Fluxo de Redes

Reyso C. Teixeira[1]

[1]Universidade Federal do Pará (UFPA)
Belém – PA – Brasil

Resumo. *Os Problemas de Fluxo Máximo de rede são conjunto de problemas na Teoria dos Grafos que envolvem determinar o tráfego máximo possivel em uma rede,ou ainda a quantidade máxima que pode ser enviada de um fonte para um destino através de conexões em rede. Este trabalho apresenta a definição e a relação do problema com suas aplicações práticas. Em seguida é apresentado a ideia do Teorema do Fluxo Máximo, bem como a solução por meio de algorítimos dos problemas que podem ser resolvidos utilizando Fluxo de redes.*

1. Introdução

Este trabalho foi proposto por Roberto Samarone dos Santos Araujo, professor da disciplina de Grafos da Universidade Federal do Pará, com o objetivo de instigar e promover conhecimento de uma das principais aplicações da Teoria dos Grafos
Em grafos, o fluxo de rede refere-se a um grafo orientado onde cada aresta tem uma capacidade determinada que não pode ser excedida. O Problema de Fluxo Máximo de Redes tem como objetivo desenvolver modelos baseados na Teoria de Grafos que envolvam esses problemas de fluxo, objetivando solucionar diversas questões práticas, como logística de escoamento de produção, programação de tarefas e modelos de distribuição de áudio e vídeo em streaming.

2. Fluxo Máximo e Corte mínimo

A teoria dos grafos é uma área fundamental na pesquisa operacional e na ciência da computação, proporcionando ferramentas e conceitos poderosos para modelar e resolver uma ampla gama de problemas. Dentre esses conceitos, destaca-se o estudo do Corte mínimo e do Fluxo Máximo, que desempenham papel fundamental nas análises do fluxo de informação e recursos em rede.
De acordo com Szwarcfiter em seu livro 'Grafos e Algoritmos Computacionais', no Capítulo 6 sobre Fluxo Máximo em Redes, podemos considerar um grafo direcionado D com dois vértices especiais, a fonte de origem e o sumidouro ou destino. O fluxo entre esses vértices é definido como uma função que associa um número real não negativo a cada aresta, satisfazendo a condição de que o fluxo em cada aresta não ultrapasse o valor de sua capacidade, bem como a condição de conservação de fluxo. "Suponha que D possua dois vértices especiais e distintos $s, t \in V$ chamados origem e destino, respectivamente, com as seguintes propriedades: o primeiro é uma fonte que alcança todos os vértices. Enquanto o destino é um sumidouro alcançado também por todos. Um $fluxo$ f de s a t em D é uma função que a cada aresta $e \in$ E associa um número real não negativo $f(e)$ satisfazendo às seguintes condições: [...] A primeira condição apresentada simplesmente indica que o fluxo em cada aresta não ultrapassa o valor de sua capacidade. A segunda significa que o fluxo se conserva."[Szwarcfiter, Cap. 6].
Outro conceito importante é o Corte mínimo, que procura particionar os nós da rede em

dois conjuntos disjuntos: o conjunto do vértice de origem e o conjunto do vértice de destino. Um corte divide a rede, e o tráfego da origem ao destino deve cruzar o arco que forma o corte. Uma vez que a menor capacidade total entre todas as possíveis separações é alcançada, temos um corte mínimo.

3. Teorema do Fluxo Máximo

Diante do apresentado anteriormente neste trabalho, o Teorema do Fluxo Máximo afirma que o valor máximo enviado do vértice s para t é igual à capacidade mínima de um corte que separa o vértice s do vértice t na rede. Sendo assim, quando encontramos cortes cuja capacidade é igual ao valor do fluxo máximo, indica que a capacidade máxima do fluxo foi alcançada.

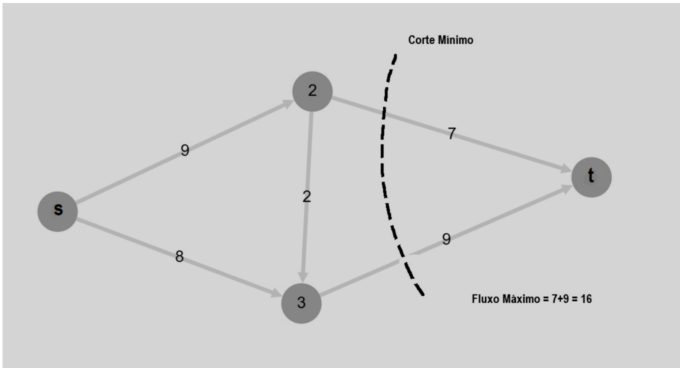

Figura 1. Corte mínimo em um Digrafo

Na figura 1, podemos obeservar um corte no dígrafo de $s \rightarrow t$ em que um arco que atravessa as arestas com as menores capacidades possíveis. Logo, o fluxo máximo é obtido pela soma das capacidades destas arestas.

4. Algorítimo de Ford-Fulkerson

Originalmente proposto pelos matemáticos Lester R. Ford. Jr e Delbert. R. Fulkerson no ano de 1956, utiliza a ideia dos aumentos de caminho para iterativamente encontrar o máximo fluxo de rede.

A ideia do algoritmo é aumentar o fluxo f na rede iterando por todos os caminhos aumentantes até que não se encontre mais nenhum. Um caminho aumentante é um caminho de s a t na rede onde o fluxo f não atingiu sua capacidade total em cada aresta. Inicialmente, todas as arestas possuem fluxo zero.

Em seguida, o algoritmo procura por esses caminhos de fluxo f viável para determinar a capacidade máxima de fluxo que ainda pode ser enviado ao longo desse trecho, conhecido como caminho residual. A cada iteração, o processo de encontrar o caminho aumentante e aumentar o fluxo é executado até que não seja possível encontrar mais caminhos aumentantes. Ao final do processo, o algoritmo alcança o fluxo máximo na rede, determinado pela soma dos fluxos das arestas de s a t.

Dados: rede $D(V, E)$, com capacidades $c(e)$ inteiras e positivas, para cada $e \in E$, origem $s \in V$ e destino $t \in V$
Saída : F, o fluxo máximo
$F \leftarrow 0$;
for $e \in E$ **do**
  $f(e) \leftarrow 0$;
end
Construir a rede residual $D'(f)$;
while *existir caminho* $v_1, ..., v_k$ *de* $s = v_1$ *a* $t = v_k$ *em* D' **do**
  $F' \leftarrow \min\{c'(v_j, v_{j+1}), 1 \leq j < k\}$;
  for $j \leftarrow 1$ *to* $k - 1$ **do**
    if (v_j, v_{j+1}) *é uma aresta direta* **then**
      $f(v_j, v_{j+1}) \leftarrow f(v_j, v_{j+1}) + F'$;
    end
    else
      $f(v_{j+1}, v_j) \leftarrow f(v_{j+1}, v_j) - F'$;
    end
  end
  $F \leftarrow F + F'$;
  Construir a rede residual $D'(f)$;
end

Algorithm 1: Pseudocódigo do Algoritmo de Ford-Fulkerson, adaptado do livro ”Teoria Computacional de Grafos: os Algoritmos (2ª ed.)”. Capítulo 6.4 - Um Primeiro Algoritmo

5. Problemas e Aplicações

5.1. Planjamento de Rotas

O planejamento de rotas é um problema fundamental no contexto de rede de computadores. O roteamento é o processo de encaminhar os dados da origem para o destino através da rede. Portanto, este problema pode ser modelado e resolvido usando abordagens de fluxo de rede.

Para modelar pacotes de streaming de audio e vídeo, por exemplo, a rede seria representada por Digrafos ponderados, cada dispositivo da rede (roteadores) corresponde por um nó e cada link de comunicação entre estes será uma aresta. A fonte do fluxo é o servidor de streaming, responsável por enviar os dados áudio e vídeo, e o semidouro é todo aquele dispositivo receptor. Cada borda tem uma capacidade associada, que representa a taxa máxima de transferência de dados ao longo do enlace.

A meta é encontrar o melhor caminho ou rota para encaminhar do nó origem ao nó destino, otimizando a alocação de recursos como largura de banda, para garantir a transmissão contínua e de qualidade, considerando a capacidade de cada enlace e o custo da conexão disponível. Após a definição do objetivo e a modelagem do problema, determinamos o fluxo máximo na rede, sendo que o fluxo em cada aresta representa a quantidade máxima de dados transferidos

5.2. Redes de distribuição de energia

Nas redes de distribuição, os fluxos de rede são usados para modelar e otimizar os fluxos de energia em redes complexas. Imagine uma rede elétrica composta por geradores, subestações, transformadores e consumidores. Cada um dos componentes pode ser representado como um nó no Digrafo, e as linhas de transmissão e distribuição são representadas por arestas que conectando esses nós.
O objetivo é otimizar o fluxo ideal de energia entre os nós da rede, tomando em consideração a capacidade das linhas de transmissão, restrições de carga as necessidades de energia dos consumidores.
Ao modelar a rede como um problema de fluxo de rede, é possível encontrar o fluxo máximo de energia para cada linha levando em consideração as limitações e necessidades específicas. Isso ajuda a gerenciar com eficiência a distribuição de energia de forma eficaz, evitando sobrecarga e reduzindo as perdas de energia em todo o sistema.

6. Conclusão

No âmbito do ramo matemático da Teoria dos Grafos, os estudos sobre Fluxo de Rede desempenham um papel fundamental na modelagem e otimização de fluxos em redes complexas. A partir disso, podemos inferir o fluxo máximo que pode ser enviado de uma fonte para um destino em uma mesma rede, levando em consideração as capacidades entre os nós conectados.
Com a aplicação correta do Teorema do Fluxo máximo, podemos tomar decisões otimizadas buscando o melhor desempenho de sistemas complexos.

Referências

Szwarcfiter, J. L. (2018). Teoria Computacional de Grafos: os Algoritmos (2ª ed.). Capítulo 6.4 - ”Um Primeiro Algoritmo”.
Szwarcfiter, J. L. (2018). Teoria Computacional de Grafos: os Algoritmos (2ª ed.) Capítulo 6 - Fluxo Máximo em Redes.
Goldbarg, M. and Goldbarg, E. (2012). Grafos - conceitos, algoritmos e aplicações. Capítulo 6: ”Fluxo de Redes”.