

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Lehrstuhl B für Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Alice Niemeyer

Thema

Masterarbeit

Reymond Oluwaseun Akpanya

Matrikelnummer: 357115

Vorgelegt am:

...

Gutachter:

Prof. Dr. Alice Niemeyer

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Wilhelm Plesken

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Herangehensweise	1
1.2	Aufbau dieser Arbeit	1
1.3	Vorkenntnisse und Notationen	1
2	Grundlagen	1
2.1	Definition	1
2.2	Homomorphismen	7
2.3	Vertex-treue Sphären	9
3	Der Face-graph simplizialer Flächen	10
4	Manipulation simplizialer Flächen	15
4.1	Tetraeder	16
4.2	Butterfly Deletion	19
4.3	Butterfly Insertion	23
4.4	Kantendrehungen	24
5	Kantendrehung als Gruppenoperation	33
6	Multi-Tetraeder	36
6.1	Konstruktion und Klassifikation	36
6.2	Facegraphen von Multi-Tetraedern	43
6.3	Kaktus-Distanz	45
7	Sphären ohne 2-Waist	57
7.1	vertex-treue Sphären mit genau einem 3-Waists	57
8	Multi-Sphären	61
9	Erkenntnisse	61

1 Einleitung

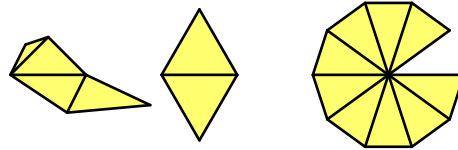
1.1 Herangehensweise

1.2 Aufbau dieser Arbeit

1.3 Vorkenntnisse und Notationen

2 Grundlagen

Zunächst werden in diesem Kapitel grundlegende Definitionen und einführende Beispiele präsentiert, um ein tieferes Verständnis von simplizialen Flächen zu entwickeln. Diese basieren auf dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles*. Da dieses Kapitel nur als Einführung in die Thematik dienen soll, werden die benötigten Resultate ohne Beweise angeführt. Da in diesem Teil der Arbeit keine neuen Resultate präsentiert werden, sondern lediglich bekannte Erkenntnisse reproduziert werden, kann dieses Kapitel bei bereits vorhandener Vertrautheit mit simplizialen Flächen übersprungen werden.



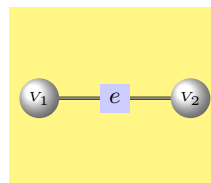
2.1 Definition

Resultate

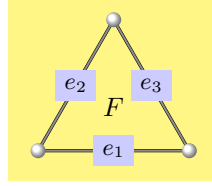
- Definition einer simplizialen Fläche
- elementare Eigenschaften simplizialer Flächen

Definition 2.1. Seien X_0, X_1, X_2 nichtleere Mengen so, dass $X = X_0 \uplus X_1 \uplus X_2$ eine abzählbare Menge und $<$ eine transitive Relation auf $(X_0 \times X_1) \cup (X_1 \times X_2) \cup (X_0 \times X_2)$ ist. Man nennt X_0 die Menge der Ecken, X_1 die Menge der Kanten, X_2 die Menge der Flächen und $<$ die Inzidenz einer simplizialen Fläche $(X, <)$, falls folgende Axiome erfüllt sind:

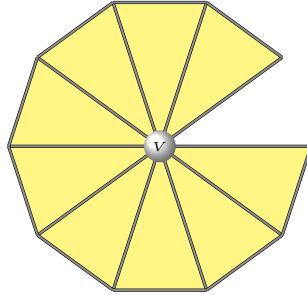
1. Für jede Kante $e \in X_1$ existieren genau zwei Ecken $V_1, V_2 \in X_0$ mit $V_1, V_2 < e$.



2. Für jede Fläche $F \in X_2$ gibt es genau drei Kanten $e_1, e_2, e_3 \in X_1$ mit der Eigenschaft $e_1, e_2, e_3 < F$.



3. Für jede Kante $e \in X_1$ gibt es entweder genau zwei Flächen $F_1, F_2 \in X_2$ mit $e < F_1, F_2$ oder genau eine Fläche $F \in X_2$ mit $e < F$. Im ersten Fall sind F_1 und F_2 (e)-Nachbarn und e ist eine innere Kante, im zweitem Fall ist e eine Randkante.
4. Für jede Ecke $V \in X_0$ existieren endlich viele Flächen $F \in X_2$ mit $V < F$. Diese $F_i \in X_2$ können in einem Tupel (F_1, \dots, F_n) für ein $n \in \mathbb{N}$ angeordnet werden so, dass $e_i < F_i$ und $e_i < F_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$ ist, wobei $e_i \in X_1$ eine Kante in X ist, für die ebenfalls $V < e_i$ gilt. Das Tupel (F_1, \dots, F_n) wird auch Schirm genannt. Falls es auch eine Kante $e \in X_1$ mit $e < F_1, F_n$ gibt, so ist V eine innere Ecke. Ist V keine innere Ecke, so ist er eine Randecke.



5. Seien $V \in X_0$ eine Ecke in X und (F_1, \dots, F_n) der zu V gehörige Schirm, wobei die F_i für $i = 1, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ Flächen in X sind. Dann ist n der Grad der Ecke V . Für den Grad einer Ecke V in X schreibt man $\deg_X(V)$. Falls X aus dem Kontext heraus klar ist, so schreibt man nur $\deg(V)$.

Bemerkung 2.2. • Für eine gegebene Ecke $V \in X_0$ einer simplizialen Fläche gibt es eine endliche Anzahl von Schirmen. Diese sind jedoch alle äquivalent, da sie durch zyklische Permutationen umgeordnet werden können.

- Zur Vereinfachung identifiziert man $(X, <)$ mit der Menge X .
- Die Definition einer simplizialen Fläche $(X, <)$ lässt abzählbar unendliche Mengen X_i für $i = 0, 1, 2$ zu, jedoch sind für diese Arbeit nur endliche simpliziale Flächen von Interesse. Das heißt im Folgendem sei ohne Einschränkung $|X_0|, |X_1|, |X_2| < \infty$.

Beispiel 2.3. 1. Bis auf Isomorphie gibt es genau eine simpliziale Fläche bestehend aus einer Fläche, welche durch

$$D_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, D_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}, D_2 = \{ F_1 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (V_1, e_2), (V_1, e_3), (V_1, F_1), (V_2, e_1), (V_2, e_3), \\ (V_2, F_1), (V_3, e_1), (V_3, e_2), (V_3, F_1) \}$$

beschrieben wird. Man nennt diese simpliziale Fläche Dreieck.

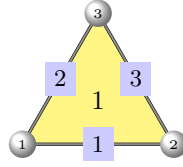


Abbildung 1: Dreieck

2. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das n -fache Dreieck $n\Delta$ durch die Mengen $n\Delta_0, n\Delta_1, n\Delta_2$, wobei

$$n\Delta_0 = \{ V_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n \}, n\Delta_1 = \{ e_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n \}, \\ n\Delta_2 = \{ F_1, \dots, F_n \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) \in \{ (e_1^k, F_k), (e_2^k, F_k), (e_3^k, F_k), (V_1^k, e_2^k), (V_1^k, e_3^k), (V_1^k, F_k), (V_2^k, e_1^k), \\ (V_2^k, e_3^k), (V_2^k, F_k), (V_3^k, e_1^k), (V_3^k, e_2^k), (V_3^k, F_k) \mid k = 0, \dots, n \}$$

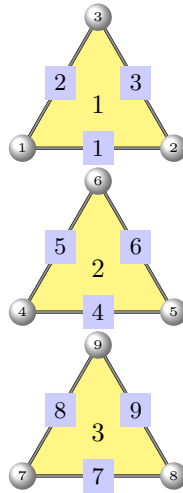


Abbildung 2: $n\Delta$ im Fall $n = 3$

3. Der Janus-Head ist eine geschlossene simpliziale Fläche, die aus zwei Flächen besteht. Sie besitzt 3 innere Ecken und 3 innere Kanten und wird definiert

durch

$$J_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, J_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}, J_2 = \{ F_1, F_2 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_2, F_2), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1), (V_3, e_2),$$

$$(V_3, F_1), (V_3, F_2) \}.$$

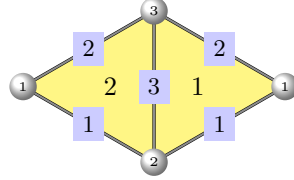


Abbildung 3: Janus-Head

4. Der Open-Bag ist eine simpliziale Fläche, die aus dem Janus-Head hervorgeht, wenn man die Kante e_2 verdoppelt, das heißt sie wird beschrieben durch

$$OB_0 = \{ V_1, V_2, V_3 \}, OB_1 = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}, OB_2 = \{ F_1, F_2 \} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{ (e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (e_4, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, e_4), (V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1),$$

$$(V_3, e_2), (V_3, e_4), (V_3, F_1), (V_3, F_2) \}.$$

Um simpliziale Flächen vollständig und vor allem einfacher beschreiben zu können, führt man eine weitere Notation ein. Diese hängt von der Nummerierung der Knoten, Kanten und Flächen ab. Abgesehen davon ist sie eindeutig.

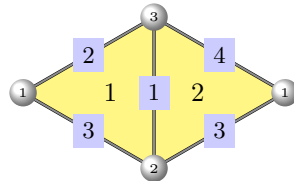


Abbildung 4: Open-Bag

Definition 2.4. Sei $(X, <)$ eine simpliziale Fläche, deren Knoten V_1, \dots, V_n , Kanten e_1, \dots, e_k und Flächen F_1, \dots, F_m ausgehend von ihrer Nummerierung linear geordnet sind. Das Symbol von $(X, <)$ ist definiert durch

$$\mu((X, <)) := (n, k, m; (X_0(e_1), \dots, X_0(e_k)), (X_1(F_1), \dots, X_1(F_m))).$$

Man kann im Symbol die Knoten V_i durch i , die Kanten e_j durch j und die Flächen F_l durch l ersetzen und nennt dann das resultierende Symbol das ordinale Symbol $\omega((X, <))$ von $(X, <)$.

Beispiel 2.5. Beispielsweise kann der Tetraeder $(T, <)$ durch das Symbol

$$\mu((T, <)) := (4, 6, 4; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}))$$

beschrieben werden.

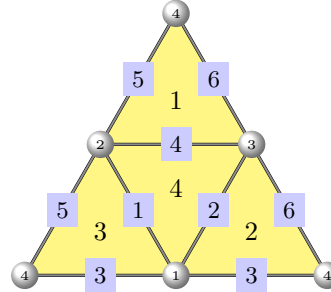


Abbildung 5: Tetraeder

Diese Notation wird später behilflich sein, einen vereinfachten Zugang zu der Manipulation simplizialer Flächen zu finden. Hier soll nun für gewisse Sphären skizziert werden, wie diese durch die Inzidenzen zwischen den Ecken und Flächen bis auf Isomorphie Eindeutig festgelegt werden können. Hierzu benötigt man jedoch folgende Definition.

Definition 2.6. Für eine simpliziale Fläche $(X, <)$ definiert man die Euler-Charakteristik $\chi(X)$ als

$$\chi(X) := |X_0| - |X_1| + |X_2|.$$

Beispiel 2.7. Betrachtet man die im obigem Beispiel eingeführten simplizialen Flächen, so erhält man folgende Euler-Charakteristiken:

1. $\chi(D) := |D_0| - |D_1| + |D_2| = 3 - 3 + 1 = 1$
2. $\chi(n\Delta) := |n\Delta_0| - |n\Delta_1| + |n\Delta_2| = 3n - 3n + n = n$
3. $\chi(J) := |J_0| - |J_1| + |J_2| = 3 - 3 + 2 = 2$
4. $\chi(OB) := |OB_0| - |OB_1| + |OB_2| = 4 - 6 + 4 = 2$

Bemerkung 2.8. Die Anzahl der Flächen einer geschlossenen simplizialen Fläche ist durch 2 teilbar, da

$$|X_2| = \frac{2|X_1|}{3}$$

gilt. Die Anzahl der Kanten ist insbesondere durch 3 teilbar. Genauer gesagt, existiert ein $\epsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|X_2| = 2\epsilon, |X_1| = 3\epsilon, |X_0| = \epsilon + \chi(X)$$

Man nennt ϵ den Flächen-Kanten-Parameter. Dieser erfüllt die Identitäten

$$\epsilon = \text{ggt}(|X_1|, |X_2|) = \frac{|X_1|}{3} = \frac{|X_2|}{2} = |X_1| - |X_2|.$$

Definition 2.9. Sei $(X, <)$ eine simpliziale Fläche und $i, j \in \{0, 1, 2\}$ mit $i \neq j$. Dann definiert man für ein $x \in X_i$ die Menge $X_j(x)$ als

$$X_j(x) := \{y \in X_j \mid x < y\}, \text{ falls } i < j$$

bzw.

$$X_j(x) := \{y \in X_i \mid y < x\}, \text{ falls } j < i.$$

Für $S \subseteq X_i$ ist

$$X_j(S) := \bigcup_{x \in S} X_j(x).$$

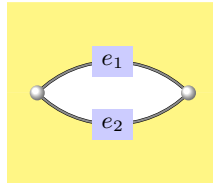
Bemerkung 2.10. Für eine simpliziale Fläche $(X, <)$ können die Axiome aus Definition 2.1 mit obiger Definition neu umformuliert werden:

- $|X_0(e)| = 2$ für alle $e \in X_1$,
- $|X_0(F)| = 3$ für alle $F \in X_2$,
- $|X_1(F)| = 3$ für alle $F \in X_2$,
- $1 \leq |X_2(e)| \leq 2$ für alle $e \in X_1$.

Definition 2.11. Eine geschlossene simpliziale Fläche ist eine simpliziale Fläche, deren Kanten alle innere Kanten sind. Eine geschlossene simpliziale Fläche der Euler-Charakteristik 2 nennt man Sphäre.

Definition 2.12. Sei X eine simpliziale Fläche.

Falls es verschiedene Kanten e_1, e_2 in X mit $X_0(e_1) = X_0(e_2)$ gibt, dann nennt man (e_1, e_2) einen 2-Waist.



Falls es paarweise verschiedene Kanten e_1, e_2, e_3 in X gibt, die $|X_0(e_1) \cup X_0(e_2) \cup X_0(e_3)| = 3$ und $X_2(e_i) \cap X_2(e_j) = \emptyset$ für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ erfüllen, dann nennt man (e_1, e_2, e_3) einen 3-Waist.

Mit dem Open-Bag ist bereits ein Beispiel für eine simpliziale Fläche mit einem 2-Waist bekannt. Beispiele für simpliziale Flächen mit einem 3-Waist folgen mit der Einführung der Multi-Tetraeder.

Definition 2.13. Sei X eine Sphäre mit einem 3-Waist (e_1, e_2, e_3) . Dann lässt sich X_2 in Mengen M_1, M_2 aufteilen, die Folgendes erfüllen:

- M_1, M_2 sind nichtleer und disjunkt

- $M_1 \cup M_2 = X_2$
- $|M_i \cap X_2(e_j)| = 1$ für $i = 1, 2$ und $j = 1, 2, 3$.
- M_1, M_2 sind maximal bezüglich Inklusion mit der Eigenschaft, dass es für jedes F in M_1 bzw. M_2 eine benachbarte Fläche F' in M_1 bzw. M_2 gibt.

Man nennt M_1, M_2 die 3-Waist Komponenten.

Analog definiert man auch 2-Waist Komponenten.

Definition 2.14. Sei X eine Sphäre mit einem 2-Waist (e_1, e_2) . Dann lässt sich X_2 in Mengen M_1, M_2 aufteilen, die Folgendes erfüllen:

- M_1, M_2 sind nichtleer und disjunkt
- $M_1 \cup M_2 = X_2$
- $|M_i \cap X_2(e_j)| = 1$ für $i = 1, 2$ und $j = 1, 2$.
- M_1, M_2 sind maximal bezüglich Inklusion mit der Eigenschaft, dass es für jedes F in M_1 bzw. M_2 eine benachbarte Fläche F' in M_1 bzw. M_2 gibt.

Man nennt M_1, M_2 die 2-Waist Komponenten.

2.2 Homomorphismen

Resultate

- elementare Eigenschaften von Homomorphismen simplizialer Flächen

Nachdem im letzten Abschnitt ein grundlegendes Verständnis für simpliziale Flächen erzielt wurde, führen wir in diesem Abschnitt Homomorphismen zwischen simplizialen Flächen ein. aus.

Definition 2.15. Seien $(X, <)$ und (Y, \prec) simpliziale Flächen.

1. Man nennt eine bijektive Abbildung $\alpha : X \rightarrow Y$ einen Isomorphismus, falls $A < B$ in $(X, <)$ genau dann gilt, wenn $\alpha(A) \prec \alpha(B)$ in (Y, \prec) gilt. In diesem Fall schreibt man $X \cong Y$.
2. Eine surjektive Abbildung $\alpha : X \rightarrow Y$ heißt Überdeckung, falls aus $A < B$ in $(X, <)$ folgt, dass $\alpha(A) \prec \alpha(B)$ in (Y, \prec) gilt.

Bemerkung 2.16. • Für $i = 0, 1, 2$ induziert eine Überdeckung $\alpha : X \rightarrow Y$ surjektive Abbildungen $X_i \rightarrow Y_i$.

- Für $i = 0, 1, 2$ induziert ein Isomorphismus $\beta : X \rightarrow Y$ bijektive Abbildungen $X_i \rightarrow Y_i$.
- Für eine simpliziale Fläche X und eine Fläche F in X sei $X(F)$ die simpliziale Fläche, die mit

$$X(F)_0 := X_0(F)$$

$$X(F)_1 := X_1(F)$$

$$X(F)_2 := \{F\}$$

identifiziert wird. Dann gilt für simpliziale Flächen X und Y mit Flächen $F \in X_2$ und $F' \in Y_2$, dass $X(F)$ und $Y(F')$ isomorph sind. Für einen Isomorphismus $\alpha : X(F) \mapsto Y(F')$ gibt es genau 6 Möglichkeiten.

- Zwei isomorphe simpliziale Flächen $(X, <)$ und $(Y, <)$ haben dieselbe Euler-Charakteristik, denn eine bijektive Abbildung $\alpha : X \rightarrow Y$ impliziert, wie oben schon erwähnt, bijektive Abbildungen $X_i \rightarrow Y_i$ für $i = 0, 1, 2$. Damit ist $|X_i| = |Y_i|$, woraus man

$$\chi(X) = |X_0| - |X_1| + |X_2| = |Y_0| - |Y_1| + |Y_2| = \chi(Y)$$

folgern kann.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition 2.17. Sei X eine simpliziale Fläche. Einen Isomorphismus ϕ von X nach X nennt man Automorphismus. Die Menge aller Automorphismen von X nach X mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung nennt man Automorphismengruppe von X und bezeichnet sie mit $\text{Aut}(X)$.

Beispiel 2.18. Die Automorphismengruppe des Dreiecks D besteht aus drei Spiegelungen und 3 Drehungen. Also ist

$$\text{Aut}(D) \cong D_3.$$

Bemerkung 2.19. Sei X eine Sphäre und F eine Fläche in X . Für $i = 0, 1$ sei

$$f : X_i(F) \mapsto X_i(F)$$

eine bijektive Abbildung. Dann gibt es höchstens einen Automorphismus $\phi \in \text{Aut}(X)$ mit

$$\phi(x) = f(x)$$

für $x \in X_i(F)$.

2.3 Vertex-treue Sphären

Vom besonderem Interesse sind jene simpliziale Flächen für die es reicht, die Menge der Ecken der zu den jeweiligen Flächen anzugeben, um so die Kanten und Flächen und somit auch die simpliziale Fläche eindeutig festzulegen. An dieser Stelle werden einführende Beispiel und Definitionen präsentiert, damit im Kapitel .. und Kapitel .. tiefere Resultate formuliert werden können.

Definition 2.20. *Man nennt eine simpliziale Fläche $(X, <)$ vertex-treu, falls die Abbildung*

$$X_1 \cup X_2 \rightarrow \text{Pot}(X_0), S \mapsto X_0(S)$$

injektiv ist.

Falls dies der Fall ist, identifiziert man die Kanten und Flächen mit ihren Bildern unter obiger Abbildung, das heißt $X_1 \subseteq \text{Pot}_2(X_0)$ bzw. $X_2 \subseteq \text{Pot}_3(X_0)$.

Beispiel 2.21. • *Eine simpliziale Fläche mit einem 2-Waist ist nicht vertex-treu.*

- *Der Janus-Head ist nicht vertex-treu, da die beiden Flächen zu den selben drei Ecken inzident sind.*

Definition 2.22. *Sei P eine endliche Menge mit mindestens 3 Elementen. Eine nicht-leere Menge $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$ für die $P = \bigcup_{F \in \xi} F$ gilt, nennt man einen Flächenträger auf P , falls für alle $V \in P$ die Menge aller $F_i \in \xi$ mit $V \in F_i$ in einen Zykel (F_1, \dots, F_n) geschrieben werden kann, sodass $|F_i \cap F_{i+1}| = 2$ für $i = 1, \dots, n-1$ gilt und aus $|F_i \cap F_{i+1}| = 2$ entweder $|i - j| = 1$ oder $\{i, j\} = \{1, n\}$ folgt.*

Lemma 2.23. *Sei P eine endliche Menge und $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$ ein Flächenträger. Dann definiert $\mathcal{S}(\xi)$ mit den Mengen*

$$\mathcal{S}(\xi)_i := \{A \subseteq F \mid F \in \xi, |A| = i + 1\} \text{ fuer } i = 0, 1, 2$$

eine vertex-treue simpliziale Fläche, wobei die Inzidenz $<$ durch Mengeninklusion gegeben ist. Man nennt \mathcal{S} , die durch ξ getragene Fläche.

Beweis. Der Beweis kann dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* entnommen werden. \square

Beispiel 2.24. *Der Flächenträger*

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

bildet eine getragene simpliziale Fläche, die zum Tetraeder isomorph ist.

1. Der Butterfly lässt sich durch

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

darstellen.

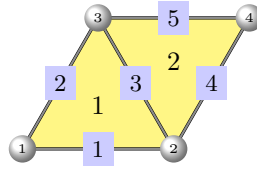


Abbildung 6: Butterfly

2. Für $n \geq 3$ definiert man den Double- n -gon $(n)^2$ durch den Flächenträger

$$\zeta = \{\{1, i, i+1\}, \{i, i+1, n+2\} \mid i = 2 \dots n-1\} \cup \{\{1, 2, n+1\}, \{2, n+1, n+2\}\}$$

3. Für $n = 4$ erhält man beispielsweise den Oktaeder O mit dem Flächenträger

$$\zeta = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 3, 4\}, \{6, 4, 5\}, \{6, 2, 5\}\}$$

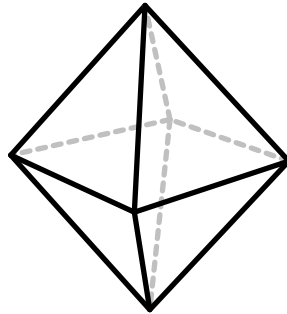


Abbildung 7: Oktaeder

3 Der Face-graph simplizialer Flächen

benötigte Vorkenntnisse

- Definition einer simplizialen Fläche
- elementare Eigenschaften simplizialer Flächen

In diesem Abschnitt der Arbeit wird der Face-graph einer simplizialen Fläche behandelt. Genauer gesagt wird thematisiert, wie viel Struktur die Kanten-Flächen-Inzidenzen einer simplizialen Fläche liefern können. Für diesen Abschnitt nehme man ohne Einschränkung an, dass die Flächenmenge einer simplizialen Fläche mit

n Flächen durch $\{1, \dots, n\}$ gegeben ist.

Hauptresultate

- Definition einer simplizialen Fläche
- elementare Eigenschaften simplizialer Flächen

Definition 3.1. Sei X eine Sphäre, dann definiert man den Face-Graph $G_X = (V, E)$ von X durch die Knotenmenge $V = X_2$ und die Kantenmenge $E = X_1$. Zwei Knoten F, F' des Graphen sind adjazent, falls es eine Kante $e \in X_1$ gibt, die $X_2(e) = \{F, F'\}$ erfüllt.

Beispiel 3.2. Der Face-Graph des Tetraeders bildet einen vollständigen Graphen mit vier Knoten.

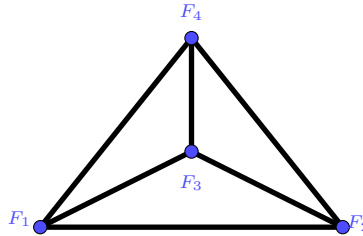


Abbildung 8: Face-Graph des Tetraeders

Bemerkung 3.3. Abgesehen vom Tetraeder ist jeder Facegraph einer Sphäre mit höchstens 3 Farben färbbar.

Definition 3.4. Sei X eine Sphäre. Dann definiert man die Matrix $F_X \in \{0, 1\}^{n \times n}$ durch

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in X_2(X_1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nennt F_X die Flächen-Inzidenz-Matrix.

Beispiel 3.5. Für den Oktaeder wie in Beispiel 2.24 beschrieben, erhält man die Flächen-Inzidenz-Matrix

$$F_O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.6. • *In jeder Spalte und Zeile der Flächen-Inzidenz-Matrix einer vertex-treuen simplizialen Fläche befinden sich genau 3 Einsen.*

- *Die Flächen-Inzidenz-Matrix einer simplizialen Fläche ist symmetrisch.*
- $\lambda = 3$ *ist ein Eigenwert der Flächen-Inzidenz-Matrix einer vertex-treuen Sphäre.*

Lemma 3.7. *Seien X und Y zwei isomorphe simpliziale Flächen. Dann existiert eine Permutationsmatrix $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ so, dass*

$$F_X = PF_Y P^{-1}$$

Beweis. Sei $\alpha : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus von X nach Y . Dieser induziert eine bijektive Abbildung $\beta : X_2 \rightarrow Y_2$, wobei $X_2 = Y_2 = \{1, \dots, n\}$ gilt. Mithilfe der Abbildung β , kann die Permutationsmatrix $P \in \{0, 1\}^n$ mit

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & \beta(i) = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

konstruiert werden. Dies liefert die obige Behauptung, denn es gilt

$$(PM_Y P^{-1})_{ij} = (M_Y)_{\beta(i), \beta(j)} = (M_X)_{i,j}$$

.

□

Bemerkung 3.8. *Die Umkehrung ist jedoch nur richtig, wenn man sich auf den Fall $\chi(X) = 2$ beschränkt. Dies wird hier jedoch nicht ausgeführt. Von größerem Interesse ist an dieser Stelle, der Zusammenhang zwischen einer Sphäre und einer aus dieser durch Anwenden einer der oben eingeführten Operationen hervorgehenden Sphäre. Sei X eine Sphäre mit zugehörigen Inzidenz-Matrizen F_X und U_X*

1. Butterfly Deletion

- *Sei e eine Kante in X für die die Butterfly Deletion durchführbar ist und $X_2(e) = \{i_1, i_2\}$. Dann gibt es genau zwei Flächen j_1, j_2 , die zu i_2 verschieden sind und zu i_1 adjazent sind. Analog gibt es j_3, j_4 , die zu i_1 verschieden sind und zu i_2 adjazent sind. Sei zudem $F \in \{0, 1\}^{n \times n}$ die Matrix, die durch*

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in \{(j_1, j_2), (j_2, j_1)\} \\ 1, & (i, j) \in \{(j_3, j_4), (j_4, j_3)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

entsteht. Dann geht die Flächen-Inzidenz-Matrix $F_{e\beta(X)}$ durch Streichen der i_1 - und i_2 -ten Zeilen und Spalten aus F hervor.

2. Butterfly Insertion

- Für Kanten e_1, e_2 für die eine Butterfly Insertion durchführbar ist und $X_2(e_1) = \{i_1, j_1\}$ und $X_2(e_2) = \{i_2, j_2\}$ erhält man die Matrix $F_{\beta_{e_1, e_2}}$ durch die Matrix

$$F_{i,j} = \begin{cases} 0, & (i,j) \in \{(i_1, j_1), (j_1, i_1)\} \\ 0, & (i,j) \in \{(i_2, j_2), (j_2, i_2)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

den Vektor $v \in \{0, 1\}^n$

$$v_i = \begin{cases} 1, & i = i_1, j_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Vektor $w \in \{0, 1\}^n$

$$w_i = \begin{cases} 1, & i = i_2, j_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

indem man diese zur Blockmatrix

$$\left[\begin{array}{c|cc} F & v & w \\ \hline v^{tr} & 0 & 1 \\ w^{tr} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

zusammensetzt.

3. Kantendrehung

- Sei $e \in X_1$ eine drehbare Kante. Dann ist $X_2(e) = \{i_1, i_2\}$ und $X_2(X_1(\{i_1, i_2\})) - \{i_1, i_2\} = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ für paarweise verschiedene $i_1, i_2, j_1, j_2, j_3, j_4$, die

$$X_0(e) \cap X_0(j_1) \cap X_0(j_2) \neq \emptyset$$

$$\text{und } X_0(e) \cap X_0(j_3) \cap X_0(j_4) \neq \emptyset$$

erfüllen. Die Flächen-Inzidenz-Matrix $F_{X^e} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ erhält man durch

$$F_{X^e_{i,j}} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in \{(i_1, j_2), (j_2, i_1)\} \\ 0, & (i,j) \in \{(i_1, j_3), (j_3, i_1)\} \\ 1, & (i,j) \in \{(i_2, j_3), (j_3, i_2)\} \\ 0, & (i,j) \in \{(i_2, j_2), (j_2, i_2)\} \\ (F_X)_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Tetraedererweiterung

- Sei $X_2(i) = \{j, k, l\}$ für paarweise verschiedene j, k, l . Dann erhält man die Matrix $F_{T^i(X)}$ durch die Matrix F die durch Streichen der i -ten Zeilen und Spalten aus $F_{T(X)}$ hervorgeht und durch die Zusammensetzung

$$\left[\begin{array}{c|ccc} F & e_j & e_k & e_l \\ \hline e_j^{tr} & 0 & 1 & 1 \\ e_k^{tr} & 1 & 0 & 1 \\ e_l^{tr} & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

wobei e_j, e_k, e_l die jeweiligen Einheitsvektoren mit $n-1$ Einträgen sind.

- Sei $V \in X_0$ eine Ecke vom Grad 3 in X . Dann ist $X_2(V) = \{i_1, i_2, i_3\}$ und $X_2(X_1(X_2(V))) - X_2(V) = \{j, k, l\} \subset X_2$. Sei $F \in \{0, 1\}^{n-3 \times n-3}$ die Matrix, die durch Streichen der i_1 -ten, i_2 -ten und i_3 -ten Zeilen und Spalten aus F_X entsteht und $v \in \{0, 1\}^{n-3}$ der Vektor mit

$$v_i = \begin{cases} 1, & i \in \{j, k, l\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann erhält man $F_{T_V(X)}$ durch

$$\left[\begin{array}{c|c} F & v \\ \hline v^{tr} & 0 \end{array} \right]$$

Definition 3.9. Für $k \leq l$ und $k \leq m$ definiert man $I_k^{l,m} \in \{0, 1\}^{l \times m}$ als

$$\begin{pmatrix} I_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{l-k,k} & 0_{l-k,m-k} \end{pmatrix}.$$

Satz 3.10. Sei X eine Sphäre mit einem 2-Waist. Dann gibt es eine Permutationsmatrix $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ so, dass F_X sich auf die Gestalt

$$PF_X P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A & I_2^{k,n-k} \\ \hline I_2^{k,n-k} & B \end{array} \right]$$

bringen lässt, wobei k die Anzahl der Flächen in der 2-Waist Komponente M_1 ist.

Beweis. Seien $M_1 = \{i_1, \dots, i_k\}$, $M_1 = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ die 2 Waist Komponenten des 2-Waists (e_1, e_2) in X . Seien ohne Einschränkung i_1, j_1 e_1 -Nachbarn und i_2, j_2 e_2 -Nachbarn. Man vertauscht die folgenden Zeilen und Spalten:

- Man tauscht die j_1 -te Zeile mit der ersten Zeile und die j_1 -Spalte mit der ersten Spalte.

- Man tauscht die $j_2 - te$ Zeile mit der zweiten Zeile und die j_1 -Spalte mit der zweiten Spalte.
- Falls die $3 \leq i \leq k$ in M_2 ist, dann tauscht man die i -te Zeile mit einer der letzten $n - k$ Zeilen, die zu einer Fläche in M_1 gehört. Selbiges gilt für die i -te Spalte.

So erhält man eine Flächen Matrix, in der die ersten k Zeilen bzw. Spalten zu Flächen in M_1 gehören und die restlichen $n - k$ Zeilen zu Flächen in M_2 . Beim genaueren betrachten erkennt man, dass die durch Permutationen entstandene Matrix die gewünschte Gestalt hat. Da diese Gestalt ausschließlich durch simultanes Vertauschen der Zeilen bzw. Spalten der Matrix F_X erzielt wurde, existiert also eine Permutationsmatrix P , sodass die Multiplikation von links und die Multiplikation des Inversen von rechts die skizzierte Form hervorbringt. \square

Satz 3.11. *Sei X eine Sphäre mit einem 3-Waist. Dann gibt es eine Permutationsmatrix $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ so, dass F_X sich auf die Gestalt*

$$PF_X P = \left[\begin{array}{c|c} A & I_3^{l, n-l} \\ \hline I_3^{n-l, l} & B \end{array} \right]$$

bringen lässt, wobei $A \in \{0, 1\}^l$ und $B \in \{0, 1\}^{n-l}$.

Beweis. Analog \square

4 Manipulation simplizialer Flächen

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehungen

Die-

ses Kapitel beschreibt das Manipulieren simplizialer Flächen, um neue simpliziale Flächen konstruieren. Im Genauerem werden nun die Operationen

- Butterfly Deletion, #
- Kantendrehung,
- Butterfly Insertion #
- und Tetraedererweiterung

eingeführt. Diese Operationen kann man ebenfalls dem Skript entnehmen und sind somit nur als eine Wiederholung zu verstehen. Im Teil der die Kantendrehung näher erläutert, ist es Ziel die Transitivität dieser Operation unter strikteren Bedingungen zu formulieren und zu beweisen. Für die Definition der Konstruktionen nimmt man an, dass X eine simpliziale Fläche mit $|X_2| \geq 4$ ist.

4.1 Tetraeder

Um das Erweitern durch Tetraeder zu beschreiben, wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass die betrachteten Sphären vertex-treu sind. Es ist möglich, eine Definition der Erweiterungen auch in dem allgemeinen Fall anzugeben, aber hierauf wird an dieser Stelle verzichtet. Hilfreich hierfür ist die Definition von getragenen Flächen. Man betrachte zunächst folgendes Lemma.

Lemma 4.1. *Seien U, P, Q endliche Mengen für die $U = P \cup Q$ und $|P \cap Q| \geq 3$ gilt. Außerdem sind $U \setminus P \neq \emptyset$ und $U \setminus Q \neq \emptyset$. Weiter seien $\xi \subseteq \text{Pot}_3(P)$ ein Flächenträger auf P und $\zeta \subseteq \text{Pot}_3(Q)$ ein Flächenträger auf Q so, dass $\zeta \cap \xi$ ein Flächenträger auf $P \cap Q$ ist. Dann ist die symmetrische Differenz $\pi := \xi \Delta \zeta$ ein Flächenträger einer simplizialen Fläche, falls es einen Knoten gibt, der in all den Mengen $\mathcal{S}(\xi), \mathcal{S}(\zeta), \mathcal{S}(\xi \cap \zeta)$ liegt.*

Definition 4.2. *Sei X eine vertex-treue Sphäre, beschrieben durch den Flächenträger ξ und F eine Fläche in X mit $X_0(F) = \{V_1, V_2, V_3\}$. Sei nun $P \notin X_0$, dann definieren wir einen Tetraeder durch den Flächenträger*

$$\xi_T = \{\{V_1, V_2, V_3\}, \{P, V_1, V_2\}, \{P, V_1, V_3\}, \{P, V_2, V_3\}\}$$

und damit die simpliziale Fläche Y , die durch $\xi \Delta \xi_T$ getragen wird. Man sagt Y entsteht durch das Anhängen eines Tetraeders an X an der Fläche F und bezeichnet sie mit $T^F(X)$.

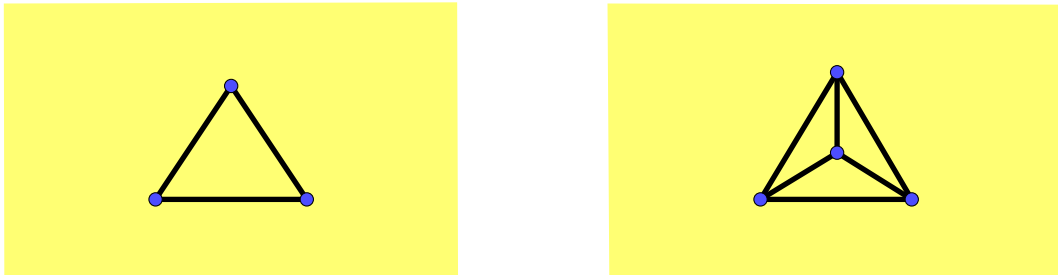


Abbildung 9: Tetraedererweiterung

In Gap:

```

gap>AddTetra:=function(SSaddtetra,T2)
>    local VerticesEdges,EdgesFaces,n,g,L,M;
>    VerticesEdges:=ShallowCopy(VerticesOfEdges(SSaddtetra));
>    EdgesFaces:=ShallowCopy(EdgesOfFaces(SSaddtetra));
>    n:=Length(VerticesEdges);
>    L:=[[ ],[ ]];
>    M:=[ ];
>    for g in VerticesOfEdges(T2) do
>        if not (g in VerticesEdges) then
>            Add(VerticesEdges,g);
>            Add(M,[Position(VerticesOfEdges(T2),g),g]);
>        else
>            Add(L[1],Position(VerticesOfEdges(SSaddtetra),g));
>            Add(L[2],g);
>        fi;
>    od;
>    EdgesFaces:=CRemove(EdgesFaces,Position(EdgesFaces,Set(L[1]) ));
>    if Intersection(L[2][1],M[1][2])=[ ] then
>        Add(EdgesFaces,[L[1][1],n+2,n+3]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][2],n+1,n+2]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][3],n+1,n+3]);
>    fi;
>    if Intersection(L[2][1],M[2][2])=[ ] then
>        Add(EdgesFaces,[L[1][1],n+1,n+3]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][2],n+1,n+2]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][3],n+2,n+3]);
>    fi;
>    if Intersection(L[2][1],M[3][2])=[ ] then
>        Add(EdgesFaces,[L[1][1],n+2,n+1]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][2],n+1,n+3]);
>        Add(EdgesFaces,[L[1][3],n+2,n+3]);
>    fi;
>    EdgesFaces:=CRemove(EdgesFaces,Position(EdgesFaces,Set(L[1]) ));
>    return SimplicialSurfaceByDownwardIncidence(VerticesEdges,EdgesFaces);
>end;

```

Definition 4.3. *Sei X eine vertex-treue Sphäre, die durch den Träger ξ beschrieben wird und $P \in X_0$ eine Ecke vom Grad 3. Dann gibt es Ecken V_1, V_2, V_3 , sodass*

$$X_0(X_2(P)) = \{P, V_1, V_2, V_3\}$$

ist. Da X vertex-treu ist, identifiziert man die Flächen in X_2 mit den inzidenten Ecken. Man definiert nun einen Tetraeder durch den Träger

$$\xi_T = \{\{V_1, V_2, V_3\}, \{P, V_1, V_2\}, \{P, V_1, V_3\}, \{P, V_2, V_3\}\}.$$

Dadurch entsteht die simpliziale Fläche Y , die durch $\xi \Delta \xi_T$ getragen wird. Man sagt Y ist dadurch entstanden, dass der Tetraeder an der Stelle P entfernt wurde und bezeichnet sie mit $T_P(X)$.

In Gap:

```

RemoveTetra:=function(SSremovetetra,V)
  local Ver,NewEdgFac,E1,E2,E3,NewVerEdg,NewVerEdg2,NewVerEdg3,
  NewEdgFac2,F,VF,i,NewEdgFac3,NewEdgFac4,NewEdg5,g,h,l;
  if Length(Intersection(SSremovetetra,T))=5 then
    return SSremovetetra;
  fi;
  if IsIsomorphic(SSremovetetra,T) then
    return SSremovetetra;
  fi;
  NewEdgFac:=ShallowList(EdgesOfFaces(SSremovetetra));
  NewVerEdg:=ShallowList(EdgesOfFaces(SSremovetetra));
  if FaceDegreeOfVertex(SSremovetetra,V)=3 then
    F:=FacesOfVertex(SSremovetetra,V);
    NewEdgFac:=CRemove(NewEdgFac,Position(NewEdgFac,EdgesOfFace(SSremovetetra,F[1])));
    NewEdgFac:=CRemove(NewEdgFac,Position(NewEdgFac,EdgesOfFace(SSremovetetra,F[2])));
    NewEdgFac:=CRemove(NewEdgFac,Position(NewEdgFac,EdgesOfFace(SSremovetetra,F[3])));
    VF:=Union(VerticesOfFace(SSremovetetra,F[1]),VerticesOfFace(SSremovetetra,F[2]));
    Remove(VF,Position(VF,V));
    E1:=Filtered(EdgesOfFace(SSremovetetra,F[1]),g->Set(VerticesOfEdge(SSremovetetra,g),
    [Set([VF[1],VF[2]]),Set([VF[1],VF[3]]),Set([VF[2],VF[3]])])[1];
    E2:=Filtered(EdgesOfFace(SSremovetetra,F[2]),g->Set(VerticesOfEdge(SSremovetetra,g),
    [Set([VF[1],VF[2]]),Set([VF[1],VF[3]]),Set([VF[2],VF[3]])])[1];
    E3:=Filtered(EdgesOfFace(SSremovetetra,F[3]),g->Set(VerticesOfEdge(SSremovetetra,g),
    [Set([VF[1],VF[2]]),Set([VF[1],VF[3]]),Set([VF[2],VF[3]])])[1];
    Add(NewEdgFac,[E1,E2,E3]);
    NewVerEdg:=ShallowList(VerticesOfEdges(SSremovetetra));
    for g in EdgesOfVertex(SSremovetetra,V) do
      NewVerEdg:=CRemove(NewVerEdg,g);
    od;
  fi;
  return SimplicialSurfaceByDownwardIncidence(NewVerEdg,NewEdgFac);
end;

```

4.2 Butterfly Deletion

Definition 4.4. Sei X eine Sphäre mit paarweise verschiedenen Ecken $V_1 \dots, V_4$, Kanten e_1, \dots, e_5 und Flächen F_1, F_2 , die folgende Relationen erfüllt:

- $X_2(e_1) = \{F_1, F_2\}$
- $X_0(X_2(e_1)) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
- $X_1(X_2(e_1)) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- $(X_0(e_1), X_0(e_2), X_0(e_3), X_0(e_4), X_0(e_5)) = (\{V_2, V_4\}, \{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_1, V_4\})$
- $(X_1(F_1), X_1(F_2)) = (\{e_1, e_2, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4\})$

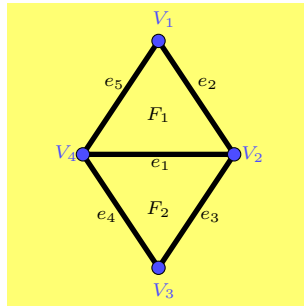


Abbildung 10: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Man erhält die simpliziale Fläche ${}^{e_1}\beta(X)$, die durch das Symbol $\mu({}^{e_1}\beta(X))$ beschrieben wird, durch das Anwenden der folgenden Schritte beim ordinalen Symbol $\mu((X, <))$:

- die Anzahl der Ecken wird um 1, die Flächenanzahl um 2 und die Kantenanzahl um 3 verringert.
- der Eintrag $X_0(e_1)$ an der Stelle e_1 , der Eintrag $X_0(e_2)$ an der Stelle e_2 und Eintrag $X_0(e_3)$ an der Stelle e_3 werden gelöscht.
- der Eintrag $X_1(F_1)$ an der Stelle F_1 und der Eintrag $X_1(F_2)$ an der Stelle F_2 werden gelöscht.
- an jeder Stelle \bar{F} in der e_2 in $X_1(\bar{F})$ vorkommt, wird e_2 durch e_5 ersetzt
- an jeder Stelle \bar{F} in der e_3 in $X_1(\bar{F})$ vorkommt, wird e_3 durch e_4 ersetzt,
- an jeder Stelle \bar{e} an der V_2 in $X_0(\bar{e})$ vorkommt, wird V_2 durch V_4 ersetzt.

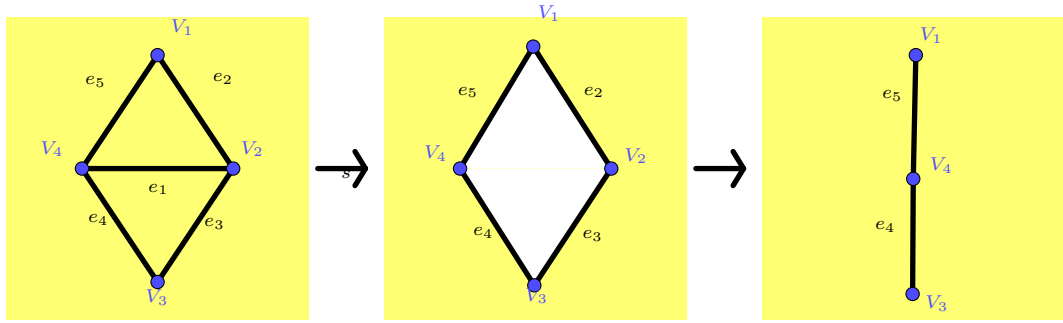


Abbildung 11: Butterfly Deletion

Zur Durchführung der Butterfly-Deletion reicht jedoch die Angabe der Kante e_1 , da die Flächen durch $X_2(e_1)$, die Kanten durch $X_1(X_2(e_1))$ und die Ecken $X_0(X_2(e_1))$ eindeutig festgelegt sind. Es gibt 2 Möglichkeiten die obigen Kanten und Flächen zu wählen, doch beide Wahlen liefern isomorphe simpliziale Flächen.

Dies soll an dieser Stelle mit dem Oktaeder O und der Kante 1 durchgeführt werden. Außerdem gebraucht, wird die Wahl

$$(V_1, V_2, V_3, V_4, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, F_1, F_2) = \\ (3, 1, 5, 2, 1, 2, 4, 6, 5, 1, 3)$$

Dieser wird durch das Symbol

$$\mu((O, <)) = (6, 12, 8; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\}))$$

beschrieben.

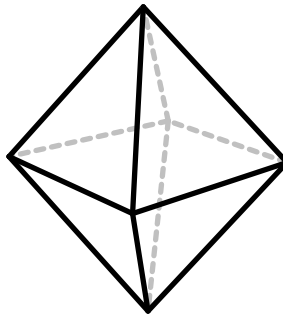


Abbildung 12: Oktaeder

Zunächst werden die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen angepasst.

$$(5, 9, 6; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Nun werden die Einträge $X_0(1), X_0(2), X_0(4)$ gelöscht

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Löschen der Einträge $X_1(1), X_1(3)$ führt zu:

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}\{5, 7, 9\}, \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})))$$

Nun ersetzt in der Beschreibung für die Kanten-Flächen-Inzidenz jedes Vorkommen der Kante 2 bzw. 4 durch die Kante 5 bzw. 6.

$$(5, 9, 6; (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 6, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{3, 8, 10\}, \{10, 11, 12\})))$$

Durch Ersetzen der Ecke 1 durch die Ecke 2 in der Beschreibung der Ecken-Kanten-Inzidenz erhält man letztlich das ordinale Symbol:

$$(5, 9, 6; (\{2, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \\ \{2, 6\}, \{3, 4\}\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}); \\ (\{6, 7, 12\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 6, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{3, 8, 10\}, \{10, 11, 12\}))),$$

welches eine simpliziale Fläche beschreibt, die isomorph zum Double-Tetraeder ist.

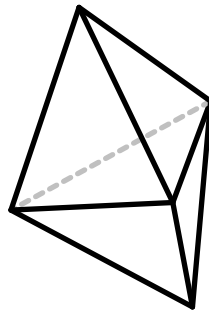


Abbildung 13: Double-Tetraeder

4.3 Butterfly Insertion

Definition 4.5. Sei X eine Sphäre Fläche mit paarweise verschiedenen Ecken V, V_1, V_2 , Kanten $e_1, \dots, e_5 \in X_1$ und Flächen $F, F_1, F_2 \in X_2$, die $X_0(e_1) \cap X_0(e_2) = \{V\}$ erfüllen.

Falls $X_2(e_1) \cap X_2(e_2) = \{F\}$ für ein $F \in X_2$ ist, dann kann man folgende Relationen festsetzen:

- $(X_0(e_1), X_0(e_2)) = (\{V, V_1\}, \{V, V_2\})$
- $(X_2(e_1), X_2(e_2)) = (\{F, F_1\}, \{F, F_2\})$ für Flächen F_1, F_2 .

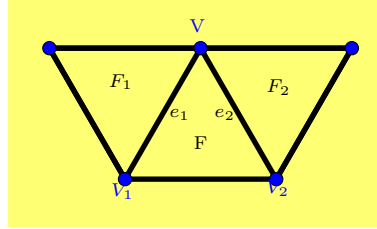


Abbildung 14: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Die simpliziale Fläche $\beta(X)_{e_1, e_2}$ wird dann durch

$$\beta(X)_{e_1, e_2} = T^F(X)$$

definiert. Falls aber $X_2(e_1) \cap X_2(e_2) = \emptyset$ ist, so erhält man folgende Relationen:

- $(X_0(e_1), X_0(e_2)) = (\{V, V_1\}, \{V, V_2\})$
- $(X_2(e_1), X_2(e_2)) = (\{F_1^1, F_1^2\}, \{F_2^1, F_2^2\})$ für Flächen $F_1^1, F_1^2, F_2^1, F_2^2$.
- $(F_1^1, F_1^2, \dots, F_2^2, F_2^1 \dots)$ ist der zu V zugehörige Schirm.
- Es gibt Kanten $M = \{i_1, \dots, i_k\}$, sodass $\{e_j, i_j\} = X_1(F_j^2)$ und i_l, i_{l+1} in $X_2(F)$ für ein $F \in X_2(V)$ gilt. Außerdem ist

$$X_0(e_1) \cap X_0(i_1) \cap \dots \cap X_0(i_k) \cap X_0(e_2) = \{V\}.$$

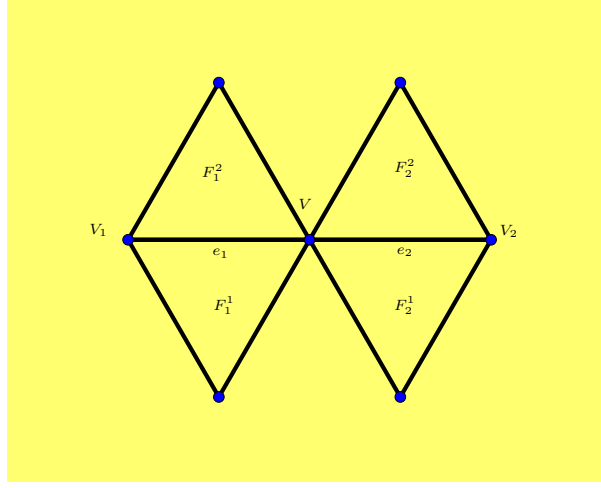


Abbildung 15: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Man erhält die simpliziale Fläche $\beta(X)_{e_1, e_2}$, welche durch das ordinale Symbol $\mu(\beta(X)_{e_1, e_2})$ beschrieben wird, indem man eine neue Ecke V' , Kanten e, e'_1, e'_2 und Flächen F', F'' einführt und beim ordinale Symbol $\mu((X, <))$

- Die Eckanzahl wird um 1, die Flächenanzahl um 2 und die Kantenanzahl um 3 erhöht
- an der Stelle F_1^1 beim Eintrag $X_0(F_1^1)$ die Kante e_1 durch e'_1 ersetzt,
- an der Stelle F_2^1 beim Eintrag $X_0(F_2^1)$ die Kante e_2 durch e'_2 ersetzt,
- an jeder Stelle i aus M in der V in $X_0(i)$ vorkommt, ersetzt man V durch V' ,
- bei der Beschreibung für die Ecken-Kanten-Inzidenz fügt man $\{V, V'\}$ für die Kante e , $\{V, V_1\}$ für die Kante e'_1 und $\{V, V_2\}$ für die Kante e'_2 hinzufügt,
- und bei der Beschreibung für die Kanten-Flächen Inzidenz man $\{e, e_1, e'_1\}$ für die Fläche F' und $\{e, e_2, e'_2\}$ für die Fläche F'' hinzufügt

Klarerweise sind Butterfly Deletion und Butterfly Insertion invers zueinander.

4.4 Kantendrehungen

Dieses Kapitel soll als Wiederholung der Resultate der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" dienen und zugleich einen anderen Zugang zu der Thematik der Kantendrehungen liefern. Dort wurde der Zugang durch die Mender- und Cutteroperatoren ermöglicht, wohingegen hier versucht wird, die symmetrische Differenz zur Durchführung der Kantendrehungen auszunutzen. Deshalb werden hier zunächst die einführenden Definitionen umformuliert und die daraus folgenden Resultate ohne Beweis zusammengefasst. Als Hauptresultat wird hier die Transitivität

der Kantendrehungen auf der Menge der Sphären ohne 2-Waist unter strikteren Einschränkungen bewiesen.

Definition 4.6. Sei X eine vertex-treue Sphäre. Man nennt eine Kante $e \in X_1$ drehbar, falls es keine Kante $e' \in X_1 \setminus \{e\}$ mit $X_0(e') = X_0(X_2(e)) - X_0(e)$ gibt.

In Gap:

```
gap> IsTurnableEdge:=function(S,e)
>   local g,voe;
>   voe:=VerticesOfEdge(S,e);
>   for g in Edges(S) do
>     if g<> e and Set(VerticesOfEdge(S,g))=Set(voe) then
>       return false;
>     fi;
>   od;
>   return true;
>end;
```

Definition 4.7. Sei X eine vertex-treue Sphäre, ξ der zugehörige Flächenträger und e eine drehbare Kante in X . Dann definiert man die durch die Kantendrehung e entstandene Sphäre X^e durch den Flächenträger $\xi\Delta Pot_3(X_0(X_2(e)))$.

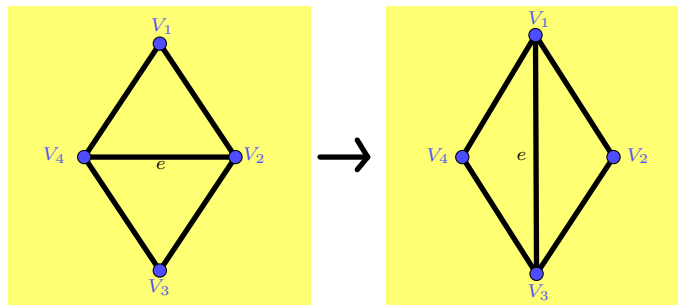


Abbildung 16: Kantendrehung

Als einführendes Beispiel wird die Kantendrehung am Double-6-gon durchgeführt. Dieser hat bis auf Isomorphie

$$\xi = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 2, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 3, 4\}, \{8, 4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

als Flächenträger.

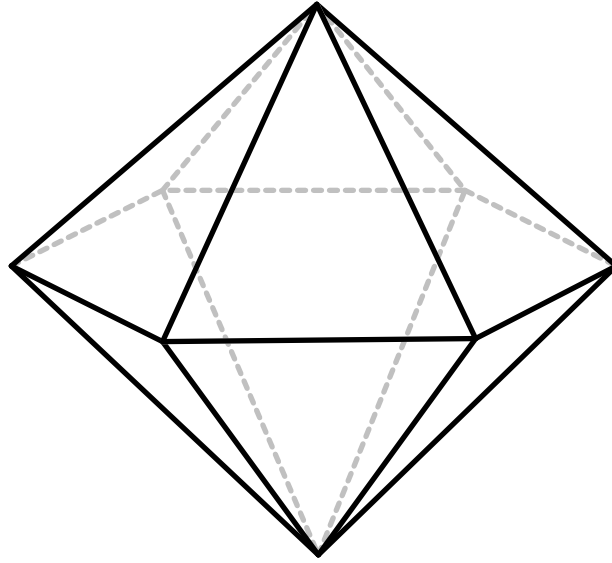


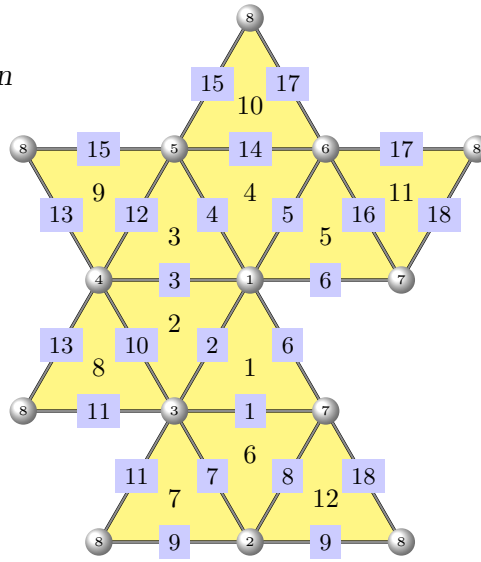
Abbildung 17: Double-6-gon

Durch näheres Betrachten erkennt man, dass alle Kanten des Double-6-gons drehbar sind. Bis auf Isomorphie gibt es jedoch nur zwei Kanten in dem Double-6-gon, nämlich

- Kanten, die zu zwei Ecken vom Grad 4 inzident sind und
- Kanten, die zu einer Ecke vom Grad 6 und zu einer Ecke vom Grad 4 inzident sind.
- Die Kante e , die zu den Ecken 3 und 4 inzident ist, gehört zu den ersteren Kanten und durch Drehen dieser erhält man den Flächenträger

$$\xi^e = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 2, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 1, 4\}, \{8, 4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

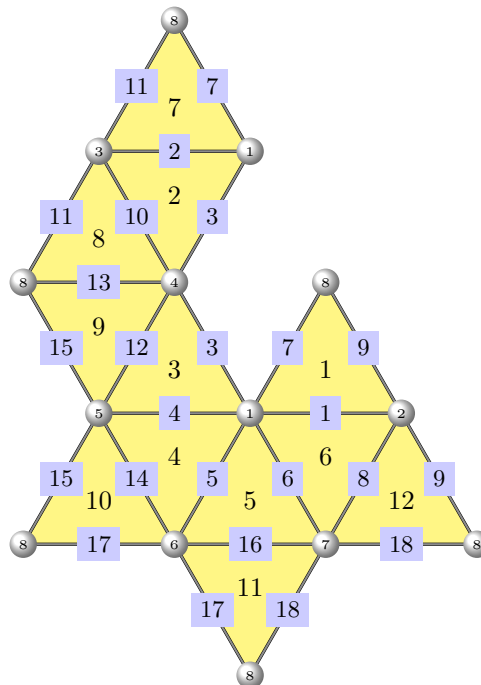
und die zugehörige Fläche $((6)^2)^e$.

Abbildung 18: Kantendrehung am $(6)^2$

- Durch Drehen der Kante e' , die zu den Ecken 1 und 2 inzident ist, wird der Flächenträger

$$\xi^{e'} = \{\{1, 3, 7\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 7\}, \\ \{8, 2, 3\}, \{8, 1, 4\}, \{8, 4, 5\}, \{8, 5, 6\}, \{8, 6, 7\}, \{8, 2, 7\}\}$$

erzeugt und somit die Sphäre $((6)^2)^{e'}$ konstruiert.

Abbildung 19: Kantendrehung am $(6)^2$

Beachte, dass die obigen Sphären nicht isomorph sind und beide nicht drehbare Kanten enthalten.

Definition 4.8. Für eine Sphäre $(X, <)$ und Kanten e_1, \dots, e_n in X führt man die folgende Konstruktion durch

- Sei e_1 eine drehbare Kante in X und e_2 eine drehbare Kante in X^{e_1} , dann definiert man $X^{(e_1, e_2)}$ als $(X^{e_1})^{e_2}$.
- Falls e_{i+1} eine drehbare Kante in $X^{(e_1, \dots, e_i)}$ ist, dann definiert man für $2 \leq i \leq n-1$ die Sphäre $X^{(e_1, \dots, e_{i+1})}$ als $(X^{(e_1, \dots, e_i)})^{e_{i+1}}$.

Man nennt $E = (e_1, \dots, e_n)$ eine drehbare Kantensequenz in X und X^E die durch die Kantensequenz entstandene simpliziale Fläche.

In Gap:

```
gap> EdgeTurnSequence:=function(S, TurnEdges)
>   local tempS;
>   tempS:=S;
>   for e in TurnEdges do
>     if IsTurnableEdge(tempS, e) then
>       tempS:=EdgeTurn(tempS, e);
>     else
>       return false;
>     fi;
>   od;
>   return tempS;
>end;
```

Bemerkung 4.9. Kantendrehungen sind nicht kommutativ. Das heißt im Allgemeinen gilt für drehbare Kanten e_1, e_2 in X zwischen $X^{(e_1, e_2)}$ und $X^{(e_2, e_1)}$ keine Gleichheit.

Wie oben schon erwähnt wurden die Kantendrehungen in der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" allgemeiner formuliert. Es wurde zugelassen, dass Kantendrehungen auch an nicht vertex-treuen Sphären durchgeführt werden konnten. Für die Formulierung des Hauptresultates der Bachelorarbeit bezeichnet man diese Kantensequenzen mit *allgemeinen Kantensequenzen*.

Satz 4.10. Sei $(X, <)$ eine Sphäre. Dann ist das iterierte Anwenden von Kantendrehungen auf X transitiv, das heißt für alle Sphären Y mit $|X_2| = |Y_2|$ existiert eine allgemeine Kantensequenz E in X so, dass

$$X^E \cong Y$$

ist.

Einen Beweis dieser Aussage haben wir bereits in der Bachelorarbeit "Manipulation diskreter simplizialer Flächen" gesehen. An dieser Stelle wird nun ein weiterer Beweis vorgestellt, der erlaubt die Voraussetzungen des Satzes schärfer zu formulieren. Doch hierfür benötigt man zunächst noch etwas Vorarbeit.

Bemerkung 4.11. *Der nun folgende Beweis beruht auf der Beobachtung, dass man eine Sphäre mit 2-Waist wie in Definition 2.13 in zwei Komponenten aufteilen kann. Zur Vereinfachung des Beweises lässt man nun auch allgemeine Kantendrehung im folgendem Sinne zu:*

Sei X eine Sphäre, $E = (e_1, \dots, e_n)$ eine drehbare Kantensequenz in X und $e_{n+1} \in X_1$ eine nicht drehbare Kante in X^E , die $\deg_{X^E}(V) \geq 3$ für $V \in X_0^E(e_{n+1})$ erfüllt. Dann entsteht durch das Drehen der Kante e_{n+1} in X^E eine Sphäre mit einem 2-Waist. Man schreibt in diesem Fall $[e_1, \dots, e_{n+1}]$.

Führen wir diese allgemeine Kantendrehung am Beispiel des Tetraeders durch, indem wir das Symbol der resultierenden Sphäre angeben. Das Symbol des Tetraeders

$$\mu(T) = (4, 6, 4; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}))$$

ist aus vorherigen Beispielen bereits bekannt.

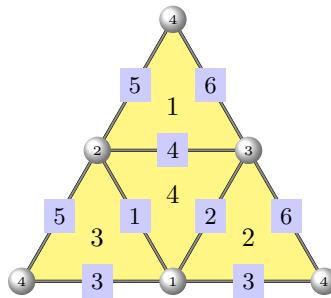


Abbildung 20: Tetraeder

Die Kante 1 des Tetraeders ist nicht drehbar, aber ist zu zwei Ecken inzident deren Grad 3 ist. Durch Drehen der Kante erhält man die Sphäre $T^{[1]}$, die durch folgendes Symbol beschrieben wird.

$$\mu((T, <)) := (4, 6, 4; (\{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}) \\ ; (\{4, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}))$$

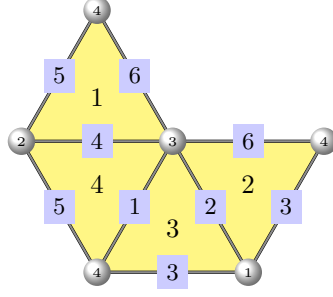


Abbildung 21: Kantendrehung am Tetraeder

Lemma 4.12. *Für jede vertex-treue Sphäre X existiert eine Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_n)$, sodass X^E eine vertex-treue Sphäre ist und es in X^E eine Ecke vom Grad 3 gibt.*

Beweis. Falls X eine Ecke vom Grad 3 hat, so ist nichts zu zeigen. Sei also X eine vertex-treue Sphäre ohne Ecken vom Grad 3, V eine beliebige Ecke in X und $X_1(V) = \{e_1, \dots, e_k\}$ die Menge der Kanten, die zu V inzident sind. Es gilt $\deg_X(V) = |X_1(V)|$. Für $V' \in X_0(e_1)$ gilt dann ebenfalls

$$\deg_{X^{e_1}}(V') = \deg_X(V') - 1$$

Falls also Kanten $e_1, \dots, e_i \in X_1(V)$ existieren, sodass $E = (e_1, \dots, e_i)$ eine drehbare Kantensequenz ist und es in X^E eine Ecke vom Grad 3 gibt, so ist die Aussage gezeigt. Andernfalls gibt es ein $1 \leq r \leq k$, sodass $X^{[e_1, \dots, e_r]}$ einen 2-Waist (e_r, e) mit zugehörigen 2-Waist Komponenten M^1, M^2 hat und (e_1, \dots, e_{r-1}) eine drehbare Kantensequenz ist. Es muss $|M^1|, |M^2| > 2$ gelten, denn sonst gibt es in $X^{[e_1, \dots, e_r]}$ eine Ecke vom Grad 2, woraus man auf eine Ecke vom Grad 3 in $X^{(e_1, \dots, e_{r-1})}$ schließen kann. Man definiert nun

$$\begin{aligned} Y^1 &:= X^{(e_1, \dots, e_{r-1})} \\ M^1 &:= M_1 - (X^{[e_1, \dots, e_r]})_2(\{e_r, e\}) \\ E^1 &:= (e_1, \dots, e_{r-1}) \end{aligned}$$

und V^1 als einen Knoten in $Y^1_0(M_1) - Y^1_0(Y^1_2(\{e_r, e\}))$. Sei also nun für $j \in \mathbb{N}$ die vertex-treue Sphäre Y^j und die Menge M^j zusammen mit einer drehbaren Kantensequenz $E^j = (e_1, \dots, e_l)$ und einer Ecke V^j in $Y^j_0(M^j)$ schon gegeben. Falls Kanten $e'_1, \dots, e'_m \in Y^j_1(V^j)$ existieren, sodass $(e_1, \dots, e_l, e'_1, \dots, e'_m)$ eine drehbare Kantensequenz ist und $Y^{j+1}(e'_1, \dots, e'_m)$ eine Ecke vom Grad 3 besitzt, so folgt die Behauptung. Falls dies nicht der Fall ist, so gibt es ein $1 \leq i \leq m$, sodass (e'_1, \dots, e'_{i-1}) eine drehbare Kantensequenz und (e'_i, e') ein 2-Waist in $Y^{j+1}(e'_1, \dots, e'_i)$ ist. Durch Anwenden der Kantensequenz (e'_1, \dots, e'_i) erhält man also die 2-Waist Komponenten M, M' , wobei

$M \subseteq M^i$ ist. Falls $|M| > 2$ ist, so wählt man

$$\begin{aligned} Y^{j+1} &:= Y^{j(e'_1, \dots, e'_{i-1})} \\ M^{j+1} &:= M - (Y^{j[e_1, \dots, e_r]})_2(\{e_r, e\}) \\ E^{i+1} &:= (e_1, \dots, e_l, e'_1, \dots, e'_{i-1}) \end{aligned}$$

und V^{i+1} als eine Ecke in $Y^{j+1}_0(M) - Y^{j+1}_0(Y^{j+1}_2(\{e'_i, e'\}))$ Für die absteigende

$$M^{j+1} \subset M^j \subset \dots \subset M_1$$

muss nach endlich vielen Schritten der Fall $|M^k| = 2$ eintreten, was bedeutet, dass $E^k = [e_1, \dots, e_n]$ eine solche Kantensequenz ist, sodass reduzieren auf (e_1, \dots, e_{n-1}) eine drehbare Kantensequenz liefert und $X^{(e_1, \dots, e_{n-1})}$ eine Ecke vom Grad 3 liefert. \square

Satz 4.13. *Sei X eine vertex-treue Sphäre mit n Flächen. Dann existiert eine drehbare Kantensequenz E , sodass X^E zum Double- n -gon isomorph ist.*

Beweis. Man beweist die Aussage induktiv. Für $n = 4$ ist nichts zu zeigen. Sei nun also $n > 4$ und X eine vertex-treue Sphäre, die nicht zum Double n -gon isomorph ist. Wegen Lemma 4.12 kann man die Existenz einer Ecke V vom Grad 3 in X annehmen. Für $Y = T_V(X)$ gilt dann

$$|Y_2| = n - 2.$$

Deshalb existiert eine drehbare Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_m)$ in Y , sodass $Y^E \cong (n - 1)^2$ ist. Sei F die Fläche, die in Y den Tetraeder ersetzt. Ziel ist es, aus der Kantensequenz in Y eine Kantensequenz $E' = (e'_1, \dots, e'_k)$ in X zu konstruieren, die folgendes erfüllt:

- E' ist eine drehbare Kantensequenz.
- Für alle $1 \leq i \leq m$ existiert ein $1 \leq j \leq k$, sodass

$$\begin{aligned} T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) &\cong X^{(e'_1, \dots, e'_j)} \\ \Leftrightarrow Y^{(e_1, \dots, e_i)} &\cong T_V(X^{(e'_1, \dots, e'_j)}) \end{aligned}$$

ist.

Sei dafür $X^0 := X$ und $E_0 := ()$. Man konstruiert die Kantensequenz wie folgt: Seien die Sphären X^i und die Kantensequenz $E_i = (e_1, \dots, e_l)$ in X für $0 \leq i \leq m$ schon konstruiert. Man führt folgende Fallunterscheidung durch:

- Falls die Kante e_i der Kantensequenz E nicht zu F inzident ist, so wähle $X^{i+1} := (X^i)^{e_i}$ und $E_{i+1} := (e_1, \dots, e_l, e_i)$. Damit ist

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) \cong X^{E_{i+1}}$$

und in $X^{E_{i+1}}$ existiert kein 2-Waist, denn sonst wäre dieser schon in $Y^{(e_1, \dots, e_i)}$ enthalten. Damit ist E_{i+1} drehbar.

- Falls die Kante e_i der Kantensequenz E zu F inzident ist, muss man Kantendrehungen wie im Folgendem beschrieben anwenden. Seien F_1, F_2, F_3 , die zu V inzidenten Flächen. Sei ohne Einschränkung $e_i < F_1$ und e die Kante, die $|(X^i)^{e_i}_2(e) \cup \{F_1, F_2, F_3\}| = 1$ erfüllt.

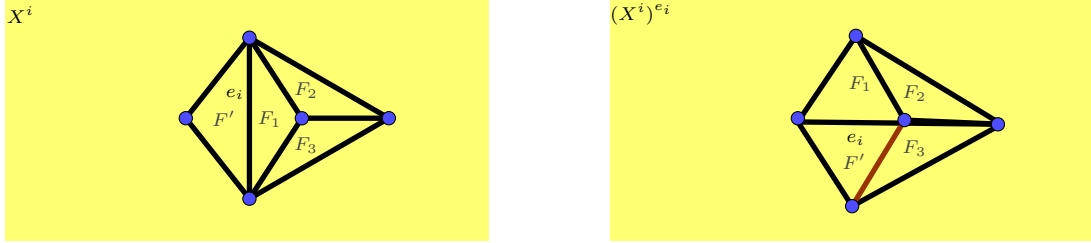


Abbildung 22: Kantendrehung

Dann definiert man $X^{i+1} := X^{i(e_i, e)}$ und $E^{i+1} := (e'_1, \dots, e'_l, e_i, e)$. Dies liefert erneut

$$T^F(Y^{(e_1, \dots, e_i)}) \cong X^{E_{i+1}}$$

Durch das Drehen der Kanten e_i und e können keine 2-Waists entstehen, wodurch E_{i+1} drehbar ist. Nach endlich vielen Schritten erhält man also eine vertex-treue Kantensequenz E^* in X sodass

$$X^{E^*} \cong T^F(Y^E) \cong T^F((n-1)^2)$$

ist. Sei e nun die Kante, die die beiden Ecken vom Grad 5 verbindet. Dann ist $(X^{E^*})^e \cong (n)^2$. \square

Bemerkung 4.14. Seien X und Y vertex-treue Sphären und ϕ ein Isomorphismus von X nach Y . Für alle Kanten $e \in X_1$ und $e' \in Y_1$ mit $\phi(e) = e'$ gilt dann

$$X^e \cong Y^{e'}$$

Für eine Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_n)$ in X bedeutet dies

$$X^E \cong Y^{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}$$

Satz 4.15. Seien X und Y vertex-treue Sphären mit $|X_2| = |Y_2| = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine drehbare Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_n)$ in X , sodass X^E zu Y isomorph ist.

Beweis. Nach vorherigem Satz existieren drehbare Kantensequenzen $E = (e_1, \dots, e_m)$ in X und $E' = (e'_1, \dots, e'_k)$ in Y , sodass

$$x^E \cong (n)^2 \cong Y^{E'}$$

ist. Da X^E und $Y^{E'}$ isomorph sind, existiert ein Isomorphismus

$$\phi : X^E \rightarrow Y^{E'}$$

Somit bildet $E^* = (e_1, \dots, e_m, \phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))$ eine Kantensequenz in X und es gilt:

$$\begin{aligned} X^{E^*} &= X^{(e_1, \dots, e_m, \phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong (X^{(e_1, \dots, e_m)})^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong ((n)^2)^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong ((\phi^{-1}(Y^{E'})))^{(\phi^{-1}(e'_k), \dots, \phi^{-1}(e'_1))} \\ &\cong Y. \end{aligned}$$

Da E und E' drehbar sind, gilt dies auch für Kantensequenz E^* . □

*ist – es – allgemein – kuerzer – X – in – Y – mit – oder – ohne – das
– Erzeugen – von – 2 – Waists – umzuformen
Sprich : ist – das – Erzeugen – eines – 2 – Waists – ein – Umweg?*

5 Kantendrehung als Gruppenoperation

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehungen

Ziel dieses Kapitels ist es die oben definierte Kantendrehung als Operation einer Gruppe auf den Sphären aufzufassen. Als erste Beobachtung wird skizziert, wie man die Kantendrehung mithilfe von Transpositionen bewerkstelligen kann. Hierzu benötigt man folgende Definition.

Definition 5.1. Sei X eine geschlossene simpliziale Fläche und $V \in X_0$ eine Ecke in X . Dann definiert man $u(V)$ als $((F_1, \dots, F_n))$, wobei (F_1, \dots, F_n) der zu V zugehörige Schirm in X ist und nennt $u(V)$ den Schirmzeiger von V . Der Schirmzeiger $U(X)$ von X definiert man als

$$U(X) := \{u(V) \mid V \in X_0\}$$

Beispiel 5.2. • Den Schirmzeiger eines Tetraeders formt die Menge

$$U(T) = \{((1, 2, 3)), ((1, 2, 4)), ((1, 3, 4)), ((2, 3, 4))\}$$

• Der Janus-Head hat den Schirmzeiger

$$\{((1, 2))\}$$

Bemerkung 5.3. Falls der Minimalgrad einer geschlossenen simplizialen Fläche X 3 ist, so lässt sich X aus dem Schirmzeiger rekonstruieren. Dieser Sachverhalt kann dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* entnommen werden und wird deshalb hier nicht ausgeführt.

Lemma 5.4. Sei X eine vertex-treue Sphäre, $U(X)$ der Schirmzeiger von X und $e \in X_1$ eine drehbare Kante in X mit $X_0(e) = \{F_1, F_2\}$. Für eine Ecke $V \in X_0$ definiert man

$$u_V := \begin{cases} u(V), & (F_1, F_2)u(V)(F_1, F_2) = u(V) \\ (F_1, F_2)u(V), & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist der Schirmzeiger von X^e gegeben durch

$$\{u_V \mid V \in X_0\}.$$

Beweis. Es gibt genau 4 Ecken in X bei denen F_1 oder F_2 im zugehörigen Schirm vorkommen. Genauer gilt: Es existieren V_1, V_2, V_3, V_4 , sodass

- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_1) = \{F_1\}$
- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_2) = \{F_2\}$
- und $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_3) = \{F_1, F_2\} \cap X_0(V_4) = \{F_1, F_2\}$ gilt.

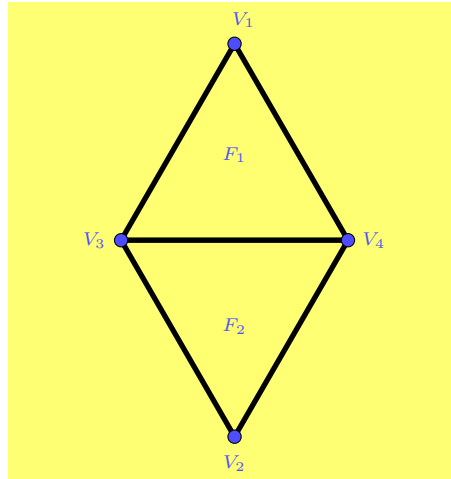


Abbildung 23: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

In der Sphäre X^e gilt dann bis auf Isomorphie

- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_3) = \{F_1\}$
- $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_4) = \{F_2\}$
- und $\{F_1, F_2\} \cap X_0(V_1) = \{F_1, F_2\} \cap X_0(V_2) = \{F_1, F_2\}$ gilt.

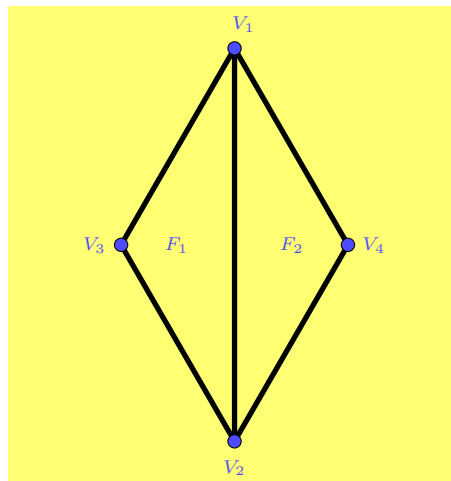


Abbildung 24: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Beim Übertragen der obigen Beobachtung auf den Schirmzeiger von X^e erkennt man:

- Für alle $V \in X_0 - \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ gilt $u_V = u(V) = (F_1, F_2)u(V)(F_1, F_2)$.

Für alle $V \in \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ gilt

$$(F_1, F_2)u_X(V)(F_1, F_2) \neq u_X(V)$$

Genauer gilt:

- $u_{X^e}(V_1) = (F_1, F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_2, F_3, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_1)$
- $u_{X^e}(V_2) = (F_2, F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, \tilde{F}, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_2)$
- $u_{X^e}(V_3) = (F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2)(F_1, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_2, F_1, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_3)$
- $u_{X^e}(V_4) = (F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2)(F_2, F, \dots) = (F_1, F_2)(F_1, F_2, \dots) = (F_1, F_2)U_X(V_3)$

Somit folgt die Behauptung. □

Sphaeren – so – auf fassen, –dass – man – die – Menge – der – Sphaeren – als – Bahn – unter – einer – Gruppenoperation – auf fassen – kann

6 Multi-Tetraeder

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehungen

In diesem Kapitel werden die sogenannten *Multi-Tetraeder* thematisiert. Diese bilden eine Klasse von vertex-treuen Sphären, die sich durch die Konstruktion mithilfe von Tetraedern zusammensetzt. Die hier einführenden Definitionen sind ebenfalls dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Triangles* zu entnehmen. Zudem wird die Kaktusdistanz einer vertex-treuen Sphäre eingeführt. Ziel dieses Kapitels ist es einen Algorithmus für die Bestimmung des Kaktusabstandes anzugeben zu können.

6.1 Konstruktion und Klassifikation

Hauptresultate

Liste aller Multi-Tetraeder mit bis zu 28 Flaechen

Definition 6.1. Sei X eine vertex-treue Sphäre mit $|X_0| \geq 6$.

1. Man definiert die simpliziale Fläche, die durch Entfernen aller Tetraeder entsteht durch $X^{(1)}$. Für $i > 1$ definiert man analog

$$X^{(i)} := (X^{(i-1)})^{(1)}.$$

2. Man nennt X einen Multi-Tetraeder vom Grad k , falls $X^{(k-1)}$ ein Tetraeder oder ein Doppel-Tetraeder ist. Hierfür bezeichne a_0 die Anzahl der Ecken vom Grad 3 in X_0 oder anders gesagt die Anzahl der Tetraeder, die von X entfernt wurden und analog bezeichne a_i die Anzahl der Ecken vom Grad 3 in $X^{(i)}$. Falls $X^{(i)}$ ein Tetraeder ist, so definiert man a_i als 1. Das damit konstruierte Tupel (a_0, a_1, \dots, a_k) nennt man den Typ von X . und $T := \sum_{i=0}^k a_i$ nennt man die Tetraeder-Zahl von X .

Beispiel 6.2. • Per Definition bilden der Tetraeder und der Doppel-Tetraeder Multi-Tetraeder.

- Bis auf Isomorphie gibt es genau einen Multi-Tetraeder mit 8 Flächen. Dieser wird durch den Flächenträger $\xi := \text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 4\}) \cup \text{Pot}_3(\{2, 3, 4, 5\}) \cup \text{Pot}_3(\{3, 4, 5, 6\})$ beschrieben.

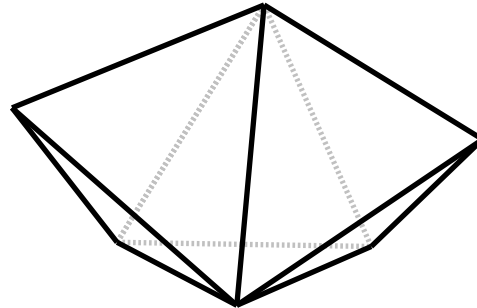


Abbildung 25: Multi-Tetraeder mit 8 Flächen

- Alle vertex-treuen Sphären ohne Ecken vom Grad 3 erfüllen $X^{(1)} = X$ und bilden damit keine Multi-Tetraeder.
- Der simpliziale Parallelepiped P ist eine Sphäre, beschrieben durch

$$\xi = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}, \\ \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{5, 6, 8\}\}.$$

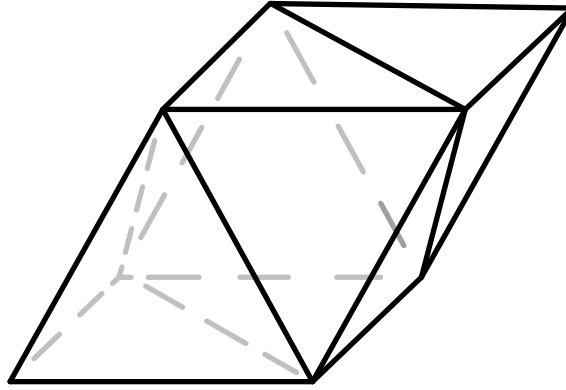


Abbildung 26: Parallelepiped

Also ist $\deg_P(7) = \deg_P(8) = 3$. Aber P bildet dennoch keinen Multi-Tetraeder, da $P^{(1)}$ ein Oktaeder ist und damit $P^{(2)} = P^{(1)}$ gilt.

Bemerkung 6.3. • Multi-Tetraeder enthalten Ecken vom Grad 3 und somit auch 3-Waists.

- Da beim Anhängen von Tetraedern keine 2-Waists entstehen, sind Multi-Tetraeder Sphären ohne 2-Waists.
- Multi-Tetraeder sind vertex-treue Sphären.

Bemerkung 6.4. Sei X ein Multi-Tetraeder, (a_0, \dots, a_k) der Typ von X und $n = \sum_{i=1}^k a_i$ die Tetraeder-Zahl von X . Dann gelten folgende Aussagen:

- X hat genau $2(n+1)$ Flächen. Insbesondere ist $\epsilon(X) = n+1$.
- Der Typ (a_0, \dots, a_k) von X ist monoton fallend und es gilt $a_i \neq 1$ für $i = 0, \dots, k-1$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine simpliziale Fläche mit Tetraeder-Zahl n .

Beweis. • klar

- Sei $0 \leq i \leq k-1$ mit $1 < a_i < a_{i+1}$. Das heißt es werden mindestens zwei Ecken vom Grad 3 in X^{i+1} von einem Tetraeder überdeckt. Somit existieren mindestens zwei benachbarte Knoten, die in X^i Grad 5 und in X^{i+1} Knotengrad 3 haben. Damit muss aber X^{i+1} zum Tetraeder isomorph sein, was $a_{i+1} = 1$ impliziert und damit einen Widerspruch erzeugt.

- Der Tetraeder T bildet den kleinsten Multi-Tetraeder und durch iteratives Anheften eines Tetraeders folgt die Behauptung.

□

Definition 6.5. Seien X und Y Multi-Tetraeder. Man nennt Y ein Kind von X , falls $T_V(Y) \cong X$ für ein $V \in Y_0$ ist.

Es stellt sich die Frage wie viele Kinder ein Multi-Tetraeder bis auf Isomorphie haben kann, da das Erweitern durch Tetraeder an verschiedenen Flächen nicht zwangsläufig isomorphe Multi-Tetraeder hervorbringt, muss hierfür etwas Vorarbeit geleistet werden.

Bemerkung 6.6. Sei X eine vertex-treue Sphäre und G die Automorphismengruppe von X . Dann wird durch

$$\Phi_X : G \times X \mapsto X, (\phi, x) \rightarrow \phi(x)$$

eine Gruppenoperation definiert. Denn klarerweise ist

- $id(x)=x$ für alle $x \in X$ und
- $\phi_1(\phi_2(x)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(x)$ für alle $\phi_1, \phi_2 \in G$ und $x \in X$.

Aber auch die Einschränkung

$$\Phi_{X_i} : G \times X_i \mapsto X_i, (\phi, x) \rightarrow \phi(x)$$

für $i \in \{0, 1, 2\}$ liefert eine Gruppenoperation, da für ein $x \in X_i$ und ein $\phi \in G$ stets $\phi(x) \in X_i$ gilt. Mithilfe dieser Gruppenoperation kann man nun die Anzahl der Kinder eines Multi-Tetraeders bestimmen.

Lemma 6.7. Sei X ein Multi-Tetraeder. Dann ist die Anzahl der Kinder von X die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation Φ_{X_2} .

Beweis. Man muss zunächst zeigen, dass Erweitern durch Tetraeder an Flächen, die in einer Bahn unter Φ_{X_2} liegen isomorphe Kinder von X hervorbringt. Seien also F_1, F_2 solche Flächen, dann existiert also ein $\phi \in Aut(X)$, der F_1 auf F_2 abbildet. Dieser Isomorphismus lässt sich dann aber durch Ergänzen der fehlenden Bilder des zuletzt angehängten Tetraeders zu einem Isomorphismus

$$\phi' : T^{F_1}(X) \mapsto T^{F_2}(X)$$

erweitern.

Seien also nun F_1 und F_2 zwei Flächen aus verschiedenen Bahnen. Angenommen es existiert ein Isomorphismus $\phi' : T^{F_1}(X) \mapsto T^{F_2}(X)$, dann erhält man dadurch durch leichtes Abändern einen Automorphismus, der F_1 auf F_2 abbildet, was ein Widerspruch ist. □

Definition 6.8. Seien X und Y Multi-Tetraeder. Falls $X = Y^{(1)}$ ist, dann nennt man X eine Wurzel von Y und Y ein Blatt von X .

Hier stellt sich nun die Frage, wie viele Blätter ein Multi-Tetraeder besitzt. Hierfür wird folgende Beobachtung nützlich sein.

Bemerkung 6.9. Sei X eine Sphäre und G die Automorphismengruppe von X . Dann kann man eine Gruppenoperation auf $Pot_k(X_2)$ für $k \leq |X_2|$ durch

$$G \times Pot_k(X_2) \rightarrow Pot_k(X_2), (\phi, M) \mapsto \{\phi(x) \mid x \in M\}$$

definieren. Die Wohldefiniertheit der Gruppenoperation folgt, da $|M| = |\{\phi(x) \mid x \in M\}|$ für ein $M \in Pot_k(X_2)$ gilt.

Definition 6.10. Sei X ein Multi-Tetraeder vom Typ (a_0, \dots, a_k) . Man nennt eine Menge $M \subseteq X_2$ eine Überdeckung, falls für alle Ecken $V \in X_0$ vom Grad 3 ein $F \in M$ mit $F \in X_2(V)$ existiert. Man nennt die Überdeckung M minimal, falls $|M| = a_k$ ist. Für $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$ definiert man die Mengen der $a_k + l$ -elementigen Überdeckungen als U_X^l .

Lemma 6.11. Sei X ein Multi-Tetraeder und $\phi \in Aut(X)$. Für eine Überdeckung $M \in U_X^l$ mit $0 \leq k \leq |X_2| - a_k$ ist $\{\phi(x) \mid x \in M\}$ wieder eine Überdeckung.

Beweis. Klarerweise ist $|M| = |\{\phi(x) \mid x \in M\}|$, da ϕ ein Automorphismus bildet. Da $F \in M$ zu einer Ecke vom Grad 3 inzident ist, muss dies auch für $\phi(F)$ gelten. F_1 und F_2 sind genau dann adjazent, wenn $\phi(F_1)$ und $\phi(F_2)$ adjazent sind. Somit werden also mindestens a_k Ecken vom Grad 3 überdeckt. \square

Bemerkung 6.12. Sei X ein Multi-Tetraeder vom Typ (a_0, \dots, a_k) und G seine Automorphismengruppe. Durch die obige Erkenntnis kann man nun die in Bemerkung 6.9 eingeführte Gruppenoperation leicht Abändern, um so die Anzahl der Blätter eines Multi-Tetraeders bestimmen zu können. Durch obiges Lemma ist für $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$ die Abbildung

$$\theta_l : G \times U_X^l \rightarrow U_X^l, (\phi, M) \mapsto \phi(M) := \{\phi(F) \mid F \in M\}$$

wohldefiniert und es lässt sich leicht nachprüfen, dass diese eine Gruppenoperation bildet.

Satz 6.13. Sei X ein Multi-Tetraeder vom Typ (a_0, \dots, a_k) und θ_l für $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$ die Gruppenoperation auf U_X^l . Sei u_l die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation. Dann gibt es u_l Enkel vom Typ $(a_k + l, a_k, \dots, a_1)$.

Beweis. Um aus X einen Multi-Tetraeder vom (r, a_k, \dots, a_1) zu konstruieren, müssen an allen Ecken vom Grad 3 an einer inzidenten Fläche eine Tetraeder Erweiterung durchgeführt werden. Damit bildet für $M \in U_X^l$ das Erweitern durch Tetraeder an den Flächen $F \in M$ ein Blatt von X . Seien M_1, M_2 zwei Überdeckung, die in derselben Bahn unter θ_l liegen. Somit existiert ein $\phi \in G$ mit $\phi(M_1) = M_2$. Sei Y_1 bzw. Y_2 der Multi-Tetraeder, der durch das Erweitern durch Tetraeder an den Flächen $F \in M_1$ bzw. $F \in M_2$ entstanden ist. Man kann den Automorphismus ϕ nun zu einem Isomorphismus zwischen Y_1 und Y_2 , indem die fehlenden Bilder der Tetraeder so ergänzt, dass Inzidenzen berücksichtigt werden. Falls F_1, F_2 in zwei verschiedenen verschiedenen Bahnen liegen, aber dennoch ein Isomorphismus ϕ' zwischen Y_1 und Y_2 kann man diesen zu einem Automorphismus ϕ' auf X mit $\phi'(M_1) = M_2$ abändern, was ein Widerspruch ist. \square

Folgerung 6.14. *Sei X eine Sphäre vom Typ (a_k, \dots, a_1) und $0 \leq l \leq |X_2| - a_k$. Sei zudem u_l die Anzahl der Bahnen der Gruppenoperation θ_l auf U_X^l . Dann ist*

$$\sum_{i=l}^{|X_2|-a_k} u_i$$

die Anzahl der Blätter von X .

Mithilfe von GAP können wir bestimmen, wie viele Multi-Tetraeder es mit einer bestimmten Flächenanzahl gibt. Die untenstehende Tabelle beinhaltet die Anzahlen der Multi-Tetraeder mit bis zu 28 Flächen.

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
k_n	1	1	1	3	7	24	93	434	2110	11003	58598	321726	1614848

Gap liefert uns ebenfalls die Liste aller Multi-Tetraeder, dessen Einbettungen in den drei-dimensionalen Raum sich nicht selbst durchbohren. Da sich die Koordinaten der Ecken von Multitetraeder beim Anhängen von Tetraedern relativ leicht berechnen lassen, kann man mit folgender Funktion testen, ob es bei der Einbettung zu Durchbohrungen kommt.

```

gap> IsEmbeddible:=function(S)
  local temp, voe,voeD,voeE,voeDE,sym,vof,
  vofA,vofB,vofC,vofAC,vofAB,tempS,sol,coordinates,tempvof;
  tempS:=S;
  temp:=CoorMul(tempS);
  coordinates:=temp[2];
  tempS:=temp[1];
  for voe in VerticesOfEdges(tempS) do
    tempvof:=Filtered(VerticesOfFaces(tempS),g->Intersection(voe,g)=[]);
    for vof in tempvof do
      vofA:=coordinates[vof[1]];
      vofB:=coordinates[vof[2]];
      vofC:=coordinates[vof[3]];
      voeD:=coordinates[voe[1]];
      voeE:=coordinates[voe[2]];
      vofAB:=vofB-vofA;
      vofAC:=vofC-vofA;;
      voeDE:=voeE-voeD;;
      sol:=SolutionMat([vofAB,vofAC,-voeDE],voeD-vofA);
      if not sol=fail then
        if (sol[1]>0. and sol[1]<1.) and (sol[2]>0. and sol[2]<1.) and (sol[3]>0.
          and sol[3]<1.) and sol[1]+sol[2]<=1. and sol[1]+sol[2]>0. then
          return false;
        fi;
      fi;
    od;
  od;
  return true;
end;

```

Die untenstehende Tabelle zeigt die Anzahlen der Multi-Tetraeder, der Multitetraeder die sich bei Einbettung in den drei-dimensionalen Raum nicht selbst durchbohren.

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
k_n	1	1	1	3	7	24	93	434	2110	11003	58598	321726	1614848

Für Multi-Tetraeder mit geringerer Flächenanzahl gibt man nun auch elementare Eigenschaften an.

n	Symbol	Vertex counter	Facecounter	Aut. gruppe
4	()	v_3^4	$f_{3,3}^4$	S_4
6	1_1	$v_3^2 v_4^3$	$f_{3,4,2}^6$	$C_2 \times D_6$
8	$1_1 1_2$	$v_3^2 v_4^3$	$f_{3,4,5}^4 f_{3,5,2}^2 f_{4,2,5}^2$	D_4
10	$1_1 1_2 1_3$	$v_3^3 v_5^3 v_6^1$	$f_{3,5,2}^3 f_{3,5,6}^6 f_{5,3}^1$	D_6
	$1_1 1_3 2_1$	$v_3^2 v_4^2 v_5^2 v_6^1$	$f_{3,4,5}^2 f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^2 f_{4,5,2}^2 f_{4,5,6}^2$	C_2
	$1_1 1_2 2_2$	$v_3^2 v_4^3 v_6^2$	$f_{3,4,6}^4 f_{3,6,2}^2 f_{4,2,6}^4$	D_4
12	$1_1 1_3 2_3 2_2$	$v_3^3 v_4^1 v_5^2 v_6^1 v_7^1$	$f_{3,4,6}^1 f_{3,4,7}^1 f_{3,5,2}^1 f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^2 f_{3,6,7}^2 f_{4,5,6}^1 f_{4,5,7}^1 f_{5,2,6}^1$	$\{id\}$
	$1_1 1_2 1_3 1_4$	$v_3^4 v_4^6$	$f_{3,6,2}^{12}$	S_4
	$1_1 2_4 1_3 2_2$	$v_3^3 v_4^1 v_5^3 v_6^3$	$f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^4 f_{3,6,2}^3 f_{4,6,2}^2 f_{5,6,2}^1$	C_2
	$1_2 1_1 2_4 3_2$	$v_3^2 v_4^3 v_5^1 v_6^1 v_7^1$	$f_{3,4,5}^1 f_{3,4,6}^1 f_{3,4,7}^2 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4,2,6}^1 f_{4,2,7}^1 f_{4,5,6}^2 f_{4,5,7}^1 f_{4,6,7}^1$	$\{id\}$
	$1_2 1_1 2_4 3_3$	$v_3^2 v_4^2 v_5^2 v_6^2$	$f_{3,4,5}^2 f_{3,4,6}^2 f_{3,5,6}^2 f_{4,5,6}^2 f_{4,6,2}^2 f_{5,2,6}^2$	C_2
	$1_3 1_2 2_4 3_4$	$v_3^2 v_4^2 v_5^3 v_7^1$	$f_{3,4,5}^2 f_{4,5,7}^2 f_{5,3}^1 f_{5,2,7}^1$	C_2
	$1_3 1_2 2_2 3_3$	$v_3^2 v_4^4 v_7^2$	$f_{3,4,7}^4 f_{3,7,2}^2 f_{4,2,7}^6$	D_4

6.2 Facegraphen von Multi-Tetraedern

In Kapitel 3 haben wir uns Facegraphen von simplizialer Flächen gewidmet. In diesem Abschnitt betrachten wir im Genauen die Facegraphen von Multitetraedern. Es lässt sich nämlich ein Zusammenhang zwischen dem Facegraphen eines Multitetraeders und der Sphäre, die durch eine Tetraedererweiterung konstruiert wird, erkennen.

Den Facegraphen des Tetraeders haben wir bereits kennengelernt. Dieser wird bis auf Isomorphie durch $G_T = (V, E)$ mit $V = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ und $E = Pot_2(V)$ dargestellt.

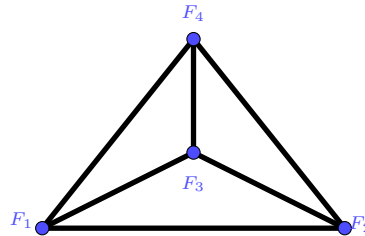


Abbildung 27: Face-Graph des Tetraeders

Durch eine Tetraedererweiterung am Tetraeder wird der Double-Tetraeder mit zugehörigem Facegraph G_{DT} konstruiert. Diesen enthalten wir bis auf Isomorphie

durch die Ecken $V = \{F_1, \dots, F_6\}$ und die Kanten

$$\{\{F_1, F_2\}, \{F_1, F_3\}, \{F_1, F_4\}, \{F_2, F_3\}, \{F_2, F_4\}, \{F_3, F_5\}, \{F_3, F_6\}, \{F_4, F_6\}, \{F_5, F_6\}\}.$$

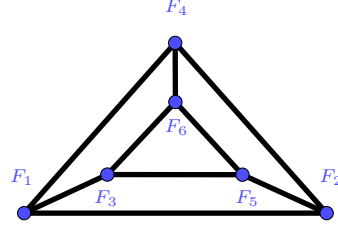


Abbildung 28: Face-Graph des Tetraeders

Durch genaueres Hinschauen lässt sich erkennen, dass der zu F_3 zugehörige Knoten im ursprünglichen Graphen des Tetraeders unter Berücksichtigung der Inzidenzen in drei weitere Knoten aufgeteilt wurde. Im Allgemeinen ist dieses Phänomen weiterhin erkennbar, weshalb wir dieses an dieser Stelle beschreiben wollen.

Sei X ein Multi-Tetraeder mit zugehörigem Facegraph G_X und $F \in X_2$ eine Fläche mit $X_2(X_1(F)) = \{F_1, F_2, F_3\}$. Da für die Skizzierung des erwähnten Zusammenhangs nur die Knoten der Flächen F, F_1, F_2, F_3 relevant sind, wird in den folgenden Abbildungen auch nur dieser Ausschnitt des Facegraphen dargestellt. Der Facegraph kann mehr Knoten und Inzidenzen enthalten, diese sind aber für unsere Zwecke nicht von Bedeutung.

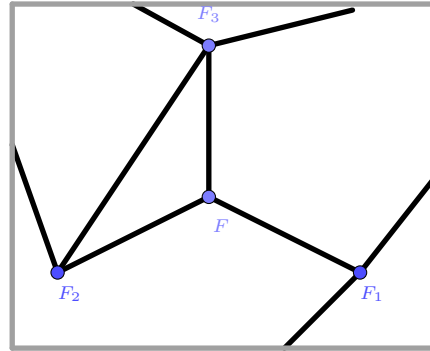


Abbildung 29: Ausschnitt eines Facegraphen eines Multitetraeders

Auf Ebene der simplizialen Flächen wird bei einer Tetraedererweiterung die Fläche F entfernt und durch den 3-gon mit den Flächen $\{F_a, F_b, F_c\}$ so ersetzt, dass F_1 und F_a , F_2 und F_b bzw. F_3 und F_c benachbarte Flächen in der konstruierten Sphäre sind. Dieses Vorgehen muss nun nur noch auf der Ebene der Facegraphen nachgeahmt werden.

Bei einer Tetraedererweiterung wird in einem ersten Schritt der Knoten F durch die Knoten F_a, F_b, F_c ersetzt, wobei F_a, F_b, F_c die Flächen des angehängten Tetraeders sind. Dann werden die Kanten $\{F, F_1\}, \{F, F_2\}$ und $\{F, F_3\}$ in dem Graphen gelöscht.

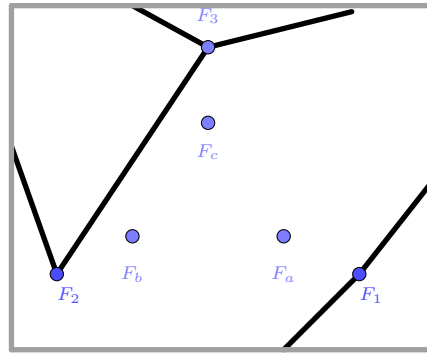


Abbildung 30: Ausschnitt eines Facegraphen eines Multitetraeders

Zuletzt werden die Inzidenzen

$$\{F_a, F_b\}, \{F_a, F_c\}, \{F_b, F_c\}, \{F_1, F_a\}, \{F_2, F_b\}, \{F_3, F_c\}$$

in dem Graphen hergestellt, um so schließlich den Facegraphen des Multitetraeders, der durch die Tetraedererweiterung entstanden ist, zu erzeugen.

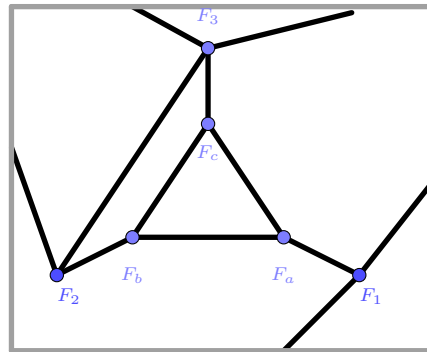


Abbildung 31: Ausschnitt eines Facegraphen eines Multitetraeders

6.3 Kaktus-Distanz

Hauptresultate

Liste aller Multi-Tetraeder mit bis zu 28 Flächen

Definition 6.15. Sei X eine vertex-treue Sphäre. Die minimale Anzahl an Kattendrehungen, die man braucht, um aus X einen Multi-Tetraeder zu konstruieren, nennt man den Kaktus-Abstand $\xi(X)$ von X .

Beispiel 6.16. • *beispiel*

Lemma 6.17. 1. Für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 2$ existiert ein Multi-Tetraeder X mit $|X_2| = n$.

2. Für alle Sphären ist die Kaktus-Distanz endlich.

Beweis. 1. Da der Tetraeder vertex-treu ist, kann man ihn durch den Flächenträger $\xi = \text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 4\})$ beschreiben. Durch $\text{Pot}_3(\{1, 2, 3, 5\}) \Delta \xi$ erhält man den

Doppel-Tetraeder mit 6 Flächen. Iterativ kann man also für ein $F \in X_2$ und ein $P \notin X_0$ durch $Pot_3(X_0(F) \cup \{P\})\Delta\xi$ einen Multi-Tetraeder mit 2 Flächen mehr konstruieren.

2. Sei X eine Sphäre. Wegen 1) existiert ein Multi-Tetraeder Y mit $|Y_2| = |X_2|$ und wegen Satz 4.15 existiert eine Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_n)$ mit $X^E \cong Y$. Daraus folgt $\chi(X) \leq n < \infty$.

□

Es ist klar, dass die simplizialen Flächen mit Kaktus-Distanz 0 genau die Multi-Tetraeder sind.

Lemma 6.18. *Sei X eine vertex-treue Sphäre ohne 3-Waist, die sich durch eine Kantendrehung in einen Multi-Tetraeder umformen lässt. Dann ist X zum Double n -Gon isomorph.*

Beweis. Der Beweis ist dem Skript *Simplicial Surfaces of Congruent Surfaces* zu entnehmen". □

Bemerkung 6.19. *Wenn die Voraussetzung fallen gelassen wird, dass X eine Fläche ohne 3-Waist ist, so ist die Aussage falsch.*

- Der simpliziale Parallelepiped aus Beispiel 6.2 ist eine vertex-treue Sphäre mit Kaktusdistanz 1, denn das Drehen der Kante $e \in P_0$ mit

$$X_0(e) \in \{\{1, 4\}, \{1, 5\}\{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \}$$

liefert einen Multi-Tetraeder vom Typ $(2, 2, 1)$.

- Nutzen wir GAP zum Erzeugen einer Sphäre mit Kaktus-Distanz 1, die nicht isomorph zum Double n -gon isomorph ist.

```
gap> L := [[2, 3, 5], [2, 4, 5], [3, 4, 5], [1, 3, 6], [1, 4, 6], [3, 4, 6], [1, 7, 8], [1, 4, 7],
[2, 4, 7], [2, 7, 8], [1, 3, 8], [2, 3, 8]];;
```

Durch den Flächenträger L definieren wir die simpliziale Fläche S .

```
gap> SimplicialSurfaceByVerticesInFaces(L);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> S:=last;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> FaceDegreesOfVertices(S);
[ 5, 5, 6, 6, 3, 3, 4, 4 ]
gap> IsCactus(S);
false
```

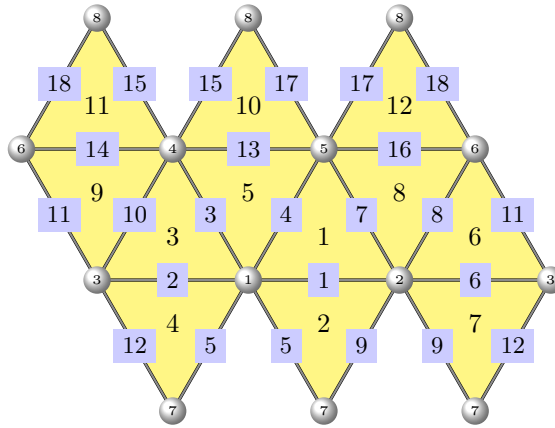


Abbildung 32: Parallelepiped

Durch das Drehen der Kante, die zu den beiden Ecken vom Grad 4 inzident ist, erhalten wir einen Multi-Tetraeder.

```
gap> VerticesOfEdges(S);
[[1, 3], [1, 4], [1, 6], [1, 7], [1, 8], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 7], [2, 8], [3, 4], [3, 5], [3, 6],
[3, 8], [4, 5], [4, 6], [4, 7], [7, 8]]
gap> EdgeTurn(S, 18);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> IsCactus(last);
true
```

Die obigen Sphären sind nicht isomorph und gehen aus dem Oktaeder durch das Durchführen von genau zwei Tetraedererweiterungen an verschiedenen Flächen hervor.

Satz 6.20. Sei $(X, <)$ eine vertex-treue Sphäre und V_1, V_2 zwei nicht benachbarte Ecken, die $X_0(X_1(V_1)) \cap X_0(X_1(V_2)) \neq \emptyset$ und $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$ erfüllen. Dann ist X isomorph zum Double n -gon.

Beweis. Man führt den Beweis per vollständiger Induktion. Für $n=3$ findet man den Double-3-gon als einzige Sphäre, die die Behauptung erfüllt. Man nimmt nun an, dass es eine vertex-treue Sphäre X und Ecken $V_1, V_2 \in X_0$ gibt, die die Voraussetzung erfüllen. Somit gibt es eine Ecke V und Kanten $e_1 \in X_1(V_1)$ und $e_2 \in X_1(V_2)$ in X , die $X_0(X_1(V_1)) \cap X_0(X_1(V_2)) = \{V\} = X_0(e_1) \cap X_0(e_2)$ erfüllen. Ziel ist es, $X \cong (n+1)^2$ zu zeigen. Hierfür nutzt man die zuvor eingeführte Butterfly-Deletion. Wegen der fehlenden Adjazenz von V_1 und V_2 und $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$, ist jede Fläche $F \in X_2$ entweder zu V_1 oder zu V_2 inzident. Somit existiert also eine Kante $e \in X_1$, sodass $|X_0(e) \cap X_0(e_1) \cap X_0(e_2)| = \{V\}$ ist und V_1, V_2 in $X_0(X_2(e))$ enthalten

sind, woraus die Wohldefiniertheit der Sphäre ${}^e\beta(X)$ folgt. Diese Sphäre hat zwei nicht benachbarte Ecken V'_1, V'_2 , die durch die Butterfly Deletion aus V_1 und V_2 hervorgehen und deshalb die Knotengrade $\deg(V'_1) = \deg(V'_2) = n + 1 - 1 = n$ besitzen. Damit gilt ${}^e\beta(X) \cong (n)^2$ und dies schließlich dazu, dass man

$$X \cong (n + 1)^2$$

schließen kann. \square

Diese Beobachtung wird nützlich sein, um erste Beobachtungen über die Kaktus-Distanz einer vertex-treuen Sphäre anzustellen. Hierfür definieren wir anlehnend an den obigen Satz die Menge D als die Menge aller Tupel $(V_1, V_2) \in X_0 \times X_0$, die nicht benachbart sind und $X_0(X_1(V_1)) \cap X_0(X_1(V_2)) \neq \emptyset$ erfüllen.

Satz 6.21. *Sei $(X, <)$ eine vertex-treue Sphäre, die kein Multi-Tetraeder ist. Dann ist*

$$\zeta(X) \leq m + 1,$$

wobei $m := \min_{(V, V') \in D} \{|\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V')|\}$ ist.

Beweis. Sei $(V_1, V_2) \in D$ ein Ecken-Paar, das $|\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V_1)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V_2)| = m$ erfüllt. Man führt nun für $V \in \{V_1, V_2\}$ und $l := \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V)$ folgende Fallunterscheidung durch:

- Falls $l = 0$ ist, ist nichts zu tun.
- Sei $l > 0$, dann existieren Flächen $F_1, F_2 \in X_2(V)$ und eine Kante $e \in X_1(V)$, die zu den Flächen F_1 und F_2 inzident ist. Damit ist V ein Knoten, der in der Sphäre X^e die Gleichung $\deg_{X^e}(V) = l - 1$ erfüllt. Das $l - 1$ -fache Anwenden der obigen Prozedur liefert uns eine durch eine Kantensequenz entstandene Sphäre Y , in der $\deg_Y(V) = 0$ erfüllt ist
- Für den Fall, dass $l < 0$ ist, findet man eine Kante $e \in X_1$ und Flächen F_1, F_2 , sodass $F_1 \in X_2(V), V_1, V_2 \notin X_0(F_2)$ und $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$ ist. Somit liefert die Kantendrehung an der Kante e eine Sphäre X^e , in der $\deg_{X^e}(V) = l + 1$ gilt. Hier liefert uns erneut das $l - 1$ -fache Anwenden der obigen Prozedur eine durch eine Kantensequenz entstandene Sphäre Y in der $\deg_Y(V) = 0$ erfüllt ist.

Anwenden der in der Fallunterscheidung vorgestellten Prozeduren auf V_1 und V_2 bringt eine durch eine Kantensequenz entstandene simpliziale Fläche Z , in der $|\frac{|X_2|}{2} - \deg_Z(V)| + |\frac{|X_2|}{2} - \deg_Z(V')| = 0$ ist und mit obigen Satz kann man $\zeta(Z) = 1$ und damit $\zeta(X) \leq m + 1$ folgern. \square

```

gap> Schranke:=function(S)
>   local g,tempV;
>   tempV:=[];
>   vert:=VerticesOfEdges(S);
>   for v in vert do
>     temp:=Filtered(vert,g->Length(Intersection(v,g))=1);
>     temp:=Filtered(temp,g->not Union(g,v) in VerticesOfFaces(S));
>     temp:=List(temp,g->Difference(Union(g,v),Intersection(v,g)));
>     Append(tempV,temp);
>   od;
>   tempV:=Set(tempV);
>   tempV:=List(tempV,v->
>     AbsoluteValue(NumberOfFaces(S)/2-FaceDegreeOfVertex(S,v[1]))+
>     AbsoluteValue(NumberOfFaces(S)/2-FaceDegreeOfVertex(S,v[2])));
>   return Minimum(tempV)+1;
> end;

```

Für kleine natürliche Zahlen n liefert der oben skizzierte Algorithmus die exakte Kaktusdistanz, wie folgende Folgerung zusammenfasst.

Folgerung 6.22. *Seien X eine Sphäre, die kein Multi-Tetraeder ist und m definiert wie im obigem Satz. Dann gilt*

$$\zeta(X) = m + 1$$

für $|X_2| \in \{4, 6, 8\}$

Beweis. Für $|X_2| \in \{4, 6, 8\}$ gibt es bis auf Isomorphie nur einen Multi-Tetraeder Y mit $|Y_2| = |X_2|$. □

Bemerkung 6.23. *Betrachtet man den Term m , dann ergibt sich*

$$\begin{aligned}
 m &= \min_{(V,V') \in D} \left\{ \left| \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V) \right| + \left| \frac{|X_2|}{2} - \deg_X(V') \right| \right\} \\
 &\leq \left| \frac{|X_2|}{2} - |X_2| \right| + \left| \frac{|X_2|}{2} - |X_2| \right| \\
 &= \frac{|X_2|}{2} + \frac{|X_2|}{2} \\
 &= |X_2|.
 \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinschauen erkennt man, dass für diese Abschätzung die Gleichheit $\deg_X(V) = \deg_X(V') = |X_2|$ verwendet wurde. Dies ist aber genau dann der Fall,

wenn $X \cong OB^n$, wobei OB^n der im folgenden definierte n -fache Open-Bag ist. Damit ist $\zeta(X) \leq |X_2|$ für alle Sphären X .

Definition 6.24. Sei $n \geq 1$. Wir definieren die simpliziale Fläche n -Bag durch folgende Konstruktion:

- Für $n = 1$ ist der $OB^1 = OB$, wobei OB der Open-Bag ist.
- Für $n = 2$ ist OB^2 , die durch die Kantendrehung $e \in T_1$ entstandene Sphäre T^e .
- Für $n \geq 3$ nutzt man den Double n -gon, um die gewünschte Sphäre zu konstruieren. Seien V_1, V_2 die nicht adoleszenten Ecken vom Grad n und e_1, \dots, e_n die Kanten, die weder zu V_1 oder V_2 inzident sind. Dann definiert man den n -Bag OB^n durch

$$(n)^{2(e_1, \dots, e_n)}$$

Lemma 6.25. Sei X eine Sphäre, die für ein $n > 1$ zu OB^n isomorph ist, dann ist $\chi(X) = n$.

Beweis. Um die Aussage zu zeigen, nutzt man die Distanz von OB^n zum Double- n -gon. Seien $V_1, V_2 \in X_0$ mit $\deg(V_1) = \deg(V_2) = 2n$. Hierzu existieren n Kanten e_1, \dots, e_n , sodass $X_0(e_1) = X_0(e_2) = \dots = X_0(e_n) = \{V_1, V_2\}$ ist. Betrachtet man nun die Sphäre X^{e_1} , so gilt $\deg(V_1) = \deg(V_2) = 2n - 1$. Also erhält man iterativ die durch Kantensequenz $E = (e_1, \dots, e_n)$ entstandene Sphäre X^E , die $\deg(V_1) = \deg(V_2) = n$ erfüllt, also kriegt man $X^E \cong (n)^2$. Da nach ?? $X^E \cong (n)^2$ ist, folgt, dass $\chi(X^{(e_1, \dots, e_{n-1})}) \leq n$.

Da eine Sphäre mit einem Knoten von Grad 2 kein Multi-Tetraeder sein kann, muss der Grad von den $n + 2$ Knoten vom Grad 2 durch die oben beschriebenen Kantendrehungen angehoben werden. Man braucht mindestens $n - 1$ Kantendrehungen, um eine Sphäre zu erhalten, die keine Knoten vom Grad 2 besitzt. Somit folgt $\zeta(X) = n$ □

Folgerung 6.26. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Sphäre mit X mit $\zeta(X) = n$.

Beweis. Der n -fache Open-Bag liefert die Behauptung, da $\zeta(OB^n) = n$ ist. □

ein – Algorithmus – zumbestimmen – der – Kaktusdistanz

Lemma 6.27. Sei X ein Multi-Tetraeder und $\text{Aut}(X)$ die Automorphismengruppe von X . Dann ist $\text{Aut}(X)$ auflösbar. Weiterhin seien l, l' minimal mit der Eigenschaft, dass

$$|\text{Aut}(X)^l| = |\text{Aut}(X^{(1)})^{l'}| = 1$$

ist. Dann $l \leq l'$.

Beweis. Man führt den Beweis induktiv. Zunächst weisen wir die Aussage für die kleinsten Multi-Tetraeder, nämlich den Tetraeder und den Doppel-Tetraeder, nach. Die Automorphismengruppe des Tetraeders ist die Tetraeder der Ordnung 24 und die des Double-Tetraeders ist das direkte Produkt einer C_2 und der Säugetiergruppe der Ordnung 6, also insgesamt Ordnung 12. Bei beiden Gruppen lässt sich leicht nachrechnen, dass sie auflösbar sind.

Sei X nun ein Multi-Tetraeder mit mehr als 6 Flächen und $G = \text{Aut}(X)$ seine Automorphismengruppe. Für die Ecken V_1, \dots, V_k vom Grad 3 definiert man zudem

$$M_t := \{V_t\} \cup X_1(V_t) \cup X_2(V_t).$$

Da der Grad sich beim Anwenden eines Automorphismus ϕ nicht ändern darf, werden die Knoten vom Grad 3 untereinander permutiert. Vielmehr gilt

$$\phi(M_i) = M_j$$

für alle $\phi \in G$ und $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Sei weiterhin Y , die Sphäre, die durch Entfernen aller Tetraeder von X entsteht. und F_1, \dots, F_k die Flächen, die die Tetraeder an den Stellen V_1, \dots, V_k ersetzen. Man betrachte nun den Homomorphismus $\psi : G \mapsto \text{Aut}(X^{(1)})$, der durch

$$\psi(\phi)(x) = \begin{cases} F_j, & \text{falls } x \in M_j \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird. Es ist leicht nachzurechnen, dass $\psi(G)$ eine Untergruppe von $\text{Aut}(X^{(1)})$ bildet. Da nach Induktionsvoraussetzung $\text{Aut}(X^{(1)})$ auflösbar ist, ist $\psi(G)$ als Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ebenfalls auflösbar. Sei also nun l minimal mit der Eigenschaft, dass $(\text{Aut}(\psi(G)))^l = \{id\}$ ist. Dann gilt $\phi(x) = \psi(\phi)(x) = x$ für $\phi \in G^l$ und $x \notin \bigcup M_t$. Da ϕ die Inzidenzen in der simplizialen Fläche X respektiert gilt $\phi(M_i) = M_i$ und genauer sogar $\phi = id$. Damit ist $G^l = \{id\}$ und G ist auflösbar. \square

Definition 6.28. Sei X eine vertex-treue Sphäre und $D \subseteq \text{Pot}_4(X_0)$. Man nennt eine Primfaktorzerlegung von X , falls D folgende Eigenschaften erfüllt.

- Für jedes $F \in X_2$ gibt es genau ein $d \in D$, sodass $X_0(F) \subseteq d$ gilt.
- Für jedes $N \in \text{Pot}_3 - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ gibt es entweder kein oder genau zwei $d \in D$ mit $N \subseteq d$

Man nennt D eine minimale Tetraederzerlegung, falls $|D| \leq |D'|$ für jede weitere Tetraederzerlegung D' ist.

Nutzen wir GAP um Beispiele für Tetraederzerlegungen zu konstruieren. Betrachten wir als vertex-treue Sphäre den Oktaeder.

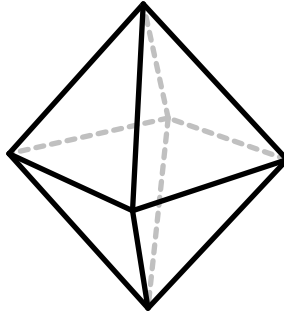


Abbildung 33: Oktaeder

```
gap> O;
simplicial surface (6 vertices, 12 edges, and 8 faces)
gap> VerticesOfFaces(O);
[[ 1, 2, 3 ], [ 2, 5, 6 ], [ 1, 2, 5 ], [ 2, 3, 6 ], [ 1, 4, 5 ], [ 3, 4, 6 ], [ 1, 3, 4 ], [ 4, 5, 6 ]]
```

Man kann nun auf folgende Weise Tetraederzerlegungen erzeugen. Seien V_1, V_2 zwei nicht benachbarte Ecken des Oktaeders. Die 4-elementigen Teilmengen der Tetraederzerlegung sind genau die Butterflies, die V_1 und V_2 enthalten.

```
gap> D1:=[[1,2,3,6],[1,2,5,6],[1,4,5,6],[1,3,4,6]];
[[ 1, 2, 3, 6 ], [ 1, 2, 5, 6 ], [ 1, 4, 5, 6 ], [ 1, 3, 4, 6 ] ]
gap> D2:=[[2,3,1,4],[2,4,5,6],[2,1,5,4],[2,3,4,6]];
[[ 2, 3, 1, 4 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 2, 1, 5, 4 ], [ 2, 3, 4, 6 ] ]
```

Mit GAP lässt sich leicht verifizieren, dass D_1 und D_2 Tetraederzerlegungen sind.

```
gap> IsTetrahedralDecomposition(O,D1);
true
gap> IsTetrahedralDecomposition(O,D2);
true
```

Vielmehr sind beide minimal. Angenommen es gibt eine Tetraederzerlegung D' des Oktaeders mit $|D'| \leq 3$. Dann muss es ein $d \in D'$ geben, welches die Eckenmenge von drei paarweise verschiedenen Flächen als Teilmengen enthält. Dies bedeutet aber, dass es im Oktaeder eine Ecke vom Grad 3 gibt, was ein Widerspruch ist.

Lemma 6.29. *Sei X ein Multi-Tetraeder. Dann besitzt X eine Tetraederzerlegung.*

Beweis. Man beweist die Aussage induktiv. Falls X ein Tetraeder mit $X_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ ist, dann bildet die Menge $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ eine Tetraederzerlegung, die insbesondere

minimal ist. Sei X ein Multi-Tetraeder mit $|X_2| = n > 4$. Sei zudem $V \in X_0$ eine Ecke vom Grad 3 und F_1, F_2, F_3 die drei Flächen, die $X_2(V) = \{F_1, F_2, F_3\}$ erfüllen. Dann bildet $Y = T_V(X)$ einen Multi-Tetraeder mit $|Y_2| = n - 2$. Deshalb existiert eine Tetraederzerlegung D von Y . Man weist nun nach, dass $D' = D \cup \{X_0(X_2(V))\}$ eine Tetraederzerlegung von X ist.

- Für alle $F \in X_2 \subset Y_2 \cup \{F_1, F_2, F_3\}$ gibt es genau ein $d \in D'$ mit

$$X_0(F) \subseteq d.$$

- Sei nun $n \in Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$. Falls V in n enthalten ist, dann gibt es immer noch kein oder genau zwei $d \in D' = D \cup \{X_0(X_2(V))\}$, die n als Teilmenge enthalten. Falls aber $V \notin n$ ist, so gibt es kein $d \in D'$ mit $n \subseteq d$.

□

Lemma 6.30. *Sei X ein Multi-Tetraeder und e eine drehbare Kante in X . Dann besitzt X^e eine Tetraederzerlegung.*

Beweis. Wegen Lemma 6.29 besitzt X eine Tetraederzerlegung D . Seien F_1, F_2 Flächen mit $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$. Seien zudem V_1, \dots, V_4 paarweise verschiedene Ecken in X , die $X_0(F_1) = \{V_1, V_3, V_4\}$ und $X_0(F_2) = \{V_2, V_3, V_4\}$ erfüllen.

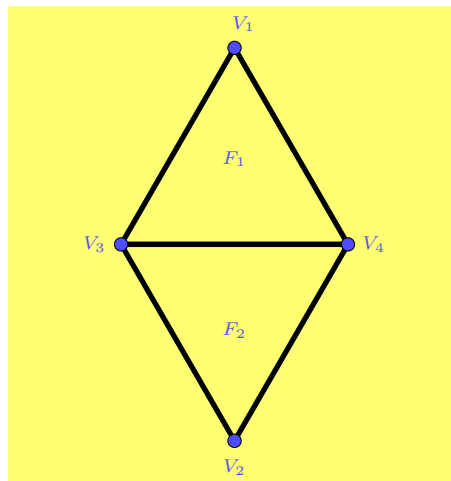


Abbildung 34: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Dann gelten in X^e die Relationen $X^e_0(F_1) = \{V_1, V_2, V_3\}$ und $X^e_0(F_2) = \{V_1, V_3, V_4\}$.

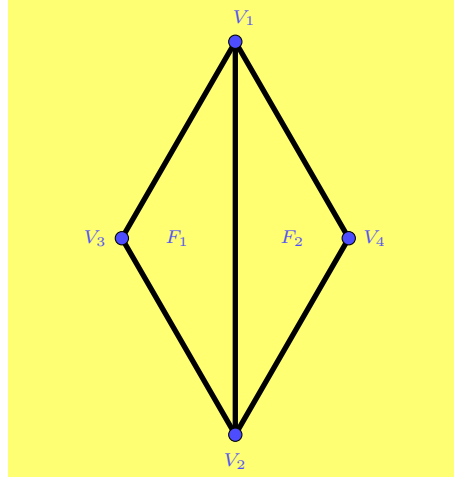


Abbildung 35: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Für die Mengen $X_0(F_1)$ und $X_0(F_2)$ können nun genau zwei Fälle auftreten.

1. Entweder es existiert genau ein $d \in D$, das die beiden obigen Mengen enthält
 2. oder es existieren genau zwei d_1, d_2 , sodass $X_0(F_1)$ in d_1 enthalten und $X_0(F_2)$ in d_2 enthalten ist.
1. Falls dieser Fall eintritt, dann bildet $D^e := D - \{d\}$ eine Tetraederzerlegung von X^e . Zunächst ist nachzuprüfen, dass für jedes $F \in X^e_2 = X_2$ genau ein $d' \in D^e$ mit $X^{e_0}(F)$ existiert. Da diese Aussage für alle $F \neq F_1, F_2$ bereits erfüllt ist, reicht es F_1, F_2 zu betrachten. Da $X^{e_0}(F_1) = \{V_1, V_3, V_4\}$ in d enthalten ist, aber auch in der Menge $Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}$ liegt, gibt es genau ein weiteres $d' \in D$, das $X^{e_0}(F_1)$ enthält. Daraus folgt direkt, dass es genau ein $d' \in D^e$, das $\{V_1, V_3, V_4\}$ enthält. Analog geht man auch für $X^{e_0}(F_2) = \{V_1, V_2, V_4\}$ vor. Nun muss man ebenfalls nachweisen, dass es für jedes $n \in Pot_3(X^{e_0}) - \{X^{e_0}(F) \mid F \in X^e_2\} = (Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}) \cup \{X_0(F_1), X_0(F_2)\} - \{X^{e_0}(F_1), X^{e_0}(F_2)\}$ entweder kein oder genau zwei $d' \in D'$ mit $n \subset d'$ gibt. Es reicht $X_0(F_1)$ zu diskutieren. Da $X_0(F_1)$ in $d \in D$ enthalten ist, ist d das einzige Element in D , das $X_0(F_1)$ enthält. Daraus folgert man, dass es kein $d' \in D^e$ mit dieser Eigenschaft gibt. Analog geht man für $X_0(F_2)$ vor.
 2. In diesem Fall bildet $D^e = D \cup \{X_0(X_2(e))\}$ eine Tetraederzerlegung von X^e . Klarerweise gibt es für alle $F \in X^{e_0}$ genau ein $d' \in D^e$ mit $X^{e_0}(F) \subseteq d'$. Nun muss wieder nachgewiesen werden, dass es für jedes $n \in Pot_3(X^{e_0}) - \{X^{e_0}(F) \mid F \in X^e_2\} = (Pot_3(X_0) - \{X_0(F) \mid F \in X_2\}) \cup \{X_0(F_1), X_0(F_2)\} - \{X^{e_0}(F_1), X^{e_0}(F_2)\}$ entweder kein oder genau zwei $d' \in D^e$ gibt, die n enthalten. Es reicht $X_0(F_1)$ zu betrachten. Da $X_0(F_1)$ in genau einem $d \in D$

enthalten ist, gibt es genau zwei $d' \in D^e$, sodass $X_0(F_1)$ eine Teilmenge von den d' ist. Analog geht man für $X_0(F_2)$ vor.

□

Folgerung 6.31. *Sei X eine vertex-treue Sphäre. Dann besitzt X eine Tetraederzerlegung.*

Beweis. Es existiert ein Multi-Tetraeder Y mit $|X_2| = |Y_2|$. Nach obigem Lemma hat Y eine Tetraederzerlegung D . Da die Kantendrehung transitiv ist, existiert eine Kantensequenz E , sodass Y^E isomorph zu X ist. Durch iteratives Anwenden von Lemma 6.30, erhält man eine Tetraederzerlegung D' von X . □

Beispiel 6.32. *Wir nutzen diese Erkenntnis, um Tetraederzerlegungen von komplizierteren Sphären zu konstruieren.*

```
gap > S;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap > VerticesOfFaces(S);
[ [ 1, 4, 6 ], [ 1, 4, 8 ], [ 1, 6, 7 ], [ 1, 7, 8 ], [ 2, 3, 5 ],
  [ 2, 3, 6 ], [ 2, 4, 5 ], [ 2, 4, 6 ], [ 3, 5, 7 ], [ 3, 6, 7 ],
  [ 4, 5, 8 ], [ 5, 7, 8 ] ]
gap > FaceDegreesOfVertices(S);
[ 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 4 ]
```

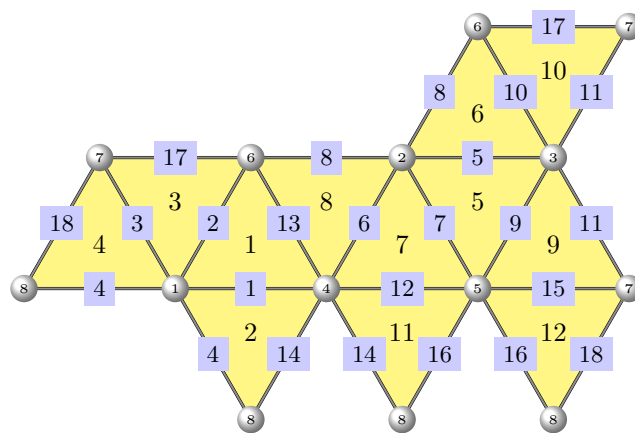


Abbildung 36: vertex-treue Sphäre mit 12 Flächen

Durch obigen Algorithmus erhalten wir nicht nur eine Annäherung, sondern die exakte Kaktusdistanz und können somit aus der Sphäre S gezielt einen Multitetraeder konstruieren.

```

gap> AlgorithmCactus(S);
2
gap> EdgeTurn(S,4);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> EdgeTurn(last,5);
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> C:=last;
simplicial surface (8 vertices, 18 edges, and 12 faces)
gap> IsCactus(C);
true

```

Da C ein Multitetraeder ist, liefert ... eine Tetraederzerlegung.

```

gap> VerticesOfFaces(s);
[ [ 1, 4, 6 ], [ 1, 4, 7 ], [ 1, 6, 7 ], [ 4, 7, 8 ], [ 2, 5, 6 ],
[ 3, 5, 6 ], [ 2, 4, 5 ], [ 2, 4, 6 ], [ 3, 5, 7 ], [ 3, 6, 7 ],
[ 4, 5, 8 ], [ 5, 7, 8 ] ]
gap> d:=[ [ 1, 4, 6, 7 ], [ 3, 5, 6, 7 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 8, 4, 5, 7 ], [ 4, 5, 6, 7 ] ];
gap> IsTetrahedralDecomposition(C,d);
true

```

Auf dieser aufbauend wird eine Tetraederzerlegung von S durch Betrachten der ... konstruiert.

```

gap> FacesOfEdge(C,4);;
gap> Union(VerticesOfFace(C,last[1]),VerticesOfFace(C,last[2]));
[ 1, 4, 7, 8 ]
gap> dd:=[ [ 1, 4, 6, 7 ], [ 3, 5, 6, 7 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 8, 4, 5, 7 ], [ 4, 5, 6, 7 ], [ 1,
4, 7, 8 ] ];
gap> IsTetrahedralDecomposition(s1,dd);
true
gap> FacesOfEdge(s1,4);;
gap> Union(VerticesOfFace(s1,last[1]),VerticesOfFace(s1,last[2]));
[ 1, 4, 7, 8 ]
gap> ddd:=[ [ 1,4,6,7 ], [ 3,5,6,7 ], [ 2,4,5,6 ], [ 8,4,5,7 ], [ 4,5,6,7 ], [ 4,7,1,8 ], [ 2,3,5,6 ] ];;
gap> IsTetrahedralDecomposition(S,ddd);
true

```

Lemma 6.33. Seien X und Y Sphären und $\phi : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus von X nach Y . Für eine Tetraederzerlegung D von X ist

$$\{\phi(d) \mid d \in D\}$$

eine Tetraeder Zerlegung von Y .

Beweis. *noch – überlegen*

□

Lemma 6.34. *Sei X eine vertex-treue Sphäre und D und D' zwei minimale Tetraederzerlegungen. Dann existiert ein Isomorphismus $\phi : X \rightarrow X$, sodass*

$$D' = \{\phi(d) \mid d \in D\}$$

ist.

Beweis. noch – überlegen

□

7 Sphären ohne 2-Waist

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären
- Kantendrehungen

7.1 vertex-treue Sphären mit genau einem 3-Waists

small – introduction

Definition 7.1. *Seien X und Y vertex-treue Sphären, die durch die Flächenträger ξ_X bzw. ξ_Y dargestellt werden. Um X und Y durch einen 3-Waist an Flächen $F \in X_2$ und $F' \in Y_2$ zu verbinden, muss man die Annahme treffen, dass $X_0(F) = Y_0(F')$ und $X_0 \setminus X_0(F) \cap Y_0 \setminus Y_0(F') = \emptyset$. Dann bildet die Sphäre $X \# Y$ repräsentiert durch $\xi_W = \xi_X \Delta \xi_Y$ eine wohldefinierte simpliziale Fläche.*

Bemerkung 7.2. *Obige Definition lässt sich leicht verallgemeinern. Falls X_0 und Y_0 disjunkt sind, kann man das Zusammensetzen der Sphären mithilfe einer Permutation $\phi = (v_1 v'_1)(v_2 v'_2)(v_3 v'_3)$ für $X_0(F) = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $Y_0(F') = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ durchführen. Man identifiziert ξ_Y mit der Menge*

$$\{\phi(y) \mid y \in \xi_Y\}.$$

und bezeichnet die Sphäre, die durch das Zusammensetzen entsteht mit $X \#_\phi Y$.

Andersherum kann man eine vertex-treue Sphaere X mit einem 3-Waist in ähnlicher Weise wie oben skizziert in zwei Komponenten aufteilen. Sei $W \subseteq X_1$ ein 3-Waist, dann kann man X_2 nach Definition 2.13 in die 3-Waist Komponenten $M_1, M_2 \subseteq X_2$ bezüglich W aufteilen. Seien nun $\{v_1, v_2, v_3\} = X_0(W)$ die Ecken des 3-Waists und $\{P_1, P_2, P_3\} \cap X_0 = \emptyset$, dann erhalten wir die vertex-treue Sphäre X^W , durch

$$\xi_W = \{\phi(X_0(m_1)) \mid m_1 \in M_1\} \cup \{X_0(m_2) \mid m_2 \in M_2\}.$$

Beispiel 7.3. Betrachten wir den oben eingeführten Double-Tetraeder, der durch die Menge

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{5, 2, 3\}, \{5, 3, 4\}, \{5, 2, 4\}\}$$

festgelegt wird.

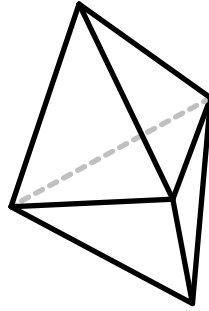


Abbildung 37: Double-Tetraeder

Dann handelt es sich bei den Ecken 2, 3 und 4 um die Ecken eines 3-Waists. Durch Einführen von neuen Ecken 6, 7, 8 erhalten wir nun die disjunkte Vereinigung von zwei Tetraedern mit zugehörigem Flächenträger

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \cup \{\{5, 6, 7\}, \{5, 6, 8\}, \{5, 7, 8\}, \{6, 7, 8\}\}.$$

Bemerkung 7.4. Sei X eine simpliziale Fläche und W_1, \dots, W_n 3-Waists in X . Durch iteratives Anwenden der Bemerkung 7.2 erhalten wir eine simpliziale Fläche Y , die aus $n+1$ Zusammenhangskomponenten besteht. Es existieren also vertex-treue Sphären Z_1, \dots, Z_{n+1} ohne 3-Waists, sodass

$$Y_i = \bigcup_{j=1}^{n+1} (Z_j)_i$$

für $i = 0, 1, 2$ ist. Wir nennen Z_1, \dots, Z_{n+1} die Building Blocks von X und

$$\prod B_i^{t_i},$$

wobei $s_i = |\{j \mid 1 \leq j \leq n+1, (Z_j)_2 = i\}|$ ist, den Blocktyp von X .

Beispiel 7.5. Für ein tieferes Verständnis vom Blocktyp einer Sphere betrachten wir nun das simpliziale Parallelepiped mit zugehörigem Flächenträger

$$\begin{aligned} \xi = & \{\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}, \\ & \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{5, 6, 8\}\}. \end{aligned}$$

Bei dieser Sphäre handelt es sich um eine Sphäre mit genau 2 3-Waists. Also wird durch $(X^{(1,2,3)})^{(4,5,6)}$ eine simpliziale Fläche mit den Zusammenhangskomponenten Z_1, Z_2, Z_3 konstruiert, wobei $Z_1, Z_2 \cong T$ und $Z_3 \cong O$ sind. Also ist das simpliziale Parallelepiped eine Sphäre vom Blocktyp $B_4^2 B_8$

Mithilfe des SimplicialSurfaces Paket kann man die Sphären mit genau einem 3-Waist berechnen. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl k_n der Sphären mit genau einem 3 Waist und n Flächen.

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
k_n	0	1	0	1	1	4	14	52	237	1132	5729	30100	162410

Zudem listen wir den Vertex Counter, Face-counter und die Automorphismengruppen für die Sphären mit bis zu 16 Flächen auf.

n	Zshngs.- komp.	Vertex counter	Facecounter	Aut. gruppe
6	T, T	$v_3^2 v_4^3$	$f_{3,4^2}^6$	$C_2 \times D_6$
10	T, O	$v_3^1 v_4^4 v_5^3$	$f_{3,5^2}^3 f_{4^3}^1 f_{4^2,5}^3 f_{4,5^2}^3$	S_3
12	$(5)^2, T$	$v_3^1 v_4^3 v_5^3 v_6^1$	$f_{3,5^2}^1 f_{3,5,6}^2 f_{4^2,5}^2 f_{4^6}^2 f_{4,5^2}^2 f_{4,5,6}^2 f_{5^3}^1$	C_2
14	$(6)^2, T$	$v_3^1 v_4^4 v_5^2 v_6^1 v_7^1$	$f_{3,5^2}^1 f_{3,5,7}^2 f_{4^2,6}^3 f_{4^2,7}^3 f_{4,5,6}^2 f_{4,5,7}^2 f_{5^2,6}^1$	C_2
	S, T	$v_3^1 v_4^3 v_5^3 v_6^2$	$f_{3,5,6}^2 f_{3,6^2}^1 f_{4^2,5}^1 f_{4^2,6}^1 f_{4,5^2}^3 f_{4,5,6}^4 f_{4,6^2}^1 f_{5^2,6}^1$	$\{id\}$
	O, O	$v_4^6 v_6^3$	$f_{4^3}^2 f_{4^2,6}^6 f_{4,6^2}^6$	D_{12}
16	$(7)^2, T$	$v_3^1 v_4^4 v_5^2 v_6^2 v_7^1$	$f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4^2,6}^2 f_{4^2,7}^2 f_{4,5^2}^1 f_{4,5,6}^3$ $f_{4,5,7}^1 f_{4,6^2}^2 f_{4,6,7}^1 f_{5^2,7}^1$	$\{id\}$
	$(5)^2, O$	$v_3^1 v_4^5 v_5^2 v_7^1 v_8^1$	$f_{3,5^2}^1 f_{3,5,8}^2 f_{4^2,7}^4 f_{4^2,8}^4 f_{4,5,7}^2 f_{4,5,8}^2 f_{5^2,7}^1$	C_2
	$(5)^2, O$	$v_3^1 v_4^3 v_5^4 v_6^1 v_7^1$	$f_{3,5,6}^1 f_{3,5,7}^1 f_{3,6,7}^1 f_{4^2,5}^1 f_{4^2,7}^1 f_{4,5^2}^3 f_{4,5,6}^1$ $f_{4,5,7}^3 f_{4,6,7}^1 f_{5^3}^1 f_{5^2,6}^2$	$\{id\}$
		$v_3^1 v_4^2 v_5^5 v_6^2$	$f_{3,5,6}^2 f_{3,6^2}^1 f_{4,5^2}^4 f_{4,5,6}^4 f_{5^3}^2 f_{5^2,6}^2 f_{5,6^2}^1$	C_2
		$v_4^6 v_5^1 v_6^2 v_7^1$	$f_{4^3}^1 f_{4^2,5}^2 f_{4^2,6}^2 f_{4^7}^3 f_{4,5,6}^2 f_{4,6^2}^1 f_{4,6,7}^4 f_{5,6^2}^1$	C_2

Bemerkung 7.6. Sei X eine Sphäre ohne Ecken vom Grad 3 und F eine Fläche in X . Dann ist $Aut(T^F(X))$ eine Untergruppe von S_3 .

Beweis. Sei V die Ecke vom Grad 3 in $T^F(X)$. Da X keine Ecken vom Grad 3 besitzt, gilt

- $\phi(V) = V$
- $\phi(X_1(V)) = X_1(V)$
- $\phi(X_2(V)) = X_2(V)$

für jeden Isomorphismus $\phi : Aut(T^F(X)) \mapsto Aut(T^F(X))$. Für solch einen Isomorphismus kommen nur die Elemente der Gruppe S_3 in Frage. \square

8 Multi-Sphären

In diesem Kapitel wird die Konstruktion der Multitetraeder verallgemeinert.

Definition 8.1. *Seien X eine vertex-treue Sphäre. Man nennt X eine Multi sphere, falls es $k, n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass X eine Sphäre vom Blocktyp B_n^k und*

$$Z_1 \cong \dots \cong Z_k$$

für die Building Blocks $Z_1 \dots, Z_k$ gilt.

Bemerkung 8.2. • *Jede vertex-treue Sphäre ohne 3-Waist ist eine Multi-Sphäre.*

- *Multitetraeder sind vom Blocktyp B_4^k und bilden damit Multi-Sphären.*

Für Multi-Sphären können wir analog zu den Multitetraedern ein Symbol einführen, um eine nähere Beschreibung der Struktur der Sphären zu erhalten.

9 Erkenntnisse

Satz 9.1. *Sei X ein Multi-Tetraeder, der nicht zum Tetraeder isomorph ist und F_X der Facegraph von X . Dann ist F_X 3-färbbar.*

Satz 9.2.

Folgerung 9.3. *Für alle simplizialen Flächen X mit einem 3- oder 2-Waist gilt*

$$\det(F_X) = 0$$

Folgerung 9.4. *Sei X ein Multi-Tetraeder und F_T die zugehörige Flächen Matrix. Dann ist*

$$\det(F_T) = 0$$

Beweis. noch überlegen

□

Appendix

benötigte Vorkenntnisse

- Grundlagen
- vertex-treue Sphären

Liste der verwendeten Sphären.