

# Modelagem e análise de controladores DLQR e Dual Mode com restrições - Exame EE-254

Reynaldo Santos de Lima \*

\* *Divisão de Engenharia Mecânica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, SP, (e-mail: reynaldo.sdlima@gmail.com).*

**Abstract:** This work presents the results of the simulation and control of a inverted pendulum system. The system is projected with restrictions for the pendulum angle and for the entry force in the system. DLQR and Dual Mode controllers are designed and simulated. The results show that the DLQR controller fails to respect the restrictions. They show, also, that, on the other hand, the Dual Mode controller takes the system to the desired position without disobeying any restriction, with similar time-span as the DLQR takes to the same movement.

**Resumo:** Este trabalho mostra os resultados da simulação e controle de um sistema de pêndulo invertido. O sistema é projetado com restrições ao ângulo do pêndulo e à magnitude da força de entrada. Controladores DLQR e Dual Mode são projetados e simulados. Os resultados mostram como o controlador DLQR falha em respeitar as restrições. Mostram, ainda, que, por outro lado, o controlador Dual Mode leva o sistema à posição desejada sem desobedecer nenhuma restrição, em espaço de tempo similar ao tomado para o DLQR chegar à mesma posição.

**Keywords:** Controller; Restrictions; Horizon; Inverted pendulum; MATLAB.

**Palavras-chaves:** Controlador; Restrições; Horizonte; Pêndulo invertido; MATLAB.

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho analisa o desempenho de dois métodos de controle, em sistemas projetados na presença de restrições. *Discrete linear quadratic regulator* (Galvão, 2020c), DLQR, ou ainda, regulador linear quadrático de tempo discreto, é um resultado do controle ótimo que minimiza a função de custo como descrita em (1), em que as matrizes  $Q$  e  $R$  nas normas são definidas como a matriz de custo para o estado e a matriz de custo para o controle, respectivamente.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\|x(k) - \bar{x}\|_Q^2 + \|u(k) - \bar{u}\|_R^2). \quad (1)$$

Embora seja uma solução amplamente estudada na literatura, em situações nas quais as variáveis de interesse são limitadas, este controlador pode não satisfazer todas as condições esperadas. Desse modo, adota-se o controle *Dual Mode* (Galvão, 2020e), ou controle a dois modos.

O controlador Dual Mode é um resultado do controle preditivo e é desenvolvido de modo a, dada uma condição de partida fora da região de factibilidade terminal do controlador DLQR para a referência desejada, conduzir o estado ao conjunto factível do DLQR, momento a partir do qual muda-se de volta para o controlador DLQR. A abordagem é feita de modo a resolver um problema de otimização da função custo descrita em (2) a cada iteração, com um horizonte finito móvel de  $N$  passos. Observa-se, nesta, que há mais uma matriz de custo  $P_f$  que, para o controlador Dual Mode, coincide com a solução da equação de Ricatti do regulador DLQR (Galvão, 2020e).

$$J = \|x(N) - \bar{x}\|_{P_f}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|x(k) - \bar{x}\|_Q^2 + \|u(k) - \bar{u}\|_R^2). \quad (2)$$

Para comparar a efetividade de ambos os controladores, adota-se como sistema de estudo o pêndulo invertido, visto na figura 1, o qual possui várias aplicações em sistemas reais. Por exemplo, um *segway* é um sistema de duas rodas com balanceamento automático para o usuário, podendo ser modelado como um pêndulo simples (Delgado and Kotyczka, 2014). Aplica-se o modelo ainda, no controle de trajetórias para caminhada humanoide, no qual considera-se o centro de massa do robô como a massa no pêndulo, o carrinho como o *zero moment point* (Maximo, 2017) e espera-se que o controlador seja capaz de transitar entre as posições de interesse mantendo o robô na faixa de  $\theta(t)$  de interesse.

O trabalho é organizado, a partir deste ponto, da seguinte forma: na seção 2, apresenta-se o modelo dinâmico no espaço de estados do pêndulo invertido, apresentando ainda a discretização no tempo adotada para o sistema e as restrições adotadas; na seção 3 discute-se brevemente como o modelo dinâmico é simulado; na seção 4, apresentam-se os resultados do controlador DLQR, bem como analisa-se o desempenho deste; na seção 5 apresentam-se os resultados do controlador Dual Mode e a análise destes; conclui-se o trabalho na seção 6.

## 2. MODELAGEM DO PÊNDULO INVERTIDO

Seja o sistema esquematizado na figura 1 caracterizado por um carrinho de massa  $M$  e uma haste rígida de comprimento  $L$  com uma massa  $m$  na ponta. O sistema

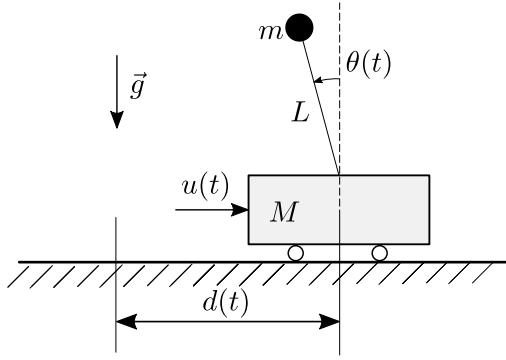


Figura 1. Representação do pêndulo invertido.

está submetido a uma entrada de força  $u(t)$ , aceleração da gravidade  $g$  e variáveis de interesse  $\theta(t)$ , ângulo que a haste rígida faz com a vertical, e  $d(t)$ , distância do centro do carrinho a uma referência fixa.

As equações dinâmicas do sistema é descrita pelas equações diferenciais em (3). Adotando o estado  $x_c = [d(t) \dot{d}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t)]^T$ , é possível representar o modelo não linear como em (4).

$$(M + m)\ddot{d}(t) - mL\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) + ML\dot{\theta}(t)^2\sin(\theta(t)) = u(t), \quad (3)$$

$$L\ddot{\theta}(t) - g\sin(\theta(t)) = \ddot{d}(t)\cos(\theta(t)),$$

$$\dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \frac{m}{M}\theta(t) - L\dot{\theta}(t)^2\theta(t) + \frac{u(t)}{M} \\ \dot{\theta}(t) \\ \left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L}\theta(t) - \dot{\theta}(t)^2\theta(t) + \frac{u(t)}{ML} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

O modelo apresentado em (4) é utilizado na simulação em ambiente MATLAB (com a função *ode45*). Para estabelecer os controladores DLQR e Dual Mode, por outro lado, faz-se necessário linearizar as equações. Fazendo-o em torno do estado  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , obtém-se o sistema no espaço de estados apresentado em (5), cuja saída é na forma  $y_c = [d(t) \ \theta(t)]^T$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B u(t), \\ y_c &= C x_c(t), \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ 1 \\ \frac{ML}{0} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Dessa forma, para o projeto dos controladores, resta apenas a discretização do sistema. Sendo  $T$  o período da amostragem, obtém-se as matrizes  $A$  e  $B$  descritas em (9) e (10), respectivamente, as quais serão usadas na representação discreta do espaço de estados Galvão (2020b).

$$A = e^{A_c T}, \quad (9)$$

$$B = \int_0^T e^{A_c \tau} B_c d\tau. \quad (10)$$

Denotando o estado, em tempo discreto,  $x(kT)$  por  $x(k)$ , por brevidade, pode-se representar o sistema pela relação em (11). Nesse caso, a discretização usa  $x(k) = [d(k) \ \dot{d}(k) \ \theta(k) \ \dot{\theta}(k)]^T$ .

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (11)$$

O sistema é modelado, ainda, com restrições. É possível representar os intervalos aceitáveis para os estados de acordo com (12), em que  $S_x$  e  $b_x$  são matrizes auxiliares para representar as restrições. De forma análoga, para o controle, com auxílio de  $S_u$  e  $b_u$ , pode-se representar as restrições por (13).

$$S_x x(k) \leq b_x, \quad (12)$$

$$S_u u(k) \leq b_u. \quad (13)$$

Com esta modelagem, resta apenas definir os valores numéricos adotados para os testes realizados em ambos os controladores. A tabela 1 mostra os valores dos parâmetros do sistema, bem como o período de amostragem  $T$ ,  $N$  é o horizonte do controle Dual Mode e a referência  $d_f$  a qual deseja-se alcançar, isto é, sendo a entrada  $r(2)$  de  $r = C[d_f \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Além disso, a tabela 2 mostra as matrizes de restrição e de peso adotadas, em que entende-se por  $Diag(a_1, \dots, a_n)$  a matriz  $n \times n$  diagonal com elementos  $a_i$  na posição  $i \times i$ .

Tabela 1. Parâmetros adotados para o sistema.

Parâmetro	Valor	Unidade
$m$	0,1	kg
$M$	1,0	kg
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$L$	1,0	m
$T$	0,1	s
$N$	15	—
$d_f$	2,0	m

Após a discretização, obtiveram-se as matrizes na tabela 3, com as quais será possível descrever o modelo completo para os controladores. Observa-se que  $C$  já estava determinada sem depender dos parâmetros adotados.

### 3. SIMULAÇÃO

O problema é simulado em duas formas. Pelo controle, supõe-se que a discretização e linearização adotadas são o próprio sistema, analisando como este prossegue para o estado final em um número fixo de passos. Ao mesmo tempo, porém, como mencionado previamente, realiza-se

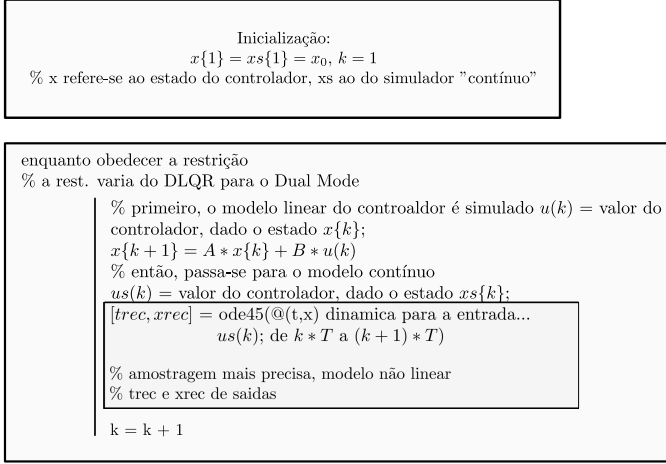


Figura 2. Ilustração do modelo simulado e do linearizado com o controlador sendo iterados.

uma simulação mais fiel, com auxílio da função `ode45` do MATLAB. Refere-se ao modelo de simulação com `ode45` a partir deste momento como "Contínuo", pois, para cada amostra  $T$  do modelo discreto, o modelo simulado entrega seus resultados para uma amostragem mais fina, de um modelo mais fiel.

Como a faixa de valores de  $\theta$  é restringida no intervalo  $[-\pi/20; \pi/10]$ , espera-se que a linearização seja adequada. Sendo assim, o modelo de simulação contínuo, servirá para ratificar esta hipótese, bem como olhar de forma mais criteriosa o comportamento quanto às restrições no modelo.

Uma ilustração em alto nível da ideia dos dois modelos simulados, para um controlador genérico, pode ser vista na figura 2.

Tabela 2. Matrizes peso e de restrições.

Matriz	Valor
$R$	0, 1
$Q$	$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$S_x$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$b_x$	$\begin{bmatrix} \pi/10 \\ \pi/20 \end{bmatrix}$
$S_u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
$b_u$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Tabela 3. Matrizes do modelo discretizado.

Matriz	Valor
$A$	$\begin{bmatrix} 1,0000 & 0,1000 & 0,0051 & 0,0002 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,1072 & 0,0051 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,2821 & 0,1092 \\ 0,0000 & 0,0000 & 5,8939 & 1,2821 \end{bmatrix}$
$B$	$\begin{bmatrix} 0,0050 \\ 0,1008 \\ 0,0261 \\ 0,5462 \end{bmatrix}$

#### 4. DLQR

Sendo o regulador de (14), o controle ótimo para o custo em (1) no método DLQR fornece a matriz  $K$  e a matriz  $P_f$  da solução da equação de Ricatti, a qual está representada em (15). No MATLAB é possível obter estas matrizes com o uso da função `dlqr(A,B,Q,R)`, ou com a função em MATLAB fornecido junto a este trabalho `reguladorDLQR.m`.

$$u(k) = -Kx(k), \quad (14)$$

$$P_f = A^T [P_f - P_f B (B^T P_f B + R)^{-1} B^T P_f] A + Q. \quad (15)$$

Os dados do regulador estão expostos na tabela . Com isso, com o número de iterações desejadas (tempo de simulação), pode-se analisar o desempenho do controlador para a situação proposta.

Tabela 4. Matrizes do regulador quadrático.

Matriz	Valor
$P_f$	$\begin{bmatrix} 106,74 & 46,6302 & -86,4554 & -12,3444 \\ 46,6302 & 39,1285 & -75,1111 & -10,7254 \\ -86,4554 & -75,1111 & 310,8869 & 30,0154 \\ -12,3444 & -10,7252 & 30,0154 & 4,9196 \end{bmatrix}$
$K$	$\begin{bmatrix} -2,6563 \\ -2,8353 \\ 24,3327 \\ 3,3655 \end{bmatrix}$

Outro conceito importante a ser definido para o controlador DLQR (e, por conseguinte, para o controlador Dual Mode) é o máximo conjunto admissível quanto às restrições e controle:

$$\chi_f = \{x \in \mathbb{R}^n : S_f x \leq b_f\}, \quad (16)$$

em que  $S_f$  e  $b_f$  podem ser determinadas em função de  $S_x$ ,  $b_x$ ,  $S_u$  e  $b_u$ , dada a referência  $r$ , como mostrado em Galvão (2020d). Segue que, se o estado inicial  $x_0$  está fora desse conjunto, não há garantia de que o controlador DLQR seguirá estas restrições.

Como forma de melhor elucidar o que se espera do controlador, marcou-se nos resultados do estado a projeção do estado terminal  $\chi_f$  nos planos plotados (dois a dois), visto que é impossível plotar  $\chi_f$  completamente para um sistema com estado de 4 dimensões. Da teoria, espera-se que, se o ponto inicial está fora deste conjunto factível terminal, para a referência  $r$  adotada,  $\chi_f$ , não será possível atingir o ponto desejado respeitando todas as restrições Galvão (2020e).

Da figura 3, observa-se que o ponto inicial está fora do conjunto terminal parametrizado para a referência. Deste modo, espera-se que, com o tempo, o sistema possa eventualmente sair de suas restrições. Isso já pode ser observado pelo fato de que na figura 4,  $\theta$  inicia em uma condição factível de modo a respeitar as restrições no ângulo vertical (das matrizes  $S_x$  e  $b_x$ ), mas acaba deixando o conjunto  $\chi_f$  com as iterações.

De fato, observa-se nas figuras 5 e 6, para alcançar o estado pedido no controlador DLQR, as restrições são desrespeitadas. Esta possibilidade que motiva o estudo do controlador Dual Mode, que será apresentado na seção seguinte. Por fim, observa-se que em todos os resultados, o desempenho da simulação a tempo contínuo com as

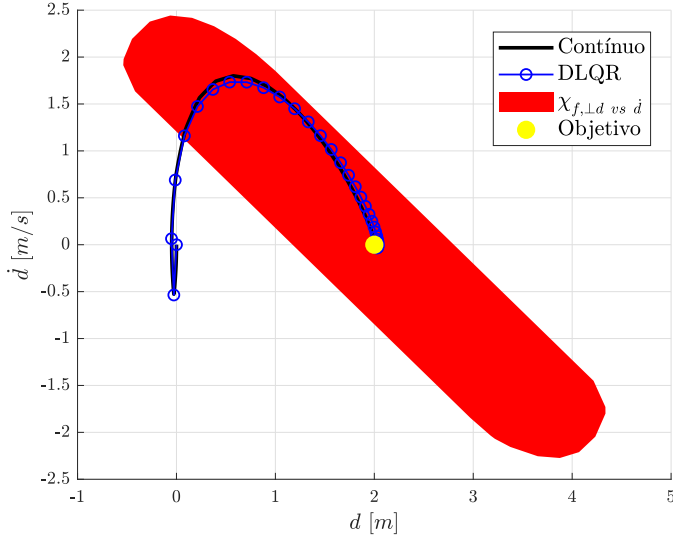


Figura 3. Gráfico das entradas de  $d$  vs  $\dot{d}$ , simulação a tempo contínuo e resultado do controlador DLQR.

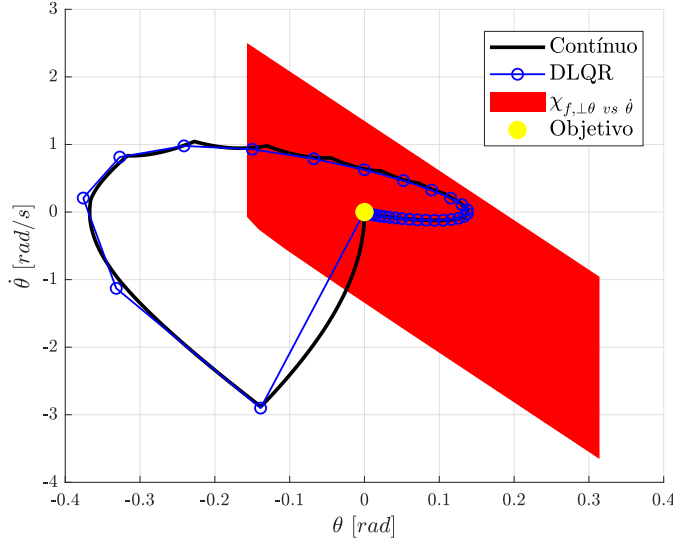


Figura 4. Gráfico das entradas de  $\theta$  vs  $\dot{\theta}$ , simulação a tempo contínuo e resultado do controlador DLQR.

entradas do controlador se aproxima muito do movimento previsto pelo próprio DLQR. Isso mostra que o modelo linear aproxima bem o sistema real para a faixa de valores da simulação.

Os dados e gráficos deste trecho do trabalho podem ser verificados com a função `testeDLQR.m` no MATLAB, fornecido junto ao trabalho. No script `teste.m` estão escritas todas as constantes e matrizes adotadas, bem como a simulação DLQR e, inclusive, a Dual Mode.

## 5. DUAL MODE

Como previsto, adota-se agora o controlador Dual Mode, como descrito em Galvão (2020e). Vale ressaltar que, para a otimização a cada iteração (realizada pela função `textttotimizador_u.m`), faz-se necessário definir o horizonte adotado  $N = 15$  e a matriz  $P_f$ , obtida junto a matriz  $K$  do controlador DLQR.

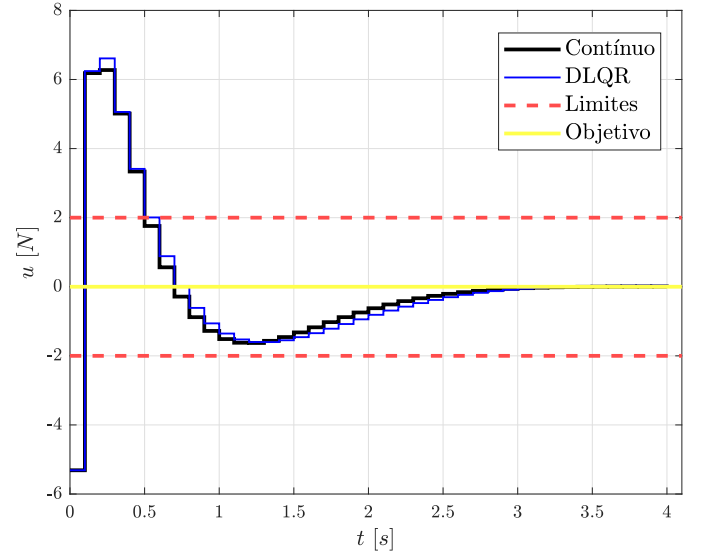


Figura 5. Gráfico do controle  $u$  em função do tempo, comparando desempenho do controlador DLQR e as limitações definidas em projeto.

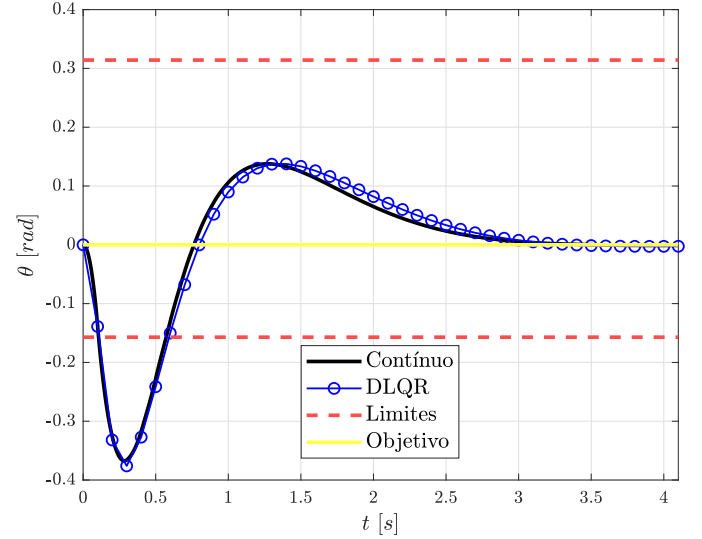


Figura 6. Gráfico do ângulo  $\theta$  em função do tempo, comparando desempenho do controlador DLQR e as limitações definidas em projeto.

Vale ressaltar que, para o Dual Mode, espera-se que, em nenhum momento (ao supor não haverem perturbações nos sinais ou na leitura do *feedback*), os estados e o controle sempre respeitarão as restrições adotadas.

Na figura 7, em que refere-se ao controlador Dual Mode por DM, observa-se que, como no DLQR, o sistema inicia fora do conjunto  $\chi_f$ . Por outro lado, já na figura 8, observa-se um comportamento distinto quando compara-se o resultado do DLQR na figura 4. Desta vez, o ângulo e sua derivada temporal permanecem na projeção do conjunto  $\chi_f$  no plano destes estados.

Confirma-se o esperado nas figuras 9 e 10, ao observar-se que, em todo o percurso, na simulação a tempo contínuo e para a simulação no controlador linearizado e discretizado, obedecem-se as restrições, tanto no controle, como no ângulo  $\theta$ .

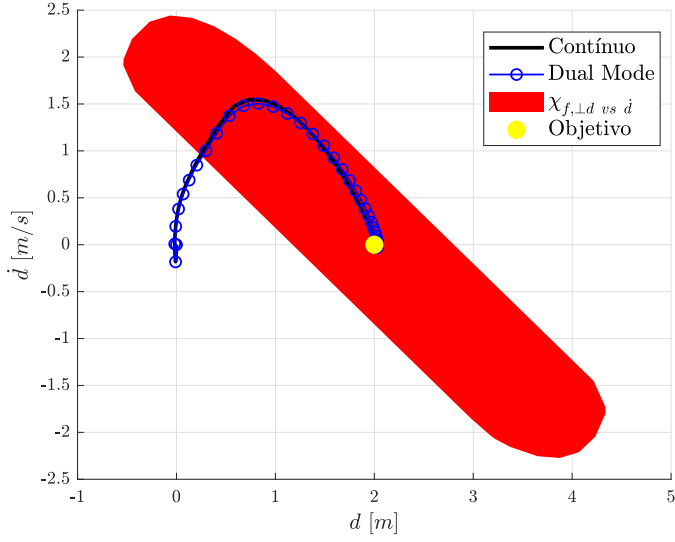


Figura 7. Gráfico das entradas de  $d$  vs  $\dot{d}$ , simulação a tempo contínuo e resultado do controlador Dual Mode.

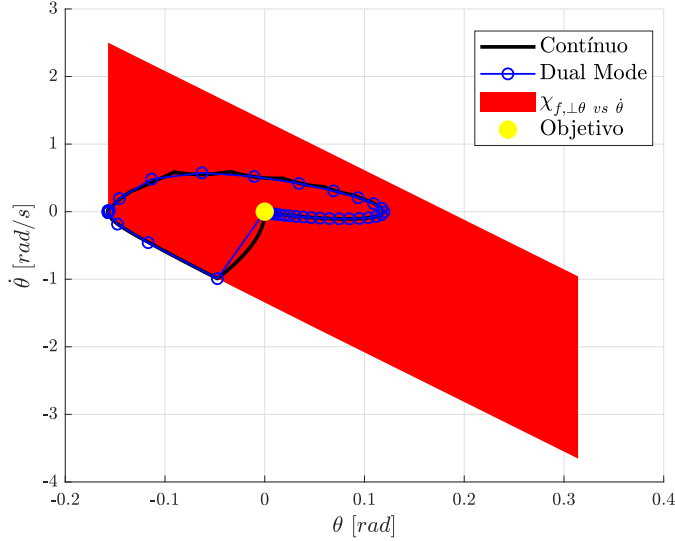


Figura 8. Gráfico das entradas de  $\theta$  vs  $\dot{\theta}$ , simulação a tempo contínuo e resultado do controlador Dual Mode.

Pode-se notar, ainda, que assim que o estado atinge a região dentro do conjunto  $\chi_f$  (ver figura 7, em sua 9ª iteração saindo da origem), espera-se, pela formulação do problema, que o comportamento do Dual Mode se assemelhe ao que é visto no DLQR (ver figura 9, a partir de 1 segundo).

Por fim, fica claro que o controlador de horizonte móvel Dual Mode se adequa melhor à situação proposta, de modo a respeitar as restrições de projeto.

Outras modificações no modelo básico do Dual Mode podem gerar bons resultados, como é o caso, por exemplo, do controlador RDLQR, controlador linear quadrático a tempo discreto robusto, cuja formulação prevê limites de projeto aceitáveis para que, mesmo sob efeito de perturbações não previstas pelo modelo, o controle consiga respeitar as restrições e chegar ao estado desejado Galvão (2020a).

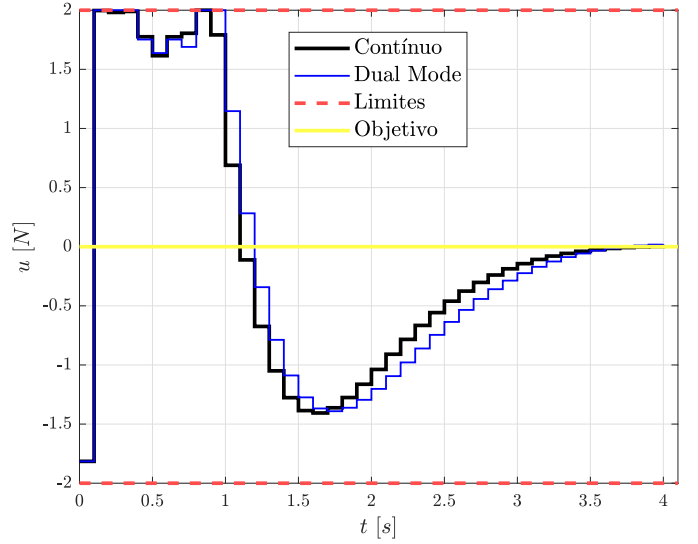


Figura 9. Gráfico do controle  $u$  em função do tempo, comparando desempenho do controlador DLQR e as limitações definidas em projeto.

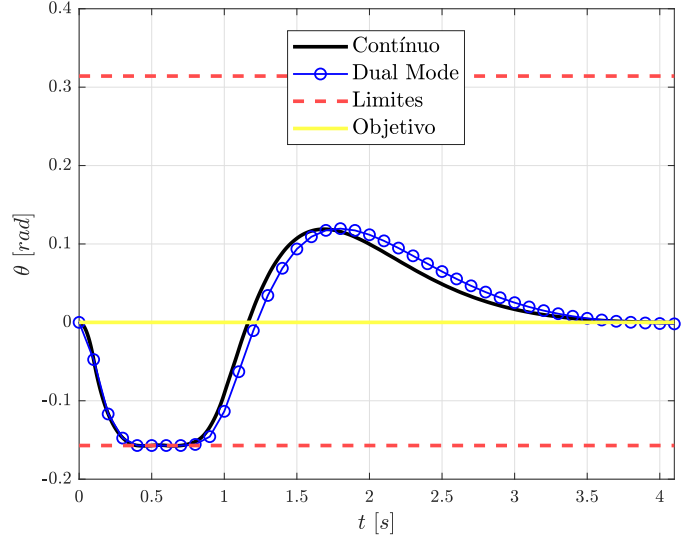


Figura 10. Gráfico do ângulo  $\theta$  em função do tempo, comparando desempenho do controlador DLQR e as limitações definidas em projeto.

## 6. CONCLUSÃO

Observou-se como o controlador Dual Mode, visto sua formulação com janela de horizonte móvel, consegue garantir que o estado desejado seja alcançado sem desprezar qualquer restrição (ver figuras 9 e 10). Os resultados da seção 4 mostram como o controlador DLQR não é adequado para o problema com restrições, pois basta um estado num momento  $k$  estar fora do conjunto  $\chi_f$  para que o controle passe das suas restrições (ver figuras 5 e 6).

É importante notar, embora o exemplo estudado seja adequado para observar as vantagens do controle preditivo (com horizonte finito), que embora o controlador Dual Mode tenha se mostrado adequado para o problema proposto, sua formulação não prevê ruídos na entrada da função  $u(t)$  ou problemas na observação dos estados. Como é mostrado em (Galvão, 2020a), o controle preditivo permite

alterações posteriores de modo a garantir a robustez do sistema para diferentes imperfeições do modelo adotado.

## REFERÊNCIAS

- Delgado, S. and Kotyczka, P. (2014). Passivitätsbasierte positions-und geschwindigkeitsregelung eines segway-systems. Technical report, Technische Universität München.
- Galvão, R.K.H. (2020a). Ee-254 controle preditivo semana 10 (parte 5/5).
- Galvão, R.K.H. (2020b). Ee-254 controle preditivo semana 2 (parte 2/6).
- Galvão, R.K.H. (2020c). Ee-254 controle preditivo semana 3 (parte 1/4).
- Galvão, R.K.H. (2020d). Ee-254 controle preditivo semana 5 (parte 5/6).
- Galvão, R.K.H. (2020e). Ee-254 controle preditivo semana 8 (parte 1/6).
- Maximo, M. (2017). *Automatic walking step duration through model predictive control*. Tese de doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.