MP-273: Exercício computacional 1

Reynaldo Lima

Maio de 2021

Questão 1

O modelo dinâmico é representado por:

$$\ddot{\mathbf{r}}_g^{b/g} = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{f}_g^c + \frac{1}{m}\mathbf{f}_g^d. \tag{1}$$

Adotando $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_g^{b/g}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{f}_g^c$ e $\mathbf{d} = \mathbf{f}_g^d$, temos a relação:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2, \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{u} + \mathbf{d}) = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\left(\mathbf{u} + \mathbf{d}\right). \tag{3}$$

Desse modo, temos: $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -g\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{m}$.

Questão 2

Definindo os erros de rastreio $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{r}}_g^{b/g}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g}$ e recuperando as equações anteriores, tem-se, a princípio a relação a seguir mantida:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g} = \mathbf{x}_2 - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g} = \tilde{\mathbf{x}}_2. \tag{4}$$

Já a relação da derivada temporal de $\ddot{\mathbf{x}}_2$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \frac{1}{m}(\mathbf{u} + \mathbf{d}) - g\mathbf{e}_3 - \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g}. \tag{5}$$

Nesse caso, definem-se:

$$\mathbf{f_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x_2}, \tag{6}$$

$$\mathbf{f_2}(\mathbf{x}) = -g\mathbf{e}_3 - \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m}\mathbf{I_3}. \tag{8}$$

Questão 3

Temos:

$$\frac{\partial \mathbf{f_1}}{\partial \mathbf{x_1}} = 0_{3x3}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f_2}}{\partial \mathbf{x_2}} = I_3, \tag{10}$$

$$||\frac{\partial \mathbf{f_1}}{\partial \mathbf{x_2}}\mathbf{B}|| = \frac{1}{m}. \tag{11}$$

Logo, num primeiro momento vamos estudar um controlador como o da proposição 4 do capítulo 5 do curso:

$$\mathbf{u} = -m\left(C\mathbf{x_2} - g\mathbf{e_3} - \ddot{\mathbf{r}}_g^{b/g} + \kappa\frac{s}{||s||}\right). \tag{12}$$

Como discutido na proposta do exercício, devemos analisar uma condição suficiente para κ, de modo que a entrada garanta a origem de $\mathbf{x}$ como ponto assintoticamente estável. Desse modo, conclui-se que:

$$\kappa \leq \rho_{max}\sqrt{3}. \tag{13}$$

Questão 4

Os resultados da simulação mostraram uma posição de equilíbrio estável, com o acompanhamento da referência sendo bem executado. Nas figuras 3 e 4 fica claro ainda a presença de oscilações de alta frequência, comum a sliding mode control.

De modo geral, o controle parece satisfazer o esperado. As figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, cada componente dos vetores de estado x_1 e x_2, bem como o erro de rasteramento $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$.

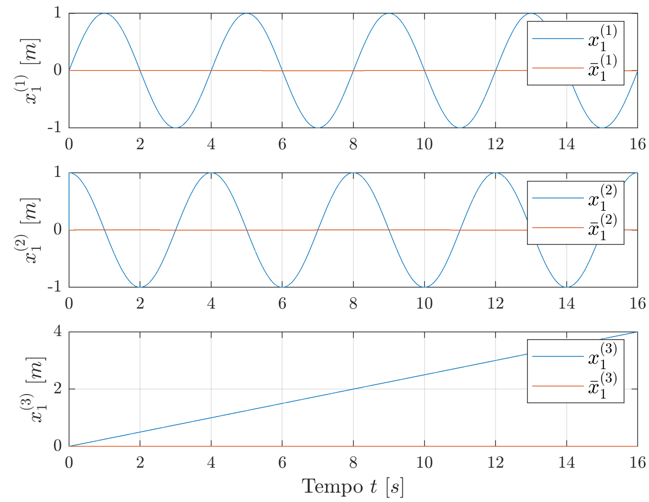

Figure 1: x_1 e $\bar{x}_1$ em função do tempo.

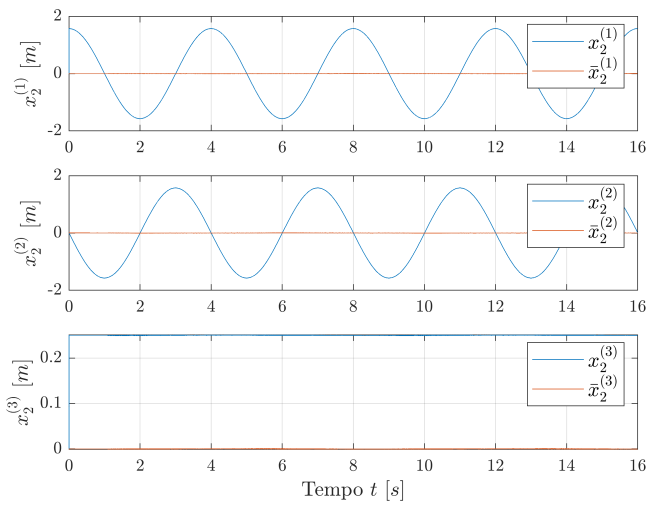

Figure 2: x_2 e $\bar{x}_2$ em função do tempo.

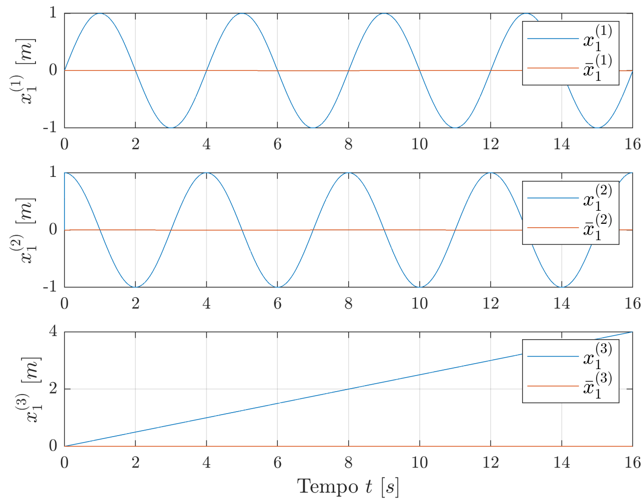

Figure 3: u em função do tempo.

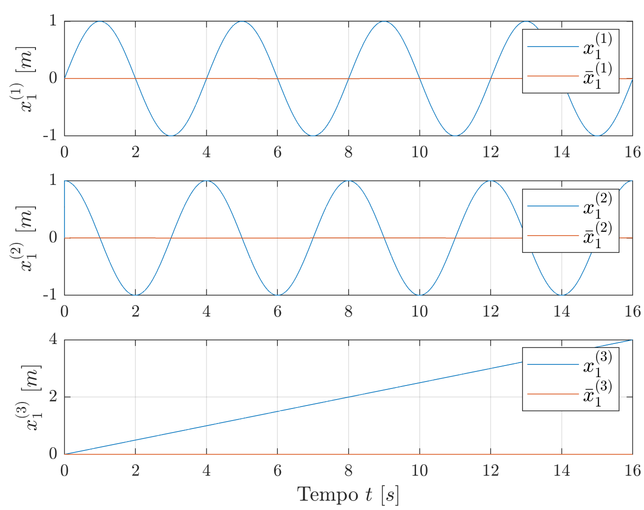

Figure 4: s em função do tempo.