5.6. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Dado el subespacio $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\right\}$ determinar la ecuación vectorial de su complemento ortogonal.

Dado el subespacio $L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=\alpha(d,e,f)\right\}$, determinar la ecuación cartesiana de su complemento ortogonal.

Ejercicio 5.2. Para cada uno de los subespacios siguientes, determinar una base, hallar su complemento ortogonal, una base del complemento e indique su dimensión.

1. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-3z=0\right\}$.
2. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-4z=0,\ y-4z=0\right\}$.
3. $S=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+2z-t=0,\ x+y-z=0\right\}$.
4. S está definido por el conjunto de ecuaciones $\begin{cases} x-y-z+t &=0\\ x+y+z+t &=0\\ x-y-z+t &=0\end{cases}$

Ejercicio 5.3. Dados los subespacios S y T de $\mathbb{R}^3$ determinar el subespacio W que cumpla las condiciones indicadas

1. $S=\langle(1,1,-1,2)\rangle$, $T=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-t=0 \text{ y } z+t=0\right\}$, $S^\perp\cap T=W$.
2. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+3z=0\right\}$, $T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y \text{ y } z=0\right\}$,$T\subseteq W$ y $W\oplus S^\perp=\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.4. Dada la matriz A, hallar un subespacio S tal que el vector v se exprese como suma de un vector $v_1\in S$ y $v_2\in S^\perp$.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $v=(2,1,-1)$
2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $v=(1,-1,0)$.

Ejercicio 5.5. Para cada matriz dada, determinar los espacios $\mathrm{Fi}(A)$, $\mathrm{Co}(A)$,$\mathrm{N}(A)$, y $\mathrm{N}(A^t)$. Determinar para cada espacio un conjunto generador y un sistema de ecuaciones que determine cada subespacio. Chequear luego dimensiones y comprobar que $\mathrm{N}(A)=\mathrm{Fi}(A)^\perp=\mathrm{Co}(A^t)$ y $\mathrm{N}(A^t)=\mathrm{Co}(A)^\perp$.

$(a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ $\quad (b)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$

$(c)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 3 & -1\end{pmatrix}$ $\quad (d)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad (e)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Ejercicio 5.6. Determinar el subespacio generado por los vectores indicados. Utilizando la igualdad $\mathrm{Co}(A)^\perp=\mathrm{N}(A^t)$, para cualquier matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, hallar una base y las ecuaciones implícitas de $S^\perp$.

1. $w_1=\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, $w_2=\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

2. $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 5.7. Consideremos el subespacio S_1 definido implicitamente por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y el subespacio S_2 definido paramétricamente por la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinar $S_1^{\perp}, S_2^{\perp}$ y $(S_1 \cap S_2)^{\perp}$.

Ejercicio 5.8. Utilizando la igualdad $\mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$, determine un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el siguiente subconjunto

$$\pi = \langle (-1,0,0,1), (1,1-1,0) \rangle + (1,2,0,2).$$

Ejercicio 5.9. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

1. $\{(4,2,-5), (-1,2,0), (2,1,2)\}$.
2. $\{(3,1,-1), (-1,2,1), (2,-2,4)\}$.

Ejercicio 5.10. Estudie si los siguientes conjuntos de vectores forman una base ortogonal. Luego utilice el Teorema 5.3 para expresar al vector w como una combinación lineal de los vectores de la base. Halle el vector de coordenadas $[w]_B$ de w con respecto a la base. Determine si las bases son ortonormales. En caso de que no lo sean normalice los vectores para formar una base ortonormal.

1. $v_1 = (4,-2), v_2 = (1,2), w = (1,3)$.
2. $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,2,1), v_3 = (1,-1,1)$ y $w = (1,1,1)$.

Ejercicio 5.11. Hallar bases ortogonales y ortonormales de los siguientes subespacios y las coordenadas del vector w en dichas bases

1. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y-z=0\}$, $w = (-1,2,5)$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha, y = -\alpha, z = 3\alpha\}$, $w = (1,-,3)$

Ejercicio 5.12. Determinar las proyecciones de los siguientes vectores en las direcciones dadas:

1. El vector $u = (2,3)$ en la dirección de $v = (1,4)$.
2. El vector $u = (1,2,3)$ en la dirección de $v = (1,1,-1)$.
3. El vector $u = (-1,1,2)$ en la dirección de la recta $r : \begin{cases} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$

Ejercicio 5.13. Determine la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio S generado por los vectores que se indican.

1. $v = (3,1,-2)$, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$.
2. $v = (3,-2,4,-3)$, $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (0,0,1,1)$.

Ejercicio 5.14. En los siguientes apartados determinar el complemento ortogonal $S^{\perp}$ del subespacio S. Luego calcular la proyección del vector v sobre el subespacio S y sobre el espacio $S^{\perp}$. Escriba a v como suma de un vector $v_1 \in S$ y otro $v_2 \in S^{\perp}$.

1. $S = \langle (1,2,1), (1,1,1) \rangle$.

2. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$, $v = (-1,2)$.
3. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z\}$, $v = (3,-1,2)$.
4. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, $v = (2,1,1)$.
5. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\}$, $v = (1,1,1,1)$.

Ejercicio 5.15. En los siguientes casos hallar la matriz de proyección y calcular proyección del vector v sobre el subespacio S.

1. $v = (1,2,3)$, $S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.
2. $v = (1,2,1)$, $S = \{x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z=0\}$.
3. $v = (4,1,3,4)$, $S = \langle (1,1,1,1) \rangle$.

Ejercicio 5.16. Usar Gram-Schmidt (GS) para hallar una base ortonormal de los siguientes subespacios:

1. $S = \langle (1,0,0),(2,1,0),(3,1,1) \rangle$.
2. $S = \langle (1,0,1,0),(2,1,0,1),(0,1,2,3) \rangle$.
3. $S = \langle (1,2,0,2),(2,4,1,4),(1,3,1,1) \rangle$.

Ejercicio 5.17. En cada ítem, determinar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores indicados:

1. $v = (1,2,3)$
2. $v = (3,5,1)$.