MP-273

Reynaldo Lima

Março de 2021

Comentário sobre a leitura recomendada

Na apresentação do modelo, o problema é restringido de modo que a condição inicial desejada seja de fato a condição inicial do modelo, *i.e.*,

$$x_d(0) = x(0),$$

condição esta que não abrange alguns casos de interesse, como um inicio em degrau. Me chamou atenção esta limitação, que é apontada depois como apenas uma forma de ter uma solução exata para o tempo finito (na realidade, o autor menciona que mesmo fora dessa condição, o estado deslizante é alcançado). Além disso, na seção como um todo o problema é tratado de uma forma pouco clara, no meu ponto de vista de leitor iniciante no assunto. Menciona-se os valores imprecisos do modelo como limitados, sem especificar qual o limitante, e, ainda, ao especificar qual a entrada de fato para seguir a trajetória $s = 0$, faz-se $b = 1$, que torna as expressões alcançadas pouco genéricas. Por outro lado, a apresentação desta forma pode ser mais amigável a um leitor iniciante por não especificar tanto as condições matemáticas, mas sim apresentar a ideia do sliding control.

Prova das proposições

Seja a transformação linear $\mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}$, tal que $s(x, \dot{x}) = cx + \dot{x} = A[x, \dot{x}]^T$, com $A = [c, 1]$ e $c > 0$, e seja $\mathcal{S} = ker\{s\}$.

Prop. 1 *Se as trajetórias $(x, \dot{x})$ estão restritas ao espaço vetorial $\mathcal{S}$, então $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ é localmente assintoticamente estável em $\mathcal{S}$.*

Prova: Da hipótese, temos:

$$\dot{x} = -cx,$$

que, para $c > 0$, leva o estado de forma exponencial a $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ a medida que $t \longrightarrow \infty$. Deste fato, segue o resultado.

Prop. 2 *A lei de controle:*

$$u = -\frac{1}{b(x,\dot{x})}\left(c\dot{x} + f(x,x) + \kappa\dot{s}ign(s)\right),$$

com $\kappa > \rho$ (em que ρ é o módulo máximo do ruído no modelo considerado em aula) torna $s = 0$ um ponto de equilíbrio global estável a tempo finito, com tempo de acomodação satisfazendo:

$$T(s(0)) \leq \frac{1}{\kappa - \rho}|s(0)|.$$

Prova: A dinâmica é descrita por:

$$\dot{s} = c\dot{x} + f + bu + d,$$

de modo a usar o resultado do teorema de Blat e Bernstein, seja a função de Lyapunov:

$$V(s) = \frac{s^2}{2}, \tag{1}$$

que implica:

$$|s| = \sqrt{2}V(s)^{0,5}, \tag{2}$$

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(c\dot{x} + f + bu + d)$$

considerando agora o controle proposto:

$$\dot{V} = s(-sign(s)\kappa + d) = -|s|(\kappa - sign(s)d),$$

ou, ainda,

$$\dot{V} + \sqrt{2}(\kappa - sign(s)d)V(s) = 0. \tag{3}$$

Segue que V é Lyapunov, $\dot{V}$ é GND e, por consequência, V é uma "strict lyapunov function". De 3, escolendo um $\eta = \sqrt{2}(\kappa - \rho)$ e $\alpha = 1/2$, vale:

$$\dot{V} + \eta V^{\alpha} \leq 0, \tag{4}$$

logo, segue o resultado, com a seguinte relação válida pelo teorema:

$$T(s(0)) \leq \frac{1}{\eta(1-\alpha)}V^{1-\alpha}(s(0)) = \frac{|s(0)|}{\kappa - \rho}. \tag{5}$$

Exemplo numérico

Reproduzindo o exemplo, com $T = 0.001$ e os códigos enviados juntos a este documento, temos os resultados da figura a seguir.

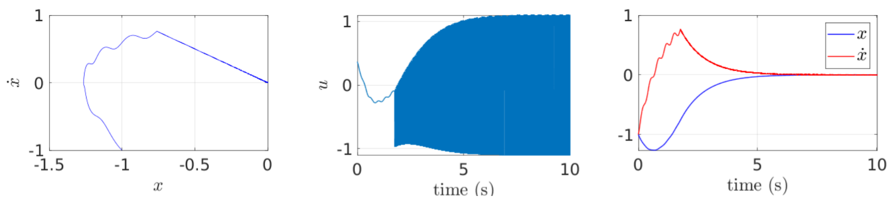

Figure 1: Resultados.