5.7. EJERCICIOS

Ejercicio 5.1. Determinar cuales de las siguientes funciones son transformaciones lineales

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(y,x)$.
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x,y,0)+(1,0,0)$.
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy$.
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(2x-y,x)$.

Ejercicio 5.2. Para cada transformación lineal, hallar la matriz estándar en los casos posibles, las imágenes y preimágenes de los conjuntos indicados en cada apartado.

1. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x-y+z,x+2y-3z)$.
2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x-2y+z,y+z)$. Hallar $T(S)$ y $T^{-1}(H)$, donde $S=\langle(1,-3,2)\rangle$ y $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x-y=0\right\}$.
3. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, con $A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. Hallar $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $T_A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$, $T(S)$, $T^{-1}(H)$, donde
$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+3y=0\right\}$$
y
$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)=\lambda(2,-3)\right\}.$$
4. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donde $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\\-2&2\end{pmatrix}$. Hallar $T_A(2,4)$,y $T_A^{-1}(-1,2,2)$.

   Explicar por qué el vector $(1,1,1)$ no tiene preimagen bajo esta transformación.

Ejercicio 5.3. Analice la existencia y unicidad de una transformación lineal T que cumpla las condiciones indicadas. En los casos posibles determine la expresión analítica de la transformación y la matriz estándar.

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1)=(1,-3)$ y $T(v_2)=(1,5)$, para
   a) $v_1=(-1,2)$ y $v_2=(0,-1)$.
   b) $v_1=(1,-3)$ y $v_2=(-2,6)$.
2. $T(1,1,1)=(1,0,0)$, $T(0,-1,1)=(-1,2,1)$ y $T(1,0,1)=(1,1,0)$. Determinar $T(0,3,-1)$ y $T(2,-1,0)$.
3. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(v_1)=(1,1,1)$, $T(v_2)=(0,-1,3)$ y $T(v_3)=(2,5,-7)$, para
   a) $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(0,1,0)$ y $v_3=(2,-1,2)$.
   b) $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(0,1,0)$ y $v_3=(1,0,1)$.
   c) $v_1=(1,0,3)$, $v_2=(0,1,1)$ y $v_3=(1,0,0)$.

Ejercicio 5.4. Determinar la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones entre los espacios indicados utilizando la definición general y aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad de las Transformaciones Lineales. Indicar la matriz estándar.

1. De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

    a) Reflexión respecto a la recta $y=-2x$.

    b) Proyección sobre la recta $y=-x$.

2. De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:

    a) Reflexión respecto del plano $x=y$.

    b) Reflexión respecto del plano $y+z=0$.

Ejercicio 5.5. Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\right\}.$$

1. Determinar la transformación proyección $p_S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de las siguientes maneras:

    a) Hallando una base ortogonal de S y aplicando el Teorema **??**.

    b) Determinando una base ortogonal del espacio $S^\perp$, el Teorema **??** y luego aplicar la identidad $v=\text{proy}_S v+\text{proy}_{S^\perp} v$ para hallar la expresión analítica de $p_S=\text{proy}_S$.

    c) Utilizar la matriz de proyección asociada al subespacio S.

2. Hallar la transformación de reflexión o simetría $r_S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ respecto al subespacio S de dos formas distintas.

Ejercicio 5.6. Consideremos una función $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,2,1)\\ T(k,0,1) &= (1,0,0,0)\\ T(-2,k,-1) &= (0,-2,0,0)\end{aligned}$$

1. Hallar $k\in\mathbb{R}$ tal que T defina una única transformación lineal (para cada k).

2. Para el caso particular de $k=-1$ hallar la expresión analítica y la matriz estándar de T.

Núcleo e Imagen de una transformación lineal. Inyectividad y sobreyectividad

Ejercicio 5.7. En los casos siguientes, para la transformación lineal f, encontrar bases y sistemas de ecuaciones de los subespacios $\text{Nuc} f$ e $\text{Img} f$, $\text{Nuc} f^\perp$ e $\text{Img} f^\perp$. Comprobar el Teorema de la dimensión. Determinar que transformaciones son inyectivas, sobreyectivas y cuales son isomorfismos.

1. Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por

$$T(1,0,0,0)=T(0,0,1,0)=(1,0)$$
$$T(0,1,0,0)=(0,0,0,1)=(0,1).$$

2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(1,1)=(0,1)$ y $f(1,-1)=(2,1)$.

3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ cuya matriz estándar es $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz es $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -5 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Determinar, cuando sea posible, $f^{-1}(1,-2,3)$ y $f^{-1}(1,2,3)$.

5. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z,t)=(x+y,y+z,z+t)$

6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la proyección de un vector u sobre el vector $v = (2,-1,1)$.

Ejercicio 5.8. Dadas las transformaciones lineales definidas por las condiciones indicadas, determinar la expresión analítica de cada una y su matriz estándar.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\text{Nuc}T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-3y+z=0\right\}$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f = S$ e $\text{Img}f = W$, donde $S = \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x+z &= 0 \end{cases}$ y $W = \langle (2,-1,0),(0,1,-2)\rangle$
3. $T(L) \subseteq S$, siendo $L = \langle (2,1,2)\rangle$ y $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y=0\right\}$.
4. $T(S) = D$, siendo $S = \langle (1,0,1),(0,1,1)\rangle$ y $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\right\}$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Img}f = \langle (1,0,1)\rangle$ y $\text{Nuc}f = \langle (2,1,2),(1,0,1)\rangle$.
6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}T = S$ y $\text{Img}T = S^{\perp}$ siendo $S = \langle (1,-1,1),(-1,0,-1),(0,1,0)\rangle$.
7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f = \{(x,y,z) : x=y=2z\}$. Probar que la imagen de f es un plano que pasa por el origen.
8. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f = S^{\perp}$ y $f(v) = 2v$, para cada $v \in S$, donde $S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y=0 \text{ y } w=0\right\}$.

Ejercicio 5.9. Dada la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$,donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si existen valores $k \in \mathbb{R}$ tales que T sea un monomorfismo. Para los valores encontrados de k, determinar el núcleo y la imagen de f.
2. Para el caso $k = 1$, hallar el núcleo y la imagen de f, y una base para cada uno de estos subespacios.

Matriz de transformación

Ejercicio 5.10. Dada la transformación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar es

$$[t] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz $[t]_B$, donde

1. $B = \{(1,2,1),(3,1,2),(2,1,2)\}$.
2. $B = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$.
3. Hallar $t(0,2,3)$ en ambas matrices.
4. Hallar la expresión analítica.

Ejercicio 5.11. Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determinar la forma analítica de T, y la matriz de T con respecto a la base $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$.

Ejercicio 5.12. Determine en cada caso la matriz de la transformación T indicada

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (2x-y, y-x)$ y consideremos la base $B = \{(1,-1),(0,1)\}$.
   a) Hallar $[T]_{EB}$.
   b) Hallar $[T]_B$.
   c) Determinar $T(2,3)$ en forma directa y utilizando las matrices de transformación de los ítems anteriores.
2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por
$$T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+2z, 3y-z),$$
y consideremos la base $B = \{(1,1,0),(1,-1,1),(2,1,0)\}$.
   a) Hallar las matrices $[T]_{BE}$, $[T]_B$ y $[T]_{EB}$.
   b) Determinar $T(1,2,-1)$ en forma directa y utilizando la matriz de transformacion $[T]_{BE}$.

Ejercicio 5.13. Dadas las bases
$$B = \{(1,-1),(2,1)\} \text{ y } B' = \{(1,1),(0,-1)\}$$
de $\mathbb{R}^2$, y
$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en la base B. Hallar la matriz de T con respecto a B'. Además, hallar $[v]_B$, $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas es $[v]_{B'} = (-3,1)^t$.

Ejercicio 5.14. Dada la transformación $T(x,y) = (x+y, 2y+3x)$, y las bases $B_1 = \{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,1),(1,1)\}$.

1. Determinar la matriz estándar.
2. Determinar la matriz de transformación $[T]_{B_1B_2}$.
3. Calcular la imagen del vector $v = (-1,1)$ primero utilizando directamente la transformación y después utilizando la matriz $[T]_{B_1B_2}$.
4. Hallar $[v]_{B_1}$, $[T(v)]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$ para el vector v cuya matriz de coordenadas en la base B_2 es $[v]_{B_2} = (-1,2)^t$.

Ejercicio 5.15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación cuya matriz en las bases $B_1 = \{(1,1,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(1,0,0)\}$ es
$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$
Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que $T(1,2,3) = (4,2,1)$. Para el valor de a encontrado el núcleo, y la imagen.

Ejercicio 5.16. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. ¿Es posible hallar la matriz estándar de T (la matriz respecto a las bases canónicas) sabiendo que
$$\begin{aligned} T(1,1,-1) &= e_1 + e_3 \\ T(0,-1,1) &= e_1 + e_2 - e_3 \\ T(2,1,2) &= -e_1 + e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$
donde $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica?

Ejercicio 5.17. Consideremos las bases $B_1 = \{(-1,1),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,1),(1,1)\}$ y la matriz

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

de una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en la base B_1 .

1. Determinar la matrices cambio de base $P_{B_1 B_2}$ y $P_{B_2 B_1}$.
2. Hallar $[v]_{B_1}$ y $[T(v)]_{B_2}$, donde $[v]_{B_2} = (-1,2)^t$.
3. Determine la matriz estándar, es decir, la matriz de T respecto a la base canónica. Halle la expresión analítica de T.

Ejercicio 5.18. Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base y sea

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si la transformación es un monomorfismo.
2. Si $w = 2v_1 + 3v_2 - v_3$, hallar $[T(w)]_B$.
3. Determinar Nuc$T$ y Img$T$.
4. Dado el subespacio S generado por $\{2v_1 - v_3, v_2 + 3v_3\}$,determinar $T[S]$.
5. Si $B = \{(1,1,0),(1,2,0),(2,0,0)\}$ y E es la base canónica, determinar $[T]_{BE}$.