Paola Rubí Hernández Floreano

Tipos de error:

- Errores de truncamiento: Cuando aproximamos procesos infinitos.
- Errores de redondeo: Debido a la capacidad de digitos a procesar
- Errores de convergencia: Cuando los métodos interativos no convegen o lo hacen lentamente.
- Errores humanos: Errores en la progamación o diseño experimental
- Errores de modelo: Cuando el modelo no refleja adecuadamente la realidad.
-

Estimar $f(3)$ si $f(x)=\ln(x)$, punto de partida $x=1$ y expanción del 0 al 4 orden.

① $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!}+\frac{f^4(a)(x-a)^4}{4!}$

$a=1 \quad f(x)=\ln(x)$

$f'(x)=1/x$

$f''(x)=-1/x^2$

$f'''(x)=2/x^3$

$f^4(x)=-6/x^4$

Evaluamos en $a=1$

$f'(a)=1$

$f''(a)=-1$

$f'''(a)=2$

$f^{(4)}(a)=-6$

Sustituimos en ①: $\ln(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}$

Evaluamos en $x=3$ ∴ $\ln(3)=2-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}-\frac{16}{4}=\underline{-1.33}$

Paola Rubí Hernández Floreano

Función $f(x) = x - 1 - 0.5\sin(x)$. Sea $a = X_i = \pi/2$ en $[0, \pi]$ en el punto base. Determine la expansión de la serie de Taylor que da un $E_{max} = 0.015$

① Derivamos la función principal

$$f'(x) = 1 - 0.5\cos(x)$$
$$f''(x) = 0.5\sin(x)$$
$$f'''(x) = 0.5\cos(x)$$
$$f''''(x) = -0.5\sin(x)$$
$$f^{5}(x) = -0.5\cos(x)$$

$$f(\pi/2) = \pi/2 - 1.5$$
$$f'(\pi/2) = 1$$
$$f''(\pi/2) = 0.5$$
$$f'''(\pi/2) = 0$$
$$f^{(4)}(\pi/2) = -0.5$$
$$f^{(5)}(\pi/2) = 0$$

Se requieren 5 derivadas pues $R_n(x) \leq 0.015$

$$R(x) \leq \frac{\max|f^{(n+1)}(\varepsilon)|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \therefore \frac{0.5}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{6} = 0.0104$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{3}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$f(x) \approx (\pi/2 - 1.5) + (x - \pi/2) + \frac{0.5}{2!}(x - \pi/2)^2 + \cancel{\frac{0}{3!}(x - \pi/2)^3} \to 0$$

$$-\frac{0.5}{4!}(x - \pi/2)^4 + \cancel{\frac{0}{5!}} \to 0$$

Paola Rubi Hernández Florano

Aproximación en diferencias de $O(h)$ hacia atrás y hacia adelante, además de una centrada. Queremos estimar la primera derivada de $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$. Evaluamos la derivada de $x=2$ usando incrementando 0.2 Interprete los resultados considerando el termino residual de Taylor.

Derivada exacta: $f'(x) = 75x^2 - 12x + 7 \therefore f'(2) = 283$

Funciones

$f(2.2) = 164.56$

$f(2) = 102$

$f(1.8) = 50.96$

Hacia adelante $(O(h))$: $f'(2) = \dfrac{f(2.2) - f(2)}{2.2 - 2} = 312.8$

Hacia atrás $(O(h))$: $f'(2) = \dfrac{f(2) - f(1.8)}{2 - 1.8} = 255.2$

Diferencia central $(O(h^2))$: $f'(2) = \dfrac{f(2.2) - f(1.8)}{2.2 - 1.8} = 284$

Error:

Hacia adelante = 29.8

Hacia atrás = 27.8

Hacia el centro = 1

Residual Taylor

$-h/2 \, f''(\xi)$

$+ h/2 \, f''(\xi)$

$- h^2/6 \, f'''(\xi)$

Paola Rubí Hernández Floriano

Determine las raíces reales de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

b) Empleando la fórmula cuadrática

c) Usando el método de bisección con 3 iteraciones para determinar la raíz más grande

d) Error estimado E_a y el error verdadero E_v para cada iteración

$$x = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4(0.5)(4.5)}}{2(-0.5)} \therefore x_1 = -1.405 \quad x_2 = 6.405$$

Buscamos el intervalo donde cambia el signo. Probamos [5, 7]

$f(5) = 4.5 > 0$ y $f(7) = -2.5 < 0$

Interación 1:

$X_m = (5+7)/2 = 6$

$f(6) = 1.5 > 0$

$\therefore$ Nueva raíz en [6, 7]

E_a = No se puede calcular

$E_v = \left|\frac{6.405 - 6}{6.405}\right| 100 = 6.32\%$

Iteración 2:

$X_m = (6+7)/2 = 6.5$

$f(6.5) = -0.375$

$\therefore$ Nueva raíz en [6, 6.5]

$E_a = \left|\frac{6.5 - 6}{6.5}\right| \cdot 100 = 7.69\%$

$E_v = \left|\frac{6.405 - 6.5}{6.405}\right| 100 = 1.48\%$

Iteración 3:

$X_m = (6 + 6.5)/2 = 6.25$

$f(6.25) = 0.5937$

$\therefore$ Nueva raíz en [6.25 y 6.5]

Raíz aprox = 6.375

$E_a = \left|\frac{6.25 - 6.5}{6.25}\right| 100 = 4\%$

$E_v = \left|\frac{6.405 - 6.25}{6.405}\right| 100 = 2.42\%$

$$E_a = \left|\frac{X_{nuevo} - X_{anterior}}{X_{nuevo}}\right| \cdot 100\% \qquad E_v = \left|\frac{X_{verdadero} - X_{aprox}}{X_{verdadero}}\right| \cdot 100$$

Paola Rubí Hernández Florcano

Suponga que está diseñando un tanque esférico para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contener se calcula con $V = \pi h^2 \left(\frac{3R - h}{3}\right)$

V es el volumen m^3

h la profundida del agua en el tanque (m)

R el radio del tanque = 3m

¿A qué profundidad se debe llenarse el tanque de $30 m^3$?

$$30 m^3 = \pi h^2 \left(\frac{3(3m) - h}{\cancel{3}}\right) = \pi h^2 \frac{9 - h}{3}$$

$$\therefore \quad 90 = \pi h^2 (9 - h) \quad \therefore \quad f(h) = \pi h^2 (9 - h) - 90$$

Como el tanque tiene radio = 3m, la profundidad máx es h = 6m (el diametro), pero para un volumen de $30 m^3$ probablemente h este en 2-3m.

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= \pi(2)^2(9-2) - 90 = -2.0352 \\ f(3) &= \pi(3)^2(9-2) - 90 = 79.6464 \end{aligned}\right\} \text{Raíz } [2, 3]$$

Falsa posición

$$X_r = X_u - \frac{f(X_u)(X_l - X_u)}{f(X_l) - f(X_u)} \qquad \begin{aligned} X_l &= 2 \quad \text{donde } f(X_l) < 0 \\ X_u &= 3 \quad \text{donde } f(X_u) > 0 \end{aligned}$$

$$3 - \frac{79.6464(2 - 3)}{-2.0352 - 79.6464} = 2.025$$

Evaluamos $f(X_r) = f(2.025) = -0.16$

Ajustamos intervalo $(2.025, 3)$

Paola Ruby Hernández Floreano

$x_1 = 2.025$

$x_0 = 3$

$f(x_1) = -0.16$

$f(x_0) = 79.6464$

$$X_r = 3 - \frac{79.6464(2.025-3)}{-0.16-79.64} = 2.027$$

$$\epsilon_a = \left|\frac{2.027-2.025}{2.027}\right|(100) = 0.0987$$

$f(2.027) = 0.001$

$\therefore$ Intervalo $(2.025, 2.027)$

$$X_r = 2.027 - \frac{0.001 * (2.0250 - 2.0270)}{-0.16 - 0.001} = 2.0269$$

$$\epsilon_a = \left|\frac{2.02698 - 2.027}{2.02698}\right|(100) = 0.00061$$

La concentración de oxígeno en agua dulce es.

$$\ln(O_{sf}) = -139.34 + \frac{1.575701 \times 10^5}{T_a} - \frac{6.6423 \times 10^7}{T_a^2} - \frac{8.6219 \times 10^{11}}{T_a^4}$$

Se usa para calcular la concentración de oxígeno de 14.621 mg/L a 0°C a 6.413 mg/L a 40°C. Dado un valor de II, resolver la T en °C. Metodo bisección.

Si suponemos $O_{sf} = 9$

$$f(T_a) = \ln(9) - \left(-139.34 + \frac{1.5757 \times 10^5}{T_a} - \frac{6.6423 \times 10^7}{T_a^2} + \frac{8.62195 \times 10^{11}}{T_a^4}\right)$$

$$f(T_a) = 141.53722 - \frac{157570.1}{T_a} + \frac{66423090}{T_a^2} - \frac{862194900000}{T_a^4}$$

Como 9 está entre 6.413 y 14.621, la temperatura debe estar en 273K y 313K

$$f(273) = 141.53722 - \frac{157570.1}{273} + \frac{66423090}{273^2} - \frac{862194900000}{273^4}$$

$f(273) = 300.3572$

$\therefore f(313) = 226.3172$

Los 2 son positivos y no puede ser así, la ecuación correcta es:

$$\ln(o_{sf}) = -139.3441 + \frac{1.5757\times10^{5}}{T_a} - \frac{6.6423\times10^{7}}{T_a^{2}} + \frac{1.2438\times10^{10}}{T_a^{3}} - \frac{8.6219\times10^{11}}{T_a^{4}}$$

Aplicar método de bisección $[273, 313]$

$T_m = \frac{273+313}{2} = 293\ K$ $\quad f(293) = -0.03869$

Actualizamos $(273, 293)$

$T_m = \frac{273+293}{2} = 283\ K$ $\quad f(283) = +0.33869$

$Error = \left|\frac{283-293}{283}\right|(100) = 3.53$

Actualizamos $(273, 283)$

$T_m = \frac{273+283}{2} = 278\ K$ $\quad f(278) = -0.34869$

$Error = \left|\frac{278-283}{278}\right|(100) = 1.8$

Actualizamos $(273, 278)$

$T_m = \frac{273+278}{2} = 275.5$ $\quad f(275.5) = -0.6687$

$Error = \left|\frac{275.5-278}{275.5}\right|(100) = 0.9\%$

Paola Ruby Hernández Florcano

Balance de masa: $V\frac{dc}{dt} = Q - Qc - KV\sqrt{c}$

$V = 1\times10^6\, m^3$ $\quad Q = 1\times10^5 \frac{m^3}{año}$ $\quad W = 1\times10^9\, g/año$ $\quad K = 0.25 \frac{m^{0.5}}{año}$

Use el metodo de secante modificado para [ ] de estado estable.
Emple $c = 4\, g/m^3$ y $d = 0.5$

Estado estable $\frac{dc}{dt} = 0$

$$0 = Q - Qc - KV\sqrt{c}$$

$$Q(1-c) = KV\sqrt{c}$$

$$f(c) = 1 - c - \frac{KV}{Q}\sqrt{c} = 1 - c - 2.5\sqrt{c}$$

Como c es concentración [0, 1]

$f(0) = 1$ y $f(1) = -2.5$

Metodo de la secante modificada: $c_{i+1} = c_i - d\frac{f(c_i)}{f'(c_i)}$

① Calculamos $f'(c) = -1 - \frac{2.5}{2\sqrt{c}} = -1 - \frac{1.25}{\sqrt{c}}$

① Iniciamos con el $c = 4$ según el texto.

$f(4) = -8$
$f'(4) = -1.625$

$$c_1 = 4 - 0.5\left(\frac{-8}{-1.625}\right) = 1.538$$

Iteración 2. $c = 1.538$

$f(1.538) = -3.639$
$f'(1.538) = -2.007$

$$c_2 = 1.538 - 0.5\left(\frac{-3.639}{2.007}\right) = 0.6322$$

Iteración 3 $f(0.6322) = -1.62$
$f'(0.6322) = -2.5719$

$$c_3 = 0.6322 - 0.5\left(\frac{-1.62}{-2.572}\right) = 0.317$$

Error relativo porcentual:

$$E_t = \left| \frac{C_{verdadero} - C_{aprox}}{C_{verdadero}} \right| (100)$$ No tenemos $C_{verdadero}$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{C_3 - C_2}{C_3} \right| (100) = \left| \frac{0.31721 - 0.632}{0.31721} \right| (100) = 99.3\%$$

Proponer 2 o 3 funciones g(c) y determinar para que funciones la iteración de punto fijo debería converger

Ecuación → $1 - c = 2.5\sqrt{c}$

$c = 1 - 2.5\sqrt{c}$

$g_1(c) = 1 - 2.5\sqrt{c}$

Ecuación → $1 - c = 2.5\sqrt{c}$

$\sqrt{c} = \frac{1-c}{2.5} \therefore g_2(c) = \left(\frac{1-c}{2.5}\right)^2$

Calculamos derivadas de $g_1(c)$ y $g_2(c)$

$$g_1'(c) = -\frac{2.5}{2\sqrt{c}} = -\frac{1.25}{\sqrt{c}}$$

$$g_2'(c) = \frac{2(1-c)(-1)}{6.25} = -\frac{2(1-c)}{6.25}$$

Para que converja tiene $|g_1'(c)| < 1$ y $|g_2'(c)| < 1$

$$|g_1'(c)| = \frac{1.25}{\sqrt{c}} < 1 \rightarrow \sqrt{c} > 1.25 \rightarrow c > 1.5625$$

Paola Rubí Hernández Floreano

Como la raíz está al rededor de $c \approx 0.3$ y en ese intervalo $|g_1'(c)| = \frac{1.25}{\sqrt{0.3}} = 2.28 > 1$

$g_1(c)$: No converge porque $|g_1'(c)| > 1$ cerca de la raíz.

$$|g_2'(c)| = \frac{2|1-c|}{6.25} = \frac{2(1-0.3)}{6.25} = \frac{1.4}{6.25} = 0.224 < 1$$

$g_2(c)$ si converge pues $|g_2'(c)| < c$ cerca de la raíz
Pues su derivada tiene magnitud menor que 1

Para el ejercicio 6, hacer 3 iteraciones con Newton-Raphson.

$$f(h) = \pi h^2(9-h) - 90$$

① Calculamos $f'(h)$ $\therefore$ $f'(h) = \pi(18h - 3h^2) = 3\pi h(6-h)$

Newton-Raphson $\quad h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$ en $[2,3]$

Iteración 1:

Calculamos $f(2) = -2.0354$

$f'(2) = 75.3982$

$$h_1 = 2 - \left(\frac{-2.0354}{75.3982}\right) = 2.0269$$

Iteración 2: $f(2.0269) = 0.00001$

$f'(2.0269) = 75.88$

$$h_2 = 2.0269 - \left(\frac{0.00001}{75.88}\right) = 2.02699$$

Paola Rubí Hernández Floreano

$$E_{a_2} = \left| \frac{2.026996 - 2.026996}{2.026996} \right| 100 = 0$$

Con Newton-Raphson obtuvimos una solución más precisa y con menos iteraciones que con el método falsa posición.