MP-273

Reynaldo Lima

Abril de 2021

1 Reprodução dos exemplos

1.1 Exemplo 2

Adicionando u_{eq} ao gráfico na figura 1

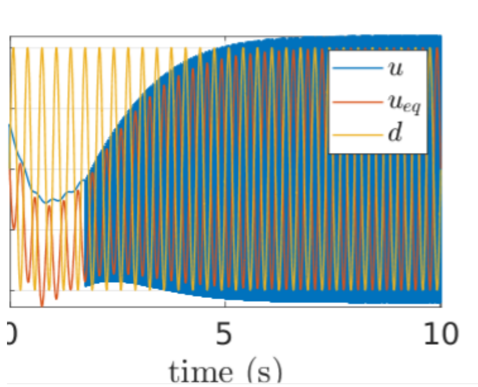

Figure 1: Disturbio e entrada equivalente adicionadas ao plot da entrada.

1.2 Exemplo 3

Diferentes tempos de amostragem na figura 2.

1.3 Exemplo 4

2 Demonstração da proposição 3.

A prova consiste de três itens, apresentados a seguir.

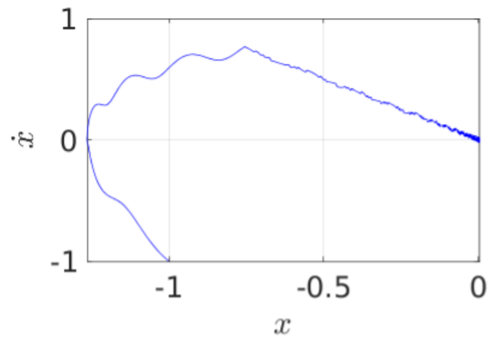

Figure 2: Tempo de amostragem 0,01s.

2.1 $\mathbf{x}(t) \to \mathcal{Q}$ quando $t \to T$, com $T \leq \frac{1}{\kappa-\rho}(|s(x(0), \dot{x}(0)| - \beta)$

A dinâmica de s é tal que

$$\dot{s} = c\dot{x} + \ddot{x} = c\dot{x} + f + bu + d, \tag{1}$$

substituindo $u = -\frac{1}{b}(c\dot{x} + f + \kappa sat_b(s))$,

$$\dot{s} = d - \kappa sat_b(s). \tag{2}$$

Separando em dois casos:

Se $s < -\beta$:

$$\dot{s} = \kappa + d \geq \kappa - \rho, \Rightarrow \dot{s} > 0.$$

$$s(t) - s(0) = -\beta - s(0) \geq (\kappa - \rho)t_\beta,$$
$$t_\beta \leq \frac{-\beta - s(0)}{\kappa - \rho}. \tag{3}$$

Se $s > \beta$:

$$\dot{s} = \kappa + d \leq -\kappa + \rho, \Rightarrow \dot{s} < 0.$$

$$s(t) - s(0) = \beta - s(0) \leq (-\kappa + \rho)t_\beta,$$
$$t_\beta \leq \frac{-\beta + s(0)}{\kappa - \rho}. \tag{4}$$

De (3) e (4), tem-se que, para s iniciando fora de $\mathcal{Q}$,

$$t_\beta \leq \frac{-\beta + |s(0)|}{\kappa - \rho}. \tag{5}$$

2.2 $\mathcal{Q}$ é positivamente invariante a distúrbio com respeito à malha fechada

Se $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$, a dinâmica de malha fechada é:

$$\dot{s} = -\frac{\kappa}{\beta} s + d. \tag{6}$$

A solução de (6) é, para $t \geq t_\beta$:

$$s(t) = exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - t_\beta)\right) s(t_\beta) + \int_{t_\beta}^{t} exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - \tau)\right) d(\tau) d\tau, \tag{7}$$

logo,

$$\begin{aligned} |s(t)| &\leq exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - t_\beta)\right)\beta + \int_{t_\beta}^{t} exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - \tau)\right)\rho d\tau \\ &\leq exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - t_\beta)\right)\beta + \frac{\beta\rho}{\kappa}\left(1 - exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - t_\beta)\right)\right) \\ &\leq \beta\left(\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\right) exp\left(-\frac{\kappa}{\beta}(t - t_\beta)\right) + \frac{\rho}{\kappa}\right) \\ &\leq \beta, \forall t \geq t_\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

De (8), segue o resultado.

2.3 $\mathbf{x}(t) \to \mathcal{I} \subset \mathcal{Q}$ quando $t \to \infty$, com $\mathcal{I} \subset \mathcal{Q}$ um conjunto limitado e $\mathbf{0} \in \mathcal{I}$

Vamos escrever o modelo dinâmico do sistema de 2ª ordem em malha fechada, considerando que $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{Q}$. Ou seja, vamos considerar $t \geq t_\beta$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f + b\left(-\frac{1}{b}\left(c\dot{x} + f + \kappa\frac{s}{\beta}\right)\right) + d, \\ &= -c\dot{x} - \frac{\kappa}{\beta}(c x + \dot{x}) + d. \end{aligned}$$

Definindo $c_1 = \frac{\kappa}{\beta}c$, $c_2 = c + \frac{\kappa}{\beta}$ e a transformação $x = \bar{x} + \tilde{x}$, em que $\bar{x}$ é o valor nominal do estado e $\tilde{x}$ o erro do estado. Tem-se, para o estado nominal a relação (9).

$$\ddot{\bar{x}} = -c_1\bar{x} - c_2\dot{\bar{x}}. \tag{9}$$

A partir disso, é possível voltar à expressão de $\ddot{x}$ de modo que:

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{\bar{x}} = -c_1 x - c_2\dot{x} + d - c_1\bar{x} - c_2\dot{\bar{x}},$$

logo, segue que:

$$\ddot{\tilde{x}} = -c_1\tilde{x} - c_2\dot{\tilde{x}} + d. \tag{10}$$

O estado nominal, de (9) com $c_1, c_2 > 0$, decai exponencialmente à origem tal que $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \rightarrow (0,0)$, ao passo que $t \rightarrow \infty$, visto que o sistema segue:

$$[\dot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}}]^T = A[\bar{x}, \dot{\bar{x}}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} [\bar{x}, \dot{\bar{x}}]^T,$$

cuja solução $exp(A(t)x_0)$, e parâmetros exponenciais $\alpha = exp\left(-\frac{t(c_2-\gamma)}{2}\right)$, $\beta = exp\left(-\frac{t(c_2+\gamma)}{2}\right)$ e $\gamma = \sqrt{c_2 - 4c_1}$:

$$[\bar{x}, \dot{\bar{x}}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\gamma - c_2\beta + c_2\alpha + \beta\gamma}{2\gamma} & -\frac{\beta-\alpha}{\gamma} \\ c_1\frac{\beta-\alpha}{\gamma} & \frac{c_2\beta + \alpha\gamma - c_2\alpha + \beta\gamma}{2\gamma} \end{bmatrix} [\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0]^T, \tag{11}$$

do qual segue de imediato a relação desejada. Isto é, $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \rightarrow (0,0)$.

Por outro lado, vale, com $\tilde{X} = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}]^T$:

$$\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + d, \tag{12}$$

com $B = [0,1]^T$. Novamente, sabendo que $\tilde{X} = 0$:

$$\tilde{X}(t) = exp\left(A(t - t_\beta)\right) 0 + \int_{t_\beta}^{t} exp\left(A(t-\tau)\right) Bd(\tau) d\tau, \tag{13}$$

$$||\tilde{X}(t)|| \leq \int_{t_\beta}^{t} \rho ||exp\left(A(t-\tau)\right) B|| d\tau. \tag{14}$$

Como $B = [0,1]^T$, a expressão à direita em (14) é um vetor semelhante à segunda coluna da matriz em (11), cujos valores tendem a 0 ao passo que $t \rightarrow \infty$. Desse modo, a soma dos módulos não cresce indefinidamente, garantindo a condição limitante.