Espacio Fase

Reyna Cornelio

3 Marzo 2016

Un diagrama de fase es una representación geométrica de las trayectorias de un sistema dinámico en el plano de fase. Cada conjunto de condiciones iniciales se representa por una curva diferente, o punto. La importancia de este tipo de diagramas radica a que es una herramienta en el estudio de los sistemas dinámicos. En la cual se puede observar el comportamiento que tiene el sistema. Ya que representa el valor del parámetro seleccionado.

Un gráfico de fases de un sistema dinámico representa las trayectorias del sistema (con flechas) y los estados estables constante (con puntos) y estados estacionarios inestables (con círculos) en un espacio de estados. Los ejes son de variables de estado.

Ecuación

Como se había visto anteriormente la ecuación diferencial ordinaria para el movimiento del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Una ecuación diferencial de orden m generalmente puede transformarse en un sistema de m ecuaciones de primer orden mediante un cambio de variable adecuado.

Para ello tomamos

$$w = \frac{d\theta}{dt}$$

Al sustituir en nuestra ecuación tenemos que:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Sabemos que si el pédulo se lanza en caída libre en la parte superior que se movería alrededor de casi todo el camino y luego se detiene cerca de la cima. Esto se traduce en una trayectoria que conecta el equillibria silla de montar en las inmediaciones. El panorama general es la siguiente: Para el péndulo simple con fricción, tenemos sumideros en espiral en $(0,0),(0,2\pi),(0,4\pi),(0,-2\pi)$, etc.

Sin embargo, si analizamos a detalle la fase sin fricción,se puede observar las diferentes formas que se generan.

- Cada órbita es atravesada en sentido de las manecillas del reloj y gira en torno a los puntos de equilibrio estables.En esta región el péndulo alcanza una altura máxima con velocidad angular cero cuando el intercambio de su dirección de movimiento.

- Otros lugares de equilibrio inestable corresponde a los valores de π y múltiplos de este.

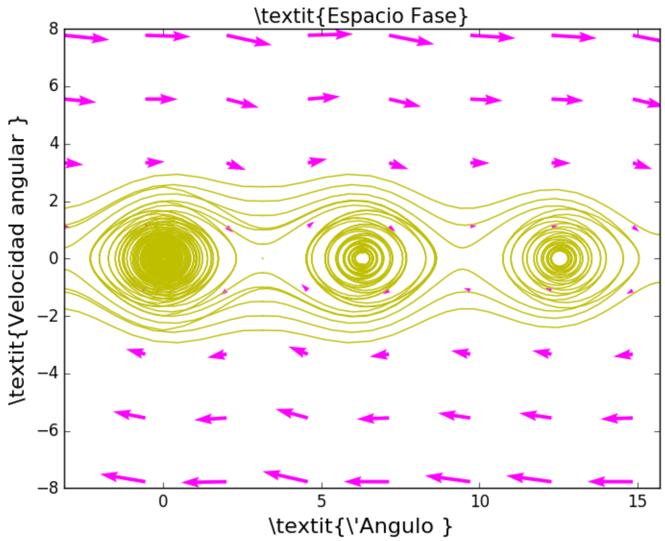
A continuación se muestra el código que se utilizó para crear el gráfico del espacio fase.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab as p
from scipy.integrate import odeint

def f(Y, t):
    y1, y2 = Y
    return [y2, -np.sin(y1)-0.1*y2]
f3 = plt.figure()
y1 = np.linspace(-3.14, 20.0, 25)
y2 = np.linspace(-10, 10, 25)
Y1, Y2 = np.meshgrid(y1, y2)
t = 0
u, v = np.zeros(Y1.shape), np.zeros(Y2.shape)
M = (np.hypot(u, v))
M[ M == 0] = 1.
u /= M
v /= M

Q = plt.quiver(Y1, Y2, u, v,cmap = 'PiYG')
```

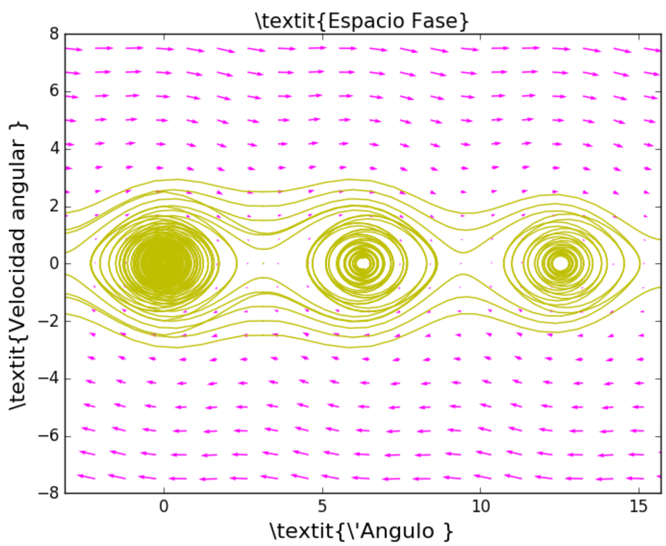
```
NI, NJ = Y1.shape
f2 = plt.figure()
for i in range(NI):
    for j in range(NJ):
            x = Y1[i, j]
            y = Y2[i, j]
            yprime = f([x, y], t)
            u[i,j] = yprime[0]
            v[i,j] = yprime[1]

Q = plt.quiver(Y1, Y2, u, v,M, cmap = 'spring')

plt.xlabel('$y_1$')
plt.ylabel('$y_2$')
plt.xlim([-4, 16])
plt.ylim([-8, 8])
plt.savefig('EF.png')

for y20 in [-2.5,-2,-1.5,-1,-0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2,2.5]:
    tspan = np.linspace(0, 50, 200)

    y0 = [0, y20]
    y1 = [np.pi, y20]
    ys = odeint(f, y0, tspan)
    ys1 = odeint(f, y1, tspan)

    plt.plot(ys[:,0], ys[:,1], 'y-')
    plt.plot(ys[:,0], -ys[:,1], 'y-')
    plt.plot(ys1[:,0], ys1[:,1], 'y-')
    plt.plot(ys1[:,0], -ys1[:,1], 'y-')
    plt.plot([ys[0,0]], [ys[0,1]], 'y')
    plt.plot([ys[-1,0]], [ys[-1,1]], 'y')

plt.xlabel(r'\textit{\'Angulo }', fontsize=16)
plt.ylabel(r'\textit{Velocidad angular }', fontsize=16)

plt.title(r'\textit{Espacio Fase}', fontsize=15)
plt.xlim([-np.pi, 5*np.pi])
```

```
plt.savefig('EF2.png')
plt.show()
```

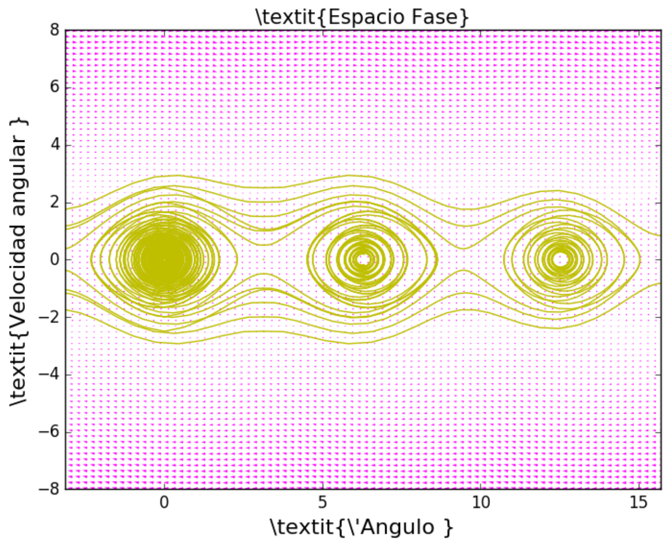
Se realizarón diversas pruebas, variando el rango.



fase 10.png



fase.png



fase 100.png En la primera gráfica se tomaron 10 puntos , se puede observar con mayor claridad el comportamiento de cuando el ángulo es mayor, en comparación de la tercera imagen en la cual no se logran distinguir las fases que tiene el péndulo.