



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

Estrutura de Dados e Algoritmos - MATA 40

RELATÓRIO RED-BLACK TREE vs AVL

**Reynan Da Silva Dias Paiva
Bruno Ribeiro Cana Brasil
Jamilson Prazeres Pestana Júnior**

Responsável: Prof. Dr. George Marconi de Araújo Lima

¹ Reynan Da Silva Dias Paiva. Cursando Ciência Da Computação na UFBA. Contato: <reynanwq@gmail.com>.

SUMÁRIO

1.0 AVL – Definição	04
2.0 Red-black tree Definição	04
3.0 Diferença da Red-black e AVL	05
4.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 2 ATÉ 6 NÓS.	06
5.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 10 ATÉ 38 NÓS	10
6.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR 60 NÓS	20
7.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR 100 NÓS.	21
8.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR 200 NÓS.	22
9.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS AS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR AO VALORES DADOS PELO PROFESSOR: input1.txt	23
10.0 MÉDIA E DESVIO PADRÃO	24
11.0 CONCLUSÃO	33
12.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33

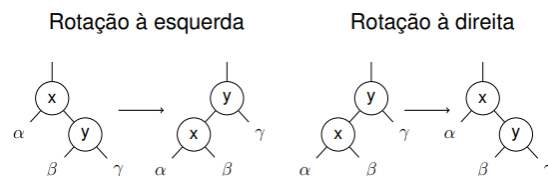
LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Teste 1	05
Gráfico 2 - Teste 2	06
Gráfico 3 - Teste 3	07
Gráfico 4 - Teste 4	08
Gráfico 5 - Teste 5	09
Gráfico 6 - Teste 6	11
Gráfico 7 - Teste 7	12
Gráfico 8 - Teste 8	13
Gráfico 9 - Teste 9	14
Gráfico 10 - Teste 10	15
Gráfico 11 - Teste 11	16
Gráfico 12 - Teste 12	16
Gráfico 13 - Teste 13	17
Gráfico 14 - Teste 14	18
Gráfico 15 - Teste 15	19
Gráfico 16 - Teste 16	20
Gráfico 17 - Teste 17	21
Gráfico 18 - Teste 18	22
Gráfico 19 - Teste 19	23
Gráfico 20 – Gráfico de Altura	30
Gráfico 21 – Nível de Balanceamento	31
Gráfico 22 – Média de Rotações.	31

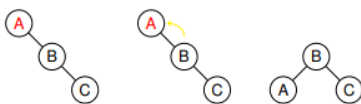
1.0 O que é AVL ?

Esta estrutura foi criada em 1962 pelos soviéticos Adelson Velsky e Landis (a inicial de seus inventores que formam a árvore) que a criaram para que fosse possível inserir e buscar um elemento em tempo $c \cdot \log(n)$ operações, onde n é o número de elementos contido na árvore. É fato que é uma árvore binária de busca balanceada. Uma árvore AVL nunca excede $(1.44 \log n)$ em altura, o que implica que, mesmo no pior caso, o tempo de pesquisa numa árvore AVL é da ordem de $O(\log n)$. Numa árvore perfeitamente balanceada, as sub-árvores de cada nó têm a mesma altura. Uma árvore AVL é uma árvore binária de pesquisa em que as sub-árvores esquerda e direita da raiz não diferem de mais do que uma unidade nas suas alturas. São casos particulares de árvores de pesquisa binária em que as operações de inserção e remoção são desenhadas para manter a árvore muito próxima de um estado balanceado em cada instante. As operações de busca, inserção e remoção de elementos possuem complexidade $O(\log n)$, ao qual n é o número de elementos da árvore), que são aplicados a árvore de busca binária.

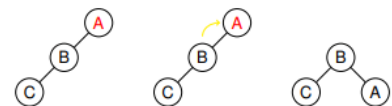
Existem 2 tipos de rotação:



Rotação à esquerda



Rotação à direita



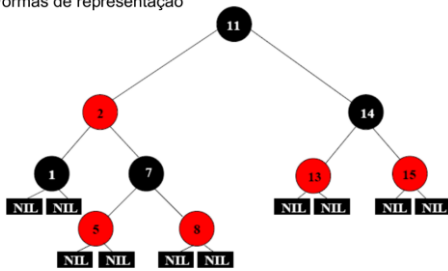
2.0 O que é Red-black tree ?

Foram inventadas por Bayer sob o nome “Árvores Binárias Simétricas” em 1972, 10 anos depois das árvores AVL. Uma árvore vermelho-preto é um tipo de árvore de busca binária com equilíbrio automático, onde cada nó tem um bit extra, e esse bit é frequentemente interpretado como a cor (vermelho ou preto). Essas cores são usadas para garantir que a árvore permaneça equilibrada durante as inserções e exclusões. Embora o equilíbrio da árvore não seja perfeito, é bom o suficiente para reduzir o tempo de busca e mantê-lo em torno do tempo $O(\log n)$, onde n é o número total de elementos na árvore. Esta árvore foi inventada em 1972 por Rudolf Bayer. A altura preta da árvore vermelho-preta é o número de nós pretos em um caminho do nó raiz até o nó folha. Os nós de folha também são contados como nós pretos. Portanto, uma árvore vermelho-preta de altura h tem altura preta $\geq h/2$. A altura de uma árvore vermelho-preta com n nós é $h \leq 2 \log_2(n+1)$. A profundidade de preto de um nó é definida como o número de nós pretos da raiz até aquele nó, ou seja, o número de ancestrais pretos. Cada árvore rubro-negra é um caso especial de árvore binária. Cada vez que uma operação for realizada na árvore, o conjunto de propriedades é testado

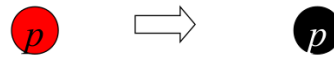
Por serem “balanceadas” as árvores V-P possuem complexidade logarítmica em suas operações: $O(\log n)$. Todo nó é vermelho ou preto. A raiz é preta. Toda folha (Nil) é preta. Se um nó

é vermelho, então os seus filhos são pretos. Para cada nó, todos os caminhos do nó para folhas descendentes contém o mesmo número de nós PRETOS.

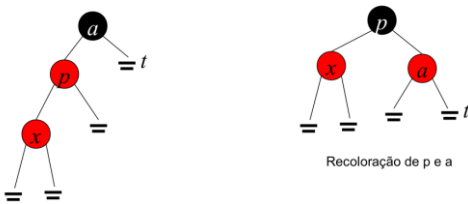
Formas de representação



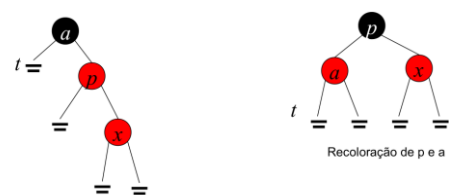
Primeira inserção: Caso a árvore seja nula, a inserção o Nó mudará a sua cor para preto.



Rotação à Direita:



Rotação à Esquerda:



3.0 Diferença da Red-black e AVL.

RED-BLACK

Pesquisas: mais lentas, pois não são equilibradas

Cor: Vermelha ou Preta

Inserção/Remoção: Mais rápidas pois tem menos rotações sendo feitas.

Pesquisa de Busca: Não fornece pesquisas eficientes.

Fator de equilíbrio: Não tem equilíbrio

Usos: Bibliotecas de idiomas: map;

AVL

Pesquisas: mais rápidas, pois são mais equilibradas

Cor: Não tem cor

Inserção/Remoção: Operações complexas de inserção e remoção equilíbrio rigoroso a medida que são feitas as rotações

Pesquisa de Busca: Fornece pesquisas eficientes.

Fator de equilíbrio: Cada Nó tem um fator de fator entre: { 1, 0, -1 }

Usos: Banco de Dados

RED BLACK TREE -

Algorithm	Average	Worst case
Space	$O(n)$	$O(n)$
Search	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$

AVL TREE -

Algorithm	Average	Worst case
Space	$O(n)$	$O(n)$
Search	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$

4.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 2 ATÉ 6 NÓS..

Para esse teste inicial as entradas utilizadas na AVL e na Red-black Tree foram:

Árvore com 2 NÓ:

10 15

Árvore com 4 NÓ:

10 15 20 25

Árvore com 6 NÓ:

10 15 20 25 30 35

Árvore com 3 NÓ:

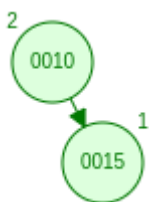
10 15 20

Árvore com 5 NÓ:

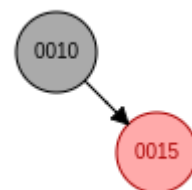
10 15 20 25 30

TESTE 01

AVL



RED-BLACK TREE



Análise: Não há mudanças com relação ao posicionamento dos Nós. Sendo o valor “10” a raiz, ao inserir o valor “15” por ele ter um valor maior que a raiz, então será inserido na direita da raiz. Na RB O 10 é a raiz, logo terá cor preta, o valor 20 entra como vermelho e por também ser autobalanceada, entra à direita da raiz.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1

AVL altura: 1

AVL rotações: 0

AVL N° de Nós: 2

AVL Medio de Rotações: 0

RB fator de balanceamento da raiz: -1

RB altura: 1

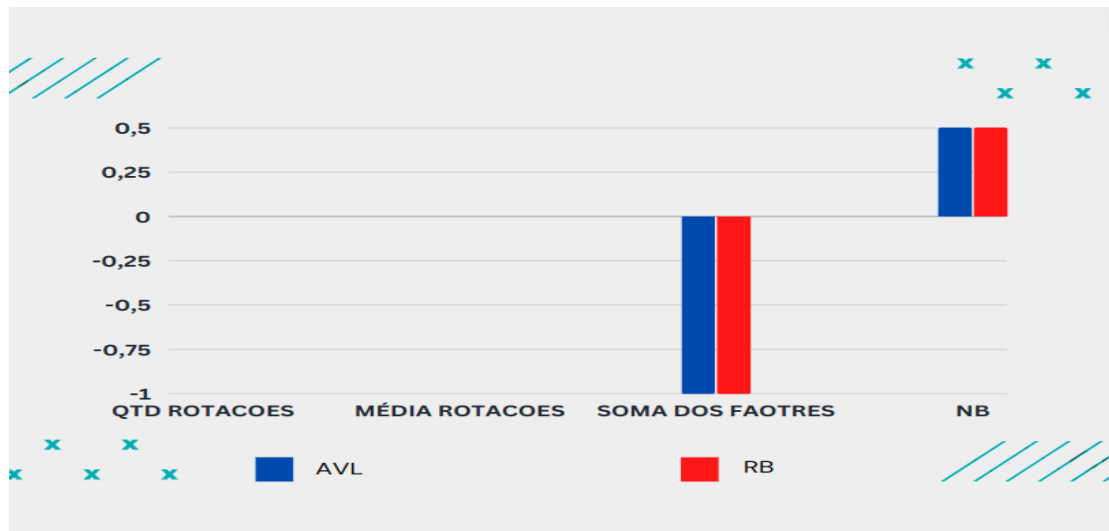
RB rotações: 0

RB N° de Nós: 2

RB Medio de Rotações: 0

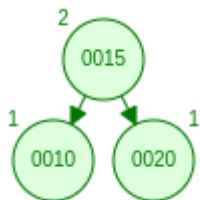
AVL Soma dos Fatores da árvore: -1
AVL Nível de balanceamento: 0.5

RB Soma dos Fatores da árvore: -1
RB Nível de balanceamento: 0.5

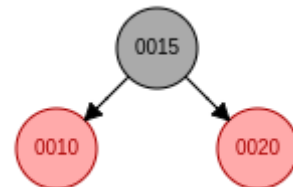


TESTE 02

AVL



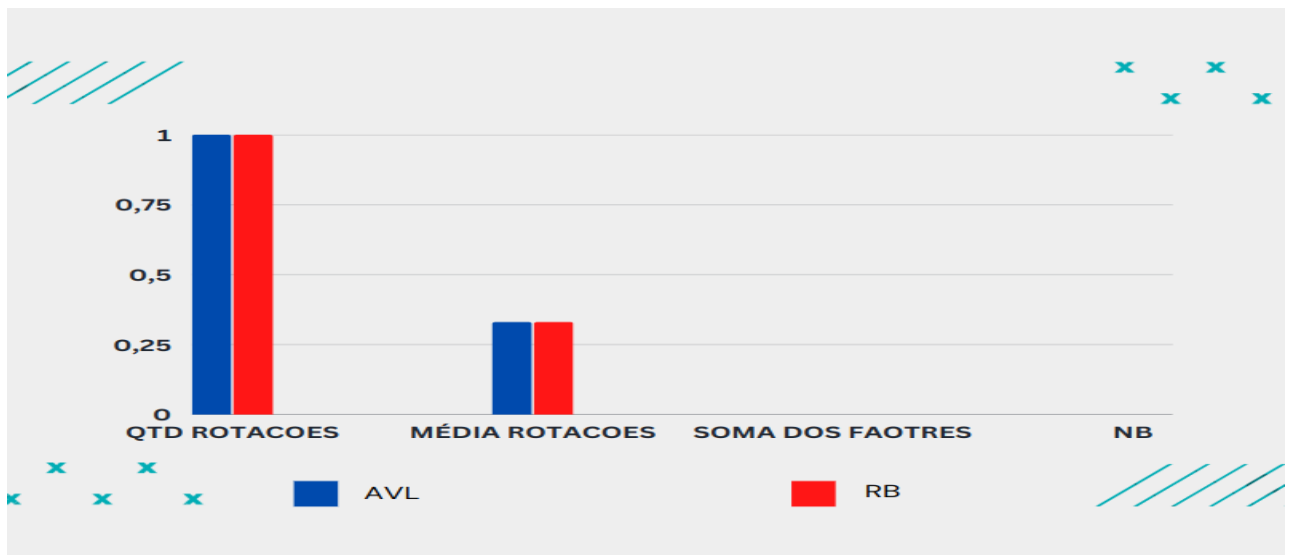
RED-BLACK TREE



Análise: Ao inserir o valor “20”, percebe-se que ainda não há nenhuma diferença com relação ao posicionamento, isso ocorre pelo fato de ambas as árvores serem autobalanceadas. Ao inserir o valor “20”, que também é maior que a raiz e o valor “15”, então ele é inserido à direita do “15”, neste caso, é necessário que seja realizada uma rotação para esquerda. Como já sabemos, o “20” entra como vermelho, à direita do “15”. Logo, será necessário uma rotação para à esquerda, pois um vermelho não pode ter um filho vermelho. O “15”, para balancear vira a raiz, logo terá cor preta e o 10 desce como vermelho, pois seu irmão também é vermelho.

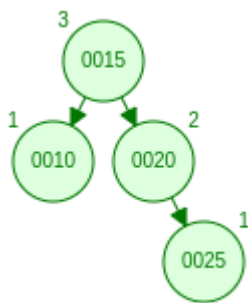
AVL fator de balanceamento da raiz: 0
AVL altura: 1
AVL rotações: 1
AVL N° de Nós: 3
AVL Medio de Rotações: 0.33
AVL Soma dos Fatores da árvore: 0
AVL Nível de balanceamento: 0

RB fator de balanceamento da raiz: 0
RB altura: 1
RB rotações: 1
RB N° de Nós: 3
RB Medio de Rotações: 0.33
RB Soma dos Fatores da árvore: 0
RB Nível de balanceamento: 0

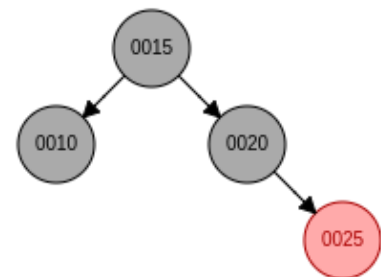


TESTE 03

AVL



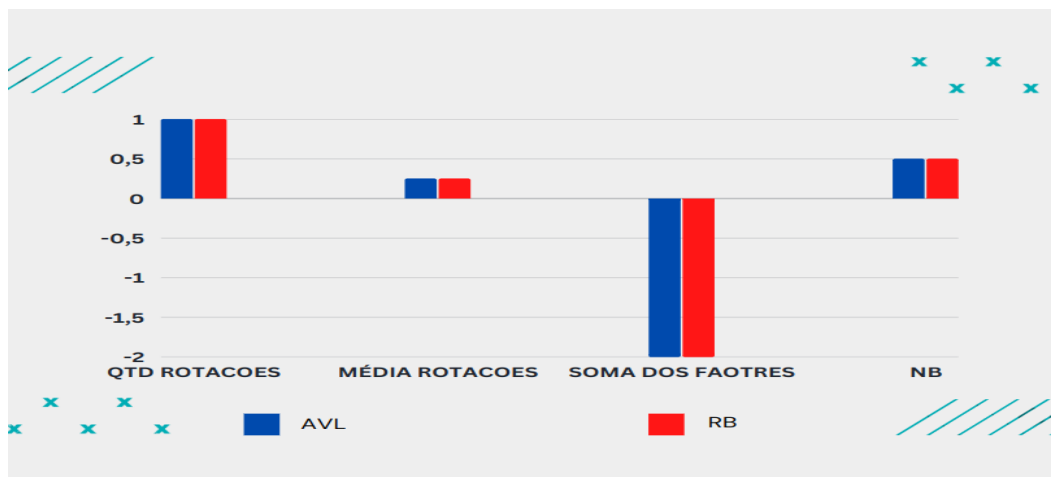
RED-BLACK TREE



Análise: Ao inserir o valor “25”, ainda não ocorre diferenças com relação ao posicionamento. O 25 será inserido à direita do 20, logo não é necessário nenhuma rotação. O “25” entra como vermelho, porém, o “20” que é o pai do “25” também é vermelho, então o “20” deve ter valor preto. Logo, o “10” que é o irmão do “20” deve ter cor preta.

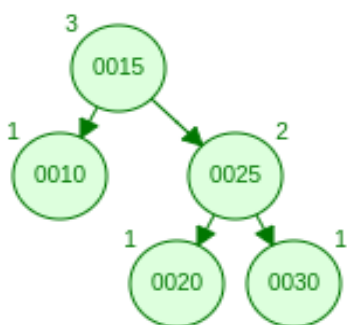
AVL fator de balanceamento da raiz: -1
 AVL altura: 2
 AVL rotações: 1
 AVL N° de Nós: 4
 AVL Medio de Rotações: 0.25
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -2
 AVL Nivel de balanceamento: 0.50

RB fator de balanceamento da raiz: -1
 RB altura: 2
 RB rotações: 1
 RB N° de Nós: 4
 RB Medio de Rotações: 0.25
 RB Soma dos Fatores da árvore: -2
 RB Nivel de balanceamento: 0.50

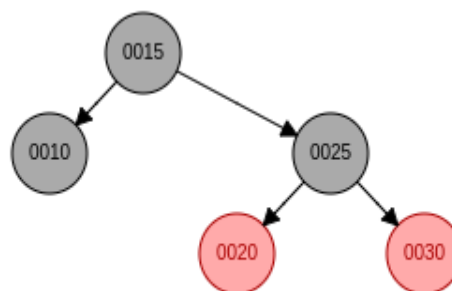


TESTE 04

AVL



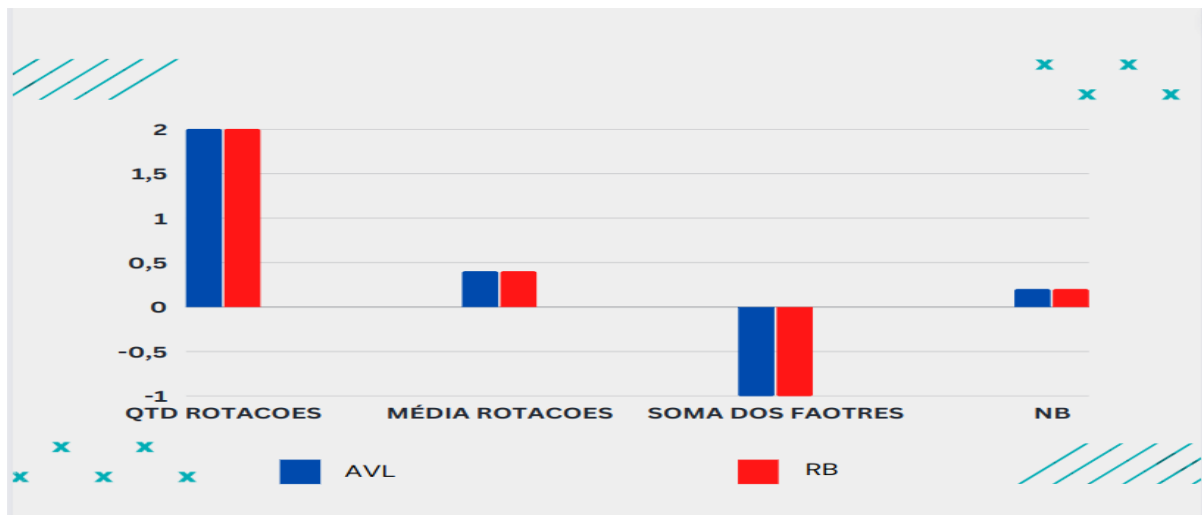
RED-BLACK



Análise: Com a inserção do valor “30”, ainda não é notável a diferença com relação ao posicionamento das árvores. O “30” será inserido à direita do “25”, logo será necessário uma rotação para esquerda. O “30” entra como cor vermelha e como filho do “25”, como o “25” é o pai e tem cor vermelha, então a cor do “25” muda para preta. Também é realizada uma rotação para esquerda. O “20” também fica vermelho pois seu irmão “30” é vermelho.

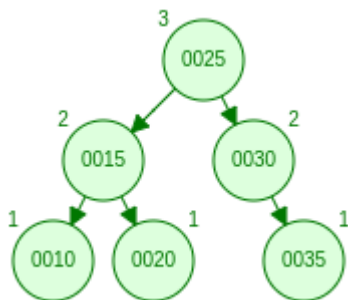
AVL fator de balanceamento da raiz: -1
 AVL altura: 2
 AVL rotações: 2
 AVL N° de Nós: 5
 AVL Medio de Rotações: 0.4
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -1
 AVL Nível de balanceamento: 0.20

RB fator de balanceamento da raiz: -1
 RB altura: 2
 RB rotações: 2
 RB N° de Nós: 5
 RB Medio de Rotações: 0.4
 RB Soma dos Fatores da árvore: -1
 RB Nível de balanceamento: 0.20

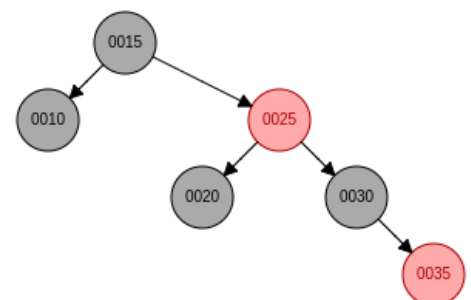


TESTE 05

AVL



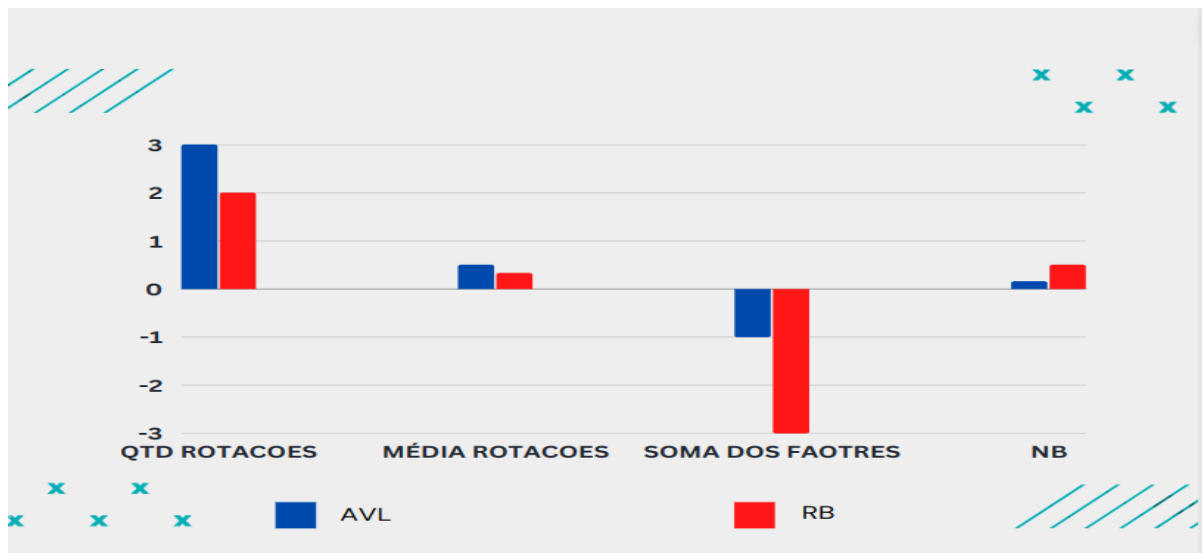
RED-BLACK TREE



Análise: Inserindo o valor “35”, finalmente é possível notar uma diferença com relação ao posicionamento. Na Red-Black tree, o “35” entra como filho do “30”, logo o “30” e o “20” ficam preto e “25” com a coloração avermelhada. Na AVL, há uma rotação dupla, o “20” virá o filho do Nó “15” que deixa de ser raiz, para ser o filho do “25” que virá a nova raiz. O “35” será inserido à direita do “30”, desta forma, a árvore ficará desbalanceada, logo será necessário uma rotação para à esquerda, tornando o “25” a nova raiz. O 35 entra como vermelho. Como o seu pai (30) também é vermelho, então a sua cor muda para preto.

AVL fator de balanceamento: 0
 AVL altura: 2
 AVL rotações: 3
 AVL N° de Nós: 6
 AVL Medio de Rotações: 0.5
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -1
 AVL Nível de balanceamento: 0.16

RB fator de balanceamento da raiz: -2
 RB altura: 3
 RB rotações: 2
 RB N° de Nós: 6
 RB Medio de Rotações: 0.33
 RB Soma dos Fatores da árvore: -4
 RB Nível de balanceamento: 0.5



5.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 10 ATÉ 38 NÓS.

Entradas utilizadas na AVL e na Red-black Tree:

Árvore com 10 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55

Árvore com 11 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60

Árvore com 12 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65

Árvore com 13 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70

Árvore com 14 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75

Árvore com 15 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80

Árvore com 16 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85

Árvore com 17 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90

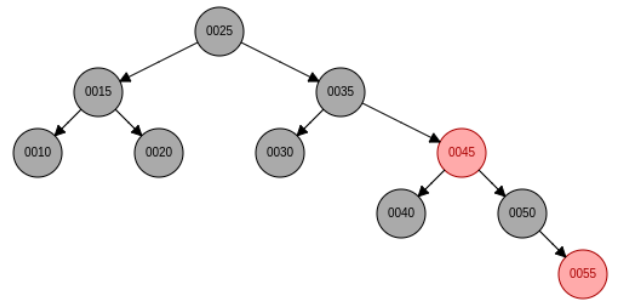
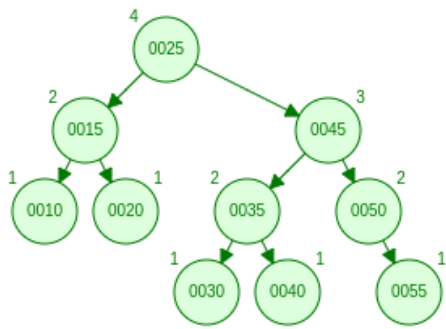
Árvore com 18 NÓ:

10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95

TESTE 06

AVL:

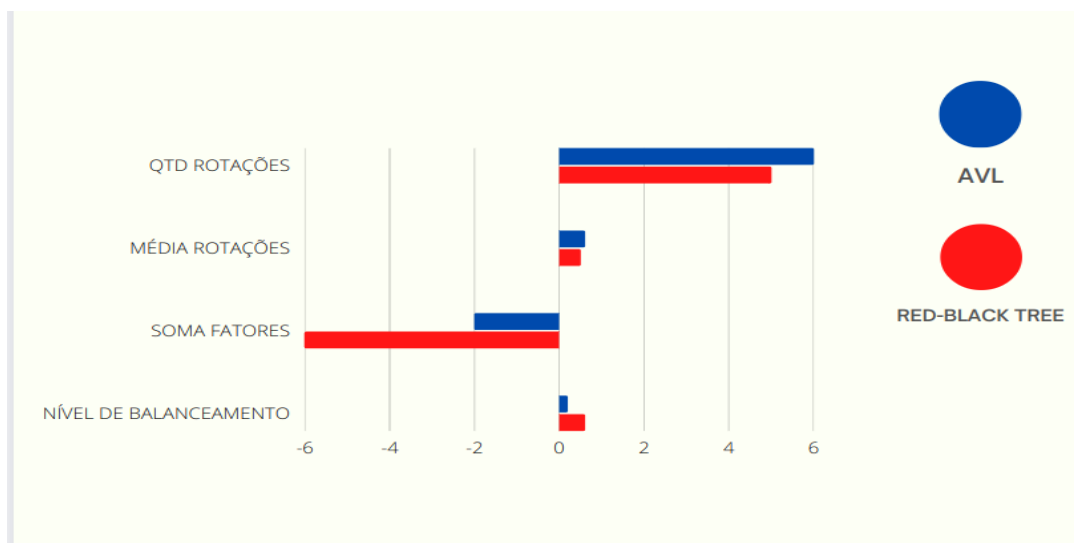
Red-Black tree:



Análise: Este é apenas a primeira análise, já é nitido a mudança no comportamento, principalmente por causa das cores, o fator de balanceamento da raiz também está diferindo, tal como a altura, quantidade de rotações e o nível de balanceamento.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1
 AVL altura: 3
 AVL rotações: 6
 AVL N° de Nós: 10
 AVL Medio de Rotações: 0.6
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -2
 AVL Nível de balanceamento: 0.2

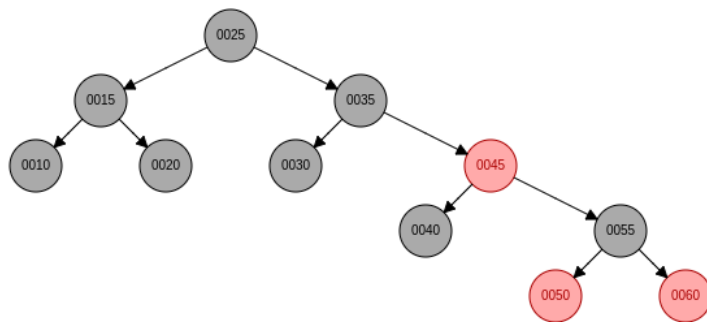
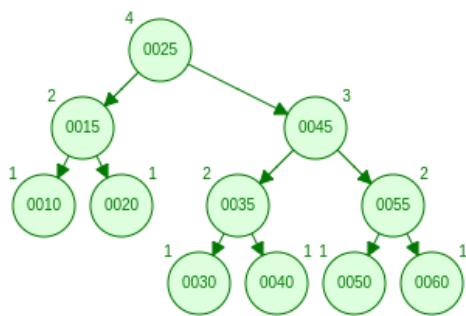
RB fator de balanceamento da raiz: -2
 RB altura: 4
 RB rotações: 5
 RB N° de Nós: 10
 RB Medio de Rotações: 0.50
 RB Soma dos Fatores da árvore: -6
 RB Nível de balanceamento: 0.6



TESTE 07

AVL:

Red-Black tree:

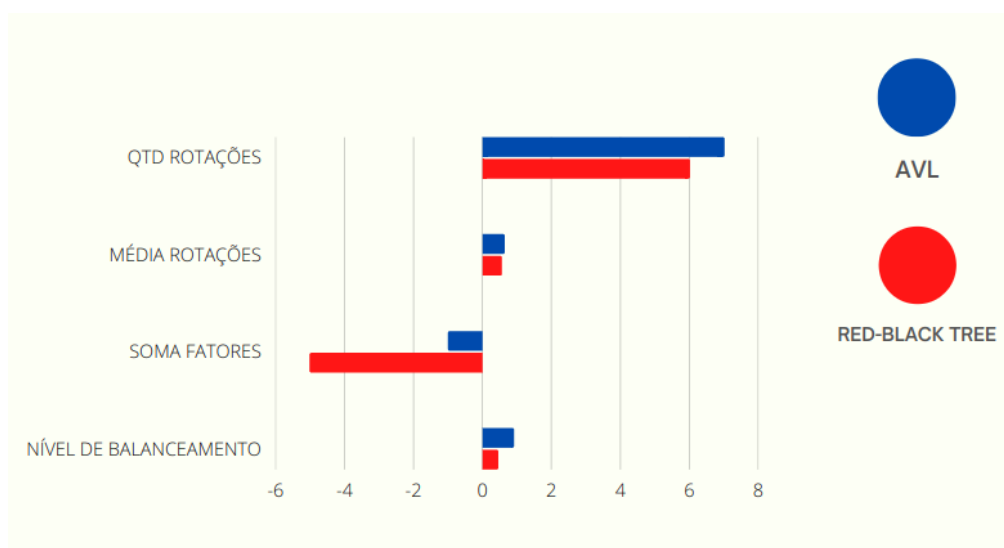


Análise: Ao inserir o valor “60”, na AVL irá apenas acontecer uma rotação para esquerda, ou seja,

Com relação à Red-Black tree, o “60” entra como vermelho e o “55” muda sua coloração para preto. Para balancear a árvore, então é feita uma rotação para esquerda.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1
 AVL altura: 3
 AVL rotações: 7
 AVL N° de Nós: 11
 AVL Medio de Rotações: 0.63
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -1
 AVL Nivel de balanceamento: 0.9

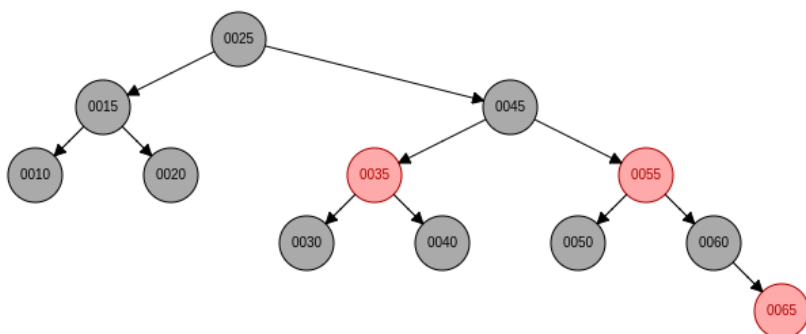
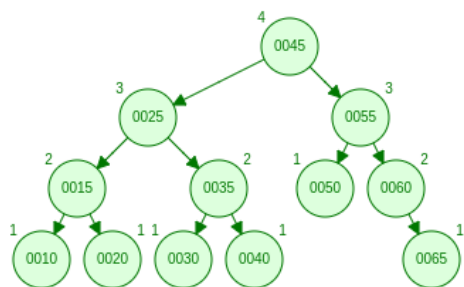
RB fator de balanceamento raiz: -2
 RB altura: 4
 RB rotações: 6
 RB N° de Nós: 11
 RB Medio de Rotações: 0.55
 RB Soma dos Fatores da árvore: -5
 RB Nível de balanceamento: 0.45



TESTE 08

AVL:

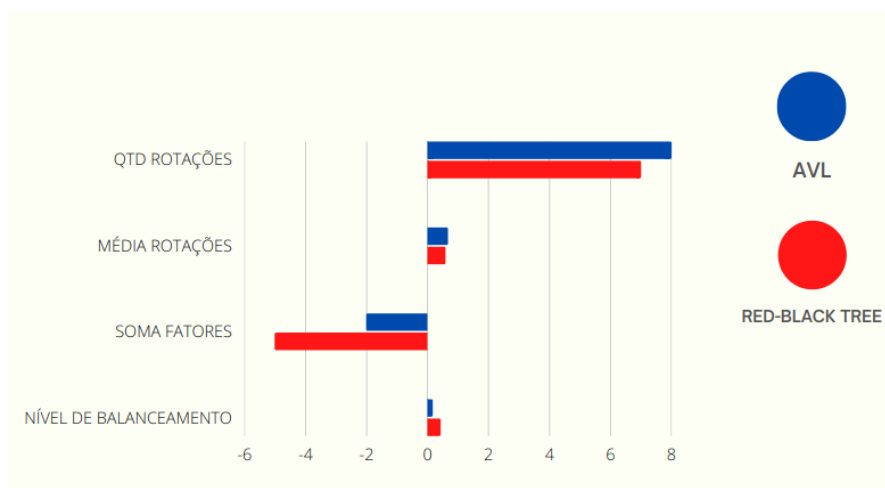
Red-Black tree:



Análise: a entrada “65” causa uma grande mudança na AVL, pois é necessário uma rotação dupla, o “45” vira a nova raiz e o “25” aponta para o “35”, tudo isso é feito com o intuito de balancear as árvore. Na Reb-black tree, o “65” entra como cor vermelha e o “60” muda sua cor para preto, tal como o seu irmão o “50”, consequentemente, o “55” e o “45” também tem as suas cores alteradas.

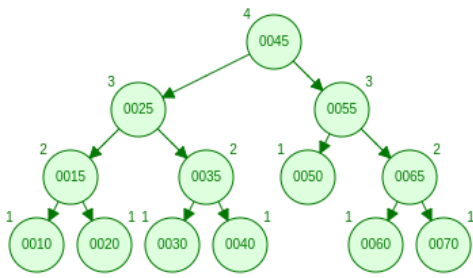
AVL fator de balanceamento da raiz: 0
 AVL altura: 3
 AVL rotações: 8
 AVL N° de Nós: 12
 AVL Medio de Rotações: 0,66
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -2
 AVL Nivel de balanceamento: 0.17

RB fator de balanceamento da raiz: 2
 RB altura: 4
 RB rotações: 7
 RB N° de Nós: 12
 RB Medio de Rotações: 0.58
 RB Soma dos Fatores da árvore: -5
 RB Nível de balanceamento: 0.42

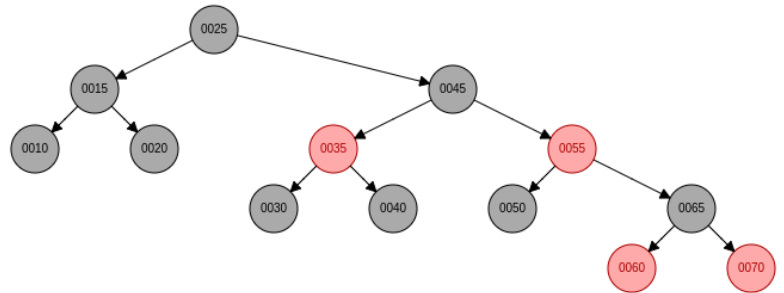


TESTE 09

AVL:



Red-Black tree:



Análise: Inserindo o “70”, na AVL fazemos uma rotação à esquerda.

```

60      65
 65    60 70
 70
  
```

Na Red-Black tree, é realizada a mesma operação, contendo alteração apenas na coloração.

```

60      65
 65    60 70
 70
  
```

AVL fator de balanceamento da raiz: 0

AVL altura: 3

AVL rotações: 9

AVL N° de Nós: 13

AVL Medio de Rotações: 0.69

AVL Soma dos Fatores da árvore: -1

AVL Nível de balanceamento: 0.8

RB fator de balanceamento da raiz: 2

RB altura: 4

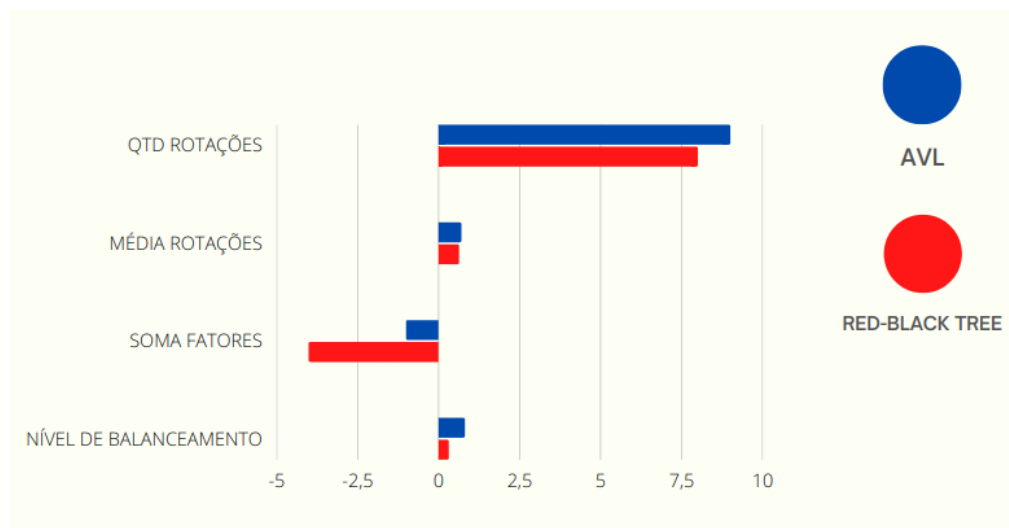
RB rotações: 8

RB N° de Nós: 13

RB Medio de Rotações: 0.62

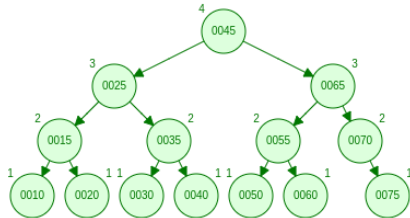
RB Soma dos Fatores da árvore: 4

RB Nível de balanceamento: 0.31



TESTE 10

AVL:

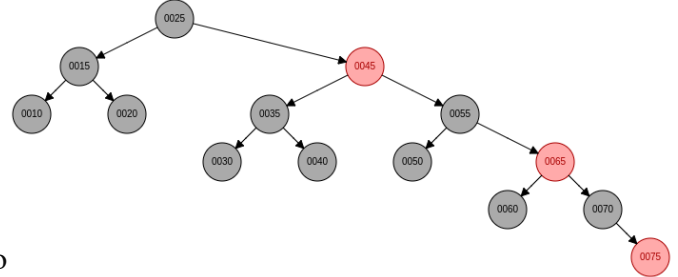


Análise: Ao inserir o “75”, acontece uma rotação no “65”, que irá apontar para o “55” e a partir de agora será apontado pela raiz (que é o “45”). Na Red-Black tree, há uma cadeia de alteração de cores.

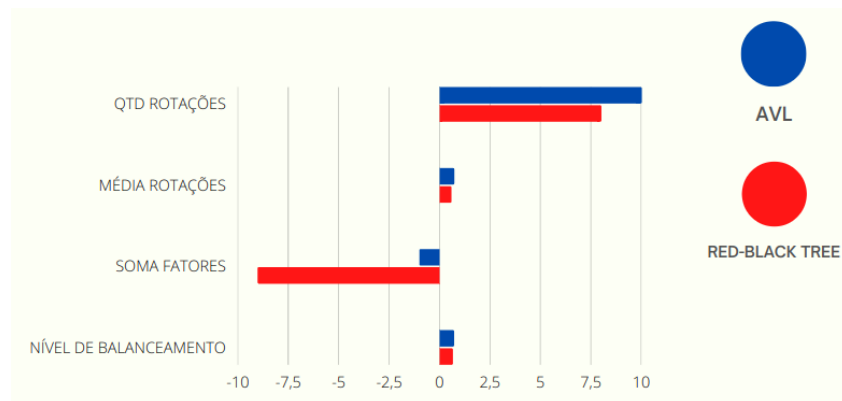
55 55
50 65 50 65
60 70 60 70
 75 75

AVL fator de balanceamento da raiz: 0
AVL altura: 3
AVL rotações: 10
AVL N° de Nós: 14
AVL Medio de Rotações: 0,71
AVL Soma dos Fatores da árvore: -1
AVL Nível de balanceamento: 0.07

Red-Black tree:



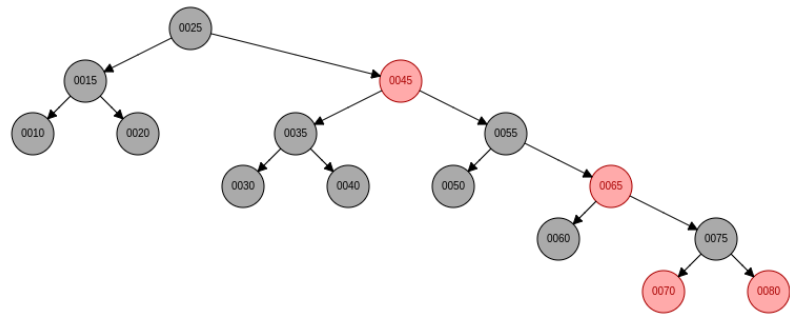
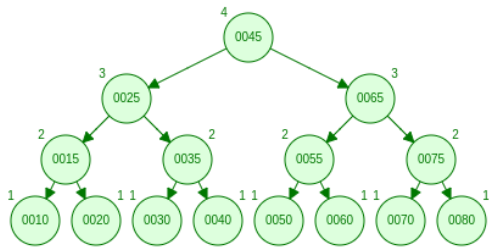
RB fator de balanceamento da raiz: 3
RB altura: 5
RB rotações: 8
RB N° de Nós: 14
RB Medio de Rotações: 0.57
RB Soma dos Fatores da árvore: -9
RB Nível de balanceamento: 0.64



TESTE 11

AVL:

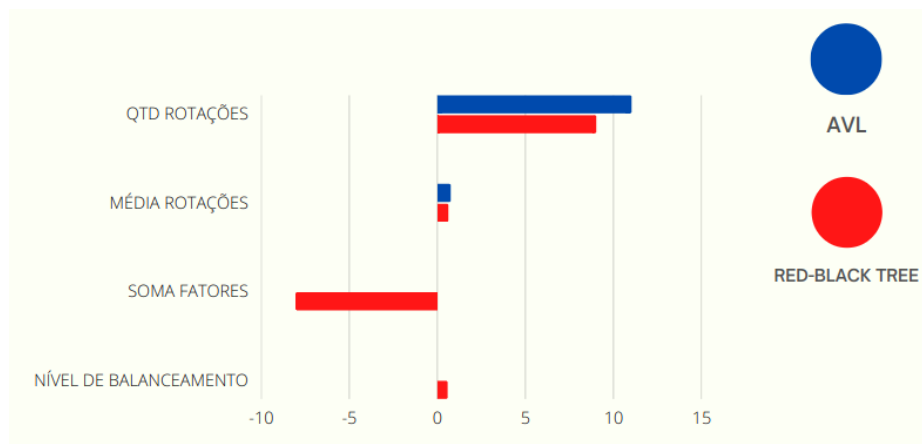
Red-Black tree:



Análise: inserindo o “80”, então é feito uma rotação à esquerda. Já na Red-black tree, também é feita a mesma alteração visando o balanceamento, ocorrendo mudança apenas na coloração.

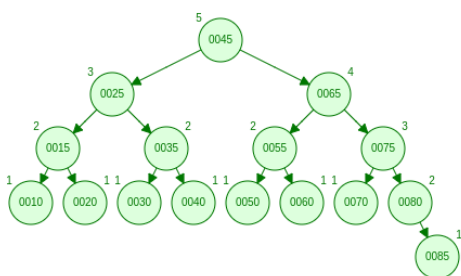
AVL fator de balanceamento da raiz: 0
 AVL altura: 3
 AVL rotações: 11
 AVL N° de Nós: 15
 AVL Medio de Rotações: 0,73
 AVL Soma dos Fatores da árvore: 0
 AVL Nível de balanceamento: 0

RB fator de balanceamento da raiz: -3
 RB altura: 5
 RB rotações: 9
 RB N° de Nós: 15
 RB Medio de Rotações: 0.60
 RB Soma dos Fatores da árvore: -8
 RB Nível de balanceamento: 0.53

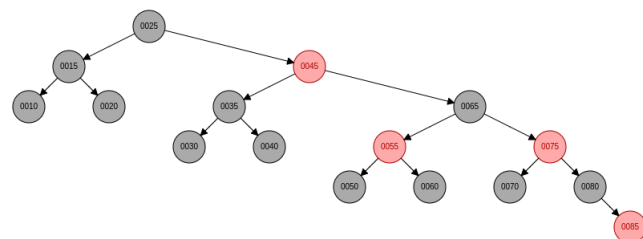


TESTE 12

AVL:



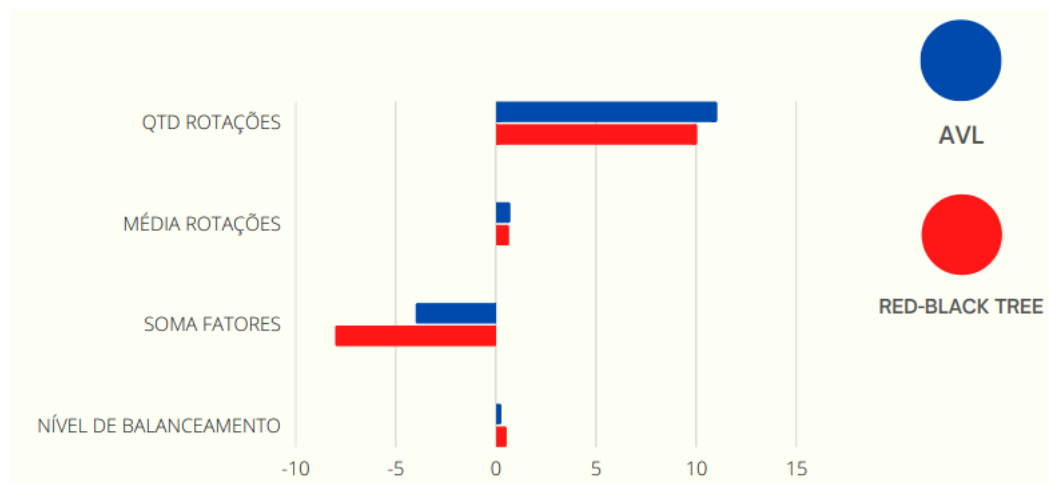
Red-Black tree:



Análise: Neste teste, temos a inserção do “85”. Na AVL, não é necessário nenhuma rotação. Na Red-Black tree, é necessário uma rotação para esquerda. O “45” irá apontar para o “65”, que agora irá apontar para o “55” e o novo filho à direita dele será o “60”.

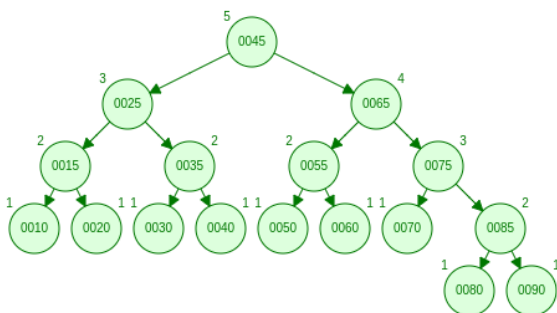
AVL fator de balanceamento da raiz: 1
 AVL altura: 4
 AVL rotações: 11
 AVL N° de Nós: 16
 AVL Medio de Rotações: 0,68
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -4
 AVL Nivel de balanceamento: 0.25

RB fator de balanceamento da raiz: 3
 RB altura: 5
 RB rotações: 10
 RB N° de Nós: 16
 RB Medio de Rotações: 0.62
 RB Soma dos Fatores da árvore: -8
 RB Nivel de balanceamento: 0.50

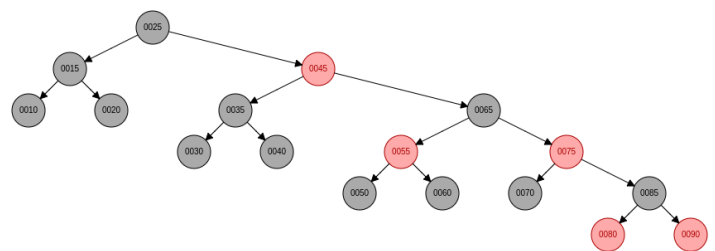


TESTE 13

AVL:



Red-Black tree:



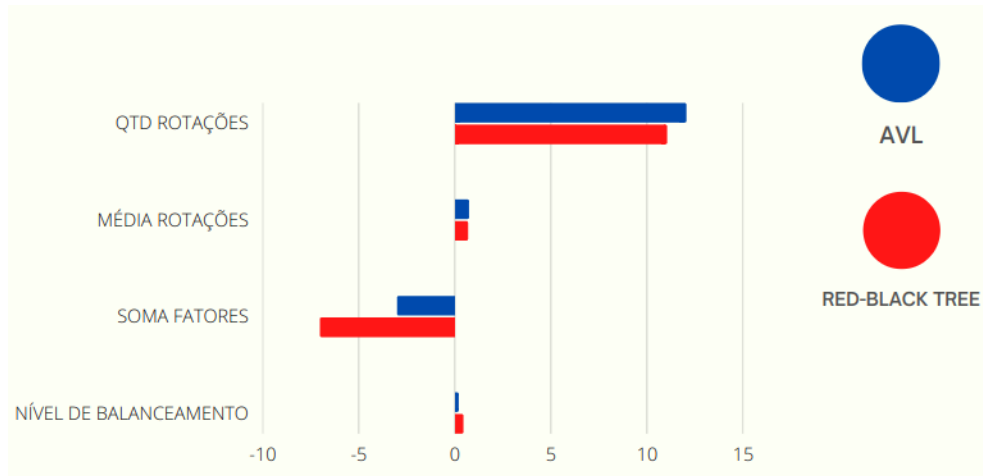
Análise: No experimento de número 8, ocorrerá a inserção do “90”. Na AVL teremos uma rotação para esquerda. Interessante que na Red-black tree temos a mesma rotação, a única diferença é que nele ocorre a alteração nas cores. Apesar de ambas serem autobalanceadas, as duas árvores tomaram rumos totalmente diferentes.

AVL fator de balanceamento da raiz: 1
 AVL altura: 4
 AVL rotações: 12
 AVL N° de Nós: 17
 AVL Medio de Rotações: 0,70

Red-Black fator de balanceamento da raiz: 3
 RB altura: 5
 RB rotações: 11
 RB N° de Nós: 17
 RB Medio de Rotações: 0.65

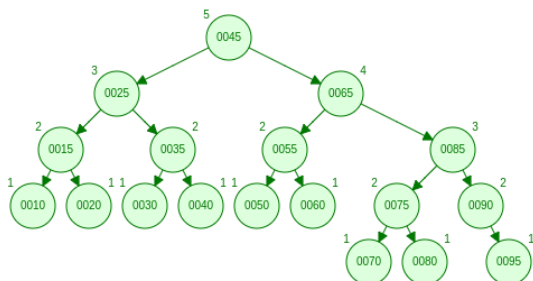
AVL Soma dos Fatores da árvore: -3
 AVL Nível de balanceamento: 0.18

RB Soma dos Fatores da árvore: 7
 RB Nível de balanceamento: 0.41

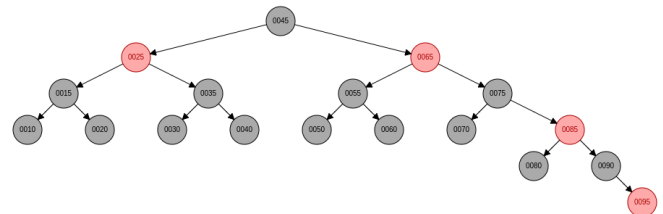


TESTE 14

AVL:



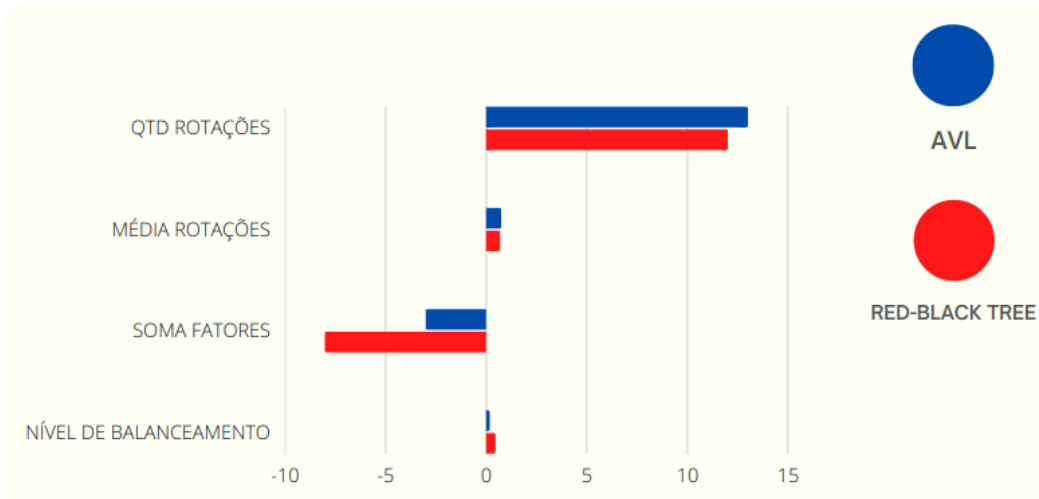
Red-Black tree:



Análise: No último teste, teremos a inserção do “95”. O “65” aponta para o “85”, que por sinal irá apontar para o “75”, e o seu filho à direita será o “80”. Na Red-Black tree, ocorre apenas alteração na cor, mas não no posicionamento.

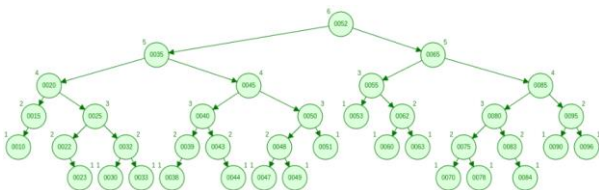
AVL fator de balanceamento da raiz: 1
 AVL altura: 4
 AVL rotações: 13
 AVL N° de Nós: 18
 AVL Medio de Rotações: 0,72
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -3
 AVL Nível de balanceamento: 0.17

RB fator de balanceamento da raiz: 2
 RB altura: 5
 RB rotações: 12
 RB N° de Nós: 18
 RB Medio de Rotações: 0.67
 RB Soma dos Fatores da árvore: -8
 RB Nível de balanceamento: 0.44

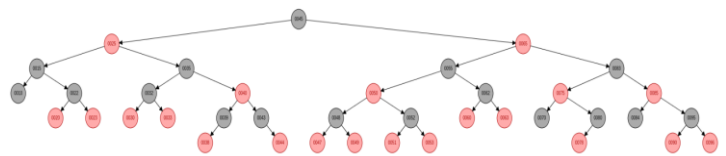


TESTE 15

AVL:



Red-Black tree:

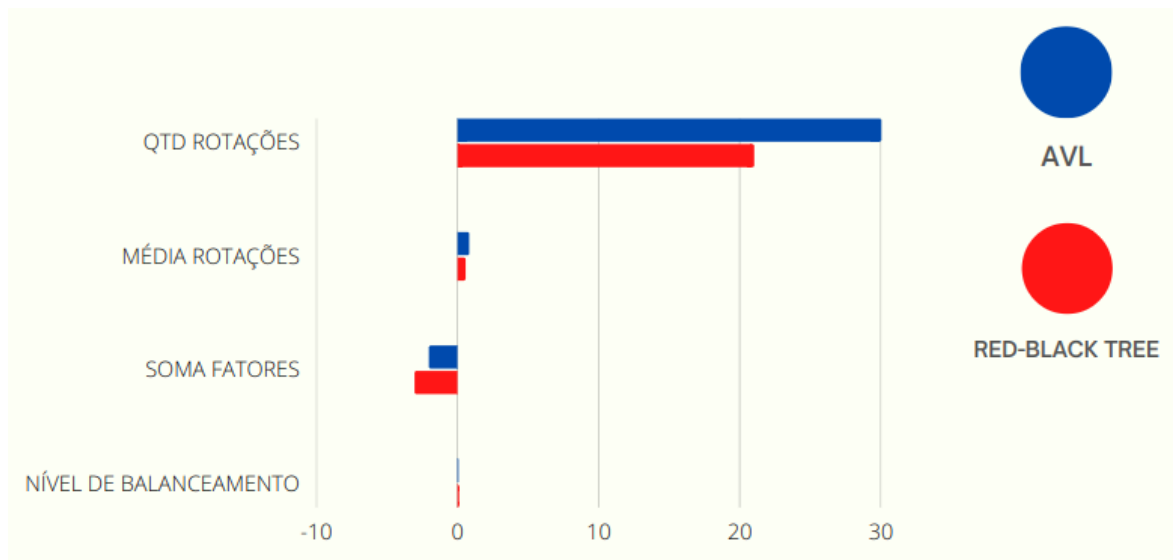


Análise: Neste teste, fora aplicada “20” Nós a mais que o teste “9”. Ao longo deste teste, percebemos certas diferenças. O fator de balanceamento de ambas as árvores é o mesmo, tal como a altura, o detalhe mais interessante foi a quantidade de rotações, visto que a AVL realizou 9 rotações a mais que a RB.

10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 52, 49, 51, 53, 48, 47, 62, 63, 96, 83, 84, 78, 43, 39, 44, 38, 22, 23, 32, 33.

AVL fator de balanceamento da raiz: 0
 AVL altura: 5
 AVL rotações: 30
 AVL N° de Nós: 38
 AVL Medio de Rotações: 0,79
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -2
 AVL Nível de balanceamento: 0.05

RB fator de balanceamento da raiz: 0
 RB altura: 5
 RB rotações: 21
 RB N° de Nós: 38
 RB Medio de Rotações: 0.55
 RB Soma dos Fatores da árvore: -3
 RB Nível de balanceamento: 0.08



6.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 60 NÓS.

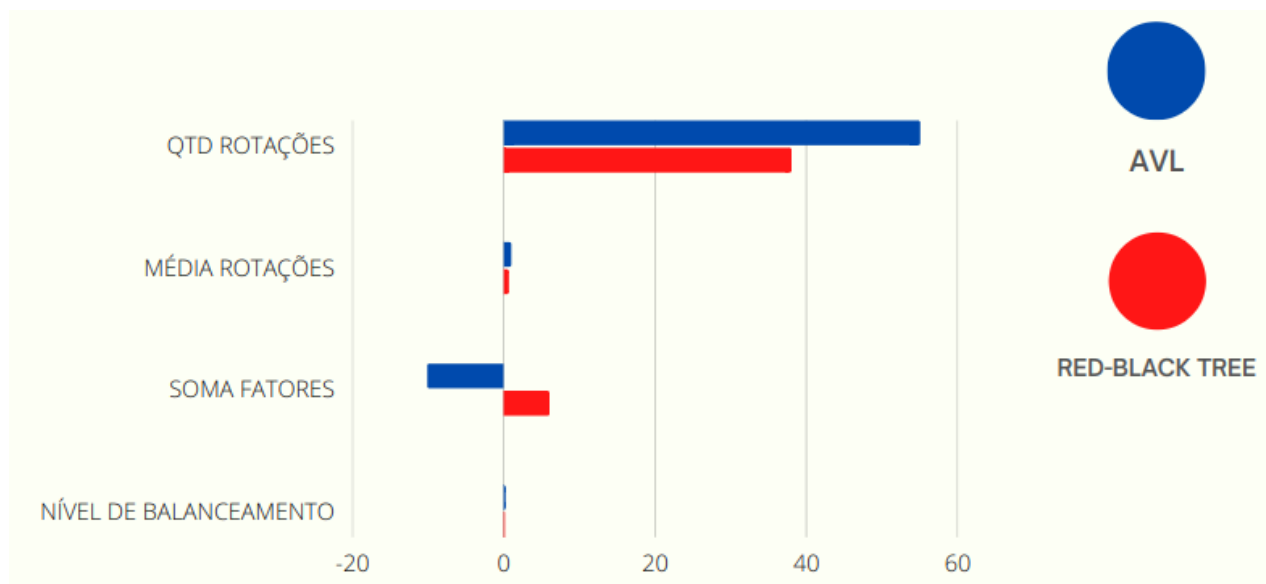
Teste 16

Valores utilizados: 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 52; 49; 51; 53; 48; 47; 62; 63; 96; 83; 84; 78; 43; 39; 44; 38; 22; 23; 32; 33; 14; 13; 12; 11; 93; 92; 99; 98; 100; 121; 131; 161; 558; 679; 854; 841; 853; 896; 844; ;744; 766; 322.

Análise: Não é notável mudança com relação a altura das árvores, entretanto, a quantidade de rotações na AVL passou a ser 17 vezes maior que na RB. Com essas informações, começamos a ter indícios de que a aplicação de NÓS na RB é mais rápida.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1
 AVL altura: 6
 AVL rotações: 55
 AVL N° de Nós: 60
 AVL Medio de Rotações: 0.92
 AVL Soma dos Fatores da árvore: -10
 AVL Nivel de balanceamento: 0.17

RB fator de balanceamento da raiz: 1
 RB altura: 6
 RB rotações: 38
 RB N° de Nós: 60
 RB Medio de Rotações: 0.63
 RB Soma dos Fatores da árvore: 6
 RB Nivel de balanceamento: 0.10



7.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 100 NÓS.

Teste 17

Valores utilizados: 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 52; 49; 51; 53; 48; 47; 62; 63; 96; 83; 84; 78; 43; 39; 44; 38; 22; 23; 32; 33; 14; 13; 12; 11; 93; 92; 99; 98; 100; 121; 131; 161; 558; 679; 854; 841; 853; 896; 844; ;744; 766; 322; 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999; 987; 965; 954; 932; 921; 978; 945; 412; 413; 451; 452; 453; 469; 468; 467; 489; 498; 491; 492; 493; 495; 479; 473; 475; 484; 487;415; 416; 417; 418; 419.

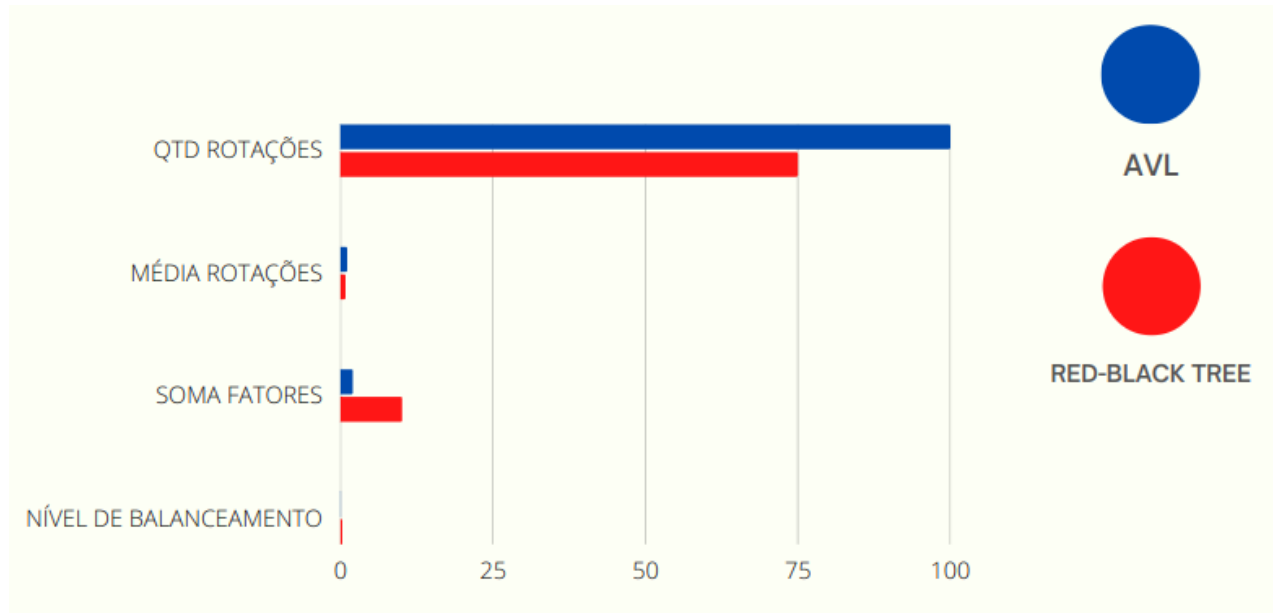
Análise: Supreeendentemente, a altura continua a mesma, contrário a quantidade de rotações que diferem em 25 rotações que AVL tem a mais que a RB. O nível de balanceamento da AVL também é bem mais próximo do valor zero do que a RB.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1
AVL altura: 7

RB fator de balanceamento da raiz: 1
RB altura: 7

AVL rotações: 100
AVL N° de Nós: 100
AVL Medio de Rotações: 1.0
AVL Soma dos Fatores da árvore: 2
AVL Nível de balanceamento: 0.02

RB rotações: 75
RB N° de Nós: 100
RB Medio de Rotações: 0.75
RB Soma dos Fatores da árvore: 10
RB Nível de balanceamento: 0.10



8.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR DE 200 NÓS.

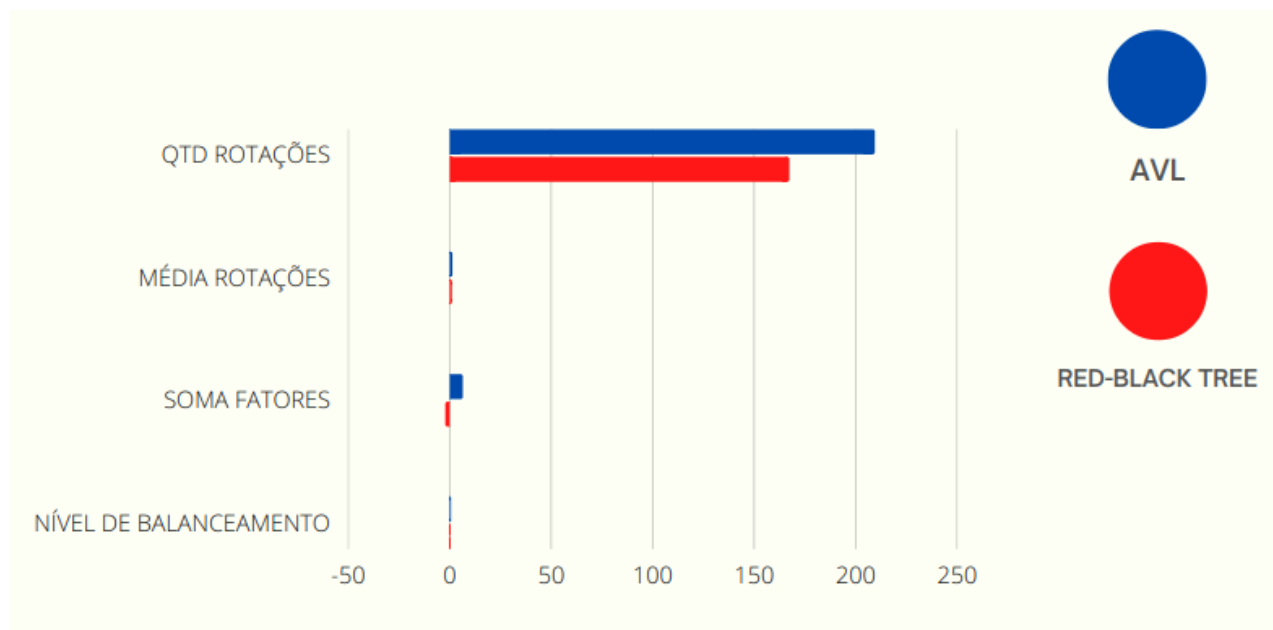
Valores Utilizados: 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 52; 49; 51; 53; 48; 47; 62; 63; 96; 83; 84; 78; 43; 39; 44; 38; 22; 23; 32; 33; 14; 13; 12; 11; 93; 92; 99; 98; 100; 121; 131; 161; 558; 679; 854; 841; 853; 896; 844; ;744; 766; 322; 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999; 987; 965; 954; 932; 921; 978; 945; 412; 413; 451; 452; 453; 469; 468; 467; 489; 498; 491; 492; 493; 495; 479; 473; 475; 484; 487;415; 416; 417; 418; 419; 510; 511; 512; 513; 514; 577; 578; 579; 569; 549; 531; 532; 534; 536; 537; 538; 539; 541; 542; 543; 546; 549; 548; 611; 610; 601; 602; 603; 604; 609; 608; 607; 606; 605; 612; 613; 614; 615; 619; 618; 640; 641; 590; 591; 592; 593; 594; 595; 596; 597; 598; 599; 701; 702; 703; 704; 705; 706; 707; 708; 709; 710; 730; 731; 732; 733; 734; 735; 736; 737; 738; 739; 801; 802; 803; 804; 805; 806; 807; 808; 809; 810; 891; 892; 893; 894; 895; 896; 897; 898; 201; 202; 203; 204; 205; 206; 207; 208; 213; 288; 101; 102.

Teste 18

Análise: A altura continua não diferindo, dando a entender que apesar de ser um dado importante, a diferença de ambos não é tão grande assim. A quantidade de rotações só segue aumentando, pois AVL realizou 42 rotações a mais que a RB. O nível de balanceamento de ambas são bem próximos. Com esses dados, fica fácil concluir que até este momento o desempenho da REDBLACK TREE é bem melhor do que a AVL.

AVL fator de balanceamento da raiz: -1
AVL altura: 8
AVL rotações: 209
AVL N° de Nós: 200
AVL Medio de Rotações: 1.04
AVL Soma dos Fatores da árvore: 6
AVL Nível de balanceamento: 0.03

RB fator de balanceamento da raiz: 1
RB altura: 8
RB rotações: 167
RB N° de Nós: 200
RB Medio de Rotações: 0.83
RB Soma dos Fatores da árvore: -2
RB Nível de balanceamento: 0.01



9.0 ANALISANDO AS DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO AO APLICAR AO VALORES DADOS PELO PROFESSOR PROFESSOR

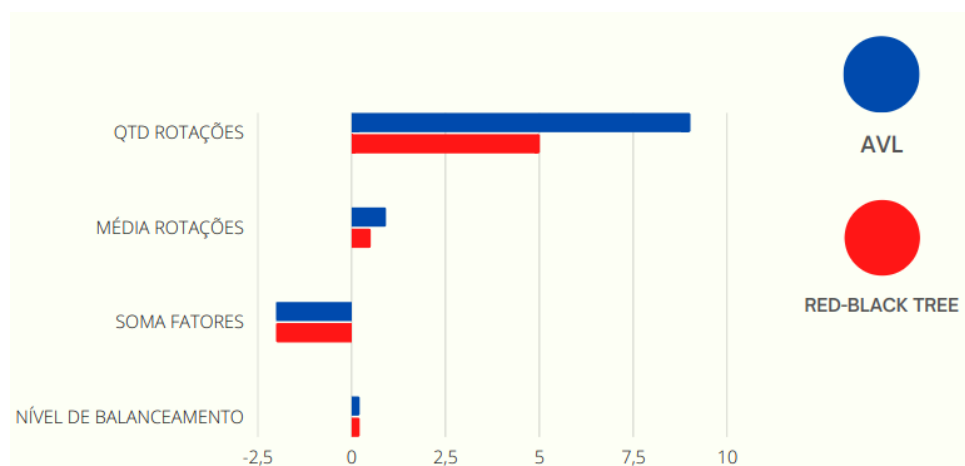
Teste 19

Valores Utilizados: 5898 ; 90656 ; 21830; 17755; 30931; 40781; 53356; 74159; 78859; 36156.

Análise: Apesar do nível de balanceamento possuir o mesmo valor em ambas as árvores. Com estes valores, ficou ainda mais fácil visualizar que o desempenho da RB foi melhor, com relação a quantidade de rotações, já que a RB realizou 5 rotações a menos que a AVL.

altura da árvore: 3
fator de balanceamento da raiz: 0
quantidade de rotações: 9
quantidade de Nó da árvore: 10
Medio de Rotações: 0.90
Soma dos Fatores da árvore: -2
Nível de balanceamento: 0.20

altura da árvore: 3
fator de balanceamento da raiz: 0
quantidade de rotações: 5
quantidade de Nó da árvore: 10
Medio de Rotações: 0.50
Soma dos Fatores da árvore: -2
Nível de balanceamento: 0.20



10.0 Média e Desvio Padrão.

O desvio padrão é uma medida de dispersão que pode ser calculada para um conjunto de observações de uma variável. Quando calculamos o desvio padrão, obtemos um número que indica a variação das observações em relação à média delas. Quanto menor o valor do desvio padrão, mais homogêneos são os dados.

1º passo: calcular a média dos dados;

2º passo: subtrair a média de cada observação;

3º passo: elevar cada um dos resultados das subtrações ao quadrado;

4º passo: somar todos os valores encontrados no passo 3;

5º passo: dividir o resultado da soma pelo total de observações e extrair a raiz quadrada.

$$D_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_A)^2}{n}}$$

Onde:

DP = Desvio padrão;

\sum = Soma dos elementos;

x_i = Valor do elemento individual;

x_m = Média aritmética da amostragem;

n = Quantidade de elementos da amostragem.

O desvio padrão é uma ferramenta estatística que pode ser usada para entender o comportamento de uma base de dados ou uma base de informações. O seu objetivo é indicar o quão próximos são os resultados obtidos entre esses dados. Em outras palavras, esse indicador mede a uniformidade dos elementos de uma amostragem. Quanto mais próximo de zero, ele representa que os dados são mais uniformes e, portanto, a amostragem apresenta valores próximos entre si. Por outro lado, conforme aumenta o seu resultado, ele tende a oferecer maior diferença entre os seus dados.

CALCULANDO A MÉDIA E O DESVIO PADRÃO DA MÉDIA DE ROTAÇÕES:

1° Teste: 0
 2° Teste: 0,33
 3° Teste: 0,25
 4° Teste: 0,4
 5° Teste: 0,5
 6° Teste: 0,6
 7° Teste: 0,63
 8° Teste: 0,66
 9° Teste: 0,69
 10° Teste: 0,71
 11° Teste: 0,73
 12° Teste: 0,68
 13° Teste: 0,70
 14° Teste: 0,72
 15° Teste: 0,79
 16° Teste: 0,92
 17° Teste: 1,0
 18° Teste: 1,04
 19° Teste: 0,90

1° Teste: 0
 2° Teste: 0,33
 3° Teste: 0,25
 4° Teste: 0,4
 5° Teste: 0,33
 6° Teste: 0,50
 7° Teste: 0,55
 8° Teste: 0,58
 9° Teste: 0,62
 10° Teste: 0,57
 11° Teste: 0,60
 12° Teste: 0,62
 13° Teste: 0,65
 14° Teste: 0,67
 15° Teste: 0,79
 16° Teste: 0,92
 17° Teste: 1,0
 18° Teste: 1,04
 19° Teste: 0,90

AVL MÉDIA = $((0 + 0,33 + 0,25 + 0,4 + 0,5 + 0,6 + 0,63 + 0,66 + 0,69 + 0,71 + 0,73 + 0,68 + 0,70 + 0,72 + 0,79 + 0,92 + 1,0 + 1,04 + 0,90) / 19)$

AVL MÉDIA = $(12,25 / 19)$

AVL MÉDIA = 0,6447368421052632

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE $(((0-19)^2 + (0,33-19)^2 + (0,25-19)^2 + (0,4-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,6-19)^2 + (0,63-19)^2 + (0,66-19)^2 + (0,69-19)^2 + (0,71-19)^2 + (0,73-19)^2 + (0,68-19)^2 + (0,70-19)^2 + (0,72-19)^2 + (0,79-19)^2 + (0,92-19)^2 + (1,0-19)^2 + (1,04-19)^2 + (0,90-19)^2) / 19)$

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE $(6402,6199000000001 / 19)$

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE 336,9799947368421

AVL DESVIO PADRÃO = 18,35

RED-BLACK MÉDIA = $((0 + 0,33 + 0,25 + 0,4 + 0,33 + 0,5 + 0,55 + 0,58 + 0,62 + 0,57 + 0,60 + 0,62 + 0,65 + 0,67 + 0,55 + 0,63 + 0,75 + 0,83 + 0,50) / 19)$

RED-BLACK MÉDIA = $(9,93 / 19)$

$$\text{RED-BLACK MÉDIA} = 0,5226315789473684$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } ((0-19)^2 + (0,33-19)^2 + (0,25-19)^2 + (0,4-19)^2 + (0,33-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,55-19)^2 + (0,58-19)^2 + (0,62-19)^2 + (0,57-19)^2 + (0,60-19)^2 + (0,62-19)^2 + (0,65-19)^2 + (0,67-19)^2 + (0,55-19)^2 + (0,63-19)^2 + (0,75-19)^2 + (0,83-19)^2 + (0,50-19)^2) / 19)$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } (6487,51510000000005 / 19)$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } 341,4481631578948$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = 18,47$$

CALCULANDO A MÉDIA E O DESVIO PADRÃO DO NÍVEL DE BALANCEAMENTO:

AVL

1° Teste: 0,5
 2° Teste: 0
 3° Teste: 0,5
 4° Teste: 0,2
 5° Teste: 0,16
 6° Teste: 0,2
 7° Teste: 0,9
 8° Teste: 0,17
 9° Teste: 0,8
 10° Teste: 0,07
 11° Teste: 0
 12° Teste: 0,25
 13° Teste: 0,18
 14° Teste: 0,17
 15° Teste: 0,05
 16° Teste: 0,17
 17° Teste: 0,02
 18° Teste: 0,03
 19° Teste: 0,20

RED-BLACK

1° Teste: 0,5
 2° Teste: 0
 3° Teste: 0,5
 4° Teste: 0,2
 5° Teste: 0,5
 6° Teste: 0,6
 7° Teste: 0,45
 8° Teste: 0,42
 9° Teste: 0,31
 10° Teste: 0,64
 11° Teste: 0,53
 12° Teste: 0,5
 13° Teste: 0,41
 14° Teste: 0,44
 15° Teste: 0,08
 16° Teste: 0,10
 17° Teste: 0,10
 18° Teste: 0,01
 19° Teste: 0,20

$$\text{AVL MÉDIA} = ((0,5 + 0 + 0,5 + 0,2 + 0,16 + 0,2 + 0,9 + 0,17 + 0,8 + 0,07 + 0 + 0,25 + 0,18 + 0,17 + 0,05 + 0,17 + 0,02 + 0,03 + 0,20) / 19)$$

$$\text{AVL MÉDIA} = (4,57 / 19)$$

$$\text{AVL MÉDIA} = 0,2405263157894$$

$$\text{AVL DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ de } ((0,5-19)^2 + (0-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,2-19)^2 + (0,16-19)^2 + (0,2-19)^2 + (0,9-19)^2 + (0,17-19)^2 + (0,8-19)^2 + (0,07-19)^2 + (0-19)^2 + (0,25-19)^2 + (0,18-19)^2 + (0,17-19)^2 + (0,05-19)^2 + (0,17-19)^2 + (0,02-19)^2 + (0,03-19)^2 + (0,20-19)^2) / 19)$$

$$\text{AVL DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ de } ((-18,5)^2 + (-19)^2 + (-18,5)^2 + (-18,8)^2 + (-18,8)^2 + (-18,8)^2 + (-18,1)^2 + (-18,83)^2 + (-18,2)^2 + (-18,93)^2 + (-19)^2 + (-18,75)^2 + (-18,92)^2 + (-18,83)^2 + (-18,95)^2 + (-18,83)^2 + (-18,98)^2 + (-18,97)^2 + (-18,8)^2) / 19)$$

$$\text{AVL DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ de } ((342,25 + 361 + 342,25 + 353,44 + 353,44 + 353,44 + 327,61 + 354,5689 + 331,24 + 358,3449 + 361 + 351,5625 + 357,9664 + 354,5689 + 359,1025 + 354,5689 + 360,2404 + 359,8609 + 353,44) / 19)$$

$$\text{AVL DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ de } (352,0997)$$

$$\text{AVL DESVIO PADRÃO} = 18,76$$

$$\text{RED-BLACK MÉDIA} = ((0,5 + 0 + 0,5 + 0,2 + 0,5 + 0,6 + 0,45 + 0,42 + 0,31 + 0,64 + 0,53 + 0,5 + 0,41 + 0,44 + 0,08 + 0,10 + 0,10 + 0,01 + 0,20) / 19)$$

$$\text{RED-BLACK MÉDIA} = (6,49 / 19)$$

$$\text{RED-BLACK MÉDIA} = 0,3415789473684$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } ((0,5-19)^2 + (0-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,2-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,6-19)^2 + (0,45-19)^2 + (0,42-19)^2 + (0,31-19)^2 + (0,64-19)^2 + (0,53-19)^2 + (0,5-19)^2 + (0,41-19)^2 + (0,44-19)^2 + (0,08-19)^2 + (0,10-19)^2 + (0,10-19)^2 + (0,01-19)^2 + (0,20-19)^2) / 19)$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } ((-18,50)^2 + (-19)^2 + (-18,50)^2 + (-18,80)^2 + (-18,50)^2 + (-18,40)^2 + (-18,55)^2 + (-18,58)^2 + (-18,69)^2 + (-18,36)^2 + (-18,47)^2 + (-18,50)^2 + (-18,59)^2 + (-18,56)^2 + (-18,92)^2 + (-18,90)^2 + (-18,90)^2 + (-18,99)^2 + (-18,80)^2) / 19)$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } ((342,25 + 361 + 342,25 + 353,44 + 342,25 + 338,56 + 344,1025 + 345,2164 + 349,3161 + 337,0896 + 341,1409 + 342,25 + 345,5881 + 344,4736 + 357,9664 + 357,21 + 357,21 + 360,6201 + 353,44) / 19)$$

$$\text{RED-BLACK DESVIO PADRÃO} = \text{RAIZ DE } (348,17756315789)$$

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = 18,65

CALCULANDO A MÉDIA E O DESVIO PADRÃO DA ALTURA:

AVL

1° Teste: 1
2° Teste: 1
3° Teste: 2
4° Teste: 2
5° Teste: 2
6° Teste: 3
7° Teste: 3
8° Teste: 3
9° Teste: 3
10° Teste: 3
11° Teste: 3
12° Teste: 4
13° Teste: 4
14° Teste: 4
15° Teste: 5
16° Teste: 6
17° Teste: 7
18° Teste: 8
19° Teste: 3

RED-BLACK

1° Teste: 1
2° Teste: 1
3° Teste: 2
4° Teste: 2
5° Teste: 3
6° Teste: 4
7° Teste: 4
8° Teste: 4
9° Teste: 4
10° Teste: 5
11° Teste: 5
12° Teste: 5
13° Teste: 5
14° Teste: 5
15° Teste: 5
16° Teste: 6
17° Teste: 7
18° Teste: 8
19° Teste: 3

AVL MÉDIA = ((1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 3) / 19)

AVL MÉDIA = (67 / 19)

AVL MÉDIA = 3,5263

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ((1-19)² + (1-19)² + (2-19)² + (2-19)² + (2-19)² + (3-19)² + (3-19)² + (3-19)² + (3-19)² + (3-19)² + (3-19)² + (4-19)² + (4-19)² + (4-19)² + (5-19)² + (6-19)² + (7-19)² + (8-19)² + (3-19)²) / 19)

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ($(-18)^2 + (-18)^2 + (-17)^2 + (-17)^2 + (-17)^2 + (-16)^2 + (-16)^2 + (-16)^2 + (-16)^2 + (-16)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-14)^2 + (-13)^2 + (-12)^2 + (-11)^2 + (-16)^2$) / 19)

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ($324 + 324 + 289 + 289 + 289 + 256 + 256 + 256 + 256 + 256 + 225 + 225 + 225 + 196 + 169 + 144 + 121 + 256$) / 19)

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE (4612 / 19)

AVL DESVIO PADRÃO = RAIZ DE (242,73684210526)

AVL DESVIO PADRÃO = 15,58

RED-BLACK MÉDIA = ($(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 3)$) / 19)

RED-BLACK MÉDIA = (79 / 19)

RED-BLACK MÉDIA = 4,1578

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ($(1-19)^2 + (1-19)^2 + (2-19)^2 + (2-19)^2 + (3-19)^2 + (4-19)^2 + (4-19)^2 + (4-19)^2 + (4-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (5-19)^2 + (6-19)^2 + (7-19)^2 + (8-19)^2 + (3-19)^2$) / 19)

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ($(-18)^2 + (-18)^2 + (-17)^2 + (-17)^2 + (-16)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-14)^2 + (-13)^2 + (-12)^2 + (-11)^2 + (-16)^2$) / 19)

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = RAIZ DE ($324 + 324 + 289 + 289 + 256 + 225 + 225 + 225 + 255 + 196 + 196 + 196 + 196 + 196 + 196 + 196 + 169 + 144 + 121 + 256$ / 19)

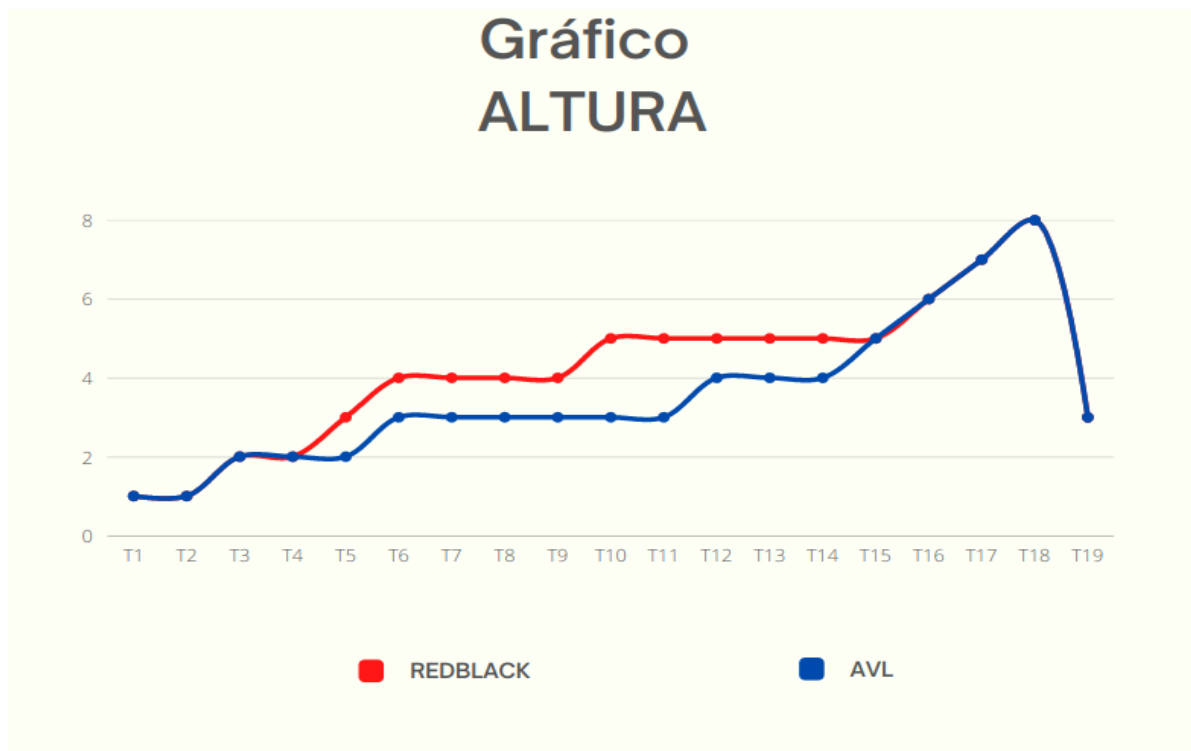
RED-BLACK DESVIO PADRÃO = RAIZ (4248 / 19)

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = RAIZ (223,57894736842)

RED-BLACK DESVIO PADRÃO = 14,95

- AS DIFERENÇAS DE ALTURA DA AVL E DA REDBLACK SÃO SIGNIFICATIVAS ?

Com relação as diferenças de altura, a média da AVL é de 3,52 enquanto a REDBLACK é de 4,15. Já o desvio padrão é de 15,58 para AVL e 14,95 para REDBLACK. Com base nos valores, podemos chegar em uma resposta de que não há uma diferença muito expressiva com relação ao valores encontrados. Entretanto, podemos concluir que a REDBLACK tende a ter uma altura maior do que a AVL, isso se dá principalmente pelo fato de AVL se importar principalmente com o seu balanceamento, enquanto a REDBLACK tende a dividir o seu foco não apenas no balanceamento, como também com a coloração dos NÓS.



EM TERMOS DE DESEMPENHO NA BUSCA, QUAL MÉTODO DE BALANCEAMENTO É MAIS INDICADO? A PARTIR DE QUANTOS NÓS?

Enquanto o desvio padrão da AVL resultou em 18,73 e a sua média foi de 0,24 e a REDBLACK resultou em 18,65 e teve a média de 0,34. Como quanto mais próximo do zero, mais uniformes serão os valores entre si, deste modo, o desvio padrão para Árvore REDBLACK é baixo, enquanto na AVL há um amplo distanciamento entre os seus dados. Desta forma, neste modo, há uma menor uniformidade.

Com 6 NÓS: A AVL tem um melhor desvio padrão.

Com 18 NÓS: A AVL continua tendo um melhor desvio padrão.

Com 38 NÓS: Apesar da AVL ainda for melhor, os valores estão próximos.

Com 60 NÓS: Com essa quantidade, a REDBLACK começa a ter um melhor desvio padrão.

COM 200 NÓS: Os valores estão muito próximos, mas a REDBLACK continua na frente da AVL.

Ao final, podemos concluir que a REDBLACK, por ter um menor desvio padrão, possui pouca variação em torno da média, ou seja, a média fica mais representativa.

Quando tratamos da média de rotações, chegamos na conclusão de que o Desvio Padrão da AVL é menor, possuindo uma variação em torno da média menor do que a REDBLACK

GRÁFICO DO NÍVEL DE BALANCEAMENTO

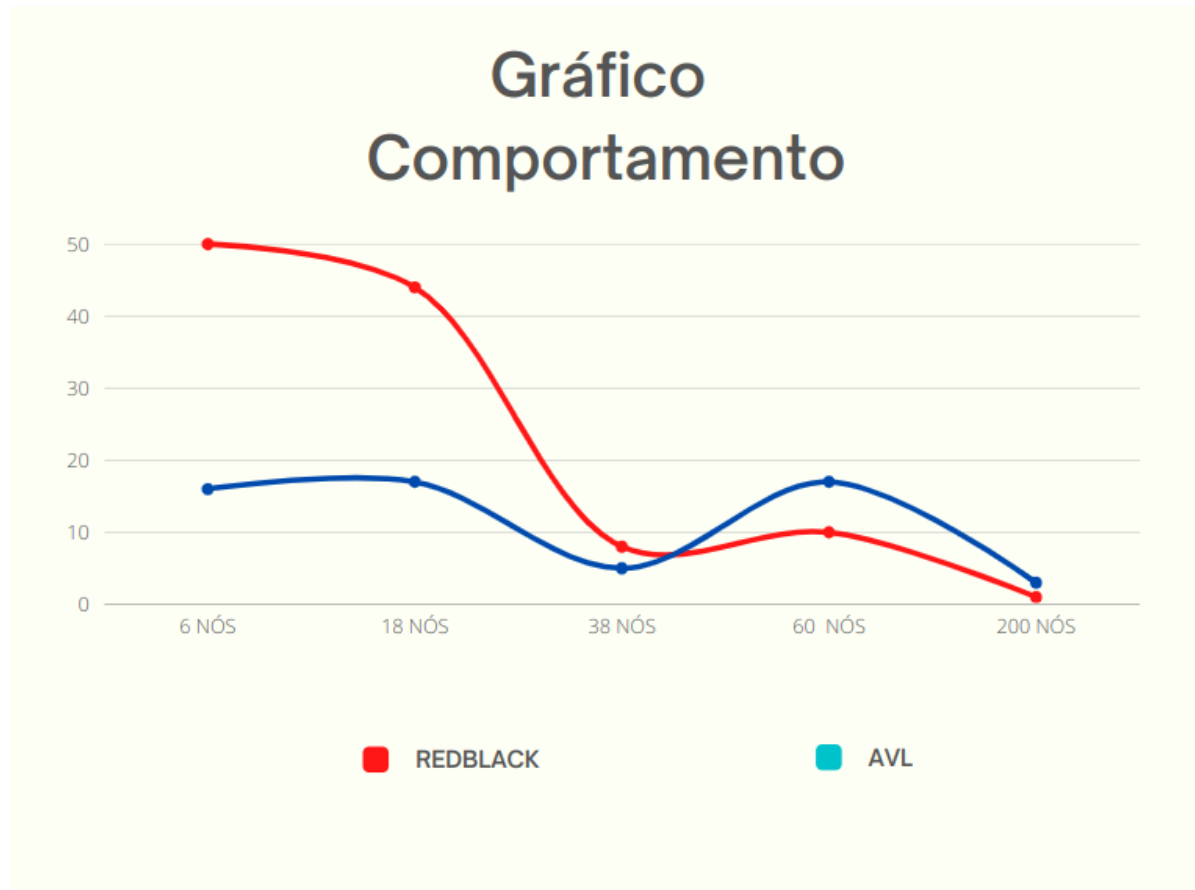
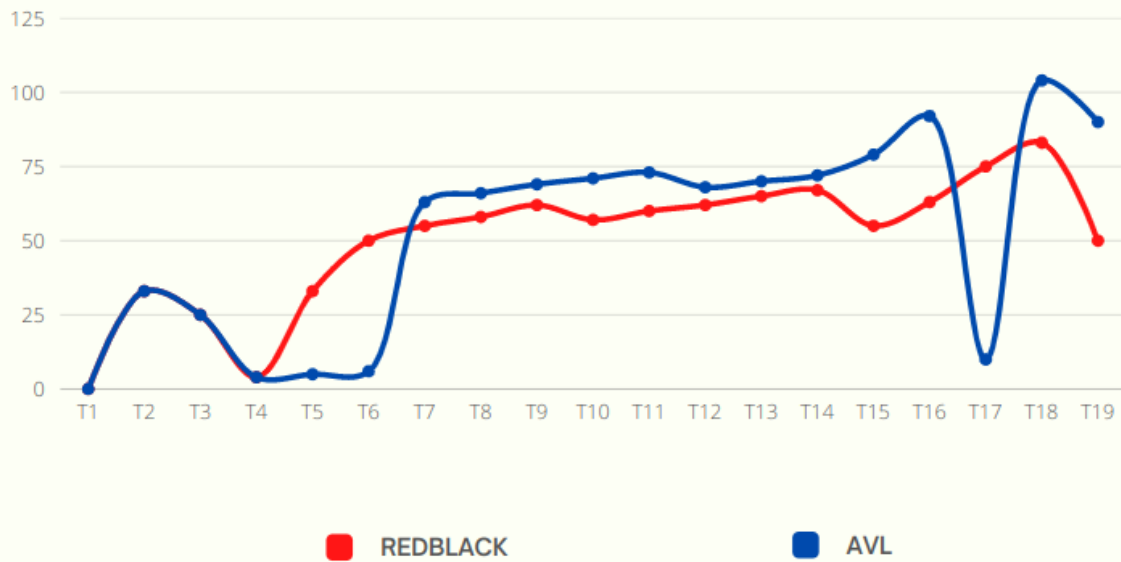


GRÁFICO DA MÉDIA DE ROTAÇÕES

Gráfico Comportamento Média de Rotações



11.0 CONCLUSÃO.

Durante todo o relatório é analisado a mudança no comportamento das árvores AVL e a REDBLACK com relação a aplicação de diferentes quantidades de NÓS. Podemos concluir que a REDBLACK é mais rápida com relação a inserção de NÓS, isso se pelo fato da AVL ter um foco maior no balanceamento, e para que isso aconteça ela realiza um número maior de rotações, além disso, a REDBLACK conseguiu se aproximar da AVL com relação ao Nível de balanceamento durante todos os testes.

12.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Red/Black tree visualization: <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html>

Red-Black Trees | Insertion: <https://www.codesdope.com/course/data-structures-red-black-trees-insertion/>

AVL Trees vs. Red-Black Trees?:

<https://discuss.fogcreek.com/joelonsoftware/default.asp?ixPost=22948>

ÁRVORE AVL: <https://youtu.be/3zmjQIJhBLM>

O que é uma árvore AVL – Árvore binária de busca balanceada:

<https://youtu.be/5aBQZdvoM6w>

Como implementar uma Árvore AVL – Árvore balanceada: <https://youtu.be/2Vn4XaTVUN8>

Como implementar uma rotação à esquerda em uma árvore AVL: <https://youtu.be/R7BgPz-blDs>

Como implementar uma rotação à direita em uma árvore AVL: <https://youtu.be/ck5VQnbIFIE>

Como implementar as rotações duplas em uma árvore AVL: <https://youtu.be/d-7IWL4dEOw>

Como inserir em uma árvore binária balanceada: <https://youtu.be/oIp82CfCDoQ>

Árvores Rubro-Negras: <https://youtu.be/e1u3koSscQA>

Red-Black Tress – Data Structures: <https://youtu.be/ZxCvM-9BaXE>

O que é uma àrvore AVL – Árvore binária de busca balanceada: <https://wagnergaspar.com/o-que-e-uma-arvore-avl-arvore-binaria-de-busca-balanceada/>

Como descobrir a quantidade de Nó's de uma árvore binária: <https://youtu.be/qX0AkoEX4C0>

Como descobrir a quantidade de folhas de uma árvore binária: <https://youtu.be/3cizPPwqmCc>

Desvio Padrão: <https://maisretorno.com/porta1/termos/d/desvio-padrao>