

Exame MP-273

Reynaldo Santos de Lima
MEC-22

1 de julho de 2021

1 Questão 1

Da equação:

$$m\ddot{y} + b\dot{y}|\dot{y}| + k_0y + k_1y^3 = d. \quad (1)$$

Denotando $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, podemos reescrever a equação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2. \\ x_2 &= -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3 + \frac{d}{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Seja, pois, o vetor de estados $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{m} \end{pmatrix} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

em que $f(x) = [x_2, -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3]^T$, \mathbf{d} é o vetor de distúrbio e y é escrita neste formato para salientar que este é a única variável mensurável.

2 Questão 2

Na construção do observador, definimos agora a variável de estimação:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^T, \quad (4)$$

e a variável de erro de estimação:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (5)$$

Com isso, as equações do observador de Slotine constroem o observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= a_1\tilde{x}_1 + \hat{x}_2 + \kappa_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= a_2\tilde{x}_1 + f(\hat{\mathbf{x}}) + \kappa_2 \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (6)$$

A dinâmica de erro de estimação, seguindo o modelo em (6), é descrita, por sua vez, como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \kappa_1 \text{sign}(\tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -a_2\tilde{x}_1 + \delta - \kappa_2 \text{sign}(\tilde{x}_1), \end{aligned} \quad (7)$$

em que:

$$\delta = f(\mathbf{x}) - f(\hat{\mathbf{x}}) + d. \quad (8)$$

Com as funções definidas e o estimador montado, os fatores de projeto a_1 , a_2 , κ_1 e κ_2 devem ser reais positivos. Além disso, como mencionado no enunciado, a preposição 4 orienta que, para obtenção de um modo deslizante, deve-se escolher $\kappa_1 > |\tilde{x}_2|$. A preposição 5, por sua vez propõe uma formulação para o estado quando no modo deslizante:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\tilde{x}_2 + \delta. \quad (9)$$

Com isso, para δ limitado, garante-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}_2(t)| \leq -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\delta_{max}. \quad (10)$$

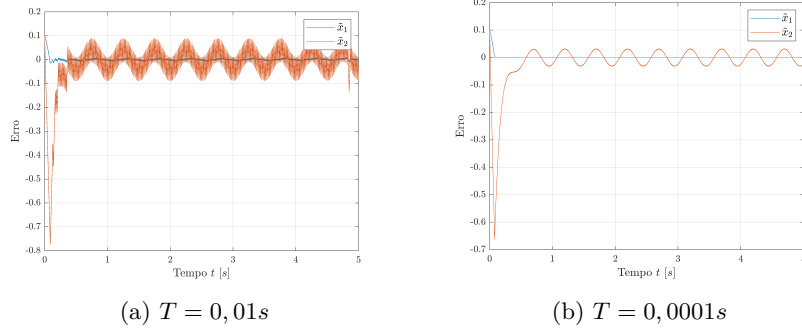


Figura 1: Erro de estimação para x_1 e x_2 , diferentes tempos de amostragem.

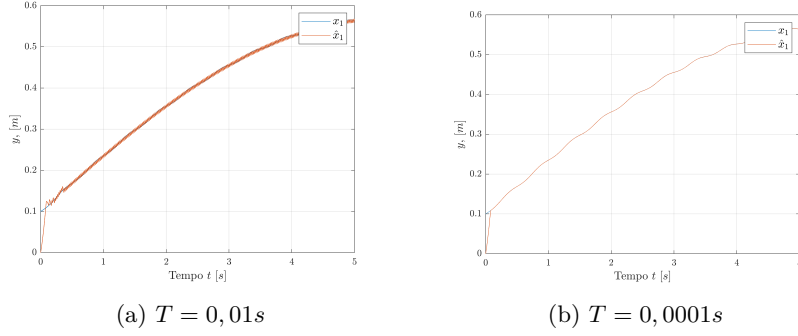


Figura 2: Valor real e estimação para y , diferentes tempos de amostragem.

Simulação do observador de Slotine

Como a limitação mais exigente nos resultados é o κ_1 , vamos tentar colocá-lo como um valor baixo. O erro em \tilde{x}_2 será iniciado como 0,1. Desse modo, escolhendo $\kappa_1 = 0,2$ deve garantir um bom resultado, em um tempo de convergência razoável. Como é esperado pelo método uma não convergência de modo deslizante para o sinal não mensurado (x_2), escolhe-se um valor relativamente alto de $\kappa_2 = 10$, forçando um comportamento aceitável.

Vale ressaltar que em aplicações reais, o ajuste destes fatores depende de parâmetros de sensores e elevar um ganho para forçar um bom funcionamento pode tornar o projeto muito caro e até, quando controle é presente, passar previsões impossíveis para motores (ao tentar compensar o erro inicial) e desrespeitar restrições dos atuadores. Os demais fatores são escolhidos como $a_1 = a_2 = 1$. Além disso, d será escolhido tal que:

$$d = 0,5 \sin(4\pi t). \quad (11)$$

A figura 1 mostra os resultados em função dos erros de rastreamento. Do observador de Slotine, o resultado segue o que a teoria fornece. Isto é, na variável mensurada, há modo deslizante, mas para as demais, há um limite superior ao erro. Os valores obtidos para as variáveis y e \dot{y} , junto aos valores estimados, podem ser vistos, respectivamente, nas figuras 2 e 3. Já quanto ao tempo de amostragem, observa-se que a diminuição do tempo de amostragem gera um tempo de convergência semelhante para a variável y , mas erros maiores, principalmente para a variável \dot{y} .

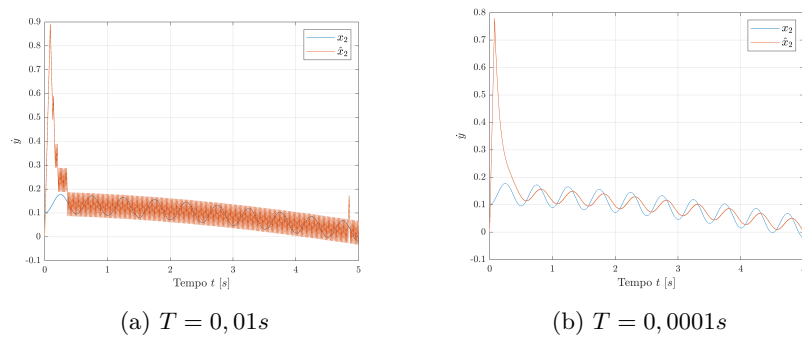


Figura 3: Valor real e estimação para \dot{y} , diferentes tempos de amostragem.

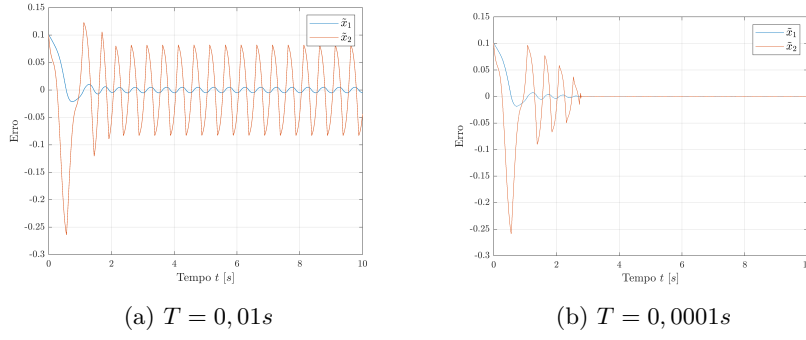


Figura 4: Erro de estimação para x_1 e x_2 , diferentes tempos de amostragem, observador super-twisting.

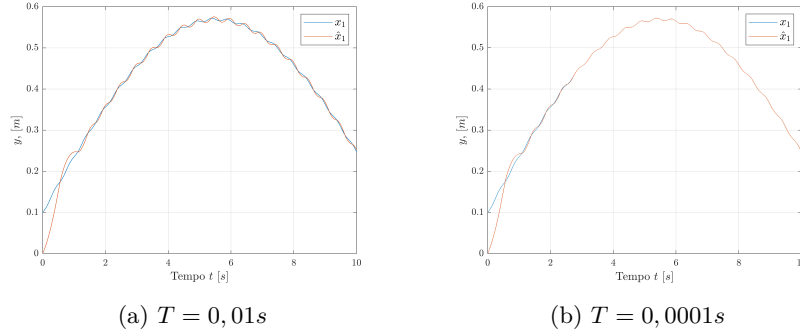


Figura 5: Valor real e estimação para y , diferentes tempos de amostragem, observador super-twisting.

3 Questão 3

As equações do observador pelo algoritmo Super-Twisting para o caso proposto (apenas y mensurável) são mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + C_1 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(\mathbf{x}) + C_2 \text{sign}(\tilde{x}_2).\end{aligned}\tag{12}$$

Simulação do observador de super-twisting

Em (12), C_1 e C_2 a parâmetros de projeto. Sua escolha, como mencionado no enunciado, devem respeitar:

$$C_1 = 1,5\delta_{max}^{1/2},\tag{13}$$

$$C_2 = 1,1\delta_{max}.\tag{14}$$

Como foi feito, no exemplo anterior, o modelo mais simples, δ_{max} pode ser estimado a partir dos resultados anteriores. Desse modo, supondo $\delta_{max} \approx 0,6$, tem-se $C_1 = 0,54$ e $C_2 = 0,66$.

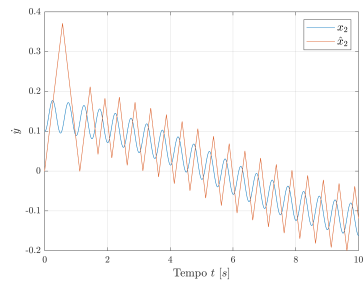
Os resultados são apresentados nas figuras 4-6. Observa-se que, para um tempo de amostragem suficientemente pequeno, foi possível alcançar a convergência em tempo de simulação de 5s (caso de $T = 10^{-4}$). Por outro lado, para $T = 10^{-2}$, o processo é mais lento e, para a variável \dot{y} , não há convergência. Nas figuras, tem-se um tempo de simulação total de 10s, porém, testando até 100s no programa fornecido com este exame, verifica-se que não há convergência de fato.

Isso pode ser explicado considerando a condição de δ_{max} assumida. Como foi tomado um valor pouco acima do distúrbio, fica evidente que mesmo prosseguindo-se por tempo indeterminado, a distância do δ real ao δ_{max} suposto nunca é pequena o suficiente para que o algoritmo cumpra seu objetivo. Isto é, não torna-se possível ser estabelecido para tempo de amostragem qualquer a observação em sliding mode de y e \dot{y} (ver figura 6).

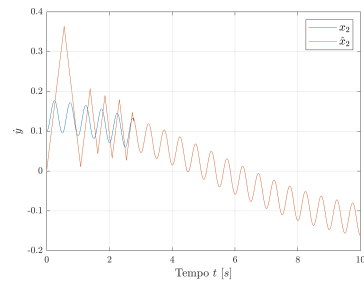
Como os fatores são de projetos, fica evidente que, conhecendo-se o tempo de amostragem real aplicado, determinariam-se novamente os parâmetros C_1 e C_2 de forma mais conservadora que a aplicada na simulação.

Observações do código

A função MAIN(T,obs), fornecida junto ao exame, realiza a simulação do observador Slotine se obs=1 e do Super-twisting se obs=2. T se refere ao tempo de amostragem.



(a) $T = 0,01s$



(b) $T = 0,0001s$

Figura 6: Valor real e estim  o para \dot{y} , diferentes tempos de amostragem, observador super-twisting.