut}(Z)$ , der durch

$$\Psi(\phi)(x) = \begin{cases} F_j, & \text{falls } x \in Y^j \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $\phi \in G$  definiert ist.  $\Psi(G)$  bildet eine Untergruppe von  $\text{Aut}(Z)$  und ist somit als Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ebenfalls auflösbar. Sei also  $l \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft  $\text{Aut}(\Psi(G))^l = \{id\}$ , dann gilt für alle  $x \in Y - \bigcup_{t=1}^k M_t$  und fuer alle  $\phi \in G^l$  die Gleichheit

$$\phi(x) = \Psi(\phi)(x) = x.$$

Also muss schon  $\phi(M_t) = M_t$  gelten. Da fuer alle  $1 \leq t \leq k$  die Menge  $G_t := \{\phi_{M_t} \mid \phi \in G^l\}$  eine Untergruppe von  $\text{Aut}(X)$  ist erhalten wir die aufloesbarkeit von  $G_t$  und damit insgesamt die Aufloesbarkeit der Gruppe  $G$ .  $\square$

Die Umkehrung des obigen Satzes gilt jedoch nicht. Hierfür betrachten wir den Ikosaeder und führen wir folgende Rechnung in Gap an:

```
gap>S:=Icosahedron();
simplicial surface (12 vertices, 30 edges, and 20 faces)
gap> IsSolvableGroup(AutomorphismGroup(S));
false
```

Der Ikosaeder hat also eine Automorphismengruppe, die nicht auflösbar ist. Wir konstruieren nun Multi-Sphaeren die aus drei Ikosaedern zusammengesetzt sind.

```

gap> C3W2([S],[S]);
[ simplicial surface (21 vertices, 57 edges, and 38 faces) ]
gap> C3W2(last,[S]);
[ simplicial surface (30 vertices, 84 edges, and 56 faces) ,
  simplicial surface (30 vertices, 84 edges, and 56 faces) ,
  simplicial surface (30 vertices, 84 edges, and 56 faces) ,
  simplicial surface (30 vertices, 84 edges, and 56 faces) ,
  simplicial surface (30 vertices, 84 edges, and 56 faces) ]
gap> List(last,g->Order(AutomorphismGroup(g)));
[ 4, 2, 2, 4, 12 ]

```

In dieser Menge gibt es also Sphären mit der  $C_2$  als Automorphismengruppe, welche auflösbar ist.

## 9 Gap

An verschiedenen Stellen dieser Arbeit tauchen Rechnungen in Gap auf. Dieses Kapitel soll die Funktionsweise der Funktionen erläutern, die bei der Behandlung der angeführten Thematiken unerlässlich sind.

## Appendix

### benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphaeren

Liste der verwendeten Sphären.