NÚMEROS COMPLEJOS

Álgebra I - 2019 - Facultad de Ciencias Exactas-UNICEN

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los números racionales

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Como es posible que $b = 1$ ó $a = 0$

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Como es posible que $b = 1$ ó $a = 0$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

NUMEROS REALES

Conjuntos de Números

Hemos estudiado los números naturales: $\mathbb{N}$

Recordemos la definición de números enteros: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Entonces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Como es posible que $b = 1$ ó $a = 0$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Conjuntos de Números

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Conjuntos de Números

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

¿Existen números que no se pueden escribir como una fracción?

Conjuntos de Números

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

¿Existen números que no se pueden escribir como una fracción?

SI, los **números irracionales**: $\mathbb{I}$. Por ejemplo π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, entre otros.

Recordemos que los números reales $\mathbb{R}$, serán el conjunto de números racionales al que se agrega el conjunto de números irracionales

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Ejercicio 1 - b)

Números racionales

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$$

Diferencia de cuadrados

Ejercicio 1 - b)

Números racionales

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$$

Diferencia de cuadrados

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$=$$

Ejercicio 1 - b)

Números racionales

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$$

Diferencia de cuadrados

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$=$$

Ejercicio 1 - b)

Números racionales

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$$

Diferencia de cuadrados

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{5} \quad 3 =$$

Ejercicio 1 - b)

Números racionales

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$$

Diferencia de cuadrados

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{5} \quad 3 = {\color{red}3 \in \mathbb{Q}}$$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\implies)\ x > 0 \implies$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\implies)$ $x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)\, x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)$ $x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)\; x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

$(\Longleftarrow)\; x^{-1} > 0 \implies$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)$ $x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

$(\Longleftarrow)$ $x^{-1} > 0 \implies \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)$ $x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

$(\Longleftarrow)$ $x^{-1} > 0 \implies \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1 > 0$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\Longrightarrow)\ x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

$(\Longleftarrow)\ x^{-1} > 0 \implies \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x > 0$

Ejercicio 2 -c)

Probar $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(\implies)\, x > 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x^{-1} > 0$

$(\impliedby)\, x^{-1} > 0 \implies \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1 > 0 \underbrace{\implies}_{H/} x > 0$

Luego se ha demostrado la doble implicación

Unidad Imaginaria

El cuadrado de todo número real no es negativo

Unidad Imaginaria

El cuadrado de todo número real no es negativo

Por ejemplo:

$$(-2)^2 = 2 \geq 0 \text{ y}$$

Unidad Imaginaria

El cuadrado de todo número real no es negativo

Por ejemplo:

$$(-2)^2 = 2 \geq 0 \text{ y } (2)^2 = 2 \geq 0$$

Unidad Imaginaria

El cuadrado de todo número real no es negativo

Por ejemplo:

$$(-2)^2 = 2 \geq 0 \text{ y } (2)^2 = 2 \geq 0$$

Es decir, no existe ningún número real x tal que

$$x^2 = -1$$

Unidad Imaginaria

El cuadrado de todo número real no es negativo

Por ejemplo:

$$(-2)^2 = 2 \geq 0 \text{ y } (2)^2 = 2 \geq 0$$

Es decir, no existe ningún número real x tal que

$$x^2 = -1$$

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Imaginemos un "número" que llamaremos i que verifica que

$$i^2 = -1$$

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Imaginemos un "número" que llamaremos i que verifica que

$$i^2 = -1$$

Es posible escribir

$$b \cdot i, b \in \mathbb{R}$$

tal que

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Imaginemos un "número" que llamaremos i que verifica que

$$i^2 = -1$$

Es posible escribir

$$b \cdot i, b \in \mathbb{R}$$

tal que

$$(bi)^2 = -b^2$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}i\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot i^2 = -2 \text{ y}$$

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Imaginemos un "número" que llamaremos i que verifica que

$$i^2 = -1$$

Es posible escribir

$$b \cdot i, b \in \mathbb{R}$$

tal que

$$(bi)^2 = -b^2$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}i\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot i^2 = -2 \text{ y}$$

$$\left(-\sqrt{2}i\right)^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 \cdot i^2 = -2$$

Unidad Imaginaria

Esta dificultad se resuelve ampliando el campo de los números reales

Imaginemos un "número" que llamaremos i que verifica que

$$i^2 = -1$$

Es posible escribir

$$b \cdot i, b \in \mathbb{R}$$

tal que

$$(bi)^2 = -b^2$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}i\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot i^2 = -2 \text{ y}$$

$$\left(-\sqrt{2}i\right)^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 \cdot i^2 = -2$$

Sistema Ampliado

Necesitamos números que elevados al cuadrado resulten también negativos, así construimos un

Sistema Ampliado

Necesitamos números que elevados al cuadrado resulten también negativos, así construimos un

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i ; b \in \mathbb{R}\}$$

Sistema Ampliado

Necesitamos números que elevados al cuadrado resulten también negativos, así construimos un

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

Ahora, el cuadrado de cualquier elemento del Sistema Ampliado da como resultado un número real positivo, negativo ó 0

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i;\, b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sea $-2 \in \mathbb{R} \implies -2 \in \mathbb{R} \cup \{b \cdot i;\, b \in \mathbb{R}\}$

Ya vimos que $x^2 = -2$ tiene solución que es $x = \sqrt{2}i$ y obviamente otra solución: $x = -\sqrt{2}i$

NÚMEROS COMPLEJOS

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sea $-2i \in \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\} \implies -2i \in \mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$

Para resolver $x^2 = -2i$ probemos con $x = (1 - i)$

$(1 - i)^2 =$

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sea $-2i \in \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\} \implies -2i \in \mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$

Para resolver $x^2 = -2i$ probemos con $x = (1 - i)$

$(1 - i)^2 = (1)^2 - 2i + (i)^2 =$

Sistema Ampliado

$$\mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$$

¿Todos los elementos de este nuevo conjunto tienen raíz cuadrada?

Sea $-2i \in \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\} \implies -2i \in \mathbb{R} \cup \{b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$

Para resolver $x^2 = -2i$ probemos con $x = (1 - i)$

$(1 - i)^2 = (1)^2 - 2i + (i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Las dos raíces de $x^2 = -2i$ son $x = (1 - i)$ y $x = (-1 + i)$

Definición

Un **número complejo z** es una expresión binómica formal $z = a + bi$ donde i es un símbolo llamado unidad imaginaria, con a y b son dos números reales tales que a es llamado la parte real del número complejo z y b es llamado la parte imaginaria del número complejo z.

Notación $z = a + bi$

$Re\,(z) = a$

$Im\,(z) = b$

Igualdad

Dados $z = a + bi$ y $w = c + di$ Decimos que z **es igual a** w cuando tanto la parte real como la imaginaria son iguales entre sí

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Suma

Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

Propiedades de la suma

S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$

Propiedades de la suma

S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$

S1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z + w) + u = z + (w + u)$

Propiedades de la suma

S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$

S1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z + w) + u = z + (w + u)$

S2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $0 + z = z + 0 = z$

Propiedades de la suma

- S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$
- S1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z + w) + u = z + (w + u)$
- S2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $0 + z = z + 0 = z$
- S3 Inverso Aditivo: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = w + z = 0$

Propiedades de la suma

S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$

S1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z + w) + u = z + (w + u)$

S2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $0 + z = z + 0 = z$

S3 Inverso Aditivo: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = w + z = 0$

S4 Conmutativa: Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z + w = w + z$

Propiedades de la suma

- S0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z + w \in \mathbb{C}$
- S1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z + w) + u = z + (w + u)$
- S2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $0 + z = z + 0 = z$
- S3 Inverso Aditivo: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = w + z = 0$
- S4 Conmutativa: Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z + w = w + z$

Producto

Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

$$z \times w = a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i - b \cdot d$$

$$z \times w = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$$

Propiedades del producto

P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$

Propiedades del producto

P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$

P1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z \times w) \times u = z \times (w \times u)$

Propiedades del producto

P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$

P1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z \times w) \times u = z \times (w \times u)$

P2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $1 \times z = z \times 1 = z$

Propiedades del producto

P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$

P1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z \times w) \times u = z \times (w \times u)$

P2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $1 \times z = z \times 1 = z$

P3 Inverso Multiplicativo: Si $z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$ entonces existe un $x \in \mathbb{C}$ tal que $z \times x = x \times z = 1$

Propiedades del producto

- P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$
- P1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z \times w) \times u = z \times (w \times u)$
- P2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $1 \times z = z \times 1 = z$
- P3 Inverso Multiplicativo: Si $z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$ entonces existe un $x \in \mathbb{C}$ tal que $z \times x = x \times z = 1$
- P4 Conmutativa: Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z \times w = w \times z$

Propiedades del producto

- P0 Cierre: Sean $z, w \in \mathbb{C} \implies z \times w \in \mathbb{C}$
- P1 Asociativa: $z, w, u \in \mathbb{C} \implies (z \times w) \times u = z \times (w \times u)$
- P2 Neutro: Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $1 \times z = z \times 1 = z$
- P3 Inverso Multiplicativo: Si $z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$ entonces existe un $x \in \mathbb{C}$ tal que $z \times x = x \times z = 1$
- P4 Conmutativa: Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z \times w = w \times z$

Propiedad Distributiva

- D Si $z, w, u \in \mathbb{C}$ entonces $z\,(w + u) = zw + zu$

Módulo

Dado $z = a + bi$ definimos módulo de z por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Módulo

Dado $z = a + bi$ definimos módulo de z por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo: $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Módulo

Dado $z = a + bi$ definimos módulo de z por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo: $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$* \ |z| \in \mathbb{R} \wedge |z| \geq 0$

Módulo

Dado $z = a + bi$ definimos módulo de z por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo: $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$* \ |z| \in \mathbb{R} \wedge |z| \geq 0$$

$$* \ |z| = 0 \implies z = 0$$

Módulo

Dado $z = a + bi$ definimos módulo de z por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo: $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$* \ |z| \in \mathbb{R} \wedge |z| \geq 0$

$* \ |z| = 0 \implies z = 0$

$* \ z = a + 0i, z \in \mathbb{C} \wedge |z| = |a|$ (Módulo en $\mathbb{R}$)

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} =$$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) =$$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 =$$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Conjugado

Dado $z = a + bi$ definimos el conjugado de z por $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Norma

Si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\,(-3+4i)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\left(-3+4i\right)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

- $\star$ $\left(-3+4i\right)^3 =$

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\left(-3+4i\right)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

$\star$ $(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\,(-3)^2\,(4i) + 3\,(-3)\,(4i)^2 + (4i)^3$

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\,(-3+4i)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

- ⋆ $(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\,(-3)^2\,(4i) + 3\,(-3)\,(4i)^2 + (4i)^3$
- ⋆ $= -27 + 108i + 144 - 64i$

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\,(-3+4i)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

- ⋆ $(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\,(-3)^2\,(4i) + 3\,(-3)\,(4i)^2 + (4i)^3$
- ⋆ $= -27 + 108i + 144 - 64i$
- ⋆ $= 117 + 44i$

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\,(-3+4i)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

- $(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\,(-3)^2\,(4i) + 3\,(-3)\,(4i)^2 + (4i)^3$
- $= -27 + 108i + 144 - 64i$
- $= 117 + 44i$

Multiplicamos por i

Ejercicio 4

Expresión binómica de un número complejo

$$z = a + bi$$

Hallar la Expresión Binómica de

(i)

$$i\,(-3+4i)^3$$

Comenzamos el cálculo elevando el binomio al cubo

- $\star$ $(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\,(-3)^2\,(4i) + 3\,(-3)\,(4i)^2 + (4i)^3$
- $\star$ $= -27 + 108i + 144 - 64i$
- $\star$ $= 117 + 44i$

  Multiplicamos por i
- $\star$ $= i\,(117 + 44i)$
- $\star$ $= -44 + 117i$ Expresión Binómica

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^{1} = i$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^{1} = i$
- $\star$ $i^{2} = -1$

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^{1} = i$
- $\star$ $i^{2} = -1$
- $\star$ $i^{3} = -i$

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- ⋆ $i^1 = i$
- ⋆ $i^2 = -1$
- ⋆ $i^3 = -i$
- ⋆ $i^4 = 1$

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- ⋆ $i^{1} = i$
- ⋆ $i^{2} = -1$
- ⋆ $i^{3} = -i$
- ⋆ $i^{4} = 1$
- ⋆ $i^{5} = i$
- ⋆ $i^{6} = -1$
- ⋆ $i^{7} = -i$
- ⋆ $i^{8} = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$
- $\star$ $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$
- $\star$ $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$
- $\star$ $i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k i^1 = 1^k i = i$

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$
- $\star$ $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$
- $\star$ $i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k i^1 = 1^k i = i$
- $\star$ $i^{4k+2} = \left(i^4\right)^k i^2 = 1^k (-1) = -1$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$
- $\star$ $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$
- $\star$ $i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k i^1 = 1^k i = i$
- $\star$ $i^{4k+2} = \left(i^4\right)^k i^2 = 1^k(-1) = -1$
- $\star$ $i^{4k+3} = \left(i^4\right)^k i^3 = 1^k(-i) = -i$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(ii) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos haciendo algunos ejemplos dando valores a n:

- $\star$ $i^1 = i$
- $\star$ $i^2 = -1$
- $\star$ $i^3 = -i$
- $\star$ $i^4 = 1$
- $\star$ $i^5 = i$
- $\star$ $i^6 = -1$
- $\star$ $i^7 = -i$
- $\star$ $i^8 = 1$

$i^4 = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

- $\star$ $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$
- $\star$ $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$
- $\star$ $i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k i^1 = 1^k i = i$
- $\star$ $i^{4k+2} = \left(i^4\right)^k i^2 = 1^k(-1) = -1$
- $\star$ $i^{4k+3} = \left(i^4\right)^k i^3 = 1^k(-i) = -i$

Expresión Binómica

$$i^n = \begin{cases} 1 + 0i & \text{si} \quad n = 4k \\ 0 + i & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ -1 + 0i & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ 0 + (-i) & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(iii) $\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

(iii) $\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(iii) $\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{3}+i}$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(iii) $\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3}+i}\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{\sqrt{3}-i}{\left(\sqrt{3}\right)^2-i^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right) i \text{ EB}
\end{aligned}$$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$(1-i)^{-n} =$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n =$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}\,, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\frac{1+i}{1+i}\right)^n =$$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n =$$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Entonces

$$(1+i)^n + (1-i)^{-n} =$$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Entonces

$$(1+i)^n + (1-i)^{-n} = (1+i)^n + \frac{(1+i)^n}{2^n} =$$

(x) $(1+i)^n + (1-i)^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Comenzamos el cálculo con el término $(1-i)^{-n}$

$$(1-i)^{-n} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n = \left(\frac{1}{1-i}\frac{1+i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Entonces

$$(1+i)^n + (1-i)^{-n} = (1+i)^n + \frac{(1+i)^n}{2^n} = \left[1+\frac{1}{2^n}\right](1+i)^n$$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^5 = (-4)(1+i)$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^5 = (-4)\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^6 = (-4)\,2i$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^5 = (-4)\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^6 = (-4)\,2i$
- $\star$ $(1+i)^7 = (-4)\,(2i-2)$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^5 = (-4)\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^6 = (-4)\,2i$
- $\star$ $(1+i)^7 = (-4)\,(2i-2)$
- $\star$ $(1+i)^8 = (-4)\,(-4) = 16$

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$
- $\star$ $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k (1+i)$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i-2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$
- $\star$ $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^{4k+2} = (-4)^k\,2i$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$
- $\star$ $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^{4k+2} = (-4)^k\,2i$
- $\star$ $(1+i)^{4k+3} = (-4)^k\,(2i-2)$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i - 2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$
- $\star$ $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^{4k+2} = (-4)^k 2i$
- $\star$ $(1+i)^{4k+3} = (-4)^k (2i-2)$

Expresión Binómica. $\left[1 + \frac{1}{2^n}\right] (1+i)^n$

Ejercicio 4. Hallar la Expresión Binómica de

$(1+i)^n$

- $\star$ $(1+i)^1 = (1+i)$
- $\star$ $(1+i)^2 = 2i$
- $\star$ $(1+i)^3 = 2i-2$
- $\star$ $(1+i)^4 = -4$

$(1+i)^4 = -4$ para $k \in \mathbb{Z}$

- $\star$ $(1+i)^{4k} = (-4)^k$
- $\star$ $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k\,(1+i)$
- $\star$ $(1+i)^{4k+2} = (-4)^k\,2i$
- $\star$ $(1+i)^{4k+3} = (-4)^k\,(2i-2)$

Expresión Binómica. $\left[1+\frac{1}{2^n}\right](1+i)^n$

$$\begin{cases} (-4)^k + \dfrac{(-4)^k}{2^{4k}} + 0i & \text{si} \quad n \;=\; 4k \\ (-4)^k + \dfrac{(-4)^k}{2^{4k+1}} + \left[(-4)^k + \dfrac{(-4)^k}{2^{4k+1}}\right] i & \text{si} \quad n \;=\; 4k+1 \\ 0 + \left[2\,(-4)^k + \dfrac{(-4)^k}{2^{4k+1}}\right] i & \text{si} \quad n \;=\; 4k+2 \\ -2\,(-4)^k - \dfrac{(-4)^k}{2^{4k+2}} + \left[2\,(-4)^k + \dfrac{(-4)^k}{2^{4k+2}}\right] i & \text{si} \quad n \;=\; 4k+3 \end{cases}$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(i) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

Teorema 1

Sean $z = a + b{\color{red}i}$ y $w = c + d{\color{red}i}$ dos números complejos, entonces se verifica que

(i) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$) $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \underbrace{\Rightarrow}_{\text{H/}}$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(i) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$) $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \underbrace{\Rightarrow}_{\text{H}/} a + bi = a - bi \Rightarrow$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(i) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$) $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \underbrace{\Rightarrow}_{\text{H/}} a + bi = a - bi \Rightarrow b = -b \rightarrow$

$b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a + 0i$

Teorema 1

Sean $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ dos números complejos, entonces se verifica que

(i) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$) $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \underbrace{\Rightarrow}_{\text{H/}} a + bi = a - bi \Rightarrow b = -b \rightarrow$

$b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a + 0i = a - 0i = \overline{z} \therefore z = \overline{z}$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow \overline{\overline{z}} = a - (-b)\, i = a + bi = z$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(iii) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$z + \overline{z} = a + bi + a - bi =$

Teorema 1

Sean $z = a + b{\color{red}i}$ y $w = c + d{\color{red}i}$ dos números complejos, entonces se verifica que

(iii) $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = a \cancel{+ bi} + a \cancel{- bi} = a + a = 2a = 2\ \mathrm{Re}(z)$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(iii) $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$

$$z+\overline{z} = a+bi+a-bi = a\cancel{+bi}+a\cancel{-bi} = a+a = 2a = 2\ \mathrm{Re}(z)$$

(iv) $z - \overline{z} = 2\ \mathrm{Im}(z)i$

$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi =$$

Teorema 1

Sean $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ dos números complejos, entonces se verifica que

(iii) $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$

$z+\overline{z} = a+bi+a-bi = a\cancel{+bi}+a\cancel{-bi} = a+a = 2a = 2\ \mathrm{Re}(z)$

(iv) $z - \overline{z} = 2\ \mathrm{Im}(z)i$

$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi =$
$\cancel{a} + bi\cancel{-a} + bi = bi + bi = 2bi = 2\ \mathrm{Im}(z)i$

Teorema 1

Teorema 1

(v) $\text{Re}(z + w) = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$

Teorema 1

(v) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

(vi) $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

Teorema 1

(v) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

(vi) $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

Teorema 1

(v) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

(vi) $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Teorema 1

(v) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$

(vi) $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Teorema 1

(v) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

(vi) $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

Teorema 1

(v) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

(vi) $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

(x) $z\overline{z} = |z|^2$ (ya demostrado)

Teorema 1

(v) $\text{Re}(z+w) = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$

(vi) $\text{Im}(z+w) = \text{Im}(z) + \text{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

(x) $z\overline{z} = |z|^2$ (ya demostrado)

(xi) $|z| = |\overline{z}|$

Teorema 1

(v) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$

(vi) $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$

(vii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(viii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

(x) $z\overline{z} = |z|^2$ (ya demostrado)

(xi) $|z| = |\overline{z}|$

(xii) Si $z \neq 0$ entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\overline{z}w + z\overline{w} \in \mathbb{R}$

Teorema 1

Sean $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\overline{z}w + z\overline{w} \in \mathbb{R}$

$\overline{z}w + z\overline{w} =$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\bar{z}w + z\overline{w} \in \mathbb{R}$

$$\bar{z}w + z\overline{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di)$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\bar{z}w + z\bar{w} \in \mathbb{R}$

$$\bar{z}w + z\bar{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di)$$

$$\bar{z}w = ac + bd + adi - bci$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\bar{z}w + z\bar{w} \in \mathbb{R}$

$$\bar{z}w + z\bar{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di)$$

$$\bar{z}w = ac + bd + adi - bci$$

$$z\bar{w} = ac + bd - adi + bci$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\bar{z}w + z\bar{w} \in \mathbb{R}$

$\bar{z}w + z\bar{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di)$

$\bar{z}w = ac + bd + adi - bci$

$z\bar{w} = ac + bd - adi + bci$

Luego

$\bar{z}w + z\bar{w} = 2ac + 2bd$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiii) $\bar{z}w + z\bar{w} \in \mathbb{R}$

$$\bar{z}w + z\bar{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di)$$

$$\bar{z}w = ac + bd + adi - bci$$

$$z\bar{w} = ac + bd - adi + bci$$

Luego

$$\bar{z}w + z\bar{w} = 2ac + 2bd \in \mathbb{R}$$

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiv) $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z||w|$ Desigualdad de Cauchy-Schwars

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiv) $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z||w|$ Desigualdad de Cauchy-Schwars

(xv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Desigualdad triangular

Teorema 1

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces se verifica que

(xiv) $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z||w|$ Desigualdad de Cauchy-Schwars

(xv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Desigualdad triangular

(xvi) $||z| - |w|| \leq |z + w|$

Ejercicio 5. Probar

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$\star$ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- ⋆ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$
- ⋆ $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\, i}$

Ejercicio 5. Probar

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- $\star$ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$
- $\star$ $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\, i}$
- $\star$ $= (ac - bd) - (ad + bc)\, i = ac - bd - adi - bci$
- $\star$ $= a(c - di) - b(d + ci) = a(c - di) - b(d + ci)$

  como $i \cdot i(-1) = 1$ multiplicamos el 2do. término por él
- $\star$ $= a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

- $\star$ Sean $z =$

Ejercicio 5. Probar

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- ⋆ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$
- ⋆ $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\,i}$
- ⋆ $= (ac - bd) - (ad + bc)\,i = ac - bd - adi - bci$
- ⋆ $= a(c - di) - b(d + ci) = a(c - di) - b(d + ci)$

  como $i \cdot i\,(-1) = 1$ multiplicamos el 2do. término por él
- ⋆ $= a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

- ⋆ Sean $z = a + bi \quad w = c + di \qquad w \neq 0$

Ejercicio 5. Probar

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- $\star$ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$
- $\star$ $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\, i}$
- $\star$ $= (ac - bd) - (ad + bc)\, i = ac - bd - adi - bci$
- $\star$ $= a(c - di) - b(d + ci) = a(c - di) - b(d + ci)$

  como $i \cdot i\,(-1) = 1$ multiplicamos el 2do. término por él
- $\star$ $= a(c - di) - bi\,(c - di) = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

- $\star$ Sean $z = a + bi \quad w = c + di \qquad w \neq 0$
- $\star$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{w}w}\right)}$ con $\overline{w}w \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5. Probar

(viii) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- ⋆ Sean $z = a + bi \quad w = c + di$
- ⋆ $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\, i}$
- ⋆ $= (ac - bd) - (ad + bc)\, i = ac - bd - adi - bci$
- ⋆ $= a(c - di) - b(d + ci) = a(c - di) - b(d + ci)$

  como $i \cdot i\,(-1) = 1$ multiplicamos el 2do. término por él
- ⋆ $= a(c - di) - bi\,(c - di) = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ix) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

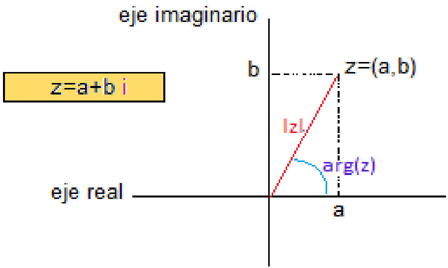
- ⋆ Sean $z = a + bi \quad w = c + di \qquad w \neq 0$
- ⋆ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{w}w}\right)}$ con $\overline{w}w \in \mathbb{R}$
- ⋆ $= \overline{z} \cdot \overline{\overline{w}} \cdot \frac{1}{\overline{w}w} = \overline{z} \cdot w \cdot \frac{1}{\overline{w}w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Expresión Binómica

Sea $z = a + bi$ conocidos $a, b \in \mathbb{R}$, z será un punto en el plano

$z = (a, b)$

La figura muestra los principales elementos asociados a un número complejo



Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

(2) Conociendo sus coordenadas polares: $(|z|, \arg(z)) = (\rho, \alpha)$

Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

(2) Conociendo sus coordenadas polares: $(|z|, \arg(z)) = (\rho, \alpha)$

La relación entre las coordenadas cartesianas de z y las coordenadas polares es

$a = \rho \cdot \cos(\alpha)$

Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

(2) Conociendo sus coordenadas polares: $(|z|, \arg(z)) = (\rho, \alpha)$

La relación entre las coordenadas cartesianas de z y las coordenadas polares es

$$a = \rho \cdot \cos(\alpha)$$

$$b = \rho \cdot \sin(\alpha)$$

Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

(2) Conociendo sus coordenadas polares: $(|z|, \arg(z)) = (\rho, \alpha)$

La relación entre las coordenadas cartesianas de z y las coordenadas polares es

$a = \rho \cdot \cos(\alpha)$

$b = \rho \cdot \sin(\alpha)$

De manera que z tiene dos formas de escritura

EB

$$z = a + bi$$

Expresión Trigonométrica

Un número complejo $z \neq 0$ puede ser ubicado de dos maneras en el plano complejo

(1) Conociendo sus coordenadas cartesianas: (a, b)

(2) Conociendo sus coordenadas polares: $(|z|, \arg(z)) = (\rho, \alpha)$

La relación entre las coordenadas cartesianas de z y las coordenadas polares es

$a = \rho \cdot \cos(\alpha)$

$b = \rho \cdot \sin(\alpha)$

De manera que z tiene dos formas de escritura

EB

$$z = a + bi$$

ET

$$z = \rho \cos(\alpha) + \rho i \cdot \sin(\alpha) = \rho [\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)]$$

Expresión Trigonométrica

Conocida: $z = a + bi$ se puede escribir la expresión trigonométrica

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Expresión Trigonométrica

Conocida: $z = a + bi$ se puede escribir la expresión trigonométrica

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Expresión Trigonométrica

Conocida: $z = a + bi$ se puede escribir la expresión trigonométrica

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$$z = \rho\left[\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right]$$

Circunferencia

La circunferencia se define por las coordenadas de su centro (α, β) y su radio ρ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

Circunferencia

La circunferencia se define por las coordenadas de su centro (α, β) y su radio ρ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$$

Elipse

La elipse se define por las coordenadas de su centro (α, β) , la longitud de sus ejes $a; b$ y por la distancia entre el centro y cualquier foco c, $c^2 = a^2 - b^2, a > b$

Ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola

La hipérbola se define por las coordenadas de su centro (α, β), la distancia entre sus vértices $2a$ y por la distancia entre sus focos c, $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola

La hipérbola se define por las coordenadas de su centro (α, β), la distancia entre sus vértices $2a$ y por la distancia entre sus focos c, $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Parábola

La parábola se define por las coordenadas de su vertice (α, β), las coordenadas de su foco $(\alpha, \beta + p)$, la recta directriz $x = \alpha - p$ y por el eje $y = \alpha$

Ecuación de la parábola:

$$(x - \alpha)^2 = 4p\,(y - \beta)$$

Ejercicio 6. Graficar los siguientes sobconjuntos de $\mathbb{C}$

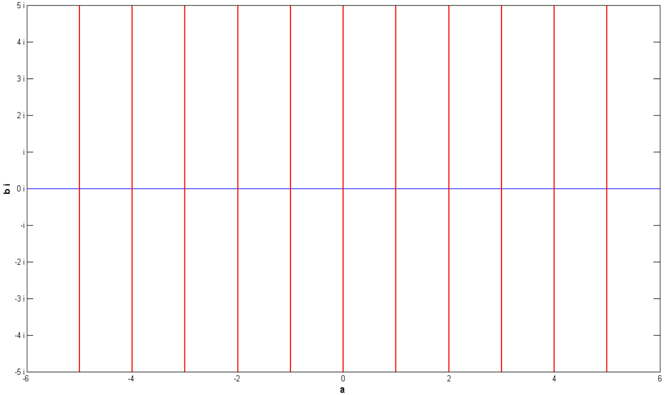
i) $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in \mathbb{Z}\}$

- ⋆ Si $z \in A, z = a + bi$ donde $a \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 6. Graficar los siguientes sobconjuntos de $\mathbb{C}$

i) $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in \mathbb{Z}\}$

- $\star$ Si $z \in A, z = a + bi$ donde $a \in \mathbb{Z}$



v) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$

- $\star$ $z = a + bi$

Ejercicio 6. Graficar los siguientes sobconjuntos de $\mathbb{C}$

v) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$

- $\star$ $z = a + bi$
- $\star$ Si $z \in B$, $|(a+1) + bi| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 2$

Ejercicio 6. Graficar los siguientes sobconjuntos de $\mathbb{C}$

v) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$

- $\star$ $z = a + bi$
- $\star$ Si $z \in B$, $|(a+1)+bi| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 2$
- $\star$ $(a+1)^2 + b^2 = 4$

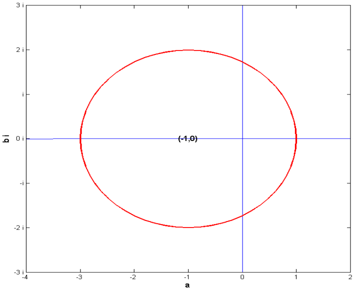
Ejercicio 6. Graficar los siguientes sobconjuntos de $\mathbb{C}$

v) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$

- $\star$ $z = a + bi$
- $\star$ Si $z \in B$, $|(a+1)+bi| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 2$
- $\star$ $(a+1)^2 + b^2 = 4$
- $\star$ Circunferencia de centro en el punto $(-1, 0)$ y radio 2

v) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$

- $\star$ $z = a + bi$
- $\star$ Si $z \in B$, $|(a+1)+bi| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 2$
- $\star$ $(a+1)^2 + b^2 = 4$
- $\star$ Circunferencia de centro en el punto $(-1, 0)$ y radio 2



Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- ⋆ $z = a + bi$ (EB)
- ⋆ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re(z))^2 = 2$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$
- $\star$ $(Re(z))^2 = a^2 = 2$

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- $z = a + bi$ (EB)
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$
- $(Re\,(z))^2 = a^2 = 2$
- $2 + b^2 = 9$, entonces

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- ⋆ $z = a + bi$ (EB)
- ⋆ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$
- ⋆ $(Re\,(z))^2 = a^2 = 2$
- ⋆ $2 + b^2 = 9$, entonces $b^2 = 7$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$
- $\star$ $(Re\,(z))^2 = a^2 = 2$
- $\star$ $2 + b^2 = 9$, entonces $b^2 = 7$
- $\star$ $a = \pm\sqrt{2}$ y $b = \pm\sqrt{7}$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

i) $|z| = 3$ y $(Re\,(z))^2 = 2$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, entonces $a^2 + b^2 = 9$
- $\star$ $(Re\,(z))^2 = a^2 = 2$
- $\star$ $2 + b^2 = 9$, entonces $b^2 = 7$
- $\star$ $a = \pm\sqrt{2}$ y $b = \pm\sqrt{7}$

$$\text{Por tanto, } z = \begin{cases} \sqrt{2} & + & \sqrt{7}i \\ \sqrt{2} & - & \sqrt{7}i \\ -\sqrt{2} & + & \sqrt{7}i \\ -\sqrt{2} & - & \sqrt{7}i \end{cases}$$

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$
- $\star$ $|3\bar{z} - z| = |3a - 3bi - (a + bi)| = |2a - 4bi| = \sqrt{4a^2 + 16b^2}$

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$
- $\star$ $|3\bar{z} - z| = |3a - 3bi - (a + bi)| = |2a - 4bi| = \sqrt{4a^2 + 16b^2}$
- $\star$ $\sqrt{4a^2 + 16b^2} = 1$, entonces

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$
- $\star$ $|3\bar{z} - z| = |3a - 3bi - (a + bi)| = |2a - 4bi| = \sqrt{4a^2 + 16b^2}$
- $\star$ $\sqrt{4a^2 + 16b^2} = 1$, entonces $4a^2 + 16b^2 = 1$

Ejercicio 7

Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$
- $\star$ $|3\bar{z} - z| = |3a - 3bi - (a + bi)| = |2a - 4bi| = \sqrt{4a^2 + 16b^2}$
- $\star$ $\sqrt{4a^2 + 16b^2} = 1$, entonces $4a^2 + 16b^2 = 1$
- $\star$ $\left(\frac{a}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\frac{1}{4}}\right)^2 = 1$

Ejercicio 7

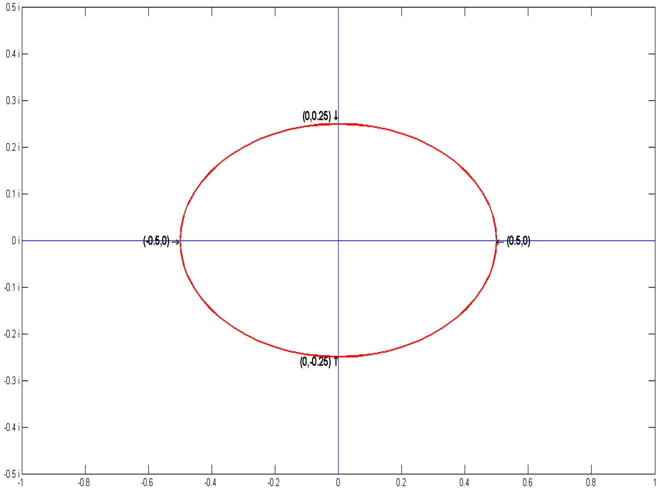
Hallar todos los complejos z que verifiquen las condiciones que se dan en cada caso

vii) $|3\bar{z} - z| = 1$

- $\star$ $z = a + bi$ (EB)
- $\star$ $\bar{z} = a - bi$
- $\star$ $|3\bar{z} - z| = |3a - 3bi - (a + bi)| = |2a - 4bi| = \sqrt{4a^2 + 16b^2}$
- $\star$ $\sqrt{4a^2 + 16b^2} = 1$, entonces $4a^2 + 16b^2 = 1$
- $\star$ $\left(\frac{a}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\frac{1}{4}}\right)^2 = 1$

  El resultado son los puntos de la elipse hallada

Ejercicio 7


(0,0.25)
(-0.5,0)
(0.5,0)
(0,-0.25)
0.5 i
0.4 i
0.3 i
0.2 i
0.1 i
0 i
-0.1 i
-0.2 i
-0.3 i
-0.4 i
-0.5 i
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Ejercicio 8

Sea w un número complejo de módulo 1. Probar que entonces

i) $w + \frac{1}{w} = 2Re\,(w)$

$\star$ $w + \frac{1}{w} =$

Sea w un número complejo de módulo 1. Probar que entonces

i) $w + \frac{1}{w} = 2Re\,(w)$

$\star$ $w + \frac{1}{w} = w + \frac{\bar{w}}{|w|^2} \underbrace{=}_{|w|=1}$

Ejercicio 8

Sea w un número complejo de módulo 1. Probar que entonces

i) $w + \frac{1}{w} = 2Re\,(w)$

$\star$ $w + \frac{1}{w} = w + \frac{\bar{w}}{|w|^2} \underbrace{=}_{|w|=1} w + \bar{w} =$

Sea w un número complejo de módulo 1. Probar que entonces

i) $w + \frac{1}{w} = 2Re\,(w)$

$\star$ $w + \frac{1}{w} = w + \frac{\bar{w}}{|w|^2} \underbrace{=}_{|w|=1} w + \bar{w} = 2Re\,(w)$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi =$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) =$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

- $\star$ $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

- $\star$ $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$
- $\star$ α está en el 2do. cuadrante

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\, |z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

- ⋆ $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$
- ⋆ α está en el 2do. cuadrante
- ⋆ $\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4} : \frac{-1}{2}\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 145^\circ$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \cos(\alpha) + i\,|z| \sin(\alpha) = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

- ⋆ $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$
- ⋆ α está en el 2do. cuadrante
- ⋆ $\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4} : \frac{-1}{2}\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 145°$
- ⋆ $z = \frac{\sqrt{6}}{4}\left[\cos\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + i \sin\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

- $\star$ $\bar{z} = |z| \left[\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)\right]$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z|\left[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

- $\star$ $\bar{z} = |z|\left[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right]$
- $\star$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))}$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

- ⋆ $\bar{z} = |z| \left[\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)\right]$
- ⋆ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z| \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\right]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

- ⋆ $\bar{z} = |z| \left[\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)\right]$
- ⋆ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$
- ⋆ $\frac{1}{z} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{|z|\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right)} =$

Ejercicio 9. Escribir la Expresión Trigonométrica de los siguientes complejos

Expresión Trigonométrica (ET)

$z = a + bi = |z|\left[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right]$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(vii) $\bar{z}$ y $\frac{1}{z}$, si $z \neq 0$ a partir de la ET de z

- $\star$ $\bar{z} = |z|\left[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right]$
- $\star$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} = \frac{1}{|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))}\frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$
- $\star$ $\frac{1}{z} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{|z|\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right)} = |z|^{-1}\left[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right]$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

$z \cdot w =$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right]\left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1)\right] \left[\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2)\right]$

$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)\right]$

$+ i \left[\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_1)\right]$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right] \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1\right) \cos\left(\alpha_2\right) - \sin\left(\alpha_1\right) \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

$+ i \left[\cos\left(\alpha_1\right) \sin\left(\alpha_2\right) + \cos\left(\alpha_2\right) \sin\left(\alpha_1\right)\right]$

Sabemos que

$\sin\left(\alpha + \beta\right) = \cos\left(\alpha\right) \sin\left(\beta\right) + \cos\left(\beta\right) \sin\left(\alpha\right)$

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right]$;

$w = \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1\right) + i \sin\left(\alpha_1\right)\right] \left[\cos\left(\alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1\right) \cos\left(\alpha_2\right) - \sin\left(\alpha_1\right) \sin\left(\alpha_2\right)\right]$

$+ i \left[\cos\left(\alpha_1\right) \sin\left(\alpha_2\right) + \cos\left(\alpha_2\right) \sin\left(\alpha_1\right)\right]$

Sabemos que

$\sin\left(\alpha + \beta\right) = \cos\left(\alpha\right) \sin\left(\beta\right) + \cos\left(\beta\right) \sin\left(\alpha\right)$

$\cos\left(\alpha + \beta\right) = \cos\left(\alpha\right) \cos\left(\beta\right) - \sin\left(\beta\right) \sin\left(\alpha\right)$, luego

Teorema de de Moivre - Producto de ET

Si $z = \rho_1 [\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1)]$;

$w = \rho_2 [\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2)]$

son las ET de z y w, entonces la ET del producto es:

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1)] [\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2)]$

$= \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)]$

$+ i [\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_1)]$

Sabemos que

$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \sin(\alpha)$, luego

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y queremos calcular $\prod_{j=1}^{k} z_j$ con $z_j = \rho_j \left[\cos\left(\alpha_j\right) + i \sin\left(\alpha_j\right)\right]$?

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y queremos calcular $\prod_{j=1}^{k} z_j$ con $z_j = \rho_j \left[\cos\left(\alpha_j\right) + i \sin\left(\alpha_j\right)\right]$?

$$z_1 \cdots z_k =$$

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y queremos calcular $\prod_{j=1}^{k} z_j$ con $z_j = \rho_j \left[\cos\left(\alpha_j\right) + i \sin\left(\alpha_j\right)\right]$?

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j$$

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y queremos calcular $\prod_{j=1}^{k} z_j$ con $z_j = \rho_j \left[\cos\left(\alpha_j\right) + i \sin\left(\alpha_j\right)\right]$?

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) + \right.$$

Teorema 3

Demostramos

$$z \cdot w = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y queremos calcular $\prod_{j=1}^{k} z_j$ con $z_j = \rho_j \left[\cos\left(\alpha_j\right) + i \sin\left(\alpha_j\right)\right]$?

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right)\right]$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k =$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) \right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) \right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

$$z^k =$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) \right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

$$z^k = [\rho\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)]^k =$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) \right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

$$z^k = [\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^k = \rho^k$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) \right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

$$z^k = \left[\rho\left(\cos\alpha + i \sin\alpha\right)\right]^k = \rho^k \left[\cos\left(k\alpha\right) + \right.$$

Teorema 4

Vimos que

$$z_1 \cdots z_k = \prod_{j=1}^{k} \rho_j \left[\cos\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) + i \sin\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right)\right]$$

¿Que ocurre si tenemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z \in \mathbb{C}$ y queremos calcular z^k?

$$\boxed{z^k = [\rho\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)]^k = \rho^k\,[\cos(k\alpha) + \sin(k\alpha)]}$$

Ángulos notables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1 + i)^{20}$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^{20} =$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^{20} =$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^{20} =$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$5\pi \equiv \pi \implies$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

Del ejercicio 4(x)

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \arg(1+i)$$
$$= \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}$$
$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$(1+i)^{20} =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

Del ejercicio 4(x)

$$(1+i)^{4k} = (-4)^k$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arg(1+i)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^{20} =$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

Como

$$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$$

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

Del ejercicio 4(x)

$$(1+i)^{4k} = (-4)^k$$

$$(1+i)^{20} = (1+i)^{4\cdot 5}$$

Ejemplo 1

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \arg(1+i)$

$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$(1+i)^{20} =$

$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= (2)^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$

Como

$5\pi \equiv \pi \implies (1+i)^{20} = -(2)^{10}$

Hallar la EB de $(1+i)^{20}$

Del ejercicio 4(x)

$(1+i)^{4k} = (-4)^k$

$(1+i)^{20} = (1+i)^{4\cdot 5}$

$= (-4)^5 = -(2)^{10}$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el módulo de z

$|z| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el argumento de z

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el argumento de z

$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el argumento de z

$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

Pero ¿En qué cuadrante está z?

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el argumento de z

$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

Pero ¿En qué cuadrante está z?En el cuarto cuadrante

Utilizamos la tabla de ángulos notables referida al primer cuadrante $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

en este caso

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Para aplicar el Teorema de de Moivre necesitamos calcular el argumento de z

$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

Pero ¿En qué cuadrante está z?En el cuarto cuadrante

Utilizamos la tabla de ángulos notables referida al primer cuadrante $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

en este caso $-\frac{\pi}{3} = -60^\circ \equiv 5\frac{\pi}{3}$

$$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 5\frac{\pi}{3}$$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Calculamos

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Calculamos

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$

$$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 5\frac{\pi}{3}$$

Así, $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Por el Teorema 4

$z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740} =$

$2^{1740}\left(\cos\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Calculamos

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$
$$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 5\tfrac{\pi}{3}$$

Así, $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(5\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(5\tfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Por el Teorema 4

$z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740} =$

$2^{1740}\left(\cos\left(1740 \cdot 5\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(1740 \cdot 5\tfrac{\pi}{3}\right)\right)$

$1740 \cdot 5\tfrac{\pi}{3} = 580 \cdot 5\pi = 580$

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Calculamos

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$
$$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 5\frac{\pi}{3}$$

Así, $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Por el Teorema 4

$z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740} =$
$2^{1740}\left(\cos\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$1740 \cdot 5\frac{\pi}{3} = 580 \cdot 5\pi = 580 \cdot \pi = 290$

Ejemplo 2

Potencia de un número complejo

Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcular $z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740}$

Calculamos

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = 2$$

$$\arg(z) = \arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 5\frac{\pi}{3}$$

Así, $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Por el Teorema 4

$z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740} =$

$2^{1740}\left(\cos\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(1740 \cdot 5\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$1740 \cdot 5\frac{\pi}{3} = 580 \cdot 5\pi = 580 \cdot \pi = 290 \cdot 2\pi \equiv 0$

$z^{1740} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1740} = 2^{1740}$

Ejercicio 10

Hallar expresiones polinómicas en $\cos(x)$ y $\sin(x)$ para $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, $n = 2$

Ejercicio 10

Hallar expresiones polinómicas en $\cos(x)$ y $\sin(x)$ para $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, $n = 2$

- $\star$ $[\cos(nx) + i\sin(nx)] = [\cos(x) + i\sin(x)]^n$

Ejercicio 10

Hallar expresiones polinómicas en $\cos(x)$ y $\sin(x)$ para $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, $n = 2$

- ⋆ $[\cos(nx) + i\sin(nx)] = [\cos(x) + i\sin(x)]^n$
- ⋆ $[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\,(i\sin(x))^k$

Ejercicio 10

Hallar expresiones polinómicas en $\cos(x)$ y $\sin(x)$ para $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, $n = 2$

- ⋆ $[\cos(nx) + i\sin(nx)] = [\cos(x) + i\sin(x)]^n$
- ⋆ $[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\,(i\sin(x))^k$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\,(i\sin(x))^k$$

Hallar expresiones polinómicas en $\cos(x)$ y $\sin(x)$ para $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, $n = 2$

- ⋆ $[\cos(nx) + i\sin(nx)] = [\cos(x) + i\sin(x)]^n$
- ⋆ $[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\,(i\sin(x))^k$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\,(i\sin(x))^k$$

$$= \binom{n}{0}\cos^n(x)\sin^0(x)\,i^0 + \binom{n}{1}\cos^{n-1}(x)\sin^1(x)\,i^1$$

$$+ \binom{n}{2}\cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,i^2 + \cdots + \binom{n}{n}\cos^0(x)\sin^n(x)\,i^n$$

Ejercicio 10

$n = 2$

$$[\cos(2x) + i\sin(2x)]$$

$$=$$

$n = 2$

$$
\begin{aligned}
& [\cos(2x) + i \sin(2x)] \\
= \quad & \binom{2}{0} \cos^2(x) + \binom{2}{1} \cos(x) \sin(x)\, i + \binom{2}{2} \sin^2(x)\, i^2 \\
= \quad &
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10

$n = 2$

$$
\begin{aligned}
& [\cos(2x) + i \sin(2x)] \\
= \quad & \binom{2}{0} \cos^2(x) + \binom{2}{1} \cos(x) \sin(x)\, i + \binom{2}{2} \sin^2(x)\, i^2 \\
= \quad & \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x)\, i - \sin^2(x)
\end{aligned}
$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} & [\cos(2x) + i\sin(2x)] \\ = & \binom{2}{0}\cos^2(x) + \binom{2}{1}\cos(x)\sin(x)\, i + \binom{2}{2}\sin^2(x)\, i^2 \\ = & \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x)\, i - \sin^2(x) \end{aligned}$$

- ⋆ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- ⋆ $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$

Teorema Fundamental del Álgebra

Dada la ecuación polinómica:

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0 = 0$

donde $a_n \neq 0$; $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ es el grado de la ecuación

z es una solución de la ecuación dada si

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

Teorema Fundamental del Álgebra

Dada la ecuación polinómica:

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0 = 0$

donde $a_n \neq 0$; $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ es el grado de la ecuación

z es una solución de la ecuación dada si

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

Es decir, z es raíz del polinomio $P(X) \Leftrightarrow P(z) = 0$

Teorema Fundamental del Álgebra

Dada la ecuación polinómica:

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0 = 0$

donde $a_n \neq 0$; $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ es el grado de la ecuación

z es una solución de la ecuación dada si

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

Es decir, z es raíz del polinomio $P(X) \Leftrightarrow P(z) = 0$

Se nos plantean dos interrogantes

(1) ¿La ecuación polinómica dada siempre tiene solución?

(2) Si tiene solución, ¿existe un método para encontrarla?

Teorema Fundamental del Álgebra

(1) ¿La ecuación polinómica dada siempre tiene solución?

La respuesta al primer interrogante es el TFA

Dados $n \geq 1$ y el polinomio
$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0$

la ecuación polinómica siempre es resoluble, es decir

$(\exists z \in \mathbb{C})\,[P(z) = 0]$

siempre existe un número complejo que la resuelve

Herramientas

(2) Si tiene solución, ¿existe un método para encontrarla?

La respuesta al segundo interrogante está en acumular herramientas

Ecuación polinómica de grado 1: $P(X) = a_1 X + a_0 = 0$

Se resuelve sencillamente despejando $X = -\frac{a_0}{a_1}$

Ejemplo 1

$P(X) = 2X - 4 = 0 \implies X = \frac{4}{2} = 2$

Ejemplo 2

$P(X) = (3+i)X + (1-i) = 0$

$\Rightarrow X = -\frac{(1-i)}{(3+i)}\frac{(3-i)}{(3-i)} = -\frac{2}{10} + \frac{4}{10}i = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$P(X)$ tiene 1 raíz

Herramientas

Ecuación polinómica de grado 2:

$P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$

Ejemplo 1

$P(X) = X^2 + 1 = 0 \implies X = i$ ya que

$P(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

Además, para $X = -i$; $P(-i) = (-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

$P(X)$ tiene 2 raíces

Ecuación polinómica de grado 2:

$$P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

Ejemplo 2 Completar cuadrados

$$P(X) = X^2 + 3X + 1 = 0$$

En este caso no tenemos un cuadrado perfecto de la forma

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

Vamos a completar cuadrados

$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

Ejemplo 2 Completar cuadrados

$$P(X) = X^2 + 3X + 1 = 0$$

$$X^2 + 2\frac{3}{2}X + 1 = 0$$

Pero, $\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 = X^2 + 2\frac{3}{2}X + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$X^2 + 3X + 1 = X^2 + 2\frac{3}{2}X + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 1 \Rightarrow$

$X^2 + 3X + 1 = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$

$(X^2 - Y^2) = (X - Y)(X + Y)$

Ejemplo 2 Completar cuadrados y diferencia de cuadrados

$$P(X) = X^2 + 3X + 1 = 0$$

$= \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$

$\left(X + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\left(X + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$ ó $\left(X + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\left(X - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0$ ó $\left(X - \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow$

$P(X) =$ tiene 2 raíces

$X_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $X_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ejercicio 11

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

Ejercicio 11

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

- $\star$ $z^3 - z =$

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

$\star$ $z^3 - z = z\left(z^2 - 1\right) = 0 \implies$

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

- ⋆ $z^3 - z = z\left(z^2 - 1\right) = 0 \implies z = 0 \vee \left(z^2 - 1\right) = 0$

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

$\star$ $z^3 - z = z\left(z^2 - 1\right) = 0 \implies z = 0 \vee \left(z^2 - 1\right) = 0$

$\implies z = 0 \vee z^2 = 1 \implies$

Ejercicio 11

Usando la fórmula de raíces cuadradas de números complejos, hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(i) $z^3 - z = 0$

$\star$ $z^3 - z = z\left(z^2 - 1\right) = 0 \implies z = 0 \vee \left(z^2 - 1\right) = 0$

$\implies z = 0 \vee z^2 = 1 \implies z = 0 \vee z = 1 \vee z = -1$

que son las 3 soluciones buscadas

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

$\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 +$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z +$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 -$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 +$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- ⋆ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 +$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- ⋆ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 -$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- ⋆ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- ⋆ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$

Ejercicio 11 iii) $z^2+z+1=0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2+z+1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2+z+1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- $\star$ $z^2+z+1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$
- $\star$ $z^2+z+1 =$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- ⋆ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- ⋆ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
- ⋆ $\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \vee$

Ejercicio 11 iii) $z^2+z+1=0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $\star$ $z^2+z+1 = z^2+2\left(\frac{1}{2}\right)z+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=0$
- $\star$ $z^2+z+1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$
- $\star$ $z^2+z+1=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$
- $\star$ $z^2+z+1=\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$
- $\star$ $\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0 \vee \left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- ⋆ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- ⋆ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$
- ⋆ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
- ⋆ $\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \vee \left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
- ⋆ Las 2 soluciones son:

Ejercicio 11 iii) $z^2 + z + 1 = 0$

Paso 1 : Completar cuadrados

- $\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

Paso 2: Diferencia de cuadrados

- $\star$ Sabemos que, $\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
- $\star$ $\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \vee \left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
- $\star$ Las 2 soluciones son: $\boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \rightarrow$

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \to \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \to \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]
- $\star$ $z^2 - \frac{1}{2}(1+i)^2 = 0$

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \to \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]
- $\star$ $z^2 - \frac{1}{2}(1+i)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \rightarrow \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]
- $\star$ $z^2 - \frac{1}{2}(1+i)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$
- $\star$ $\left[z - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right]\left[z + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0,$

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \to \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]
- $\star$ $z^2 - \frac{1}{2}(1+i)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$
- $\star$ $\left[z - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right]\left[z + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0,$
- $\star$ Las 2 soluciones son:

Ejercicio 11 ix) $z^2 - i = 0$

Diferencia de cuadrados

- $\star$ $(1+i)^2 = 2i \to \frac{(1+i)^2}{2} = i$ [ejercicio 4]
- $\star$ $z^2 - \frac{1}{2}(1+i)^2 = 0$
- $\star$ $z^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$
- $\star$ $\left[z - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right]\left[z + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0,$
- $\star$ Las 2 soluciones son: $\boxed{z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$

Raíces n-ésimas

Se llaman raíces n-ésimas de un número complejo a las soluciones de la ecuación

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

Raíces n-ésimas

Se llaman raíces n-ésimas de un número complejo a las soluciones de la ecuación

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

⋆ Teorema 6

Dada la ecuación polinómica de grado $n, X^n = w$ con $w \neq 0$

Sea $w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$ la ET de w.

Entonces hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = w$:

Raíces n-ésimas

Se llaman raíces n-ésimas de un número complejo a las soluciones de la ecuación

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

⋆ Teorema 6

Dada la ecuación polinómica de grado $n, X^n = w$ con $w \neq 0$

Sea $w = \rho\,(cos\alpha + i \sin \alpha)$ la ET de w.

Entonces hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = w$:

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ y están dadas por la fórmula:

Raíces n-ésimas

Se llaman raíces n-ésimas de un número complejo a las soluciones de la ecuación

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

⋆ Teorema 6

Dada la ecuación polinómica de grado $n, X^n = w$ con $w \neq 0$

Sea $w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$ la ET de w.

Entonces hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = w$:

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ y están dadas por la fórmula:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\,(cos\alpha + i \sin \alpha)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\,(cos\alpha + i \sin\alpha)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

que se calculan con

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

que se calculan con

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Números Complejos

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\left(cos\alpha + i\sin\alpha\right)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

que se calculan con

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Sea $z = \sigma\left(cos\beta + i\sin\beta\right)$ es una solución, por de Moivre

$z^n = \sigma^n\left(cos\left(n\beta\right) + i\sin\left(n\beta\right)\right) = w = \rho\left(cos\alpha + i\sin\alpha\right)$

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\,(cos\alpha + i \sin\alpha)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

$$z^n = \sigma^n\,(cos\,(n\beta) + i\sin\,(n\beta)) = w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Al igualar las partes reales y las imaginarias:

$$\sigma^n cos\,(n\beta) \quad = \quad \rho\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \sigma^{2n}\cos^2(n\beta) \quad = \quad \rho^2\cos^2\alpha$$

Raíces n-ésimas

Hay n raíces n-ésimas de $w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$ en

$$X^n = w \text{ con } w \in \mathbb{C}$$

$$z^n = \sigma^n\,(cos\,(n\beta) + i\sin\,(n\beta)) = w = \rho\,(cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Al igualar las partes reales y las imaginarias:

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^n cos\,(n\beta) = \rho\cos\alpha & \Rightarrow & \sigma^{2n}\cos^2(n\beta) = \rho^2\cos^2\alpha \\
\sigma^n sin\,(n\beta) = \rho\sin\alpha & \Rightarrow & \sigma^{2n}\sin^2(n\beta) = \rho^2\sin^2\alpha
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^{2n}\left[\cos^2(n\beta) + \sin^2(n\beta)\right] & = & \rho^2\left[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] \\
\sigma^{2n} & = & \rho^2 \\
\sigma^n & = & \rho \\
\sigma & = & \sqrt[n]{\rho}
\end{array}$$

Raíces n-ésimas

Probamos $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$

$$\sigma^n cos\left(n\beta\right) = \rho\cos\alpha \Rightarrow \cos\left(n\beta\right) = \cos\alpha$$

Raíces n-ésimas

Probamos $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$

$$\begin{array}{rclcrcl} \sigma^n cos\left(n\beta\right) & = & \rho\cos\alpha \Rightarrow & \cos\left(n\beta\right) & = & \cos\alpha \\ \sigma^n sin\left(n\beta\right) & = & \rho\sin\alpha \Rightarrow & \sin\left(n\beta\right) & = & \sin\alpha \end{array}$$

$n \cdot \beta = \alpha + k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\beta = \frac{\alpha+k2\pi}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\text{Buscamos los } w_k \in \mathbb{C} \text{ tales que } w_k^n = 1 + i$$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^n = 1 + i$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^n = 1 + i$

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right) \\ |z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\text{Buscamos los } w_k \in \mathbb{C} \text{ tales que } w_k^n = 1 + i$$

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right) \\ |z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ \alpha &= \arg(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

con $k = 0, \ldots, n-1$

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

- $\star$ $w_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]$

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

- $\star$ $w_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right]$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

- $\star$ $w_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right]$

Ejercicio 12

Calcular las raíces n-ésimas de los $z \in \mathbb{C}$ que se indican en cada caso

(i) $z = 1 + i \quad n = 4$

- $\star$ $w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)\right)$
- $\star$ $|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\alpha+2k\pi}{4} = \frac{\pi/4+2k\pi}{4} = \frac{\pi+8k\pi}{16}$

- $\star$ $w_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right]$
- $\star$ $w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right]$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

- $\star$ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

- $\star$ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$
- $\star$ $w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

- ⋆ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$
- ⋆ $w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$

- ⋆ $w_0 = \left[\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3}\right)\right] = 1$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

- ⋆ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$
- ⋆ $w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$

- ⋆ $w_0 = \left[\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3}\right)\right] = 1$
- ⋆ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(iii) $z^3 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^3 = 1$

- $\star$ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$
- $\star$ $w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$

- $\star$ $w_0 = \left[\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3}\right)\right] = 1$
- $\star$ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $w_2 = \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

- $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

- $\star$ $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- $\star$ $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

- $(z - 1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$
- $z^4 - 1 = 0$

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

- ⋆ $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- ⋆ $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$
- ⋆ $z^4 - 1 = 0$
- ⋆ $z^4 = 1$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z - 1)$

- $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$
- $z^4 - 1 = 0$
- $z^4 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^4 = 1$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z-1)$

- ⋆ $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- ⋆ $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$
- ⋆ $z^4 - 1 = 0$
- ⋆ $z^4 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^4 = 1$

- ⋆ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$

Ejercicio 13

Hallar las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones polinómicas

(ii) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Vamos a multiplicar ambos miembros por $(z-1)$

- $\star$ $(z-1)\left(z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0$
- $\star$ $z^4 + z^3 + z^2 + z - z^3 - z^2 - z - 1 = 0$
- $\star$ $z^4 - 1 = 0$
- $\star$ $z^4 = 1$

Buscamos los $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $w_k^4 = 1$

- $\star$ $|z| = 1, \quad \alpha = \arg(z) = 0$
- $\star$ $w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- ⋆ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- ⋆ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3$
- ⋆ $w_0 = [\cos(0) + i\sin(0)] = 1$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- $\star$ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $\star$ $w_0 = [\cos(0) + i\sin(0)] = 1$
- $\star$ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = i$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- $\star$ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $\star$ $w_0 = [\cos(0) + i\sin(0)] = 1$
- $\star$ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = i$
- $\star$ $w_2 = [\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -1$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- $\star$ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $\star$ $w_0 = [\cos(0) + i \sin(0)] = 1$
- $\star$ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = i$
- $\star$ $w_2 = [\cos(\pi) + i \sin(\pi)] = -1$
- $\star$ $w_3 = \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -i$

Ejercicio 13

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- ⋆ $w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- ⋆ $w_0 = [\cos(0) + i\sin(0)] = 1$
- ⋆ $w_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = i$
- ⋆ $w_2 = [\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -1$
- ⋆ $w_3 = \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -i$

Respuesta

Las soluciones buscadas son $i, -i$ y -1 . Se descarta la solución 1 que fue agregada al multiplicar por $(z-1)$

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Al ser $w = 1 \Rightarrow \rho = 1$ y $\alpha = 0$

El Teorema 6 asegura que hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = 1$, llamadas G_n

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Al ser $w = 1 \Rightarrow \rho = 1$ y $\alpha = 0$

El Teorema 6 asegura que hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = 1$, llamadas G_n

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ y estarán dadas por la fórmula:

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Al ser $w = 1 \Rightarrow \rho = 1$ y $\alpha = 0$

El Teorema 6 asegura que hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = 1$, llamadas G_n

$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ y estarán dadas por la fórmula:

$$\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Al ser $w = 1 \Rightarrow \rho = 1$ y $\alpha = 0$

El Teorema 6 asegura que hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = 1$, llamadas G_n

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ y estarán dadas por la fórmula:

$$\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Observamos

$z_0 = 1$ para todo n

Raíces n-ésimas de la unidad

Veamos las raíces n-ésimas de 1

$$X^n = 1$$

Al ser $w = 1 \Rightarrow \rho = 1$ y $\alpha = 0$

El Teorema 6 asegura que hay **exactamente** n soluciones distintas de $X^n = 1$, llamadas G_n

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ y estarán dadas por la fórmula:

$$\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Observamos

$z_0 = 1$ para todo n

$|z_k| = 1$ para $z_k \in G_n$. Es decir, todas las raíces n-ésimas de 1 están sobre la circunferencia de radio 1

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

$X^2 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_2 = \{1, -1\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

$X^2 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_2 = \{1, -1\}$

$X^3 = 1$ el conjunto de soluciones es
$G_3 = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

$X^2 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_2 = \{1, -1\}$

$X^3 = 1$ el conjunto de soluciones es
$G_3 = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$

$X^4 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_4 = \{1, -1, i, -i\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

$X^2 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_2 = \{1, -1\}$

$X^3 = 1$ el conjunto de soluciones es
$G_3 = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$

$X^4 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_4 = \{1, -1, i, -i\}$ y así.

Raíces n-ésimas de la unidad

Ejemplo 1

$X^1 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_1 = \{1\}$

$X^2 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_2 = \{1, -1\}$

$X^3 = 1$ el conjunto de soluciones es
$G_3 = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$

$X^4 = 1$ el conjunto de soluciones es $G_4 = \{1, -1, i, -i\}$ y así.

En el plano complejo, los elementos de G_n se ubican en los vértices de un polígono de n lados

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

$z \in G_n \Rightarrow z = z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0, \ldots, n-1 \Rightarrow |z| = 1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

$z \in G_n \Rightarrow z = z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0, \ldots, n-1 \Rightarrow |z| = 1$

(ii) $z \in G_n$, entonces $\bar{z} \in G_n$ y $\frac{1}{z} \in G_n$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

$z \in G_n \Rightarrow z = z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0, \ldots, n-1 \Rightarrow |z| = 1$

(ii) $z \in G_n$, entonces $\bar{z} \in G_n$ y $\frac{1}{z} \in G_n$

$z \in G_n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow \overline{z^n} = 1 \Rightarrow \bar{z}^n = 1 \Rightarrow \bar{z} \in G_n$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

$z \in G_n \Rightarrow z = z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0, \dots, n-1 \Rightarrow |z| = 1$

(ii) $z \in G_n$, entonces $\bar{z} \in G_n$ y $\frac{1}{z} \in G_n$

$z \in G_n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow \overline{z^n} = 1 \Rightarrow \bar{z}^n = 1 \Rightarrow \bar{z} \in G_n$

$z \in G_n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in G_n$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(i) Si $z \in G_n$, entonces $|z| = 1$

$z \in G_n \Rightarrow z = z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0, \ldots, n-1 \Rightarrow |z| = 1$

(ii) $z \in G_n$, entonces $\bar{z} \in G_n$ y $\frac{1}{z} \in G_n$

$z \in G_n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow \overline{z^n} = 1 \Rightarrow \bar{z}^n = 1 \Rightarrow \bar{z} \in G_n$

$z \in G_n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in G_n$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iii) $\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n-1}\right\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iii) $\boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n-1}\right\}$

$z_k \in G_n \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n-1}\right\}$

$z_k \in G_n \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k =$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n-1}\right\}$

$z_k \in G_n \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k = z_1^k$

para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

$$\text{(iii)} \quad \boxed{z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

La raíz de menor argumento positivo es

$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

y verifica que $z_k = z_1^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n-1}\right\}$

$z_k \in G_n \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k = z_1^k$

para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

n es divisor de $m \Rightarrow m = q \cdot n, q \in \mathbb{N}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

n es divisor de $m \Rightarrow m = q \cdot n, q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

n es divisor de $m \Rightarrow m = q \cdot n, q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

$\Rightarrow z \in G_m$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

n es divisor de $m \Rightarrow m = q \cdot n, q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

$\Rightarrow z \in G_m \Rightarrow G_n \subset G_m$

Ejemplo

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(iv) Si n es divisor de m, entonces $G_n \subset G_m$

n es divisor de $m \Rightarrow m = q \cdot n, q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

$\Rightarrow z \in G_m \Rightarrow G_n \subset G_m$

Ejemplo

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

3 divide a 6

$G_6 = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(v) Si n es par y $z \in G_n$, entonces $-z \in G_n$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(v) Si n es par y $z \in G_n$, entonces $-z \in G_n$

Si n es par $\Rightarrow n = 2q, q \in \mathbb{N}$ y $z \in G_n \Rightarrow (-z)^n = ((-1)\,z)^n$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(v) Si n es par y $z \in G_n$, entonces $-z \in G_n$

Si n es par $\Rightarrow n = 2q, q \in \mathbb{N}$ y $z \in G_n \Rightarrow (-z)^n = ((-1)\,z)^n$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

$= (-1)^n\, z^n = (-1)^{2q}\, z^n = z^n = 1 \Rightarrow -z \in G_n$

Ejemplo

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

Raíces n-ésimas de la unidad

Teorema 7

(v) Si n es par y $z \in G_n$, entonces $-z \in G_n$

Si n es par $\Rightarrow n = 2q, q \in \mathbb{N}$ y $z \in G_n \Rightarrow (-z)^n = ((-1)\, z)^n$

$\Rightarrow z \in G_n \Rightarrow z^m = z^{qn} = (z^n)^q = 1^q = 1$

$= (-1)^n z^n = (-1)^{2q} z^n = z^n = 1 \Rightarrow -z \in G_n$

Ejemplo

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

3 divide a 6

$G_6 = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

Ejercicio 14

Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que todas las raíces n-ésimas de z pueden describirse en la forma

$$\omega = \omega_0 \xi,$$

Ejercicio 14

Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que todas las raíces n-ésimas de z pueden describirse en la forma

$$\omega = \omega_0 \xi,$$

ω_0 es una raíz n-ésima particular de z y

Ejercicio 14

Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que todas las raíces n-ésimas de z pueden describirse en la forma

$$\omega = \omega_0 \xi,$$

ω_0 es una raíz n-ésima particular de z y
ξ es una raíz n-ésima de 1.

Ejercicio 14

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$
$$k = 0, \ldots, n-1$$

Ejercicio 14

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\
&\quad k = 0,\ldots,n-1 \\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 14

$$\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\\
&\quad k=0,\ldots,n-1\\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\\
\xi_r &= \cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n} \quad r=0,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

Ejercicio 14

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\\
& \quad k = 0,\dots,n-1\\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\\
\xi_r &= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \quad r = 0,\dots,n-1\\
w_0\xi_r &=
\end{aligned}
$$

Ejercicio 14

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\\
&\quad k = 0,\ldots,n-1\\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\\
\xi_r &= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \quad r = 0,\ldots,n-1\\
w_0\xi_r &= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n} - \sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n}\right.\\
&\qquad \left. + i\cos\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n}\right]\\
&=
\end{aligned}
$$

Ejercicio 14

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\
& \quad k = 0,\ldots,n-1 \\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right) \\
\xi_r &= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \qquad r = 0,\ldots,n-1 \\
w_0\xi_r &= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n} - \sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n}\right. \\
& \qquad \left. +i\cos\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n}\right] \\
&= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\alpha+2r\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2r\pi}{n}\right] \\
&=
\end{aligned}
$$

Ejercicio 14

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\\
& \quad k = 0, \ldots, n-1\\
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\\
\xi_r &= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n} \quad r = 0, \ldots, n-1\\
w_0\xi_r &= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n} - \sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n}\right.\\
&\qquad \left. + i\cos\frac{\alpha}{n}\sin\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\cos\frac{2r\pi}{n}\right]\\
&= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\alpha+2r\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2r\pi}{n}\right]\\
&= w_r \quad r = 0, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

$\star$ $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right)\ k \in \mathbb{Z}$

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right) k \in \mathbb{Z}$
- $\star$ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right) k \in \mathbb{Z}$
- $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right)\ k \in \mathbb{Z}$
- $\star$ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Raíces cuartas de z

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3+2k\pi}{4}\right)\right) \; k \in \mathbb{Z}$
- $\star$ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Raíces cuartas de z

- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right)\ k \in \mathbb{Z}$
- $\star$ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Raíces cuartas de z

- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- $\star$ $|z| = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\star$ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- $\star$ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right) k \in \mathbb{Z}$
- $\star$ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Raíces cuartas de z

- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$
- $\star$ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right]$

Ejercicio 14

v) $z = -1 - \sqrt{3}i, \quad n = 4$

- ⋆ $|z| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- ⋆ $\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$
- ⋆ $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)\right) \, k \in \mathbb{Z}$
- ⋆ $\omega_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- ⋆ $\xi \in G_4 = \{1, i, -i, -1\}$

Raíces cuartas de z

- ⋆ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- ⋆ $\sqrt[4]{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right]$
- ⋆ $\sqrt[4]{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$
- ⋆ $\sqrt[4]{2}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k =$$

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} =$$

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Ejercicio 16

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$$G_3 = \left\{1, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$1 + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Calcular la suma y el producto de todos los elementos de G_n

Si $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la de menor argumento positivo que verifica que $z_k = z_1^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$; entonces

$$G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$$

Suma de G_n

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$$G_3 = \left\{1, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$1 + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 - 1 + i\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k \quad =$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} =$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} =$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$=$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} =$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ (-1) & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ (-1) & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ (-1) & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} \left(z_1^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ (-1) & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejercicio 16. Calcular el producto de todos los elementos de $G_n = \left\{1, z_1^1, z_1^2, \cdots, z_1^{n-1}\right\}$

Producto de G_n

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_1^k = z_1^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = z_1^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} (z_1^n)^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ \left(z_1^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^{\frac{(n-1)}{2}} & n \text{ impar} \\ (-1)^{(n-1)} & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ (-1) & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo: G_3

$G_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{(\sqrt{3})}{4} = 1$

Ejercicio 17

Ejercicio 17

Si se pone $i = \sqrt{-1}$ hallar el error en el siguiente razonamiento

Ejercicio 17

Si se pone $i = \sqrt{-1}$ hallar el error en el siguiente razonamiento

- $\star$ $-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$

Ejercicio 17

Si se pone $i = \sqrt{-1}$ hallar el error en el siguiente razonamiento

$\star$ $-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \underbrace{=}_{\text{error}} \sqrt{(-1)(-1)} =$

Ejercicio 17

Si se pone $i = \sqrt{-1}$ hallar el error en el siguiente razonamiento

- $\star$ $-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \underbrace{=}_{error} \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

Ejercicio 18

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z =$$

Ejercicio 18

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = |z| \left[\cos \arg(z) + i \sin \arg(z)\right]$$

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = |z| \left[\cos \arg(z) + i \sin \arg(z)\right] \underbrace{=}_{\text{Fórmula de Euler}} |z|\, e^{i \arg(z)}$$

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = |z|\,[\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)] \underbrace{=}_{\text{Fórmula de Euler}} |z|\, e^{i\arg(z)}$$

Calcular la Expresión Exponencial de los siguientes complejos

Ejercicio 18

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = |z|\,[\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)] \underbrace{=}_{\text{Fórmula de Euler}} |z|\,e^{i\arg(z)}$$

Calcular la Expresión Exponencial de los siguientes complejos

(ii) $z = 8i$

Definición.(Fórmula de Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = |z|\,[\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)] \underbrace{=}_{\text{Fórmula de Euler}} |z|\,e^{i\arg(z)}$$

Calcular la Expresión Exponencial de los siguientes complejos

(ii) $z = 8i$

$\star$ $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 19

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.

Ejercicio 19

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

Ejercicio 19

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

$$e \underbrace{=}_{e' \text{ es neutro de la suma}}$$

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

$$e \underbrace{=}_{e' \text{ es neutro de la suma}} e + e'$$

Ejercicio 19

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

$$e \underbrace{=}_{e' \text{ es neutro de la suma}} e + e' \underbrace{=}_{e \text{ es neutro de la suma}}$$

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

$$e \underbrace{=}_{e' \text{ es neutro de la suma}} e + e' \underbrace{=}_{e \text{ es neutro de la suma}} e'$$

Ejercicio 19

Probar que en todo cuerpo, el neutro para la suma y el neutro para el producto son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos neutros para la suma: e y e' distintos

$$e \underbrace{=}_{e' \text{ es neutro de la suma}} e + e' \underbrace{=}_{e \text{ es neutro de la suma}} e'$$

Absurdo que provino de suponer que habían dos neutros distintos

Ejercicio 19

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.

Ejercicio 19

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

Ejercicio 19

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.

Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

Ejercicio 19

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$b =$

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.

Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$b = e + b =$

Ejercicio 19

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento a digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$$b = e + b = (a + b') + b \underbrace{=}_{Prop.Conm.}$$

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento a digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$$b = e + b = (a + b') + b \underbrace{=}_{Prop.Conm.} (a + b) + b' =$$

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$$b = e + b = (a + b') + b \underbrace{=}_{Prop.Conm.} (a + b) + b' = e + b' =$$

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento a digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$$b = e + b = (a + b') + b \underbrace{=}_{Prop.Conm.} (a + b) + b' = e + b' = b'$$

Probar también que inversos aditivos para cada elemento son únicos.
Supongamos por el absurdo que en un cuerpo se tienen dos inversos aditivos para un elemento *a* digamos: b y b' distintos.

$$a + b = e \quad \text{y} \quad a + b' = e$$

$$b = e + b = (a + b') + b \underbrace{=}_{Prop.Conm.} (a + b) + b' = e + b' = b'$$

Absurdo que provino de suponer que habían dos inversos aditivos distintos

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto en $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto en $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1							

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto en $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4							

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto en $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	3
6	0	6	5	4	3	2	1

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_7$ y comprobar las Leyes de existencia de inversos para la suma y producto

Suma en $\mathbb{Z}_7$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	5	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto en $\mathbb{Z}_7$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	3
6	0	6	5	4	3	2	1

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3,

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir

$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir

$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Significa el inverso aditivo del inverso multiplicativo de 10

Inverso multiplicativo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$a \in \mathbb{Z}_{11} : a \times 10 = 1$

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir

$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Significa el inverso aditivo del inverso multiplicativo de 10

Inverso multiplicativo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$a \in \mathbb{Z}_{11} : a \times 10 = 1 \implies a = 10$ ya que

$10 \times 10 = 100$

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir

$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Significa el inverso aditivo del inverso multiplicativo de 10

Inverso multiplicativo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$a \in \mathbb{Z}_{11} : a \times 10 = 1 \implies a = 10$ ya que

$10 \times 10 = 100 = 11 \cdot 9 + 1$

Inverso aditivo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$b \in \mathbb{Z}_{11} : b + 10 = 0$

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir

$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Significa el inverso aditivo del inverso multiplicativo de 10

Inverso multiplicativo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$a \in \mathbb{Z}_{11} : a \times 10 = 1 \implies a = 10$ ya que

$10 \times 10 = 100 = 11 \cdot 9 + 1$

Inverso aditivo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es

$b \in \mathbb{Z}_{11} : b + 10 = 0 = 11 \implies b =$

Ejercicio 20

¿Qué significa -3 en $\mathbb{Z}_7$?

Significa el inverso aditivo de 3, es decir
$a \in \mathbb{Z}_7 : 3 + a = 0 = 7 \implies a = 4 \implies -3 = 4$

Además $-3 + 7 = 4$ que es otra manera de obtenerlo

¿Qué significa $-\frac{1}{10}$ en $\mathbb{Z}_{11}$?

Significa el inverso aditivo del inverso multiplicativo de 10

Inverso multiplicativo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es
$a \in \mathbb{Z}_{11} : a \times 10 = 1 \implies a = 10$ ya que
$10 \times 10 = 100 = 11 \cdot 9 + 1$

Inverso aditivo de 10 en $\mathbb{Z}_{11}$ es
$b \in \mathbb{Z}_{11} : b + 10 = 0 = 11 \implies b = 1$

Luego $-\frac{1}{10} = 1$ en $\mathbb{Z}_{11}$

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Producto en $\mathbb{Z}_6$

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Producto en $\mathbb{Z}_6$

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Producto en $\mathbb{Z}_6$

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2

Ejercicio 20 Hacer las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6$ ¿ Por qué no son cuerpos?

Suma en $\mathbb{Z}_6$

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Producto en $\mathbb{Z}_6$

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Observar que ni 2 ni 3 ni 4 tienen inverso multiplicativo. Luego $\mathbb{Z}_6$ no es cuerpo. Además, tampoco es Dominio de Integridad ya que por ejemplo $2 \times 3 = 0$ pero $2 \neq 0 \wedge 3 \neq 0$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(i) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(i) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(i) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(i) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$

$x^2 + x + 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}_2$

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 3 = 0$

Si $x = 2 \implies 2^2 + 2 + 1 = 1 \neq 0$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(i) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$

$x^2 + x + 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}_2$

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 3 = 0$

Si $x = 2 \implies 2^2 + 2 + 1 = 1 \neq 0$

$x^2 + x + 1$ tiene solución en $1 \in \mathbb{Z}_3$

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

Si $x = 2 \implies 2^2 + 2 + 1 = 2 \neq 0$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Si $x = 0 \implies 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

Si $x = 1 \implies 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

Si $x = 2 \implies 2^2 + 2 + 1 = 2 \neq 0$

Si $x = 3 \implies 3^2 + 3 + 1 = 3 \neq 0$

Si $x = 4 \implies 4^2 + 4 + 1 = 1 \neq 0$

$x^2 + x + 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}_5$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$$x^2 + x + 1 \text{ en } \mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{array}{lllllll} x & = & 0 & \Longrightarrow & 0^2 + 0 + 1 & = & 1 \neq 0 \\ x & = & 1 & \Longrightarrow & 1^2 + 1 + 1 & = & 3 \neq 0 \\ x & = & 2 & \Longrightarrow & 2^2 + 2 + 1 & = & 7 \neq 0 \end{array}$$

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$$x^2 + x + 1 \text{ en } \mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
x & = & 0 & \Longrightarrow & 0^2 + 0 + 1 & = & 1 \neq 0 & & \\
x & = & 1 & \Longrightarrow & 1^2 + 1 + 1 & = & 3 \neq 0 & & \\
x & = & 2 & \Longrightarrow & 2^2 + 2 + 1 & = & 7 \neq 0 & & \\
x & = & 3 & \Longrightarrow & 3^2 + 3 + 1 & = & 13 & \equiv & 2 \neq 0 \\
x & = & 4 & \Longrightarrow & 4^2 + 4 + 1 & = & 21 & \equiv & A \neq 0 \\
x & = & 5 & \Longrightarrow & 5^2 + 5 + 1 & = & 31 & \equiv & 9 \neq 0
\end{array}$$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$$x^2 + x + 1 \text{ en } \mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{array}{llllllll}
x & = & 0 & \Longrightarrow & 0^2+0+1 & = & 1 \neq 0 & \\
x & = & 1 & \Longrightarrow & 1^2+1+1 & = & 3 \neq 0 & \\
x & = & 2 & \Longrightarrow & 2^2+2+1 & = & 7 \neq 0 & \\
x & = & 3 & \Longrightarrow & 3^2+3+1 & = & 13 & \equiv 2 \neq 0 \\
x & = & 4 & \Longrightarrow & 4^2+4+1 & = & 21 & \equiv A \neq 0 \\
x & = & 5 & \Longrightarrow & 5^2+5+1 & = & 31 & \equiv 9 \neq 0 \\
x & = & 6 & \Longrightarrow & 6^2+6+1 & = & 43 & \equiv A \neq 0 \\
x & = & 7 & \Longrightarrow & 7^2+7+1 & = & 57 & \equiv 2 \neq 0 \\
x & = & 8 & \Longrightarrow & 8^2+8+1 & = & 73 & \equiv 7 \neq 0 \\
x & = & 9 & \Longrightarrow & 9^2+9+1 & = & 91 & \equiv 3 \neq 0
\end{array}$$

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & = & 0 & \Longrightarrow & 0^2+0+1 & = & 1 \neq 0 & & \\
x & = & 1 & \Longrightarrow & 1^2+1+1 & = & 3 \neq 0 & & \\
x & = & 2 & \Longrightarrow & 2^2+2+1 & = & 7 \neq 0 & & \\
x & = & 3 & \Longrightarrow & 3^2+3+1 & = & 13 & \equiv & 2 \neq 0 \\
x & = & 4 & \Longrightarrow & 4^2+4+1 & = & 21 & \equiv & A \neq 0 \\
x & = & 5 & \Longrightarrow & 5^2+5+1 & = & 31 & \equiv & 9 \neq 0 \\
x & = & 6 & \Longrightarrow & 6^2+6+1 & = & 43 & \equiv & A \neq 0 \\
x & = & 7 & \Longrightarrow & 7^2+7+1 & = & 57 & \equiv & 2 \neq 0 \\
x & = & 8 & \Longrightarrow & 8^2+8+1 & = & 73 & \equiv & 7 \neq 0 \\
x & = & 9 & \Longrightarrow & 9^2+9+1 & = & 91 & \equiv & 3 \neq 0 \\
x & = & 10 & \Longrightarrow & 10^2+10+1 & = & 111 & \equiv & 1 \neq 0
\end{array}$$

$x^2 + x + 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}_{11}$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

$x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

De los cálculos realizados para $\mathbb{Z}_{11}$ podemos deducir que 3 y 9 son las únicas soluciones de $x^2 + x + 1$

Comprobamos

Si $x = 3 \implies 3^2 + 3 + 1 = 13 \equiv 0$

Si $x = 9 \implies 9^2 + 9 + 1 = 91 = 13 \cdot 7 \equiv 0$

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(ii) $x^5 - x$ en $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Desde que $x^5 - x = x\left(x^4 - 1\right)$; $x = 0 \wedge x = 1$ serán solución

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(ii) $x^5 - x$ en $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Desde que $x^5 - x = x\left(x^4 - 1\right)$; $x = 0 \wedge x = 1$ serán solución

Veamos el resto de los valores

Si $x = 2 \implies 2^4 - 1 = 15 \equiv 0$

Si $x = 3 \implies 3^4 - 1 = 80 \equiv 0$

Si $x = 4 \implies 4^4 - 1 = 255 \equiv 0$

Luego todos los elementos de $\mathbb{Z}_5$ son soluciones de $x^5 - x$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(ii) $x^5 - x$ en $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Desde que $x^5 - x = x\left(x^4 - 1\right)$; $x = 0 \wedge x = 1$ serán solución

Veamos el resto de los valores

Si $x = 2 \implies 2^4 - 1 = 15 \equiv 1 \neq 0$

Si $x = 3 \implies 3^4 - 1 = 80 \equiv 3 \neq 0$

Si $x = 4 \implies 4^4 - 1 = 255 \equiv 3 \neq 0$

Si $x = 5 \implies 5^4 - 1 = 624 \equiv 1 \neq 0$

Ejercicio 20

Hallar las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones polinómicas en los cuerpos que se indican

(ii) $x^5 - x$ en $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Desde que $x^5 - x = x\left(x^4 - 1\right)$; $x = 0 \wedge x = 1$ serán solución

Veamos el resto de los valores

Si $x = 2 \implies 2^4 - 1 = 15 \equiv 1 \neq 0$

Si $x = 3 \implies 3^4 - 1 = 80 \equiv 3 \neq 0$

Si $x = 4 \implies 4^4 - 1 = 255 \equiv 3 \neq 0$

Si $x = 5 \implies 5^4 - 1 = 624 \equiv 1 \neq 0$

Si $x = 6 \implies 6^4 - 1 = 1295 \equiv 0$

Luego $0, 1, 6 \in \mathbb{Z}_7$ son soluciones de $x^5 - x$