Péndulo

Reyna Cornelio

19 Enero 2016

Las matemáticas que se utilizan en el péndulo son bastante complicadas. Para poder simplificarlas se puede utilizar en este caso, el péndulo simple la cual permite resolver analíticamente la ecuación de movimiento para oscilaciones pequeñas.

1 Péndulo simple

Se le conoce como péndulo de gravedad simple a la idealización del péndulo real. Un péndulo simple debe decumplir con ciertos supuestos:

- Debe haber una carga puntual, la cual estará suspendida de un cable o una varilla tensa, que no se extienda.
- El movimiento sólo ocurre en dos dimensiones.
- Se desprecian las fuerzas no conservativas.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento de un péndulo simple es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

!Donde g es la aceleración debida a la gravedad, l la longitud del péndulo y $\theta eldesplazamientoangular.Laflechaazuleslafuerzadelagravedadqueseejercesobrelamasa, ylasfl$

Considere la segunda ley de Newton,

$F = ma$

Donde F es la fuerza que es ejercida sobre el objeto, m la masa y a la aceleración. Debido a que sólo se hace referencia a los cambios de velocidad y las turbulencias se ve obligado a permanecer en una trayectoria circular, se aplica la ecuación de Newton a sólo el eje tangencial. De esta manera nos queda las siguientes expresiones

$F = -mg\sin\theta = ma$

$a = -g\sin\theta$

El signo negativo en el lado derecho implica que $\theta ysiempreapuntanendireccionesopuestas.Estot$

$s = l\theta$

$\frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d^2s}{d^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$

sustituyendo en la ecuación tenemos que: $l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$

reacomondando términos nos queda $l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$

Aproximación para un ángulo pequeño

La ecuación diferencial dada no es fácil de resolver, pues no puede ser expresada en términos de funciones elementales. Ahora bien si se considera únicamnete que el ángulo es mucho menor a un radián, se obtiene una solución que puede ser obtenida fácilmente. Entonces se tiene que:

$\theta \ll 1,$

Por tanto,

$\sin\theta \approx \theta,$

da la ecuación para el oscilador ármonico.

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

el error que se produce es aproximadamente del orden de θ^3 (de acuerdo a la serie de Maclaurin para $\sin\theta$).

Dada las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ la solución sería:

$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad \theta \ll 1.$

Período arbitrario de la amplitud

Para amplitudes mas allá del pequeño ángulo de aproximación, se puede calcular el período exacto, primero se invierte la ecuación de la velocidad angular *obtenida del metódo de energía.* $\dfrac{dt}{d\theta} = \sqrt{\dfrac{l}{2g}} \dfrac{1}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$

Se puede integrar un ciclo, medio ciclo ó un cuarto de ciclo dependiendo de la situación. Lo que nos lleva a:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int$$

Observe que la integral diverge en θ_0 *cuando se acerca por la vertical, entonces tenemos*

$$\lim T_{\theta_0 \longrightarrow \pi} = \infty$$

Esta integral se puede reeescribir en términos de la integral elíptica

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\theta_0}{2}, \csc\frac{\theta_0}{2}\right) \csc\frac{\theta_0}{2}$$

donde F *es una integral elíptica incompleta de primer orden, la cual esta definida como*

$$F(\varphi, \kappa) = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 u}} du.$$

Se sustituye el $\sin u = \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}}$ *expresando* θ *en términos de* u

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

Solución polinomial de Legendre para la integral elíptica

Dada la ecuación del período expresada en términos de θ *y el polinomio de Legendre para la solución de la integral elíptica*

$$K(\kappa) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \kappa^4 + \cdots \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \kappa^{2n} + \cdots\right.$$

donde n!! se denota como doble factorial, la cual es una solución exacta del período del péndulo.