

Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Trabajo Práctico 3 - 2020
Funciones

Ejercicios indispensables

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2}$
 - a) Completar el siguiente diagrama $f : \rightarrow$
 - b) ¿Cuál es el dominio y la imagen?
 - c) Decidir si la función es inyectiva, suryectiva o biyectiva.
2. Sea $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 2$. Calcular $f(-2)$, $f(\frac{1}{4})$, $f(x^2)$, $f(x-h)$ y $f(x) - f(h)$.
3. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones corresponden a funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales, $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$.
 - a) $f(x) = x - 10$.
 - b) Toda función lineal con dominio en los reales.
 - c) La aplicación $g : M \rightarrow H$ que asigna a cada perra con su cachorro, donde H es el conjunto de todos los cachorros y M el conjunto de todas las madres.
 - d) $f(x) = x^2 - 2$.
 - e) Toda función cuadrática con dominio en los reales.
 - f) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
 - g) $f(x) = e^x$
4. Dadas las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar la representación gráfica. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales, $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$.

a) $f(x) = 3x - 1$	e) $f(x) = 3 \cos(2x) + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$	f) $f(x) = 8 \sin(x - \frac{\pi}{2})$
c) $f(x) = \sqrt{x-1}$	g) $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$
d) $f(x) = \ln(x-2)$	h) $f(x) = 2e^x - 1$
5. Decidir cuáles de las funciones anteriores son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.
6. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$	b) $f(x) = \begin{cases} 32(\frac{1}{2})^x, & x < 5 \\ \sqrt{x-4}, & x \geq 5 \end{cases}$
--	--
7. Dados los siguientes pares de funciones, calcular: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$. Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = -1 + x^2, g(x) = 1 + x & c) f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x) \\ b) f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = x^2 & \end{array}$$

8. Decidir si existen las funciones $f \circ g$ y/o $g \circ f$. En caso de existir, determinar la función composición:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3, g(x) = x^2 & c) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 3^x \\ b) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x^3 & \end{array}$$

9. La familia de funciones parte entera agrupa a funciones de la forma $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, satisfaciendo la condición $|x - f(x)| < 1$. Estas funciones permiten, dado un número con parte fraccionaria, obtener su parte entera. Existen al menos 4 funciones posibles:

- **Piso:** (*floor*) a cada número real asigna el número entero más próximo por defecto, es decir, el mayor número entero igual o menor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 2, a 2,9 le corresponde 2, a -3,1 le corresponde -4. Se nota $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
- **Techo:** (*ceil*) a cada número real asigna el número entero más próximo por exceso, es decir, el mayor número entero igual o mayor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 3, a 2,9 le corresponde 3, a -3,1 le corresponde -3. Se nota $f(x) = \lceil x \rceil$.
- **Truncamiento:** se ignora la parte decimal.
- **Redondeo:** se asigna el entero más próximo según su parte decimal.

- a) Grafique cada una de las funciones y compare sus gráficas.
- b) Definir la función truncamiento a partir de la función piso.
- c) Decir si cada una de las funciones son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justifique.

10. Resolver analítica y gráficamente las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{ll} a) 2x^2 - 6x + 4 \leq 0 & f) \left| \frac{x+4}{x-3} \right| \leq 1 \\ b) -x^2 + x - 1 < 0 & g) |x - 7| < |x - 3| \\ c) \frac{2x+1}{x-2} \geq 0 & h) |3x - 1| > 1 \\ d) \frac{4}{x^2+6x+5} > 0 & i) \frac{|x+2|}{|x^2-4|} \geq 1 \\ e) |5x - 2| < 1 & \end{array}$$

11. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2 \sin(x) - 1 & d) f(x) = \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 3 \\ b) f(x) = 2 \sin(3x + \pi) - 1 & e) f(x) = \sin(2x) - 4 \\ c) f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) + 3 & f) f(x) = -3 \sin(x - \frac{3\pi}{2}) - 2 \end{array}$$

Ejercicios importantes

- Sea $f(x) = 3x^2 - 4$. Calcular $f(-4)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(x^2)$, $f(x - h)$ y $f(x) - f(h)$.
- Dadas las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar la representación gráfica. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales, $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$.

$$a) f(x) = |5 - \frac{1}{2}x| - 2$$

$$d) f(x) = 2x^2 + 5x - 4$$

$$b) f(x) = 6 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 3$$

$$c) f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$$

$$e) f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

3. Decidir cuáles de las funciones anteriores son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.

4. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-1}, & x \leq 0 \\ 4 \cos(x + \pi), & x > 0 \end{cases}$$

5. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas:

$$a) f(x) = -2 \cos(x) + 3$$

$$d) f(x) = 4 \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) + 1$$

$$b) f(x) = -\cos(-2x) + 3$$

$$c) f(x) = 3 \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$e) f(x) = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2})$$

6. Dadas las siguientes funciones, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

$$a) f(x) = 2|x - 1| + 3$$

$$c) f(x) = 3|x + 1| - 2$$

$$b) f(x) = -3|x - 1| + 3$$

7. Dados los siguientes pares de funciones, calcular: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$. Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

$$a) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{4 - x}$$

8. Decidir si existen las funciones $f \circ g$ y/o $g \circ f$. En caso de existir, determinar la función composición:

$$a) f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = x^2$$

$$b) f(x) = \ln(x), g(x) = \sin(x)$$