AB-271: Lista discretização espacial

Reynaldo Lima

Sumário

Exercício 1

Temos a equação:

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

Seja, pois, $u\left(x,t\right) = \phi\ \left(x\right)^T y\left(t\right)$, e um vetor auxiliar qualquer dado por $v^T\phi\ \left(x\right)$.

Obtemos, na equação original:

$$v^T\left[\int_0^L \phi\phi^T dx\right]\dot{y} = v^T\left[\int_0^L \phi\phi_{xx}^T dx\right]y.$$

Fazendo $M = \left[\int_0^L \phi\phi^T dx\right], D = \left[\int_0^L \phi\phi_{xx}^T dx\right]$, temos:

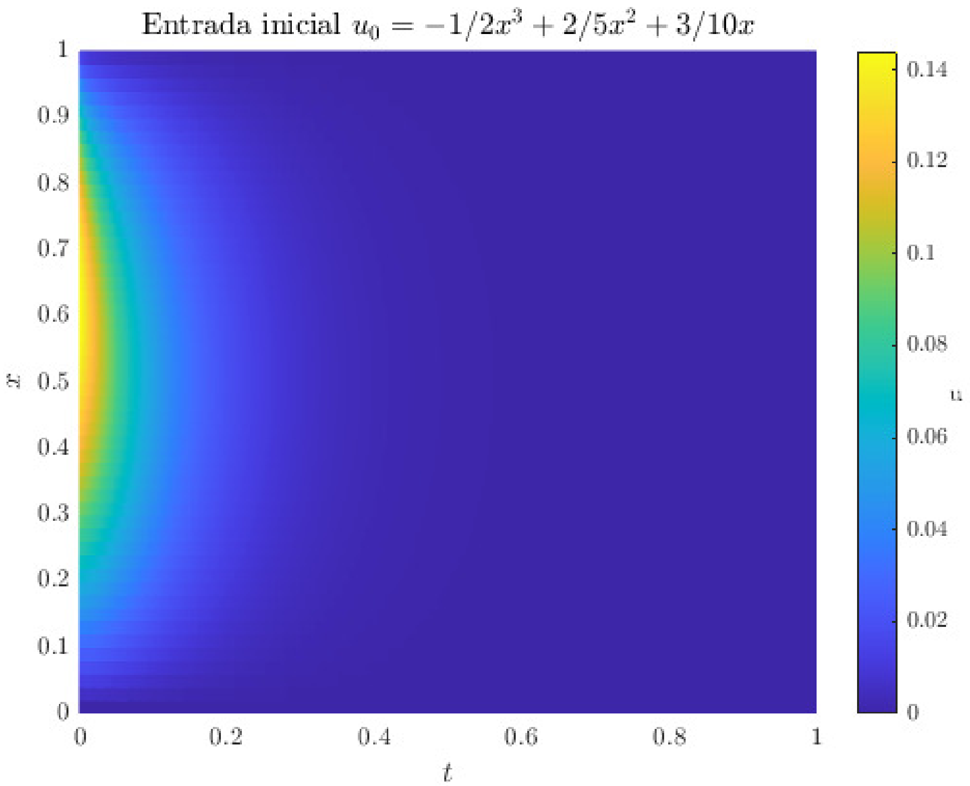
$\dot{y} = M^{-1}Dy.$

$\dot{u} = \phi\ \left(x\right)^T\ \dot{y}.$

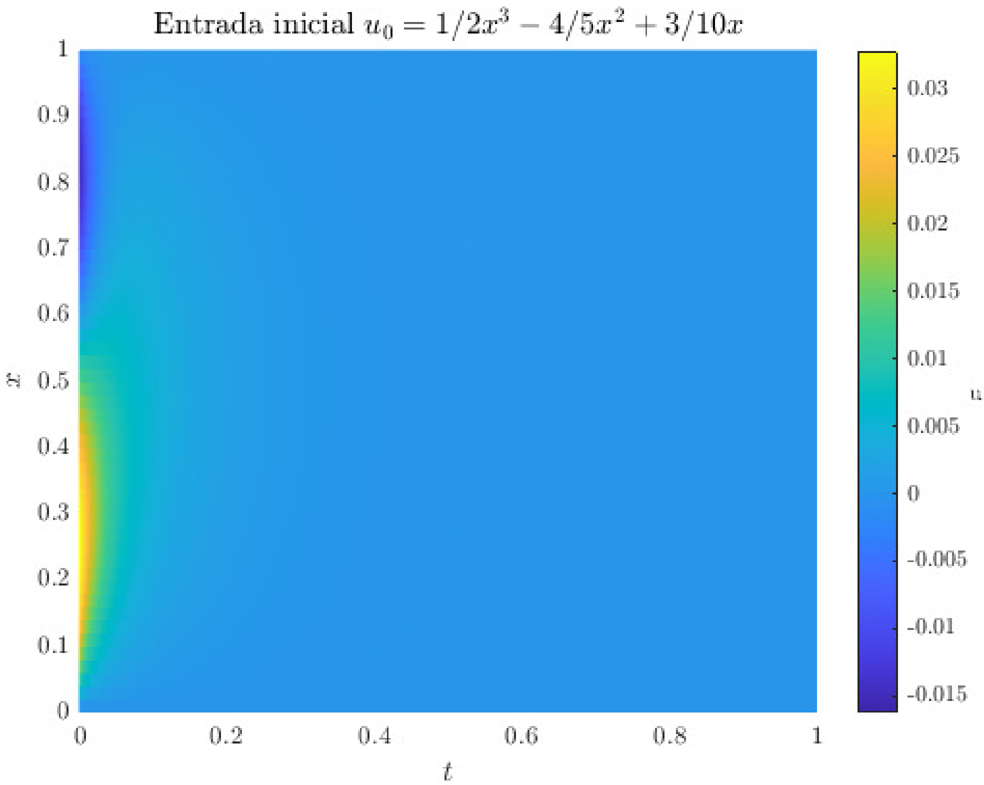
Temos agora uma EDO no tempo, o que nos permite fazer uma simulação com esta expressão.

```
% Escolhendo as çõfunes phi
% Das çõcondies de contorno, vale escolhermos:
clear;
syms x;
L = 1; % comprimento, normalizado para 1 apenas para a sim.
n = 5;
v = [];
for i = 1:n
    v = [v; x^i];
end
phi = v*(L-x);
dphi = diff(phi,x);
ddphi = diff(dphi, x);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(phi*transpose(ddphi),0,L));
```

```
A = M\D;
syms t u;
y = sym('y', [n;1]);
eq = [A zeros(n,1); transpose(phi)*A 0]*[y;u];
di = matlabFunction(eq, 'Vars', {t, [y; u], x});
u_0 = @(x) 0.5*x^2*(L-x) + 0.3*x*(L-x);
%çã funo inicial conhecida, para çforar o y(0)
for i = 1:51
x0 = (i-1)/50;
u0 = u_0(x0);
[T,Y(i,:,:)]=ode45(@(t,X) di(t,X,x0),[0,1],[0.3;0.5;zeros(n-2,1);u0]);
end
figure(1);
surf(T,0:1/50:1,Y(:,:,n+1),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, 'u', 'Interpreter',"latex", 'Rotation',pi/2);
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
zlabel('$u$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Entrada inicial $u_0 = - 1/2 x^3 + 2/5 x^2 + 3/10 x$', 'FontSize', 12, ...
    'Interpreter',"latex")
```



```
u_0 = @(x) -0.5*x^2*(L-x) + 0.3*x*(L-x);
%çã funo inicial conhecida, para çforar o y(0)
for i = 1:51
x0 = (i-1)/50;
u0 = u_0(x0);
[T,Z(i,:,:)]=ode45(@(t,X) di(t,X,x0),[0,1],[0.3;-0.5;zeros(n-2,1);u0]);
end
figure(2);
surf(T,0:1/50:1,Z(:,:,n+1),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, 'u', 'Interpreter',"latex", 'Rotation',pi/2);
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
zlabel('$u$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Entrada inicial $u_0 = 1/2 x^3 - 4/5 x^2 + 3/10 x$', 'FontSize', 12, ...
    'Interpreter',"latex")
```



Exercício 2

Temos:

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\alpha}_1(x,t)\\ \dot{\alpha}_2(x,t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0 & c_2\,\partial_x\\ c_2\,\partial_x & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\alpha_1(x,t)\\ \alpha_2(x,t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0 & \partial_x\\ \partial_x & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}e_1(x,t)\\ e_2(x,t)\end{array}\right],$$

com Hamiltoniano do sistema:

$$H=\int_0^L\left(c_1\alpha_1^2+c_2\alpha_2^2\right)\,\mathrm{dx}\,.$$

Utilizando o método de Galerkin para aproximar os resultados do sistema, obedecendo as condições básicas do sistema.

Usando a formulação fraca:

$$\begin{array}{l}\int_0^L v_1(x)\dot{\alpha}_1(x,t)dx=\int_0^L v_1(x)\partial_x e_2dx=-\int_0^L(\partial_x v_1)e_2dx+[v_1(x)e_2(x,t)]_0^L,\\ \int_0^L v_2(x)\dot{\alpha}_2(x,t)dx=\int_0^L v_2(x)\partial_x e_1dx\end{array}$$

Sejam as aproximações:

$$\begin{array}{l}\alpha_1(x,t)\approx a_1^T(t)\phi_1(x),\ \alpha_2(x,t)\approx a_2^T(t)\phi_2(x),\\ v_1(x,t)\approx\bar{v}_1(t)\phi_1(x),\ v_2(x,t)\approx\bar{v}_2(t)\phi_2(x),\\ e_1(x,t)\approx\epsilon_1^T(t)\phi_1(x),e_2(x,t)\approx\epsilon_2^T(t)\phi_2(x).\end{array}$$

Temos:

$$\bar{v}_1^T\underbrace{\left[\int_0^L\phi_1(x)\phi_1^T(x)dx\right]}_{M_1}\dot{a}_1(t)=-\bar{v}_1^T\underbrace{\left[\int_0^L\phi_{1,x}(x)\phi_2^T(x)dx\right]}_{D}c_2a_2(t)+\underbrace{\bar{v}_1^T\phi_1(x)e_2(x,t)|_0^L}_{[\phi_1(L)\ \ -\phi_1(0)][e_2(L,t)\ \ e_2(0,t)]^T},$$

$$\bar{v}_2\underbrace{\left[\int_0^L\phi_2(x)\phi_2^T(x)dx\right]}_{M_2}\dot{a}_2(t)=\bar{v}_2\underbrace{\left[\int_0^L\phi_2(x)\phi_{1,x}^T(x)dx\right]}_{D^T}c_1a_1(t).$$

Como as expressões são válidas para vetores v_i quaisquer, $i=1,2$, escolhendo como saída $y_\partial=[e_1\,(L,t)\ \ -e_1\,(0,t)]^T$, vale as expressões a seguir, em que omitem-se as dimensões das matrizes de zeros satisfatórias para as dimensões do problema:

$$x\,(t):=\left[\begin{array}{c}M_1\ a_1\,(t)\\ M_2\ a_2\,(t)\end{array}\right],$$

$$\begin{array}{l}\dot{x}\,(t)=\underbrace{\left[\begin{array}{cc}0 & -D\\ D^T & 0\end{array}\right]}_{\mathbf{J}}\underbrace{\left[\begin{array}{cc}c_1M_1^{-1} & 0\\ 0 & c_2M_2^{-1}\end{array}\right]}_{Q}x\,(t)+\underbrace{\left[\begin{array}{cc}\phi_1\,(L) & -\phi_1\,(0)\\ 0 & 0\end{array}\right]}_{B}u_\partial\,,\\ y_\partial\,(t)=\underbrace{\left[\begin{array}{cc}\phi_1\,(L) & -\phi_1\,(0)\\ 0 & 0\end{array}\right]^T}_{B^T}\underbrace{\left[\begin{array}{cc}c_1M_1^{-1} & 0\\ 0 & c_2M_2^{-1}\end{array}\right]}_{Q}x\,(t)\,.\end{array}$$

Com essa representação do sistema, temos, para o Hamiltoniano discretizado:

$$
\begin{aligned}
H_d := H\left[\alpha_1(x,t) = a_1^T(t)\,\phi_1(x)\,,\alpha_2(x,t) = a_2^T(t)\,\phi_2(x)\right] & \overset{\vec{v}^2=||\vec{v}||_2^2}{=} \\
\tfrac{1}{2}\int_0^L \left(c_1 a_1^T(t)\,\phi_1(x)\,\phi_{\,1}(x)^T a_1(t) + c_2 a_2^T(t)\,\phi_2(x)\,\phi_{\,2}^{\,T}(x)\,a_2(t)\right)\mathrm{dx} = & \\
\tfrac{1}{2}\left(c_1 a_1^T(t)\,M_1 a_1(t) + c_2 a_2^T(t)\,M_2 a_2(t)\right) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} M_1{}^T a_1(t) \\ M_2{}^T a_2(t)\end{bmatrix}^T Q\,x(t) & \overset{M_1^T=M_1}{=} \\
\tfrac{1}{2}x^T Q\,x. &
\end{aligned}
$$

E sua derivada temporal:

$$
2\,\dot{H}_d = \frac{d}{d\,t}\left(x^T Q\right)x + x^T Q\,\frac{d}{d\,t}(x) = \dot{x}^T Q\,x + x^T Q\;\dot{x} = \;\dot{x}^T\left(Q + Q^T\right)x \overset{Q=Q^T}{=} 2\;\dot{x}^{\,T} Q\,x\,,
$$

daí:

$$
\begin{aligned}
\dot{H}_{\,d} &= \left(x^T Q^T J^T Q\,x + u_\partial^T B^T Q\,x\,\right) = x^T \underset{Q^T}{\begin{bmatrix} c_1 M_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_2 M_2^{-1}\end{bmatrix}} \underset{\mathbf{J}^T}{\begin{bmatrix} 0 & D \\ -D^T & 0\end{bmatrix}} \underset{Q}{\begin{bmatrix} c_1 M_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_2 M_2^{-1}\end{bmatrix}} x + u_\partial^T y_\partial \overset{M_i^T=M_i,i=1,2}{=} \\
&= \begin{bmatrix} \left(M_1 a_1\right)^T & \left(M_2 a_2\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c_1 c_2 M_1^{-1} D M_2^{-1} \\ -c_1 c_2 M_2^{-1} D^T\,M_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1\,a_1 \\ M_2\,a_2 \end{bmatrix} + u_\partial{}^T y_\partial = \\
&= c_1 c_2\left(a_1^T D a_2 - a_2^T D^T\,a_1\right) + u_\partial^T y_\partial \;= c_1 c_2\left(\int_0^L a_1^T\;\,\phi_{1,x}\phi_2^T a_2 - a_2{}^T \phi_{\,2}\phi_{1,x}^T a_1 \;\; d\,x\right) + u_\partial^T y_\partial \overset{a=\text{escalar}\rightarrow a=v^T v=v\;v^T}{=} \\
&= u_\partial^T y_\partial.
\end{aligned}
$$

Vamos agora ilustrar o problema da onda com esta formulação.

Para a simulação, sejam:

```
% c1 = c2 = c
c= 1;
% phi1 = phi2
L = 1;
xref = 0:L/3:L;
%yref = ;
phi = [];
syms x
for i = 1:length(xref)
    p = 1;
    for j = 1:length(xref)
        if j~=i
            aux = (x-xref(j))/(xref(i)-xref(j));
            p = p*aux;
        end
    end
    phi = [phi;p];
end
dphi = diff(phi,x);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(dphi*transpose(phi),0,L));
J = [zeros(length(D)) -D;D' zeros(length(D))];
Q = blkdiag(c.*inv(M),c.*inv(M));
```

2.1 Autovalores de JQ

Como estamos trabalhando com a equação da onda unidimensional, espera-se que os autovalores sejam imaginários puros (garantindo as oscilações do movimento). De fato, observa-se:

```
autovalores = eig(J*Q)
```

```
autovalores = 8x1 complex
  -0.0000 +13.0432i
  -0.0000 -13.0432i
   0.0000 + 7.7460i
   0.0000 - 7.7460i
  -0.0000 + 3.1425i
  -0.0000 - 3.1425i
  -0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
```

Observa-se ainda que estes autovalores são aproximadamente múltiplos de π.

Como as constantes são tomadas unitárias, espera-se:

$$\omega_n = \frac{2\,\pi}{2L} n \sqrt{\frac{T}{\mu}} = n\pi.$$

O primeiro teste, com 4 dimensões para a aproximação, se distancia de $n\pi$já para $n = 2$. Por outro lado, observe o exemplo com 8 dimensões, que já tem até $n = 5$ próximo ao previsto pela relação anterior.

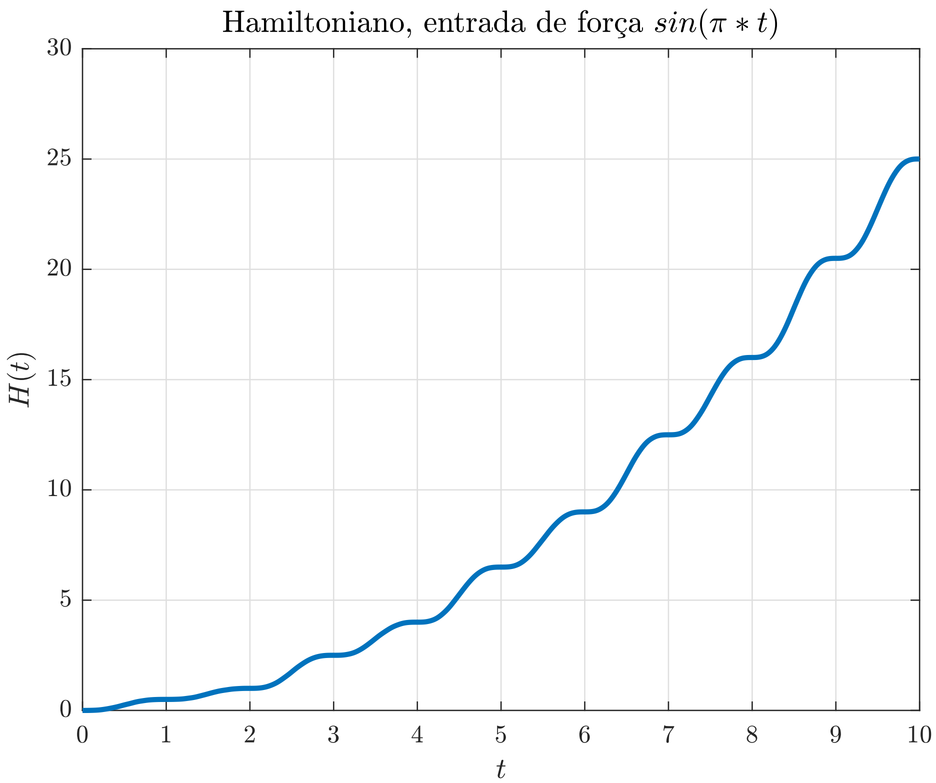
```
% c1 = c2 = c
c= 1;
% phi1 = phi2
L = 1;
xref = 0:L/8:L;
%yref = ;
phi = [];
syms x
for i = 1:length(xref)
    p = 1;
    for j = 1:length(xref)
        if j~=i
            aux = (x-xref(j))/(xref(i)-xref(j));
            p = p*aux;
        end
    end
    phi = [phi;p];
end
dphi = diff(phi,x);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(dphi*transpose(phi),0,L));
J = [zeros(length(D)) -D;D' zeros(length(D))];
Q = blkdiag(c.*inv(M),c.*inv(M));
autovalores = eig(J*Q)
```

```
autovalores = 18x1 complex
  -0.0000 +57.7879i
  -0.0000 -57.7879i
   0.0000 +46.3195i
   0.0000 -46.3195i
  -0.0000 +20.5626i
  -0.0000 -20.5626i
  -0.0000 +16.6063i
  -0.0000 -16.6063i
   0.0000 +12.5800i
   0.0000 -12.5800i
```

2.2 Simulações, condições iniciais nulas, fronteira com entrada senoidal;

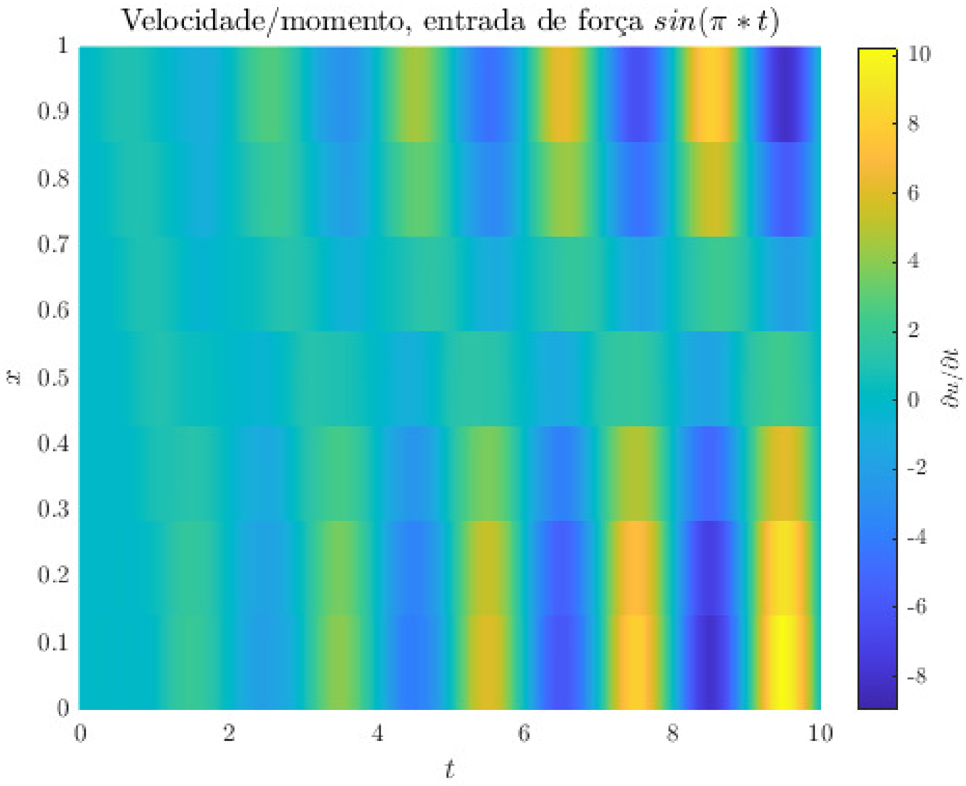
```
clear;
% c1 = c2 = c
c= 1;
% phi1 = phi2
L = 1;
n = 8;
xref = 0:L/(n-1):L;
%yref = ;
phi = [];
syms z
for i = 1:length(xref)
    p = 1;
    for j = 1:length(xref)
        if j~=i
            aux = (z-xref(j))/(xref(i)-xref(j));
            p = p*aux;
        end
    end
    phi = [phi;p];
end
dphi = diff(phi,z);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(dphi*transpose(phi),0,L));
J = [zeros(length(D)) -D;D' zeros(length(D))];
Q = blkdiag(c.*inv(M),c.*inv(M));
B = [subs(phi,L) -subs(phi,0);zeros(length(phi),1) zeros(length(phi),1)];
x = sym('x', [2*n;1]);
h = sym('h', [1;1]);
t = sym('t', [1;1]);
omega = pi;
%çõ Condies de contorno: onda excitada em uma extremidad
% e e nula na
% outra!!!
eq = [J*Q*x + B*[sin(omega*t);0];[sin(omega*t) 0]*B'*Q*x];
di = matlabFunction(eq, 'Vars', {t, [x;h]});
x0 = zeros(2*n,1);
h0 = 0;
[T,Z]=ode45(@(t,X) di(t,X),[0,10],[x0;h0]);
figure;
```

```
plot(T,Z(:,2*n+1),'linewidth',2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$H(t)$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Hamiltoniano, entrada de for\c{c}a $sin(\pi*t)$', 'FontSize', 12, ...
    'Interpreter',"latex")
grid on;
```

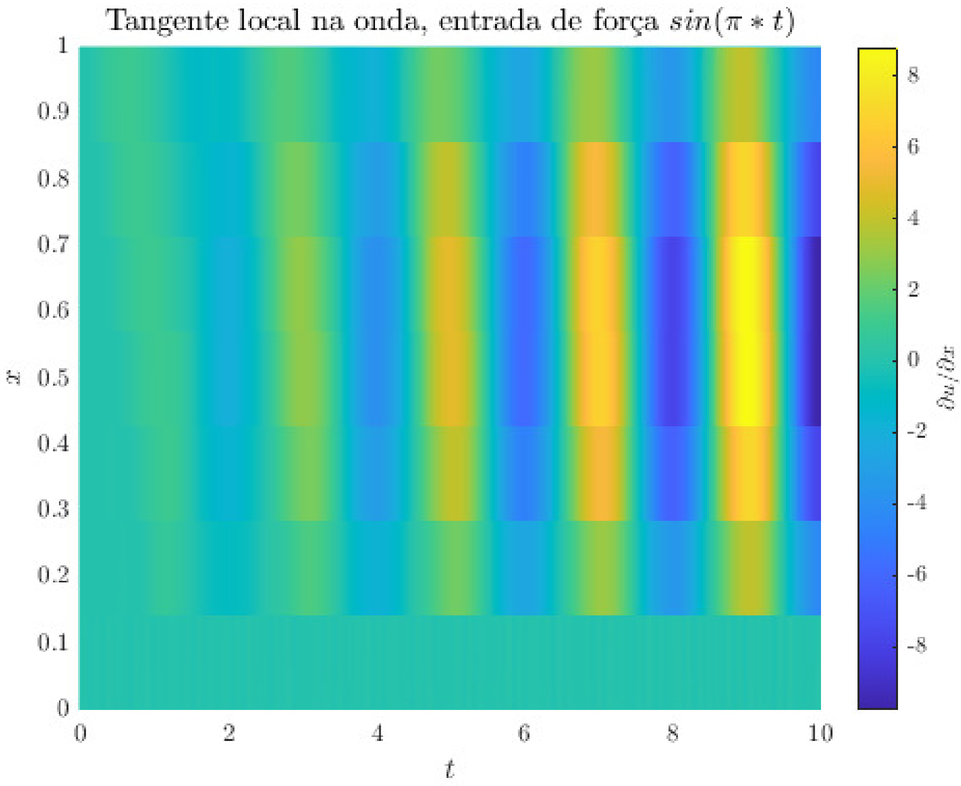



```
a1 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,1:n)';
a2 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,n+1:2*n)';

figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a1),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$\partial u/\partial t$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
% zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
title('Velocidade/momento, entrada de for\c{c}a $sin(\pi*t)$', 'FontSize', 12, ...
    'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```



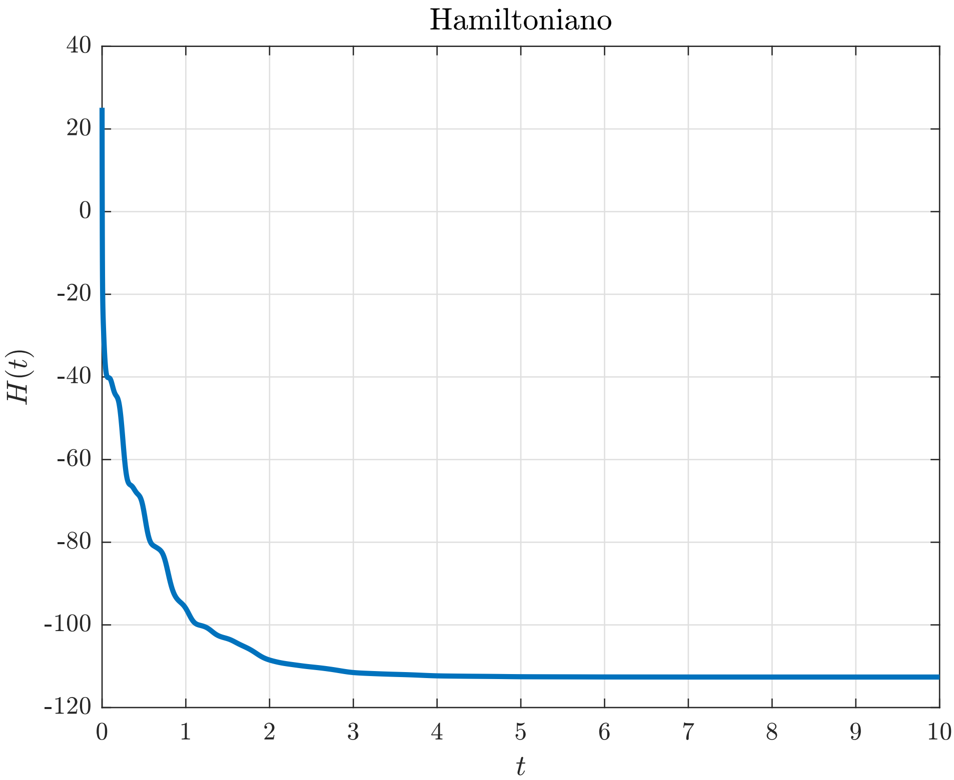

```
figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a2),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$\partial u/\partial x$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
% zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Tangente local na onda, entrada de for\c{c}a $sin(\pi*t)$', 'FontSize', 12, ...
    'Interpreter',"latex")
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```



2.3 Damping injection

```
clear;
% c1 = c2 = c
c= 1;
% phi1 = phi2
L = 1;
n = 8;
xref = 0:L/(n-1):L;
%yref = ;
phi = [];
syms z
for i = 1:length(xref)
    p = 1;
    for j = 1:length(xref)
        if j~=i
            aux = (z-xref(j))/(xref(i)-xref(j));
            p = p*aux;
        end
    end
    phi = [phi;p];
end
dphi = diff(phi,z);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(dphi*transpose(phi),0,L));
J = [zeros(length(D)) -D;D' zeros(length(D))];
```

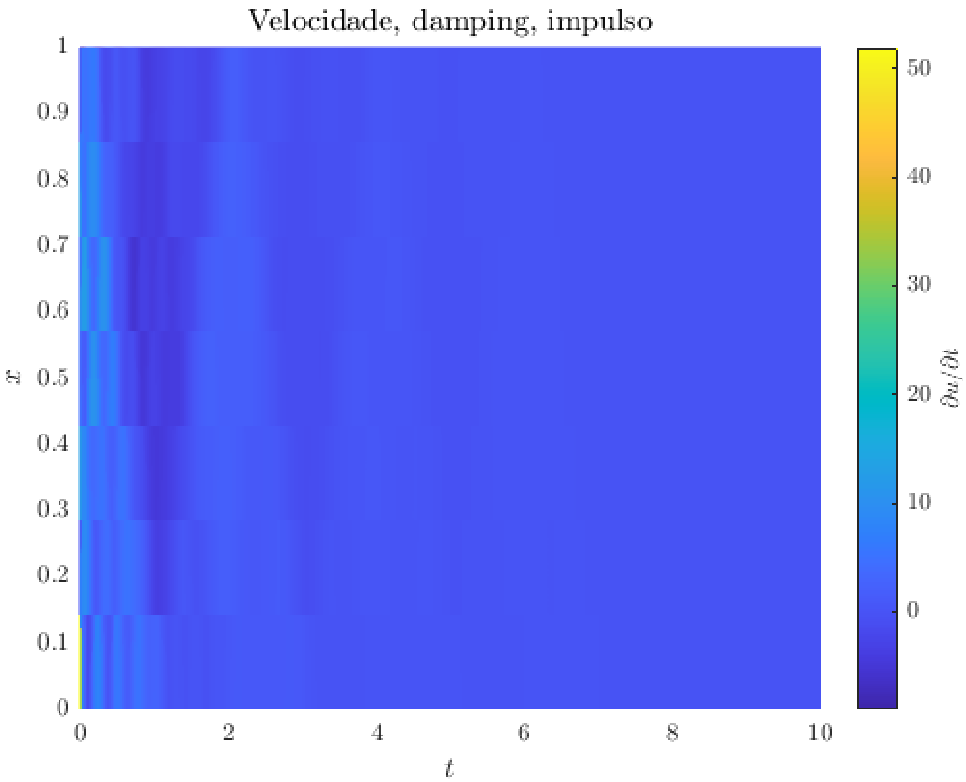
```
Q = blkdiag(c.*inv(M),c.*inv(M));
B = [subs(phi,L) -subs(phi,0);zeros(length(phi),1) zeros(length(phi),1)];
x = sym('x', [2*n;1]);
h = sym('h', [1;1]);
t = sym('t', [1;1]);
omega = pi;
%çõ Condies de contorno: regulador e çõcondies iniciais áunitrias
% Vamos ver como ele sai de um impulso!!
% outra!!!
k = pi;
y = B'*Q*x;
u = -k*y;
eq = [J*Q*x + B*u;u'*y];
di = matlabFunction(eq, 'Vars', {t, [x;h]});
x0 = ones(2*n,1);
h0 = n*k;
[T,Z]=ode45(@(t,X) di(t,X),[0,10],[x0;h0]);
figure;
plot(T,Z(:,2*n+1),'linewidth',2);
title('Hamiltoniano', 'FontSize', 12, 'Interpreter',"latex")
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$H(t)$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
grid on;
```



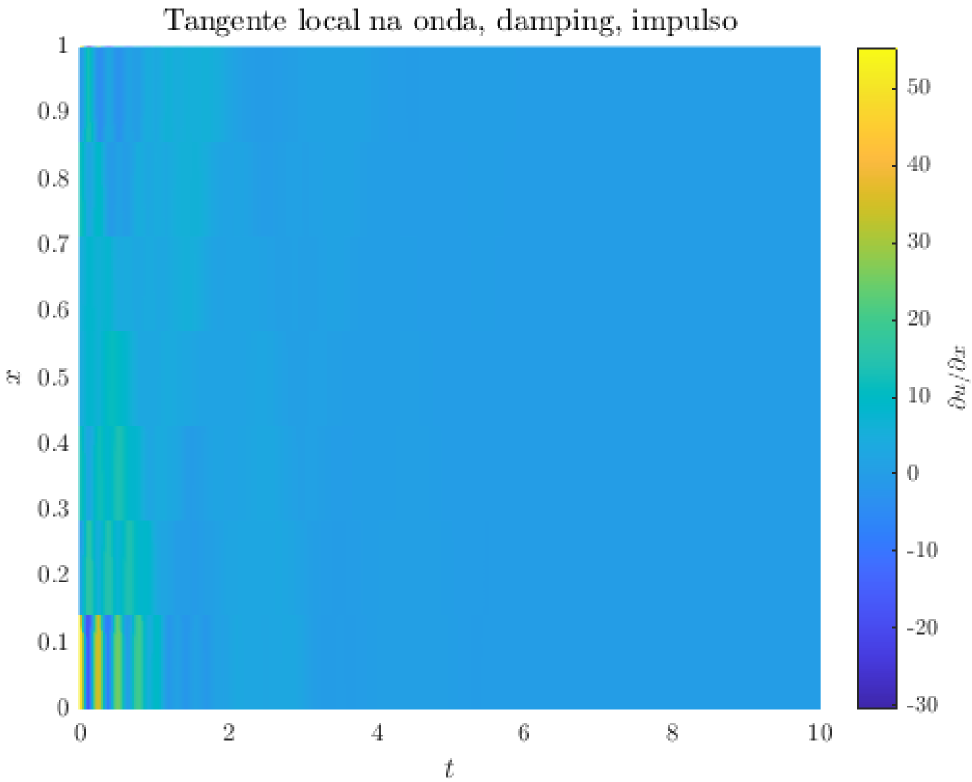

```
a1 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,1:n)';
```

```
a2 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,n+1:2*n)';

figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a1),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$\partial u/\partial t$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
%zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
title('Velocidade, damping, impulso', 'FontSize', 12, 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```




```
figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a2),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$\partial u/\partial x$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
%zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
title('Tangente local na onda, damping, impulso', 'FontSize', 12, 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```



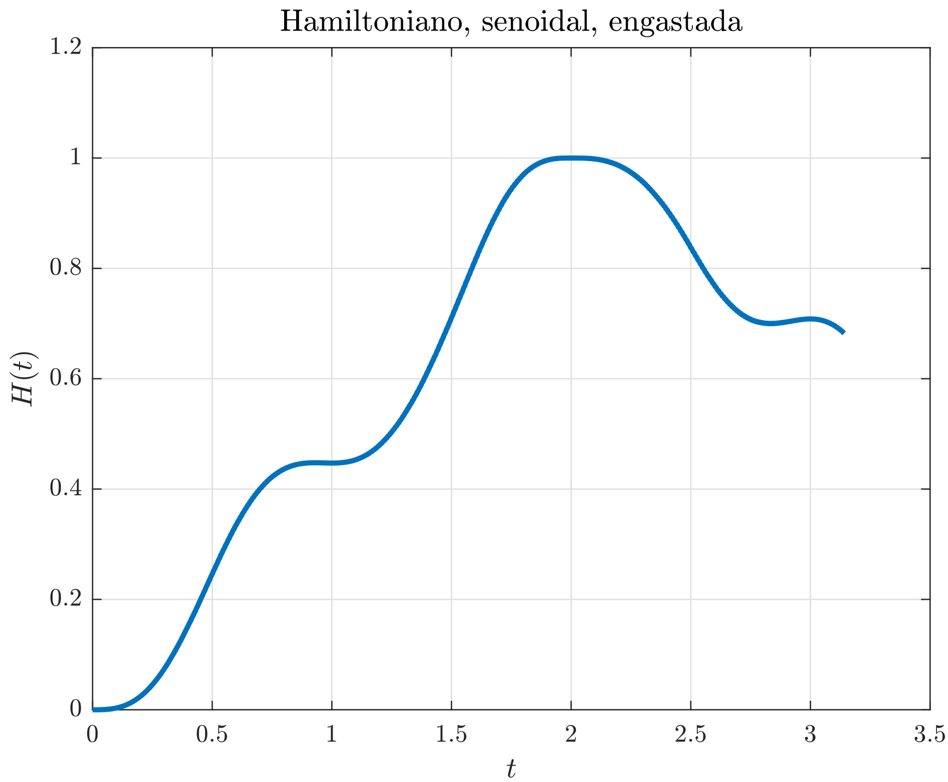
Exercício 3

Escolhendo formular o problema com restrições na saída. Para o nosso teste, vamos adotar:
$y = \begin{bmatrix} e_1(L,t) \\ -e_1(0,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(L,t) \\ 0 \end{bmatrix}$,

```
clear;
% c1 = c2 = c
c= 1;
% phi1 = phi2
L = 1;
n = 31;
xref = 0:L/(n-1):L;
%yref = ;
phi = [];
syms z
for i = 1:length(xref)
    p = 1;
    for j = 1:length(xref)
        if j~=i
            aux = (z-xref(j))/(xref(i)-xref(j));
            p = p*aux;
        end
    end
    phi = [phi;p];
end
```

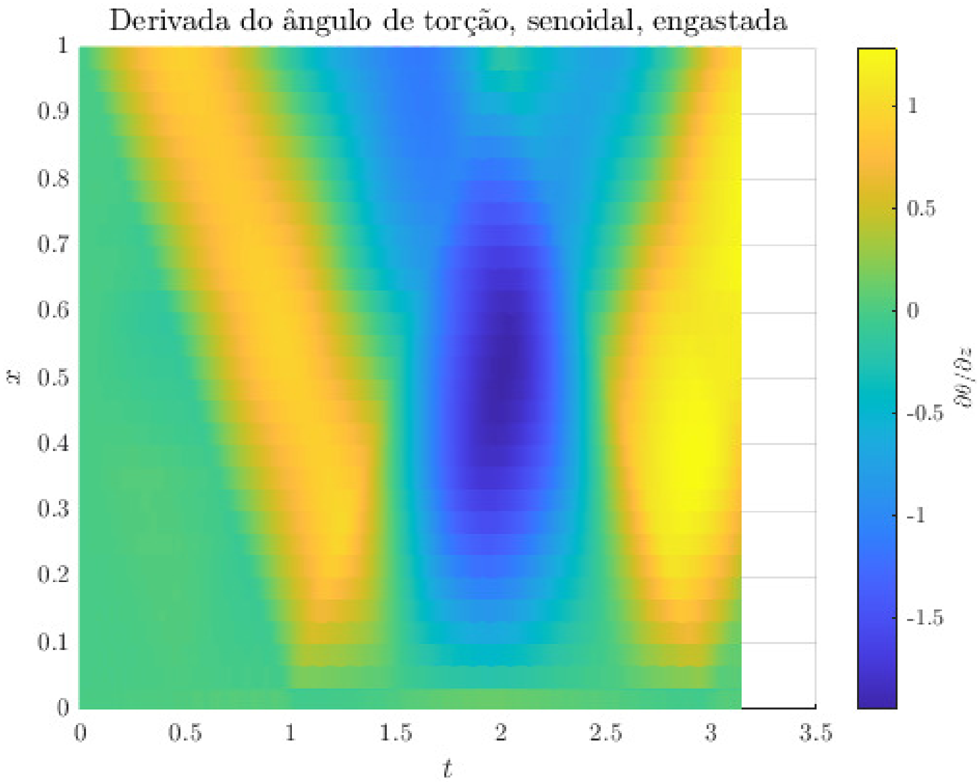
```
dphi = diff(phi,z);
M = double(int(phi*transpose(phi),0,L));
D = double(int(dphi*transpose(phi),0,L));
J = [zeros(length(D)) -D;D' zeros(length(D))];
Q = blkdiag(c.*inv(M),c.*inv(M));
B = [subs(phi,L) -subs(phi,0);zeros(length(phi),1) zeros(length(phi),1)];
x = sym('x', [2*n;1]);
h = sym('h', [1;1]);
t = sym('t', [1;1]);
omega = pi;
%í Sada nula na origem, entrada senoidal na extremidade
omega = pi;
y = B'*Q*x;
y(2) = 0; % e1 = c1 alpha1 -> alpha1 -> x(1:n) ctt de valor inicial zero
eq = [0;J(2:2*n,2:2*n)*Q(2:2*n,2:2*n)*x(2:2*n) + ...
    B(2:end,:)*[sin(omega*t);0];[sin(omega*t) 0]*y];
di = matlabFunction(eq, 'Vars', {t, [x;h]});
x0 = zeros(2*n,1);
h0 = 0;
[T,Z] = ode45(@(t,X) di(t,X),[0,pi],[x0;h0]);


figure;
plot(T,Z(:,2*n+1),'linewidth',2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$H(t)$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Hamiltoniano, senoidal, engastada', 'FontSize', 12, 'Interpreter',"latex")
grid on;
```

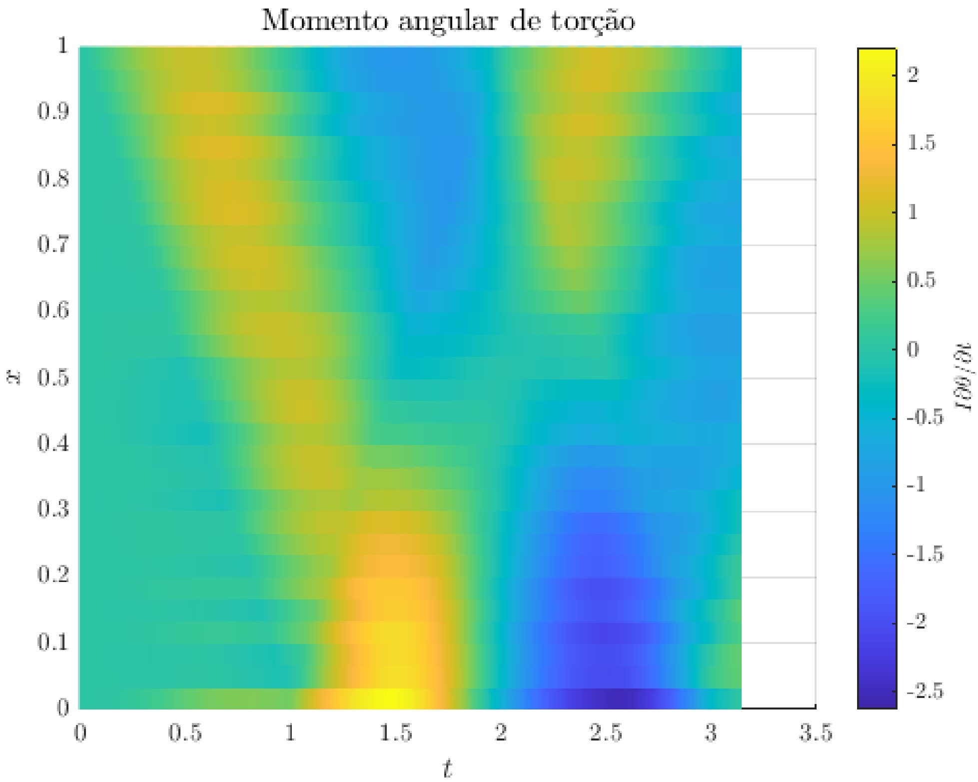



```
a1 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,1:n)';
a2 = transpose(subs(phi,0:L/(n-1):L))*inv(M)*Z(:,n+1:2*n)';

figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a1),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$\partial \theta/\partial z$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
% zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
title('Derivada do \^{a}ngulo de tor\c{c}\~{a}o, senoidal, engastada', 'FontSize', ...
    12, 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```




```
figure;
surf(T,0:L/(n-1):L,double(a2),'EdgeColor',"flat")
h = colorbar;
ylabel(h, '$I \partial \theta/\partial t$', 'Interpreter',"latex");
view(2);
xlabel('$t$', 'Interpreter',"latex")
%zlabel('$y$', 'Interpreter',"latex")
ylabel('$x$', 'Interpreter',"latex")
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
title('Momento angular de tor\c{c}\~{a}o', 'FontSize', 12, 'Interpreter',"latex")
set(h,'TickLabelInterpreter','latex');
```


Momento angular de torção
x
t
$\partial\theta/\partial t$