

# Taller de Matemática Computacional

## Apunte de Cátedra

### Lógica

Un conjunto es una colección bien definida de objetos: números, personas, letras, etc. Con bien definida nos referimos a que es posible determinar si un elemento está o no está en el conjunto.

Por ejemplo, si el conjunto  $A$  es el conjunto de docentes de TMC, tenemos que  $A = \{\text{Carlitos, Diego, Delfi, Mante, Martin, Nico, Torta}\}$ . Claramente es posible identificar quiénes son los miembros del conjunto.

Decimos que los elementos que conforman un conjunto, pertenecen a él, por ejemplo Carlitos pertenece al conjunto  $A$ .

**Definición 1.** Si  $e$  es un elemento del conjunto  $C$  decimos que  $e$  pertenece al conjunto  $C$  y lo notamos como  $e \in C$ . Si  $e$  no pertenece al conjunto lo notamos como  $e \notin C$ .

Naturalmente dos conjuntos serán iguales si los elementos que contienen son exactamente los mismos.

**Definición 2.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos,  $A = B \leftrightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ .

Por lo tanto alcanza con que no compartan un elemento para que sean conjuntos distintos, es decir

$$A \neq B \leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B)$$

Es importante remarcar que no importa el orden de los elementos en un conjunto, con lo cual si tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Carlitos, Diego, Delfi, Mante, Martin, Nico, Torta}\} \\ B &= \{\text{Martin, Carlitos, Delfi, Torta, Mante, Nico, Diego}\} \end{aligned}$$

entonces  $A = B$ . Repetir elementos tampoco altera la definición de un conjunto, con lo cual si

$$D = \{\text{Martin, Delfi, Carlitos, Delfi, Torta, Delfi, Mante, Delfi, Nico, Delfi, Diego, Delfi}\}$$

tenemos que  $A = D$ .

Una forma de definir un conjunto es de forma extensiva, es decir, listando la totalidad de los elementos que tiene un conjunto, como hicimos con el ejemplo anterior. Sin embargo, existen muchos casos en los que es más sencillo o incluso necesario, definir un conjunto a partir de las propiedades que satisfacen sus miembros.

Por ejemplo, podríamos definir  $A = \{\text{Docentes de TMC}\}$ . Otro conjunto definido de esta forma podría ser el conjunto de los números reales negativos, que podemos definirlo como  $\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ .

Al momento de definir un conjunto, vamos a intentar ser lo más formales posibles. La herramienta que tenemos a mano son las proposiciones lógicas que estudiamos en el capítulo anterior. Si  $p(x)$  es una proposición lógica cuya variable es  $x$ , esto significa que para cada valor de  $x$  podemos decidir si  $p(x)$  es verdadero o falso. Por ejemplo:

$$p(x) := x \text{ es docente de TMC}$$

entonces  $A = \{x : p(x)\}$ .

En la definición que dimos de  $\mathbb{R}_{<0}$ , utilizamos la proposición lógica  $x < 0$ . Naturalmente podemos utilizar proposiciones lógicas complejas para definir un conjunto. Por ejemplo:

$$P = \{p \in \mathbb{N} : n > 1 \wedge (\forall r \in \mathbb{N}, \frac{p}{r} \in \mathbb{N} \rightarrow (r = 1 \vee r = p))\}$$

es una forma de definir el conjunto de números primos, es decir aquellos números naturales mayores que 1 que son divisibles solo por 1 o por si mismos.

## 0.1. Conjuntos especiales

Por definición vamos a decir que existe el conjunto que no contiene ningún elemento, es decir el conjunto vacío. Este conjunto lo notamos como  $= \{\}$ .

Existe otro conjunto importante llamado conjunto universal. Si por ejemplo hiciéramos referencia al conjunto de los números que no son pares, posiblemente se defina ese conjunto como  $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}\}$ , es decir el conjunto de los números impares. Sin embargo, el número  $\frac{1}{3}$  no es número par, con lo cual podía estar en nuestro conjunto definido como “el conjunto de números que no son pares”. Este problema surge de no estar claro el contexto en el que estamos trabajando. Naturalmente uno supone que al hablar de un número par, el contexto es el de los números naturales y por lo tanto sería correcta la definición dada. Este conjunto referencia, se llama conjunto universal. Y como vimos en ejemplo es importante tenerlo presente ya que los elementos de un conjunto dado puede cambiar de acuerdo al conjunto universal en el que estamos trabajando. En general notamos por la letra  $U$  al conjunto universal.

Otra ventaja de plantear el conjunto universal en el que estamos trabajando es la simplificación de la escritura. Por ejemplo si trabajamos con  $U = \mathbb{N}$ , el conjunto de números primos podemos definirlo como:

$$P = \{p : n > 1 \wedge (\forall r, \frac{p}{r} \in \mathbb{N} \rightarrow (r = 1 \vee r = p))\}$$

es decir que ya no hace falta hacer referencia al conjunto donde están los números  $p$  y  $r$ .

## 0.2. Subconjuntos

Los subconjuntos son conjuntos que están contenidos en algún otro conjunto dado. Naturalmente todo conjunto es subconjunto del conjunto universal, en el contexto en el que estemos trabajando. Es importante entender que para que un conjunto  $A$  sea subconjunto de un conjunto  $B$ , todo los elementos de  $A$  deben ser también parte de  $B$ .

**Definición 3.** Decimos que  $A$  es subconjunto de  $B$  (o que  $A$  está incluido en  $B$ ) si  $\forall x \in A \rightarrow x \in B$ . Notamos esta relación como  $A \subseteq B$ .

El símbolo  $\subseteq$  es una conjunción de los símbolos  $\subset$  y  $=$ , que indican que  $A$  esta incluido en  $B$  y que es posible que  $A$  sea igual a  $B$ . Si utilizamos únicamente el símbolo  $\subseteq$  estamos indicando que la contención es estricta, es decir  $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists x \in B, x \notin A$

Observemos que para negar una inclusión alcanza con encontrar un elemento que no satisfaga lo exigido en la definición, es decir que  $A \not\subseteq B \leftrightarrow \exists x \in A : x \notin B$ .

Por ejemplo, consideremos el conjunto de números impares es un subconjunto de los naturales, es decir que  $I \subset \mathbb{N}$ .

El conjunto  $\{-1, 1, 2, 3\} \not\subseteq \mathbb{N}$  porque  $-1 \notin \mathbb{N}$ .

Recordemos que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos. Una manera de comprobar que dos conjuntos es probando que mutuamente se contienen.

**Teorema 1.**  $A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

**Demostración 1.** Supongamos que  $A = B$ , debemos probar que  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ . Como  $A = B$ , si  $x \in A \rightarrow x \in B$ . Por lo tanto  $A \subseteq B$ . Análogamente, como  $A = B$ , si  $x \in B \rightarrow x \in A$ . Por lo tanto  $B \subseteq A$ .

Supongamos ahora que  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ . Entonces vale que  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B \wedge x \in B \rightarrow x \in A)$  que es por definición equivalente a  $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$  y por lo tanto  $A = B$ .

Además la relación de contención es transitiva, es decir que si  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ .

## 0.3. Operaciones entre conjuntos

Existen varias operaciones entre conjuntos que nos dan otros conjuntos como resultado. De esta manera es posible construir nuevos conjuntos.

La primer operación es la unión. La unión de dos conjuntos nos da el conjunto que tiene tanto los elementos de un conjunto como del otro.

**Definición 4.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos definimos la unión de  $A$  y  $B$  como

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Recordemos que la proposición  $x \in A \vee x \in B$  es válida siempre que al menos una de las proposiciones sea válida, con lo cual tenemos los elementos que están  $A$ , en  $B$  o en ambos al mismo tiempo.

La segunda operación que vamos a estudiar es la intersección. La intersección de dos conjuntos nos da el conjunto que tiene los elementos que están en ambos conjuntos

**Definición 5.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos definimos la intersección de  $A$  y  $B$  como

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Recordemos que la proposición  $x \in A \wedge x \in B$  es válida siempre que ambas proposiciones sean válidas, con lo cual tenemos los elementos que están  $A$  y en  $B$  al mismo tiempo.

La última operación básica que vamos a estudiar es el complemento. El complemento de un conjunto son aquellos elementos que no están en el conjunto.

**Definición 6.** Sean  $A$  un conjunto definimos el complemento de  $A$  como

$$A^C = \{x : x \notin A\}$$

Es importante tener en claro cual es el conjunto universal con el que estamos trabajando interpretar correctamente el complemento de un conjunto.

Dados los conjuntos  $A$ ,  $B$  y el universal  $U$ , las siguientes propiedades son validas:

1.  $A \subseteq A \cup B$  y  $B \subseteq A \cup B$ .
2.  $A \cap B \subseteq A$  y  $A \cap B \subseteq B$ .
3.  $A \cup A^C = U$
4.  $A \cap A^C = \emptyset$

Existe una cuarta operación entre conjuntos que se llama diferencia o complemento relativo de un conjunto respecto de otro. Esta operación se puede construir a partir de las operaciones previas, pero por su importancia merece un nombre particular.

**Definición 7.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos definimos la diferencia entre  $A$  y  $B$  (o el complemento relativo de  $B$  respecto de  $A$ ) como

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^C$$

En  $A \setminus B$  tenemos los elementos que están en  $A$  pero no están en  $B$ .

## 0.4. Algunos conjuntos conocidos

Los conjuntos numéricos con los que trabajaremos son los reales ( $\mathbb{R}$ ), los racionales ( $\mathbb{Q}$ ), los enteros ( $\mathbb{Z}$ ) y los naturales ( $\mathbb{N}$ ).

Las relaciones de contención de los números es la siguiente,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Existe otro conjunto numérico que se utiliza habitualmente que es el de los números irracionales,  $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Los números irracionales son aquellos que no pueden escribirse como la razón (o el cociente) entre dos números enteros. Por ejemplo  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $e$  y  $\sqrt{3} - 1$  son números irracionales.

## 0.5. Propiedades

Vamos a estudiar algunas propiedades validas para las operaciones estudiadas.

- Distributiva.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Idempotencia.

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

- Leyes de De Morgan.

$$(B \cup C)^C = B^C \cap C^C$$

$$(B \cap C)^C = B^C \cup C^C$$

## 0.6. El cardinal

Una característica importante de los conjuntos es la cantidad de elementos que contienen. Esta cantidad puede ser finita o infinita.

**Definición 8.** Llamamos cardinal del conjunto  $A$ , y lo notamos como  $|A|$ , al número de elementos que contiene el conjunto.

Así por ejemplo si  $A = \{\text{Carlitos, Diego, Delfi, Mante, Martin, Nico, Torta}\}$ ,  $|A| = 7$ . En general vamos a notar con el símbolo  $\infty$  al cardinal de todos los conjuntos que no tienen una cantidad finita de elementos. Sin embargo existen distintos números infinitos e incluso un orden entre ellos.

### 0.6.1. Cardinal: extra

Esta parte es solo para interés general y no sera evaluada en la materia. En la sección de funciones vamos a formalizar un poco más esta cuestión, pero en principio puede llegar a ser intuitivo que la cantidad de números naturales es menor que la de los números reales, es decir que  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ . Una gran diferencia entre estos conjuntos es que el primero es numerable y el segundo no. Es decir, que puedo enumerar cada elemento de los números naturales, decidiendo cual es el primero, cual el segundo, etc. Sin embargo esto no es posible para los números reales.

También es cierto que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ , ya que es fácil pensar en una enumeración de los números enteros, es decir en el listado de ellos siguiendo un orden  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ . Esta claro que dado cualquier número entero es posible sacar la cuenta de en que orden va a aparecer en ese listado.

Algo que no resulta nada intuitivo es que la cantidad de números racionales es la misma que la de los naturales, es decir que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ . Quienes son amantes de la literatura seguramente hayan escuchado hablar o leído, el libro de cuentos de Borges titulado “El Aleph”. Aleph es la letra utilizada por los matemáticos para indicar los cardinales infinitos. Aleph-0 es el cardinal de los naturales ( $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ).