Exercício 2.

Reynaldo Lima.

<u>Exemplo 1</u>: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

com $\vec{x} := (x_1, x_2)$ e

$$\vec{f}(\vec{x}) = \left[x_1^2 x_2,\ x_2^2\right]^T.$$

- mostre que f é diferenciável <u>usando a definição</u>:

Inicialmente, o jacobiano de f:

$$Df(x^*) := \begin{pmatrix} 2x_1^* x_2^* & x_1^{*2} \\ 0 & 2x_2^* \end{pmatrix},$$

com $x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$.

Com $Df(x^*)$, seja o limite:

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - Df(x^*)\left[x - x^*\right]}{\| x - x^* \|}$$

$$= \lim_{\substack{x \to x^*, \\ (x_1, x_2) \to (x_1^*, x_2^*)}} \frac{\begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {x_1^*}^2 x_2^* \\ {x_2^*}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^* x_2^* & {x_1^*}^2 \\ 0 & 2x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}}$$

$$= \lim_{x \to x^*} \frac{\begin{bmatrix} x_1^2 x_2 - \cancel{{x_1^*}^2 x_2^*} \\ x_2^2 - {x_2^*}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^* x_1 x_2^* - \cancel{2}{x_1^*}^2 x_2^* + x_1 {x_1^*}^2 - {x_1^*}^3 \\ 2x_2 x_2^* - \cancel{2}{x_2^*}^2 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}}$$

$$= \lim_{x \to x^*} \frac{\begin{bmatrix} x_1^2 x_2 + {x_1^*}^2 x_2^* - 2x_1 x_1^* x_2^* - x_1 {x_1^*}^2 + {x_1^*}^3 \\ x_2^2 + {x_2^*}^2 - 2x_2 x_2^* \end{bmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}}$$

$$= \vec{0} = L,$$

$\therefore$ f é diferenciável

- Use que se f é C^1 em D, então f é diferenciável em D.

Observe que:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix},$$

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é contínua

nos reais.

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}^T = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ é contínua

nos reais.

Logo, f é C^1 nos reais, daí segue o resultado.

Exemplo 2: Seja f tal que

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_1 - x_1 x_2 \end{bmatrix},$$

$$x = [x_1 \quad x_2]^T$$

i) f é Lipschitz para $x \in D$:

Observe que, se:

$$f_1 = -x_1 + x_1 x_2 = -f_2.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 + x_2 = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

e $$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

Como $x_2 - 1$ e x_1 são funções contínuas, $f \in C^1$.

Usando o 2º Lema apresentado no slide 15/38 da aula 2, segue f é <u>localmente Lipschitz em $x \in D$</u>.

ii) Obtenha L para

$D = W = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\}$,

Do 1º lema, analisa-se:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -1+x_2 & x_1 \\ 1-x_2 & -x_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty ,$$

$$\overset{|z| = |-z|,\ z \in \mathbb{R}}{=} \max_{x \in W} \{ |1-x_2| + |x_1|, |1-x_2| + |x_1| \},$$

$$= |1-x_2| + |x_1|$$

$$\overset{\text{des. triang.}}{\leq} 1 + |x_2| + |x_1|$$

$$\underset{x \in W}{\leq} 1 + a_2 + a_1 := L$$

Exemplo 3:

$$f(t,x) = A(t)\,x + g(t) \in \mathbb{R}^n,$$

com A e g contínuas por partes e $\|A(t)\| \leq a < \infty$, $\forall\, t \geq 0$.

Podemos mostrar que o PVI de condição inicial $x(0)$ tem solução única p/ $t \geq 0$ facilmente se f for Lipschitz.

Logo, seja:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)\|\cdot\|x-y\|$$

$$\leq a\,\|x-y\|, \quad \forall\, t>0$$

$$\therefore \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x-y\|} \leq a = L, \forall\, t>0$$

Logo, por definição f é Lipischitz e segue o resultado com base no teorema 1 do slide 19.

<u>Exemplo 4</u>: $f(x) = -x^3 \in \mathbb{R}^{1,1}$, $x(0) = x_0$, mostre que o PVI tem sol. única $\forall t \geq 0$.

$$|x^3 - y^3| = |x-y|\,|x^2+xy+y^2|$$

$$\therefore \frac{|x^3-y^3|}{|x-y|} = |x^2+xy+y^2|.$$

Se escolhemos $D \subset \mathbb{R}$ um subespaço limitado, p. e.,

$D = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$|x^2 + xy + y^2| \leq x^2 + y^2 + |xy|$,

S.P.G., suponha $|b| > |a|$, tal que:

$|x^2 + xy + y^2| \leq 3b^2 = L$.

Novamente, f é C^1 e Lipischitz em $D \subset \mathbb{R}$ compacto.

Segue que existe solução única do PVI.