Actividad 9: Aproximación al Cálculo Del Periodo Del Péndulo

Reyna Cornelio

18 de Abril 2016

Para la primera parte de esta actividad con ayuda de WxMaxima se graficarán los errores para los primeros 10 términos en series de potencias. Finalmente aplicando una serie de Maclaurin se demostrará que se puede expresar el periodo de la forma $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 \cdots)$

Solución Del Polinomio de Legendre de la Integral Elíptica

Dado $T = 4t\sqrt{\frac{l}{g}}K \sin\frac{\theta_0}{2}$ y el polinomio de Legendre tenemos que la solución:

$K(\kappa) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \kappa^4 + \cdots \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \kappa^{2n} + \cdots\right.$

Donde n es el doble factorial, siendo una solución exacta para el periodo del péndulo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right.$

y como se había visto anteriormente, los términos se pueden expresar como doble factorial. Por lo cual nos queda la siguiente expresión:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2n * n!}\right)^2 \sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

Con ayuda de Maxima se realizaron las aproximaciones con cálculo simbólico. Para ello se partirá de la ecuación $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 udu}}$ 11

```
aprox:taylor(1/sqrt(1 - k^2*sin(u)^2),k,0,10);
```

$1+\frac{\sin(u)^2\,k^2}{2}+\frac{3\sin(u)^4\,k^4}{8}+\frac{5\sin(u)^6\,k^6}{16}+\frac{35\sin(u)^8\,k^8}{128}+\frac{63\sin(u)^{10}\,k^{10}}{256}+...$

En este caso se integrará la serie.

```
aprox1:expand(integrate(aprox,u,0,%pi/2));
```

$\frac{3969\,\pi\,k^{10}}{131072}+\frac{1225\,\pi\,k^8}{32768}+\frac{25\,\pi\,k^6}{512}+\frac{9\,\pi\,k^4}{128}+\frac{\pi\,k^2}{8}+\frac{\pi}{2}$

Haciendo una sustitución en la serie y factorizando $\frac{\pi}{2}$, tenemos:

```
aprox3: expand(aprox2/(%pi/2));
```

$\frac{3969\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{10}}{65536}+\frac{1225\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{8}}{16384}+\frac{25\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{6}}{256}+\frac{9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{4}}{64}+\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2}}{4}+1$

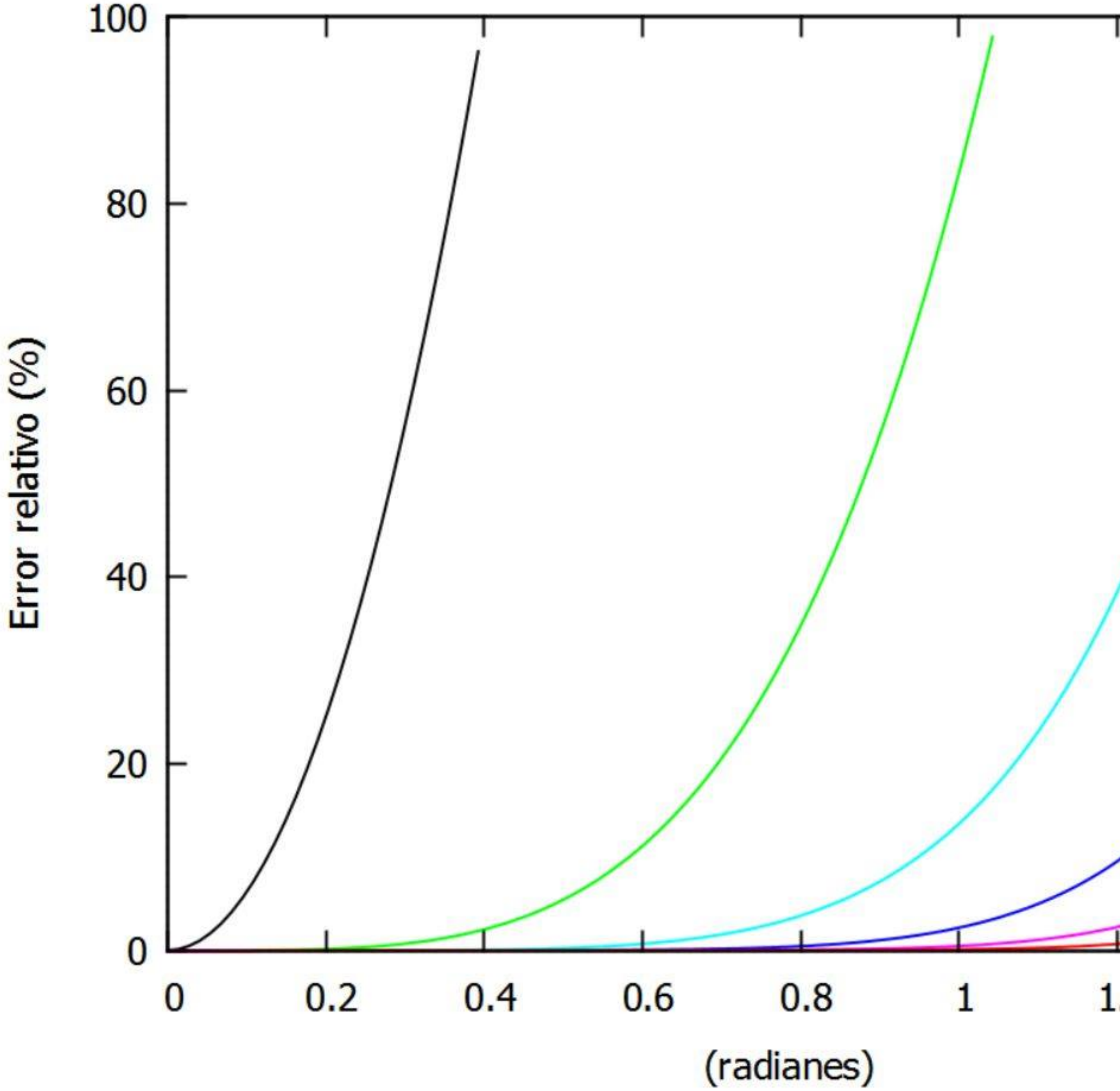
Si realizamos la sumatoria del período del péndulo obtenemos el mismo resultado. lo cual nos demuestra que es lo mismo.

0.1 Aproximación

```
K(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 300), simpsum;
N0(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 0), simpsum;
N1(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 1), simpsum;
N2(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 2), simpsum;
N3(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 3), simpsum;
N4(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 4), simpsum;
N5(x):=sum((((2*n)!/(2^n*n!)^2)^2)*(sin(x/2))^(2*n), n, 0, 5), simpsum;
ER0(x):=100*abs(K(x)-N0(x))/K(x);
ER1(x):=100*abs(K(x)-N1(x))/K(x);
ER2(x):=100*abs(K(x)-N2(x))/K(x);
ER3(x):=100*abs(K(x)-N3(x))/K(x);
ER4(x):=100*abs(K(x)-N4(x))/K(x);
ER5(x):=100*abs(K(x)-N5(x))/K(x);
plot2d([ER0(x),ER1(x),ER2(x),ER3(x),ER4(x),ER5(x)],
[x,0,%pi/2],[y,0,100], [color,black,green,cyan,blue,magenta,red],
[legend,"T0","T2","T4","T6","T8","T10"],
[ylabel,"Error relativo (%)"],[xlabel,"(radianes)"],
[gnuplot_preamble, "set encoding iso_8859_1;set grid;
set title 'Aproximación Del Período Para Los Primeros N Términos'"]);
```

$\mathrm{K}\left(x\right):=\sum_{n=0}^{300}\left(\frac{(2\,n)!}{\left(2^n\,n!\right)^2}\right)^2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$

$$\mathrm{N0}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{0} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{N1}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{1} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{N2}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{N3}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{N4}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{N5}\left(x\right) := \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{(2\,n)!}{(2^n\,n!)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$
$$\mathrm{ER0}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N0}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$
$$\mathrm{ER1}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N1}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$
$$\mathrm{ER2}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N2}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$
$$\mathrm{ER3}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N3}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$
$$\mathrm{ER4}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N4}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$
$$\mathrm{ER5}\left(x\right) := \frac{100\,|\mathrm{K}(x)-\mathrm{N5}(x)|}{\mathrm{K}(x)}$$


Error relativo (%)
100
80
60
40
20
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(radianes)