

Exame AB-271

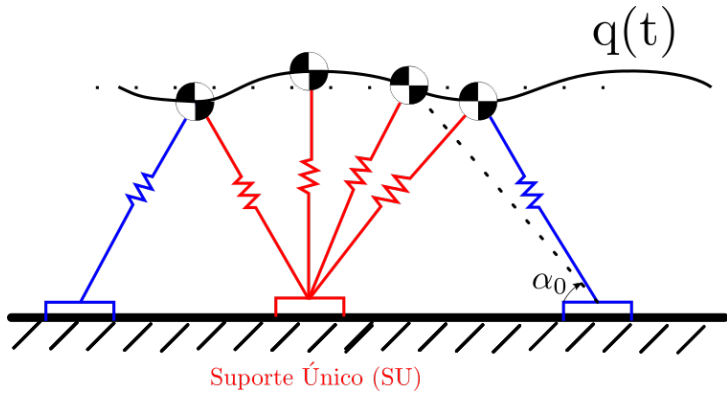
Reynaldo Lima

Reprodução parcial dos resultados de:

Visser, Ludo & Stramigioli, Stefano & Carloni, Raffaella. (2017). Bipedal locomotion using variable stiffness actuation.

1. Modelo SLIP

O bípede varia seu movimento entre fases de suporte único e suporte duplo, em uma variação como exemplificada a seguir, em que destaca-se a massa considerada do bípede.



Observa-se, na figura, a transição da situação de apoio duplo (quando o pé azul está no chão) num passo.

Sejam as variáveis de interesse no espaço $q = (q_1, q_2)$ do centro de massa e $p = (p_1, p_2)$ o momento linear, é possível descrever o sistema, da função energia do hamiltoniano

$$H = K + V = \frac{1}{2} \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{m_h} + m_h g_0 q_2 + \frac{1}{2} k_0 (L_0 - L_1)^2 + \frac{1}{2} k_0 (L_0 - L_1)^2,$$

com L_0 , L_1 e L_2 , respectivamente, comprimento das molas (pernas) relaxadas, comprimento durante a caminhada do pé de suporte único e comprimento da mola do pé não em apoio durante o passo do bípede:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -I_2 & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}.$$

Esta equação na forma porta-hamiltoniana descreve o sistema.

2. Simulação do sistema não controlado

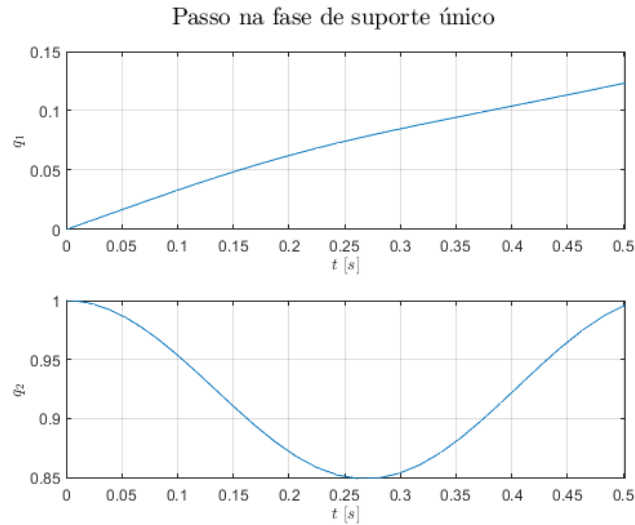
Podemos simular o modelo não controlador, do qual espera-se um movimento oscilatório do centro de massa (em que as pernas de suporte são trocadas a cada vez que o CM atinge a amplitude mínima do movimento):

```
L0 = 1; mh = 15; g = 9.81; k0 = 2000; q10 = 0.1;
q = sym('q',[2;1]);
p = sym('p',[2;1]);
% consideraremos que, para a perna L1 que "flutua", permanece-se L0=L1
c2 = q10;
```

```

L2 = sqrt((q(1)-c2)^2 + q(2)^2);
H = 1/(2*mh)*(p(1)^2 + p(2)^2) + mh*g*q(2) + 1/2*k0*(L2-L0)^2;
p_dot = -transpose(jacobian(H,q));
q_dot = transpose(jacobian(H,p));
eqs = [q_dot; p_dot];
syms t;
dinamica = matlabFunction(eqs, 'Vars', {t, [q;p]});
%çã condio inicial: velocidade no eixo x impulsionando o íbpede,
% q2 como 1.2 (amplitude do movimento)
X0 = [0;1;5;0];
[T,X]=ode45(@(t,X) dinamica(t,X), [0 10], X0);
index = find(sqrt(X(:,1).^2 + X(:,2).^2) >= 1,2);
fim_do_passo = index(2);
figure;
sgtitle("Passo na fase de suporte \{'u\}nico",'FontSize',14,'Interpreter','latex')
for i = 1:2
    subplot(2,1,i)
    plot(T(1:fim_do_passo),X(1:fim_do_passo,i));
    xlabel('$t$ [s]','FontSize',12,'Interpreter','latex');
    ylabel(sprintf('$q_{%d}$',i),'FontSize',12,'Interpreter','latex');
    grid on;
    set(gca,'XLim',[0 T(fim_do_passo)])
end

```



O movimento é oscilatório e foi simulado apenas o período de um passo. Observa-se, ainda, que o sistema acaba desviando da posição original, com a mola na mesma deformação elástica. Espera-se que esse sistema, por si só, não consiga seguir o movimento de caminhada indefinidamente, dependendo ainda da velocidade do centro de massa.

3. Teste com molas de constante de deformação variável

Modela-se o sistema com molas de constate elástica controlável. De modo a incluir constantes elásticas $u = (u_1, u_2)$, na equação do hamiltoniano surgem mais termos derivados para a equação do momento. Observe que, seja a nova energia H_C :

$$H_C = K + V = \frac{1}{2} \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{m_h} + m_h g_0 q_2 + \frac{1}{2} (k_0 + u_1) (L_0 - L_1)^2 + \frac{1}{2} (k_0 + u_2) (L_0 - L_1)^2$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial}{\partial q} H_C = -m_h g - \frac{1}{2} (k_0 + u_1) \frac{d}{dq} (L_0 - L_1)^2 - \frac{1}{2} (k_0 + u_2) \frac{d}{dq} (L_0 - L_2)^2 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial q} H - \frac{1}{2} \frac{d}{dq} (L_0 - L_1)^2 u_1 - \frac{1}{2} \frac{d}{dq} (L_0 - L_2)^2 u_2.\end{aligned}$$

Fazendo $\phi_1 = -\frac{1}{2}(L_0 - L_1)^2, \phi_2 = -\frac{1}{2}(L_0 - L_2)^2$, podemos representar o novo sistema como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -I_2 & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Como descrito no artigo, espera-se que, com o controle, possamos passar o sistema (o qual já possui alguns movimentos estáveis de caminhada) para um sistema controlado mais robusto, com modificações mínimas ao modelo.

Controle proporcional, fase de suporte único, pé de suporte como o 2:

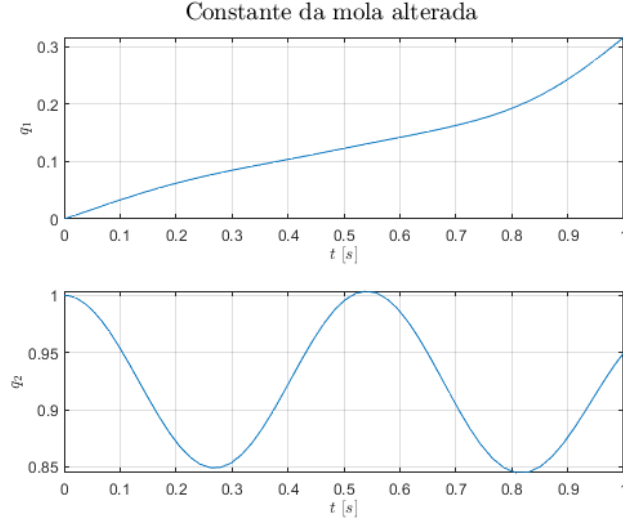
$$\begin{aligned}u_2 &= 0, \\ u_1 &= -\kappa_p (q_2^* - q_2)\end{aligned}$$

```
clear all;
L0 = 1; mh = 15; g = 9.81; k0 = 2000; q10 = 0.1; kp = 350; q2d = 1.0;
q = sym('q',[2;1]);
p = sym('p',[2;1]);
% consideraremos que, para a perna L1 que "flutua", permanece-se L0=L1
c2 = q10;
L2 = sqrt((q(1)-c2)^2 + q(2)^2);
phi2 = jacobian(-1/2*(L0-L2)^2,q);
H = 1/(2*mh)*(p(1)^2 + p(2)^2) + mh*g*q(2) + 1/2*k0*(L2-L0)^2;
p_dot = -transpose(jacobian(H,q)) + [0 0; phi2]'*[-kp;0];
q_dot = transpose(jacobian(H,p));
eqs = [q_dot; p_dot];
syms t;
dinamica = matlabFunction(eqs, 'Vars', {t, [q;p]});
%çã condio inicial: velocidade no eixo x impulsionando o íbpede,
% q2 como 1.2 (amplitude do movimento)
X0 = [0;1;5;0];
[T,X]=ode45(@(t,X) dinamica(t,X), [0 10], X0);
index = find(sqrt(X(:,1).^2 + X(:,2).^2) >= 1,2);
fim_do_passo = index(2);
figure(2);
sgtitle("Constante da mola alterada",'FontSize',14,'Interpreter','latex')
for i = 1:2
    subplot(2,1,i)
    plot(T(:,1),X(:,i));
    xlabel('$t$ $[s]$', 'FontSize',12,'Interpreter','latex');
    ylabel(sprintf('$q_{%d}$',i), 'FontSize',12,'Interpreter','latex');
    grid on;
```

```

set(gca,'XLim',[0 1])
end

```

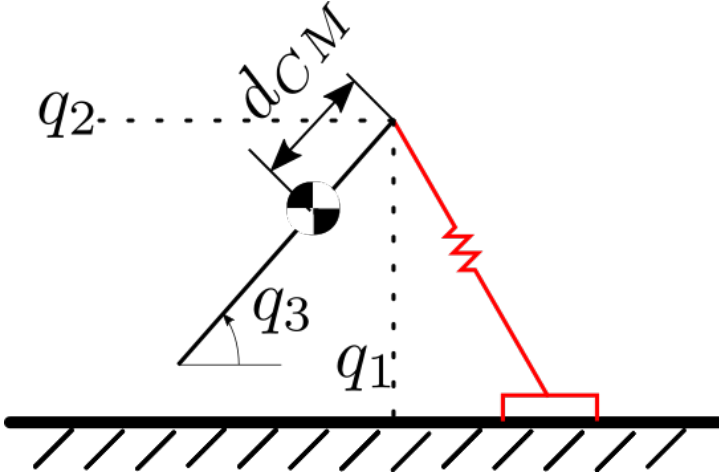


Foi mostrado as oscilações fora de um passo, que já apresenta um comportamento mais estável em relação ao resultado anterior, visto que há uma maior constante elástica. Isso elucida que, para o controle, deve existir soluções que satisfaçam completamente a trajetória desejada.

4 Mola de constante variável e inclusão da perna de balanço

Até o momento, foram consideradas apenas situações nas quais considera-se apenas o movimento da perna de suporte. A perna auxiliar pode ser modelada contendo uma massa, por isso vale denominá-la de perna de balanço.

Esta modelagem parte do seguinte sistema:



Na figura, já marca-se o novo centro de massa, sendo o modelo real a aplicação do modelo anterior com uma massa no pé. Desse modo, se L_0 é o comprimento da perna de balanço:

$$d_{CM} = \frac{m_{pé}}{m_{pé} + m_h} L_0.$$

Desse modo, o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo CM:

$$J_{\text{CM}} = m_h d_{\text{CM}}^2 + m_{\text{pé}}(L_0 - d_{\text{CM}})^2.$$

Com a massa do pé a ser considerada, surge um termo extra na energia cinética, pela rotação das massas. A velocidade do centro de massa da perna de balanço pode ser dada, em função das variáveis de estado q :

$$\begin{aligned} v_x - \dot{q}_3 d_{\text{CM}} \sin q_3 &= \dot{q}_1 \\ v_y + \dot{q}_3 d_{\text{CM}} \cos q_3 &= \dot{q}_2. \end{aligned}$$

Usando as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{\text{CM}} \sin q_3 \\ 0 & 1 & -d_{\text{CM}} \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M &= \text{diag}(m_h + m_{\text{pé}}, m_h + m_{\text{pé}}, J_{\text{CM}}) \end{aligned}$$

podemos definir:

$$p := M S \dot{q},$$

do qual, vale:

$$K = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p = \frac{1}{2} \dot{q}^T S^T M^T M^{-1} M S \dot{q},$$

A energia potencial, por sua vez (considerando a massa do centro de massa):

$$V = (m_h + m_{\text{pé}}) g (q_2 - d_{\text{CM}} \sin q_3) + \frac{1}{2} (k_0 + u_1) (L_0 - L_1)^2.$$

Com $H_T = K + V$, vale:

$$\frac{\partial H_T}{\partial p} = \frac{1}{2} (M^{-1} + M^{-T}) p = M^{-1} M S \dot{q} = S \dot{q}$$

daí:

$$\dot{q} = S^{-1} \frac{\partial H_T}{\partial p}.$$

Além disso, escrevendo os momentos com mudança de referencial para o ponto q_1, q_2 , lembrando das relações de força de coriolis:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ \sum \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{c_1 - q_1}{L_1} + \dot{q}_3^2 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 \\ -(m_h + m_{pe}) g - (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{q_2}{L_1} + \dot{q}_3^2 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 \\ \tau - (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) d_{CM} \cos (q_3 - \delta) + J_{CM} \ddot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Com δ o ângulo que o pé de apoio faz com a vertical

daí:

$$S^T \dot{p} = \begin{bmatrix} (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{c_1 - q_1}{L_1} + \dot{q}_3^2 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 \\ -(m_h + m_{pe}) g - (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{q_2}{L_1} + \dot{q}_3^2 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 \\ (m_h + m_{pe}) g d_{CM} \cos q_3 + Z + J_{CM} \ddot{q}_3 + \tau \end{bmatrix},$$

onde:

$$Z = -(k_0 + u_1) (L_1 - L_0) d_{CM} \cos (q_3 - \delta) + d_{CM} \sin q_3 (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{c_1 - q_1}{L_1} + d_{CM} \cos q_3 (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \frac{q_2}{L_1},$$

como:

$$\sin (\delta) = \frac{c_1 - q_1}{L_1}, \cos (\delta) = \frac{q_2}{L_1},$$

vale:

$$Z = 0,$$

e, ainda:

$$\begin{aligned} S^T M S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_{CM} \sin q_3 & -d_{CM} \cos q_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_h + m_{pe} & 0 & 0 \\ 0 & m_h + m_{pe} & 0 \\ 0 & 0 & J_{CM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{CM} \sin q_3 \\ 0 & 1 & -d_{CM} \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_h + m_{pe} & 0 & 0 \\ 0 & m_h + m_{pe} & 0 \\ d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 & -d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 & J_{CM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{CM} \sin q_3 \\ 0 & 1 & -d_{CM} \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_h + m_{pe} & 0 & d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 \\ 0 & m_h + m_{pe} & -d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 \\ d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 & -d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 & d_{CM}^2 (m_h + m_{pe}) + J_{CM} \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dq} (S^T p) &= \\ \frac{d}{dq} (S^T M S \dot{q}) &= \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{q}_3 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 & \dot{q}_3 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 & \left(q_1 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \cos q_3 + \dot{q}_2 d_{CM} (m_h + m_{pe}) \sin q_3 \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos fazer:

$$-A + A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_3 d_{\text{CM}}(m_h + m_{\text{pe}}) \cos q_3 \\ 0 & 0 & \dot{q}_3 d_{\text{CM}}(m_h + m_{\text{pe}}) \sin q_3 \\ -\dot{q}_3 d_{\text{CM}}(m_h + m_{\text{pe}}) \cos q_3 & -\dot{q}_3 d_{\text{CM}}(m_h + m_{\text{pe}}) \sin q_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_T}{\partial q} &= (m_h + m_{\text{pe}}) g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -d_{\text{CM}} \cos q_3 \end{bmatrix} + (k_0 + u_1) (L_1 - L_0) \begin{bmatrix} \frac{q_1 - c_1}{L_1} \\ \frac{q_2}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -S^T \dot{p} + (A^T - A) \dot{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{\text{CM}} \ddot{q}_3 + \underset{(**)}{\dot{q}_3 (m_h + m_{\text{pe}}) d_{\text{CM}} (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3) + \tau} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podemos separar os termos controlados tal que, com o hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + (m_h + m_{\text{pe}}) g (q_2 - d_{\text{CM}} \sin q_3) + \frac{1}{2} k_0 (L_0 - L_1)^2,$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_3 & S^{-1} \\ -S^{-T} & S^{-T} (A^T - A) S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ B \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}, \\ u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \tau \end{bmatrix}, \\ B &= S^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

destacando-se a relação:

$$(**): J_{\text{CM}} \ddot{q}_3 + (m_h + m_{\text{pe}}) d_{\text{CM}} (\dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_3 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3) = 0.$$