MP-273: Exercício computacional 2

Reynaldo Lima

Junho de 2021

Questão 1

Temos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_\mathbf{1} = \tilde{\mathbf{f}}_\mathbf{1}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}, \tag{1}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_\mathbf{2} = \tilde{\mathbf{f}}_\mathbf{2}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}+\mathbf{d}) = -g\mathbf{e}_3 - \ddot{\mathbf{r}}_g^{b/g} + \frac{1}{m}\left(\mathbf{u}+\mathbf{d}\right). \tag{2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m}\mathbf{I}_\mathbf{3}. \tag{3}$$

Vale ressaltar que a matriz $\mathbf{B}$ é dada por (3). Além disso, a solução da expressão geral proposta, com o controle escolhido, tem valores de interesse:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_\mathbf{1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}} = 0_{3x3}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_\mathbf{2}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}} = I_3, \tag{5}$$

$$\left|\left|\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_\mathbf{1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}}\mathbf{B}\right|\right| = \frac{1}{m}. \tag{6}$$

Seguindo o raciocínio da aula 12 para o caso geral dessa lei de controle, tem-se a função candidata de Lyapunov, em que $\tilde{\kappa} = \kappa - \kappa_{max} < 0$, $\kappa_{max} < \infty$:

$$V = \frac{1}{2}(||\mathbf{s}|| + |\tilde{\kappa}|)^2, \tag{7}$$

de modo que:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (||\mathbf{s}|| + |\tilde{\kappa})\left(\mathbf{sign}(\mathbf{s})^T\dot{\mathbf{s}} + \dot{\tilde{\kappa}}sign(\tilde{\kappa}\right) \\ &= \sqrt{2}V^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{sign}(\mathbf{s})^T\dot{\mathbf{s}} - \gamma||s||\mathcal{I}_\epsilon(||s||)\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Deseja-se, agora, encontrar $\dot{\mathbf{s}}$.

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_1 \\
&= \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_1}\tilde{\mathbf{f}}_1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}(\tilde{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{d}).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Substituindo $\mathbf{u}$:

$$
\dot{\mathbf{s}} = -\kappa \left|\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B} \right|\right| \frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{s}||} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B}\mathbf{d}. \tag{10}
$$

Com isso, usando a desigualdade triangular (produto interno):

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \sqrt{2}V^{\frac{1}{2}} \left(-\kappa \left|\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B} \right|\right| + \frac{\mathbf{s}^T}{||\mathbf{s}||}\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B}\mathbf{d} - \gamma ||s|| \mathcal{I}_\epsilon(||s||) \right), \\
&\leq -\sqrt{2}V^{\frac{1}{2}} \left|\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B} \right|\right| (\kappa - ||\mathbf{d}||).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Com $||\mathbf{d}||$ limitado, existe um $t^* < \infty$ tal que $\kappa > ||\mathbf{d}||$, $\forall t \geq t^*$. Como sabemos, para o caso particular, que $\left|\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_1}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_2}\mathbf{B} \right|\right| = \frac{1}{m} > 0$, segue do teorema de Bhat and Bernstein que $(\mathbf{s}, \tilde{\kappa}) = (0, 0)$ é GFTS.

Questão 2

Utilizando condições iniciais nulas, $\kappa(0) = 0,2$, $\gamma = 1$, obtém-se os resultados a seguir.

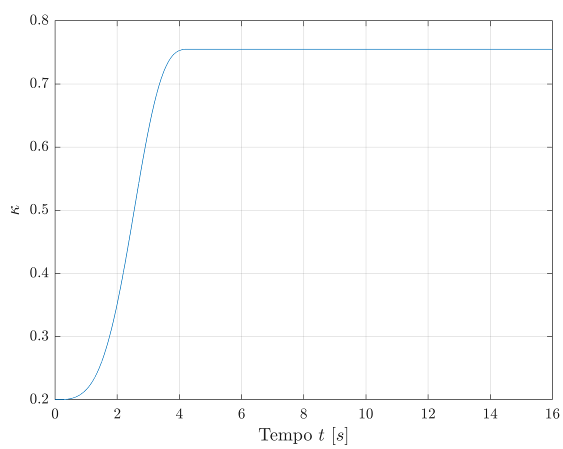

Figure 1: Evolução do κ até valor máximo.

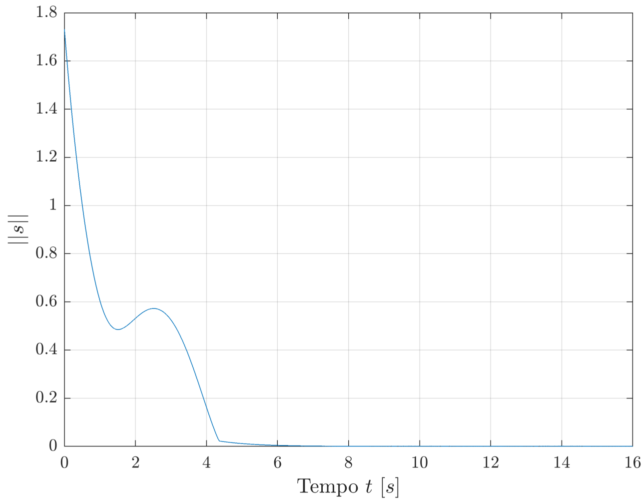

Figure 2: Valor de s por tempo.

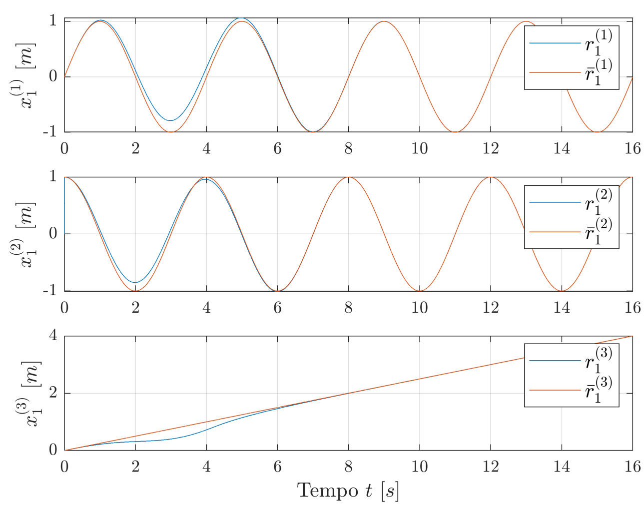

Figure 3: Evolução das coordenadas versus coordenadas comandadas por tempo.

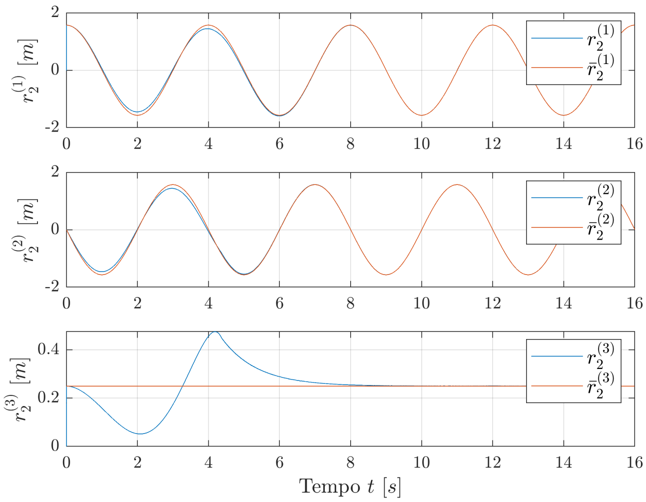

Figure 4: Evolução das velocidades versus velocidades comandadas por tempo.

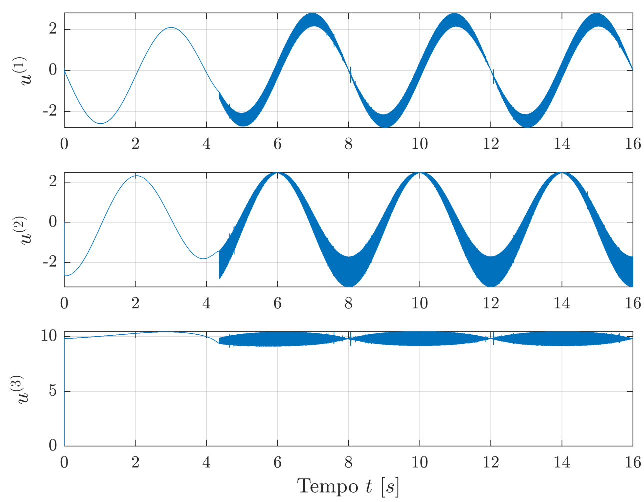

Figure 5: Valor de entrada em cada componente.

Observa-se da simulação os efeitos esperados pela entrada de controle, com o incremento de κ até um valor máximo que é maior que o módulo do distúrbio. Observa-se que neste momento a entrada passa para o shattering. Além disso, nas figuras 3 e 4 fica evidente que após tempo suficiente a trajetória realizada alcança com muita proximidade a trajetória comandada.