1 Elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1.1. Nociones iniciales

En esta sección nos ocuparemos de establecer las definiciones básicas para una buena comprensión de la geometría en el plano y el espacio. Empezaremos por recordar la idea de producto cartesiano entre conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, se define el producto cartesiano entre ambos conjuntos como un nuevo conjunto,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Este nuevo conjunto $A \times B$ consta de todos los pares ordenados que se obtienen con elementos de A y B, respectivamente.

Ejemplo 1.1

1 Consideremos los conjuntos $A_1 = \{a,b,c\}$ y $A_2 = \{x,y,z\}$, el producto de ambos conjuntos es

$$A_1 \times A_2 = \{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z)\}$$

.

2 Si consideramos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, entonces el producto $A \times B$ consta de los siguientes elementos

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

3 Para un conjunto A, podemos definir el producto cartesiano del conjunto consigo mismo, y lo indicamos como $A^2 = A \times A$,

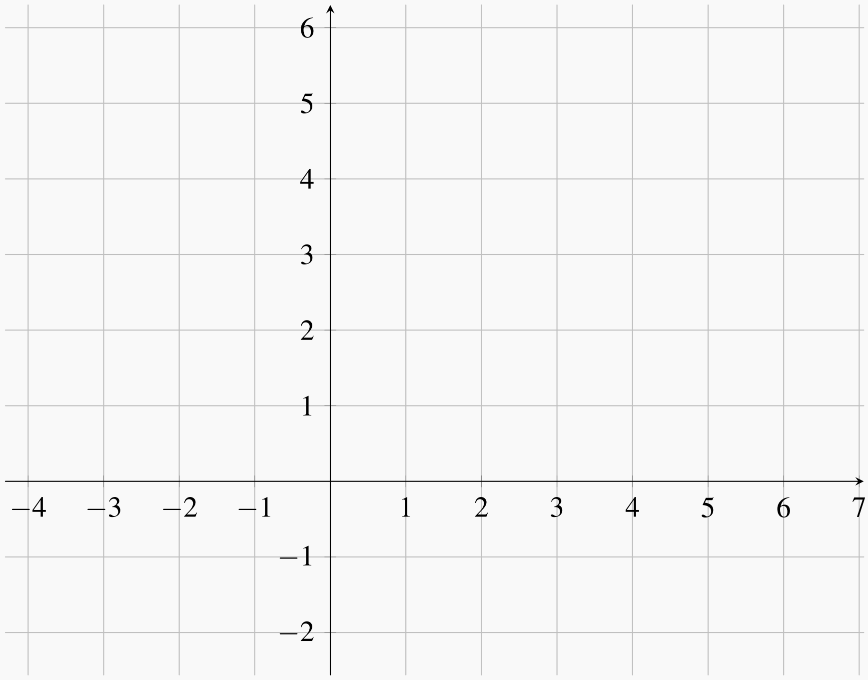
$$A \times A = \{(a_1,a_2) \colon a_i \in A, i = 1,2\}$$

Ejemplo 1.2

Para el conjunto $\mathbb{R}$ de los número reales, podemos representar el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

como el plano cartesiano



Ⓝ Asi como hemos realizado el producto de dos conjuntos, es posible realizar el producto cartesiano de más de dos conjuntos

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) \colon a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

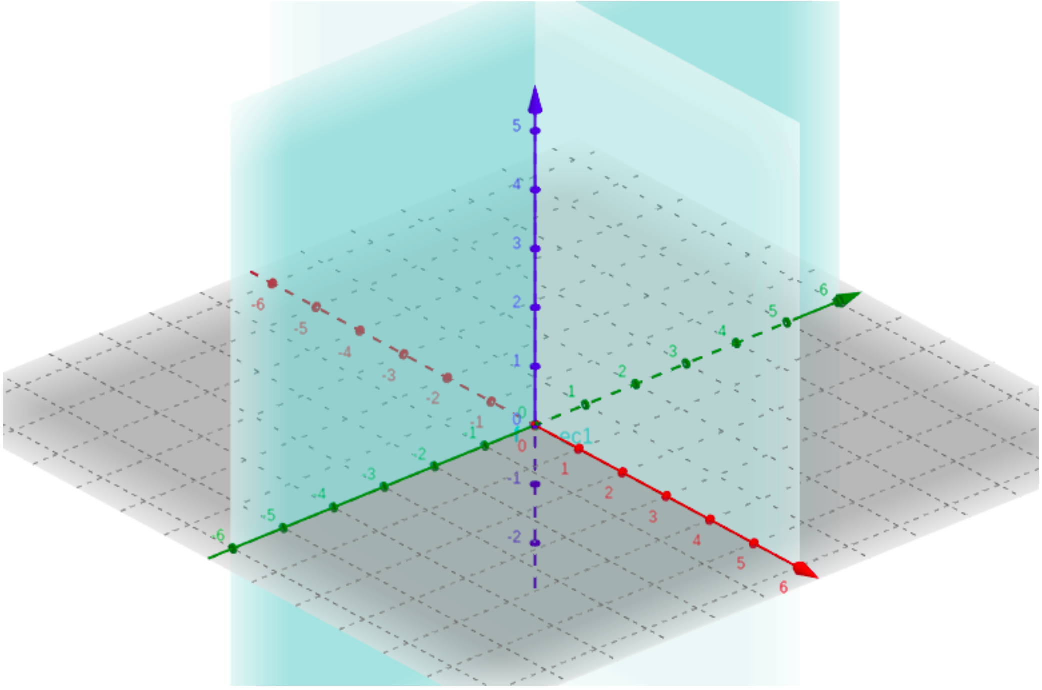
En el caso particular de que $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ obtenemos $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n veces}} = A^n$, es decir

$$A^n = \{(a_1, ..., a_n) \colon a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$$

El conjunto $\mathbb{R}^3$, consta de el producto de $\mathbb{R}$ consigo mismo tres veces. De esta manera

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Obtenemos entonces el espacio tridimensional, el cual podemos representar gráficamente como



Definición 1.1

A los pares del producto cartesiano $\mathbb{R}^2$ los llamaremos puntos del plano, o simplemente puntos. De igual manera, a los tríos de $\mathbb{R}^3$ los llamaremos puntos del espacio.

Notemos entonces que $\mathbb{R}^n = \{(x_1,..,x_n) \colon x_i \in \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ es el conjunto de todas las listas de longitud n que podemos formar con números reales. Para una lista (o punto) $(x_1,..,x_n)$ al elemento x_i lo llamaremos componente i-ésima.

Ejemplo 1.3

1. $(\pi, e), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), (-1,2) \in \mathbb{R}^2$
2. $(-1,2) \notin \mathbb{N}^2$, pues $-1 \notin \mathbb{N}$
3. $\left(\frac{1}{2}, -2, \pi\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

Observemos que las nociones de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$, son generalizaciones de $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. De esta manera, podemos pensar en generalizar las operaciones que conocemos tales como la suma de números reales. Como también algún criterio de igualdad entre los puntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2

Sean $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, .., b_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$, diremos que ambos puntos son iguales si y solo si son iguales componente a componente. Es decir $A = B$ si y solo si $a_i = b_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Este criterio es una generalización natural de la igualdad de números que conocemos. Si pensamos a los números reales como listas de longitud 1, entonces dos números $a, b \in \mathbb{R}$ son iguales si y solo si $(a) = (b)$. De igual manera, podemos generalizar naturalmente la suma de dos puntos de $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera.

Definición 1.3

Sobre el espacio $\mathbb{R}^n$, para dos n-uplas $A = (a_1,..,a_n)$, $B = (b_1,..,b_n)$ definimos la suma de los puntos coordenada a coordenada, es decir

$$(a_1,..,a_n)+(b_1,..,b_n) = (a_1+b_1,..,a_n+b_n)$$

Las siguientes propiedades son necesarias para operar con los elementos (puntos) del producto cartesiano.

Proposición 1.1

Sean $A = (a_1,..,a_n)$, $B = (b_1,..,b_n)$ y $C = (c_1,..,c_n)$ puntos de $\mathbb{R}^n$ entonces se verifican las siguiente propiedades:

1. Ley de cierre: Es decir, si sumamos dos puntos de $\mathbb{R}^n$ entonces el resultado es nuevamente un punto de $\mathbb{R}^n$. Formalmente, si $A, B \in \mathbb{R}^n$ entonces $A+B \in \mathbb{R}^n$.
2. Asociatividad: Si $A,B,C \in \mathbb{R}^n$, entonces $(A+B)+C = A+(B+C)$.
3. Conmutatividad: Si $A,B \in \mathbb{R}^n$ entonces $A+B = B+A$.
4. Neutro para la suma: Para todo $A \in R^n$, existe un punto $0 = (0,..,0)$ tal que $A+0 = A$.
5. Inverso aditivo: Para cada $A \in R^n$, existe un punto, al cual indicaremos como $-A$ tal que $A+(-A) = 0$.

Ejemplo 1.4

Las siguientes son algunas sumas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1. Para los puntos $A = \left(2, \frac{2}{3}\right)$ y $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ entonces
$$A+B = \left(2, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(2+\frac{1}{2}, \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$$
2. Para los puntos $A = (2,0,-1)$ y $B = (1,0,1)$, la suma es
$$A+B = (2,0,-1)+(1,0,1) = (3,0,0)$$
3. Para un punto $A = (2,3)$, podemos sumarlo a si mismo
$$A+A = (2,3)+(2,3) = (2+2,3+3) = (4,6)$$

A partir de la suma de puntos, podemos pensar ahora que ocurre si sumamos un punto consigo mismo, como lo hemos hecho en el ejemplo anterior. Para un punto $A = (a_1,\dots,a_n)$, si lo sumamos consigo mismo

$$A+A = (a_1,\dots,a_n)+(a_1,\dots,a_n) = (a_1+a_1,\dots,a_n+a_n) = (2a_1,\dots,2a_n)$$

Notemos que cada componente se multiplica por 2. Podemos entonces definir una nueva operación.

Definición 1.4

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ un punto y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real. A la operación de multiplicar cada componente por un mismo valor real $\lambda \in \mathbb{R}$, lo llamaremos producto por un **escalar**

$$\lambda A = (\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)$$

(N) Mientras que la suma es una operación que involucra a dos puntos, el producto por un escalar (número real) involucra a un número real con un punto.

Las siguientes son algunas propiedades de utilidad para el producto por un escalar

Proposición 1.2

Sean A, B dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

1. El producto por escalar es distributivo respecto a la suma de puntos. Es decir, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
2. El producto por escalar es distributivo respecto a la suma de escalares. Es decir $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$.
3. El producto por escalar es asociativo, es decir $(\lambda\alpha)A = \lambda(\alpha A)$.
4. El producto por un escalar tiene neutro, es decir $1A = A$ para todo punto $A \in \mathbb{R}^n$.

1.2. Puntos y vectores

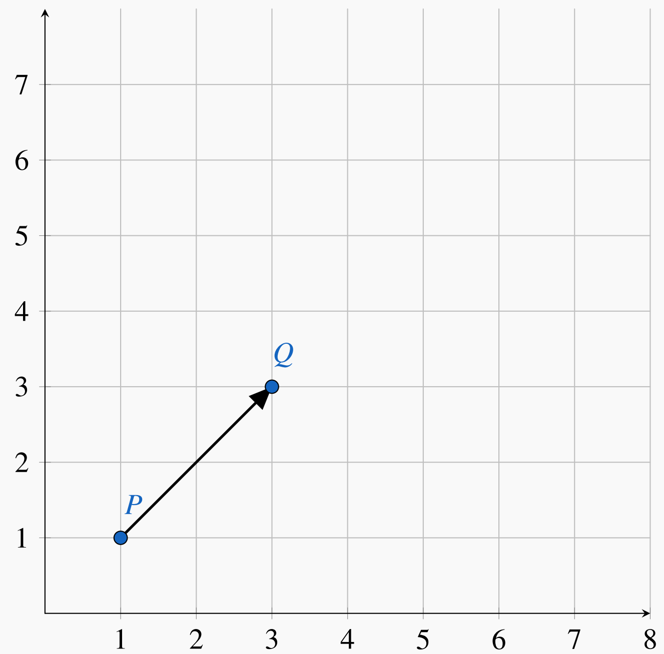
Como ya hemos mencionado anteriormente, un punto es un elemento del producto cartesiano. En cambio, el concepto de vector en $\mathbb{R}^n$ tiene diferentes enfoques equivalentes que dependendiendo del contexto, pueden utilizarse convenientemente. En un contexto de la física, es conveniente pensar en una definición geométrica de vectores, mientras que desde un sentido matemático e informático, es conveniente pensar en la definición algebraica de vectores. Estas dos nociones son las que presentaremos a continuación.

Definición 1.5

Definición geométrica Sea $\mathbb{R}^n$ y sean P y Q dos puntos. Un vector, $\overrightarrow{PQ}$, es un segmento de recta dirigido que une los puntos P y Q, comenzando en P y finalizando en Q.
Al punto P se lo denomina cola (inicio), y al punto Q se lo denomina cabeza (final).

Ejemplo 1.5

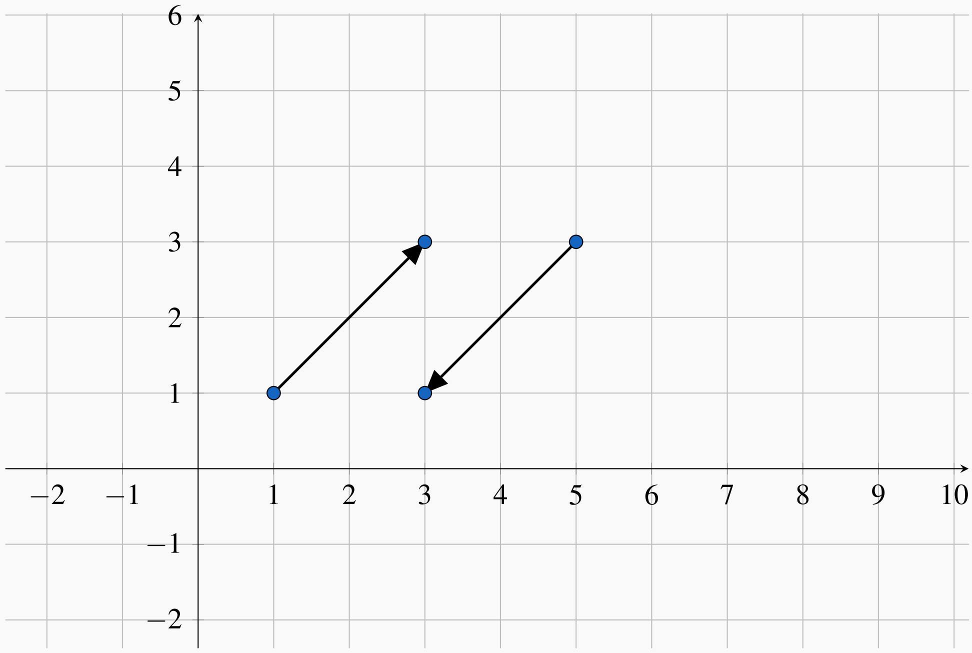
Para los puntos $P = (1,1)$ y $Q = (3,3)$, el segmento que une los puntos P y Q lo graficamos como



(N) Notemos que el segmento de recta que une los puntos P y Q tiene: **Dirección** y **Sentido**. La dirección está determinada por el ángulo que forma el segmento respecto a la horizontal. Mientras que el sentido está dado por su punto inicial y su punto final.

Ejemplo 1.6

Los siguientes segmentos, tienen igual dirección pero diferente sentido.



En general, la definición geométrica de vector se utiliza para representar fuerzas en física. Ya que puede darse dirección, intensidad (norma), y sentido a la fuerza, dentro de un sistema de fuerzas.
Es importante notar, a partir de lo que observamos anteriormente, que los conceptos de dirección y sentido son diferentes.
Asi como lo hemos hecho para los puntos de $\mathbb{R}^n$, podemos preguntarnos entonces, Â¿Cuándo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes?

Definición 1.6

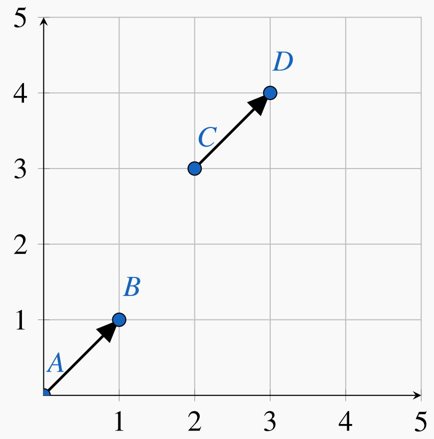
Diremos que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes si se verifica

$$B - A = D - C$$

Ejemplo 1.7

Los siguientes vectores, son equivalentes:

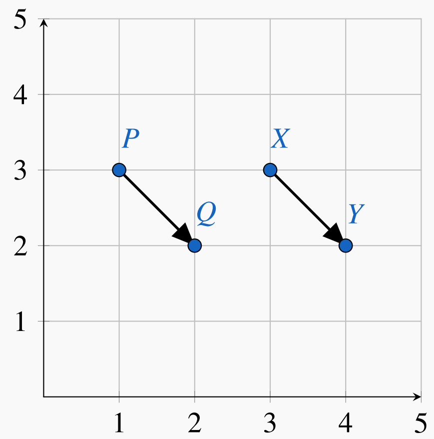
1. Para $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,3)$ y $D = (3,4)$. Los vectores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ son equivalentes. En efecto, $(1,1) = (1,1) - (0,0) = (3,4) - (2,3) = (1,1)$. Gráficamente vemos



2. Para los puntos $P = (1,3)$ $Q = (2,2)$, $X = (3,3)$ y $Y = (4,2)$. Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{XY}$ son equivalentes, puesto que

$$(1,-1) = (2,2) - (1,3) = (4,2) - (3,3) = (1,-1)$$

Gráficamente, obtenemos



Observemos que, la noción de equivalencia entre vectores, nos permite identificar aquellos vectores que tienen la misma dirección, sentido y longitud. No necesariamente deben compartir su cabeza y su cola, pero si su dirección, sentido y longitud. Lo que hace plantearse la siguiente pregunta: Â¿Cuál de todos los vectores es conveniente elegir?. Si bien son equivalentes todos los vectores que tengo para elegir, es conveniente trabajar siempre con aquellos vectores que tengan un punto de inicio en común. Es para esto, que definimos la noción de representante canónico, también le diremos vector de posición.

Definición 1.7

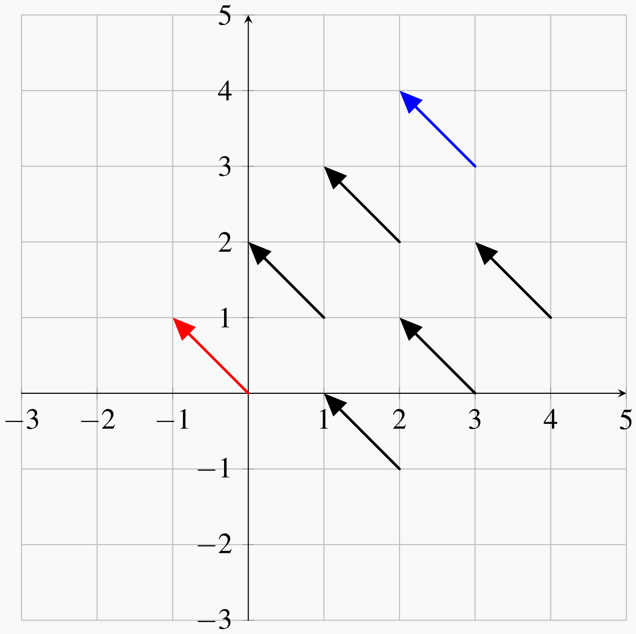
Sean A y B dos puntos en $\mathbb{R}^n$. Consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$. El representante canónico de $\overrightarrow{AB}$ es el vector equivalente que tiene su cola en el origen $\vec{0}$. A dicho representante canónico lo calculamos como $\overrightarrow{\mathbf{0}(B-A)}$.

Ejemplo 1.8

Consideremos el vector $\overrightarrow{(3,3)(2,4)}$, su representante canónico es el vector que inicia en el punto $\mathbf{0}$ y finaliza en el punto $(2,4) - (3,3) = (-1,1)$. Por lo tanto, el representante canónico es

$$\overrightarrow{\mathbf{0}(-1,1)}$$

En el gráfico, observamos el vector (en azul), su representante canónico (en rojo) y vectores equivalentes (en negro).



La noción de representante canónico nos dá lugar a la definición algebraica del concepto de vector.

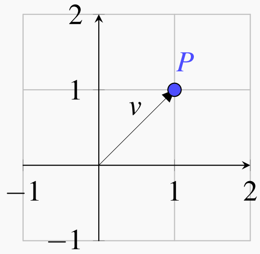
Definición 1.8

Dado un punto $A = (a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^n$, un vector es un segmento de recta dirigido que une el origen con el punto A.

N Es importante notar que ambas definiciones son equivalentes. Por otro lado, no debe confundirse la noción de un punto con la noción de vector canónico. En adelante, nos referiremos a los vectores canónicos con $\overrightarrow{v}$, indicando solo v su punto final. Como consecuencia de lo anterior, para cada punto P tenemos definido un vector canónico $\vec{v} = \overrightarrow{0P}$, el que une el origen con dicho punto.

Ejemplo 1.9

Si consideramos el punto $P = (1,1)$, este nos define un vector $\mathbf{v} = (1,1) - (0,0)$, cual une el origen con dicho punto.



N En adelante, escribiremos como $\vec{v} = (1, 2 - 1)$ para indicar el vector de posición (canónico) que une el origen de coordenadas con el punto $(1, 2, -1)$.

1.2.0.1. Norma de un vector

Definición 1.9

Sea $\vec{u} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector canónico, definimos la norma de $\vec{u}$ como

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

N El concepto de norma, generaliza la idea de módulo de un número real. Es conocido que $|x| = \sqrt{x^2}$. Por lo tanto, la definición de la norma de un vector resulta una extensión natural de esta definición.

Como hemos mencionado antes la norma es una función que a cada vector le asigna un valor real no negativo. A esto lo indicamos de la siguiente manera $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Además, como función, cumple algunas propiedades.

Proposición 1.3

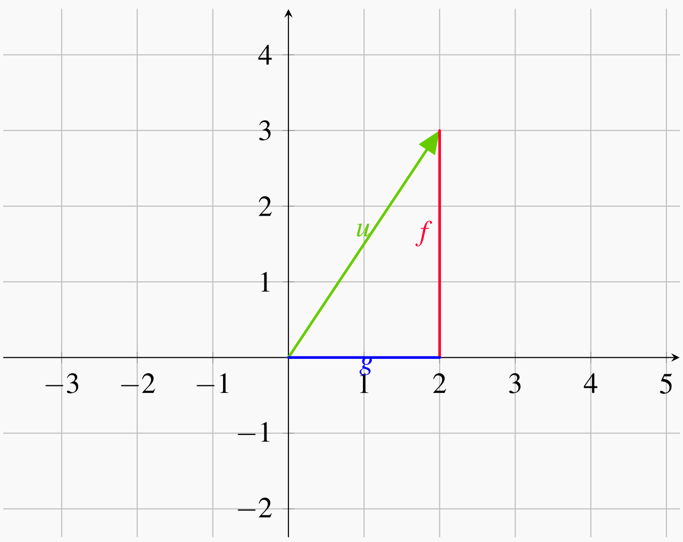
Sea $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la norma de vectores para $\mathbb{R}^n$, entonces:

1. $||\vec{v}|| > 0$ para cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $||\vec{v}|| = 0$ si y solo si $\vec{v} = \vec{0}$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $||\lambda\mathbb{R}|| = |\lambda| \, ||\vec{v}||$.
4. $||\vec{v} + \vec{u}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{u}||$.

Geométricamente, el cálculo de la norma puede realizarse al aplicar el teorema de Pitágoras sucesivas veces, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.10

Consideremos el vector canónico $\vec{u} = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$



Sabemos que el segmento azul mide 2, mientras que el rojo mide 3, aplicando pitágoras tenemos que

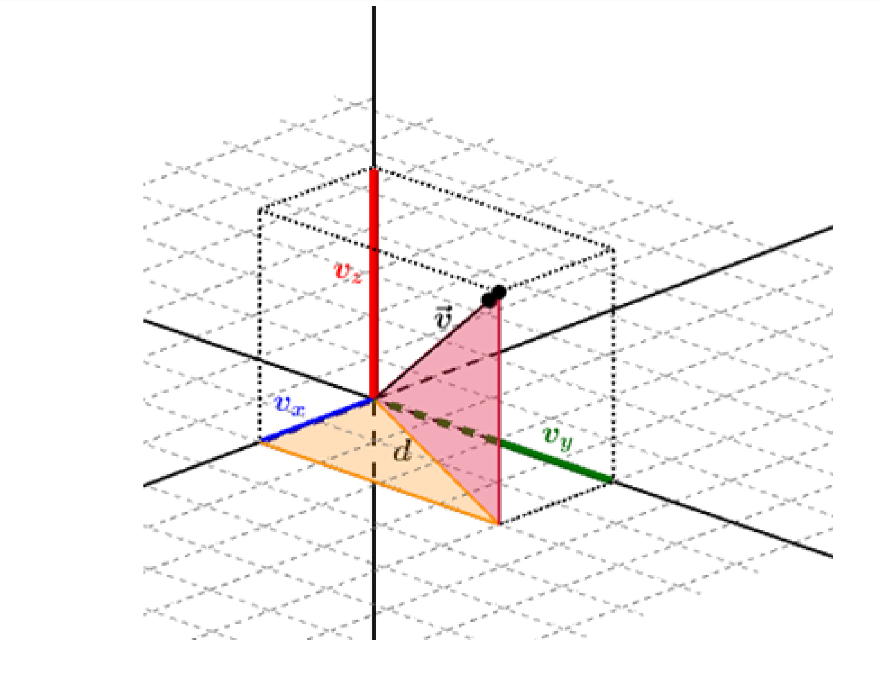
$||\vec{u}||$ es la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo y por lo tanto,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

Esta misma idea es posible extenderla al espacio de la siguiente manera.

Ejemplo 1.11

Consideremos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector canónico, para calcular su norma hacemos pitágoras dos veces, en primera instacia para calcular la diagonal del "pisoz luego para calcular la diagonal que nos interesa.



Geométricamente, la norma de un vector canónico nos indica a que distancia se encuentra la cabeza de dicho vector respecto al origen. Además, recordemos que un vector canónico es un vector que representa a muchos vectores que sean equivalentes a el. Por lo tanto, desde este punto de vista, la norma nos brinda una herramienta valiosa para medir distancias entre dos puntos.

Definición 1.10

Sean A, B dos puntos de $\mathbb{R}^n$, definimos la distancia entre los puntos como

$$d(A,B) = ||B-A||$$

N En la definición anterior, estamos tomando norma a un vector canónico. Este vector canónico es el representante canónico del vector que une los puntos A y B respectivamente.

Ejemplo 1.12

Hallar la distancia del punto $A = (1,0,1)$ al punto $B = (2,3,-1)$.
Sabemos que la distancia del punto A al punto B, es la norma del vector que une dichos puntos. De esta

manera, consideramos

$$B - A = (2,3,-1) - (1,0,1) = (1,3,-3)$$

Además, sabemos que el vector

$$\vec{AB} = (1,3,-3)$$

Es el representante canónico del vector que une dichos puntos. Por lo tanto, calcularle la norma a dicho vector es calcular la distancia entre ambos puntos.

$$d(A,B) = ||B - A|| = \left|\left|\vec{AB}\right|\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

1.2.1. Suma y diferencia de vectores de posición

Dados dos vectores de posición $\vec{u} = (a,b)$ y $\vec{v} = (c,d)$ es razonable pensar en que la suma y diferencia de estos, sea nuevamente un vector de la misma naturaleza. Definimos la suma y diferencia de vectores como

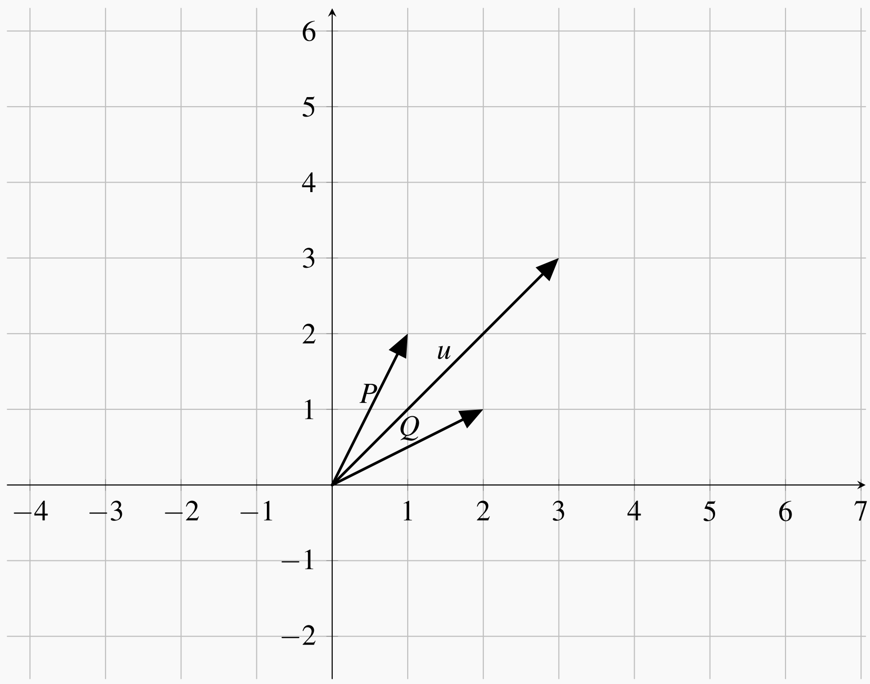
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (a \pm c, b \pm d)$$

El cual resulta ser un nuevo vector de posición.

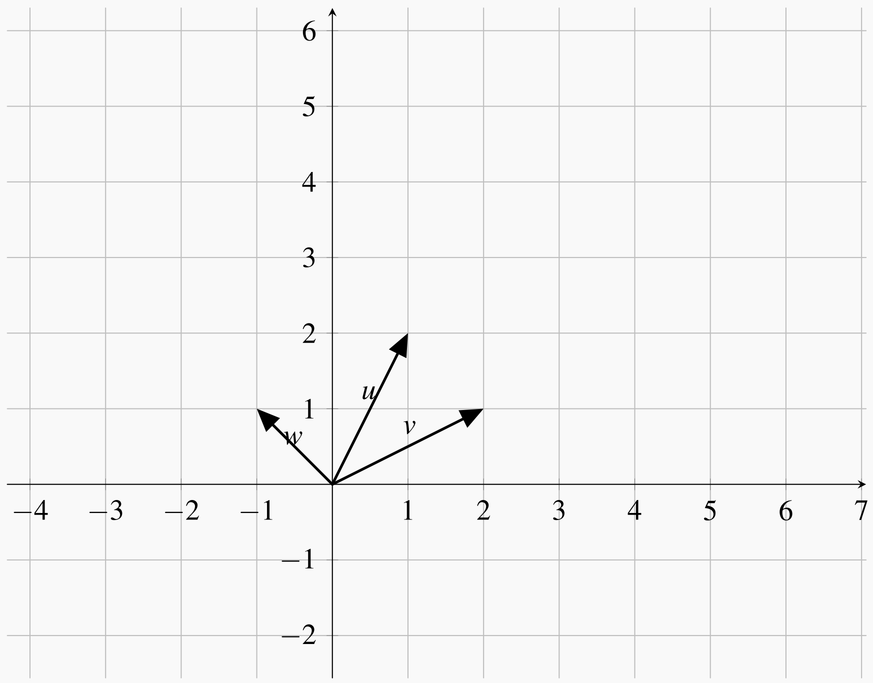
Ejemplo 1.13

Consideremos los vectores de posición $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (2,1)$, obtenemos

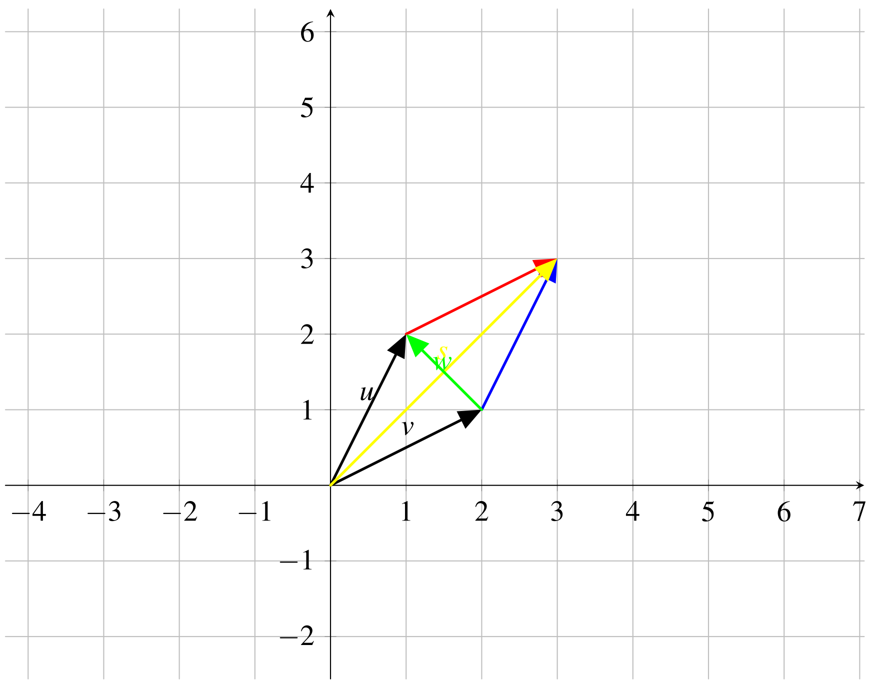
- Suma $\vec{u} + \vec{v} = (1+2, 2+1) = (3,3)$.



- Diferencia $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1-2, 2-1) = (-1,1)$.



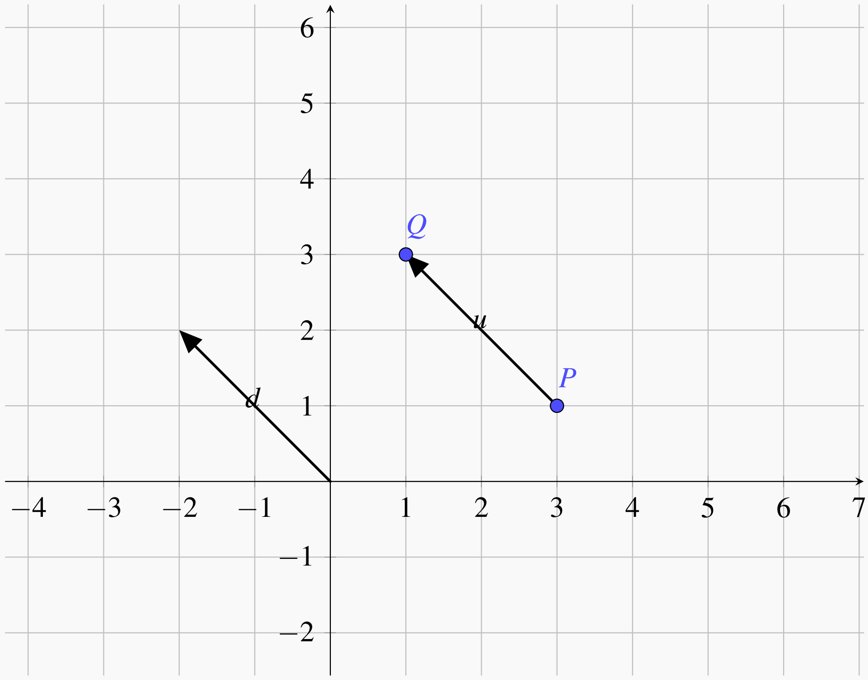
En términos geométricos, la suma y diferencia de estos vectores corresponden a las diagonales de un paralelogramo. Consideremos los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ el ejemplo anterior. Este paralelogramo resulta de trasladar el vector $\vec{u}$ hacia el punto final de $\vec{v}$ (en la figura, el vector azul) y visceversa (en la figura, el vector rojo). La diagonal mayor (amarillo) corresponde a la suma de ambos vectores, mientras que la diagonal menor (verde) es la diferencia de vectores.



N Si queremos obtener el vector que tiene como punto de origen el punto P y punto final Q, procedemos de la siguiente manera. A cada punto, le asociamos su vector de posición correspondiente. Luego, restamos ambos vectores. El resultado es un vector de posición, puntualmente, es el representante canónico del vector buscado.

Ejemplo 1.14

Encontrar el vector de posición que tiene la misma dirección que el vector que une los puntos $P = (1,3)$ y $Q = (3,1)$.



1.2.2. Producto por un escalar de un vector de posición

En el lenguaje de la geometría es necesario diferenciar a los números reales de los vectores. Es por esto que a los valores reales los llamaremos escalares. Además, es posible multiplicar un escalar con un vector. Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} = (a,b)$ un vector de $\mathbb{R}^2$. Podemos definir

$$\lambda\vec{v} = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Es decir, el escalar multiplica a cada componente del vector.

Ejemplo 1.15

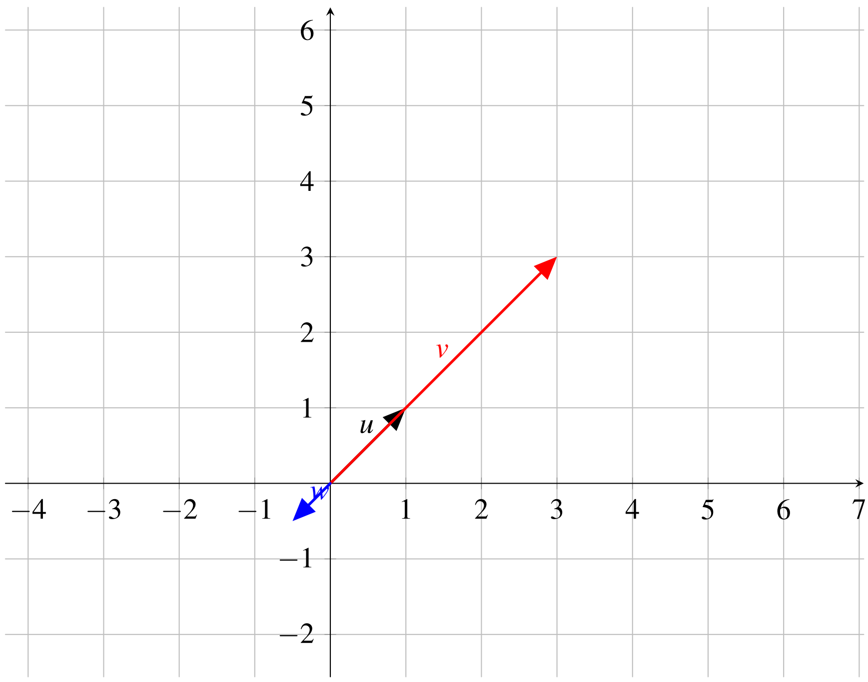
1. Dado el vector $\vec{v} = (-1,3)$, calcular $2(-1,3)$. Es sencillo verificar que $2(-1,3) = (-2,6)$.
2. Para el vector $\vec{u} = (1,2,-3)$ y el escalar $\lambda = -2$

$$\lambda\vec{u} = -2(1,2,-3) = (-2,-4,6)$$

3. Para un vector $\vec{w} = (w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{R}^n$ y un escalar λ

$$\lambda\vec{w} = (\lambda w_1,\dots,\lambda w_n)$$

En términos geométricos, multiplicar a un vector por un escalar positivo estira o contrae al vector. Es decir, si el vector es $\vec{v} = (1,1)$ y lo multiplicamos por $\lambda = 2$, obtenemos el vector $2\vec{v} = (2,2)$. Geométricamente, puede verse que tiene misma dirección y sentido, pero tiene diferente magnitud, es decir, es el doble del vector original.
Pero si en cambio multiplicamos al vector por un escalar negativo, entonces además de modificar la magnitud, cambia la dirección a su opuesta.
En la siguiente figura, podemos observar como varía el vector de posición $\vec{v} = (1,1)$ al multiplicarlo por diferentes escalares, $\lambda = 3$ (en rojo). $\lambda = -\frac{1}{2}$ (en azul).



1.2.3. Producto escalar (interno)

El producto escalar es una de las operaciones más importantes entre vectores. Es tal su importancia que por medio de esta operación se puede definir tanto la norma de los vectores como el ángulo que se determina entre ellos. Es decir, esta operación nos define la geometría de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.11

Sean $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, definimos el producto escalar (o producto interno) como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Una notación muy usada en la bilbiografía para indicar el producto escalar (interno, ó producto punto), es la siguiente

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

N Por su similitud en los nombres, suele confundirse esta operación con el producto por un escalar. Se debe estar atento para no confundir dichas operaciones. Mientras que en el producto por un escalar se multiplican un escalar con un vector y su resultado es un vector, en el producto escalar (o producto interno) se multiplican dos vectores obteniendo como resultado un escalar (de ahí su nombre).

El producto interno goza de algunas propiedades sumamente útiles a la hora del cálculo, también en varios contextos teóricos aparecen dichas propiedades.

Proposición 1.4

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces:

1. Distributivo respecto a la suma, es decir $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ es decir, es simétrico.

3. Para cualquier escalar λ, $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

4. $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$.

Ejemplo 1.16

Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-1,-1,1)$, $\vec{w} = (1,-2,3)$. Veamos algunos cálculos del producto escalar.

1. Calculemos $2\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$. Sabemos por la propiedad de distributividad con respecto de la suma que $2\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (2\vec{u}\cdot\vec{v}) + (2\vec{u}\cdot\vec{w})$. Pero además, sabemos que $(2\vec{u}\cdot\vec{v}) = 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$ y además que $(2\vec{u}\cdot\vec{w}) = 2(\vec{u}\cdot\vec{w})$. Por lo tanto,

$$2\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = 2(\vec{u},\vec{v}) + 2(\vec{u},\vec{w}) = 2(\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w})$$

Calculamos entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,0,1)\cdot(-1,-1,1) = 1\times(-1)+0\times(-1)+1\times(-1) = -1+0-1 = -2$. Por otro lado, debemos calcular $\vec{u}\cdot\vec{w}$, por lo tanto, $(1,0,1)\cdot(1,-2,3) = 1\times 1+0\times -2+1\times 3 = 4$.
De donde concluimos que

$$2\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = 2(-2+4) = 4$$

2. Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{v} = (0,1)$. Si calculamos su producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,0)\cdot(0,1) = 1\times 0+0\times 1 = 0$$

3. Sabiendo que $(\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)) = 2$ y $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 3$, calcular $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3$.
Por las propiedades del producto interno, sabemos que

$$(\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)) = (\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2) + (\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3) = 3+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3$$

Por lo tanto, $(\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)) - 3 = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3$. Además, sabemos que $(\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)) = 2$, de donde $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = 2-3 = -1$.

4. Sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ y $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, mostrar que el producto de $\vec{u}$ con cualquier combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es nulo.

Veamos ahora la relación que guarda el producto escalar con la norma de vectores. Recordemos que para un vector $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$, hemos definido la norma como

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}$$

Además, sabemos que $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = \sum_{i=1}^n u_i u_i = u_1^2+\cdots+u_n^2$, por lo tanto

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

Y por lo tanto,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Por otro lado, hemos mencionado que el producto escalar nos permite calcular ángulos entre vectores. Esto se lo debemos a la siguiente desigualdad.

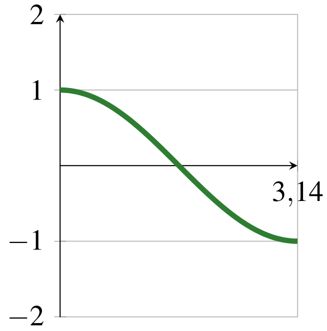
Lema 1.1 Desigualdad de Schwartz Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$$

De esta misma desigualdad es que obtenemos la siguiente observación

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} \leq 1$$

Por otro lado, conocemos de la trigonometría que la función coseno tiene imagen en el intervalo $[-1,1]$. Además, si observamos la gráfica de la función coseno para un ángulo comprendido en el intervalo $\theta \in [0,\pi]$, podemos ver



Es una función biyectiva. Por lo tanto, para cada valor $x \in [-1,1]$, existe un único angulo $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = x$.
Por lo tanto, si sabemos que

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} \leq 1$$

Entonces, existe un único ángulo $\theta \in [0,\pi]$ verificando

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

Definición 1.12

El ángulo $\theta \in [0,\pi]$ verificando

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

Es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo 1.17

Calcular el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (1,0)$.
Sabemos que el ángulo que buscamos cumple la ecuación

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{(1,1)\cdot(1,0)}{\sqrt{2}}$. De donde obtenemos que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y por lo tanto $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

La identidad que hemos obtenido nos sirve también para calcular el producto escalar entre dos vectores de una manera diferente, pues despejando de la identidad obtenemos que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta$$

N En vista de la identidad anterior, podemos obtener información geométrica sobre el ángulo entre los vectores con solo calcular su producto escalar. Sabemos que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (también se dice, ortogonales), entonces el ángulo entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto su producto escalar dará como resultado

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Pues $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
Por otro lado, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} = 0$$

Y por lo tanto, $\theta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Proposición 1.5

Sea $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales (perpendiculares) si y solo si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$-

Veamos ahora como poder determinar que dos vectores son paralelos.

Definición 1.13

Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si tienen la misma dirección. Esto es, el ángulo entre ellos es $\theta = 0$.

Definición 1.14

Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son multiplos escalares si existe un valor real λ tal que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v}$$

Proposición 1.6

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

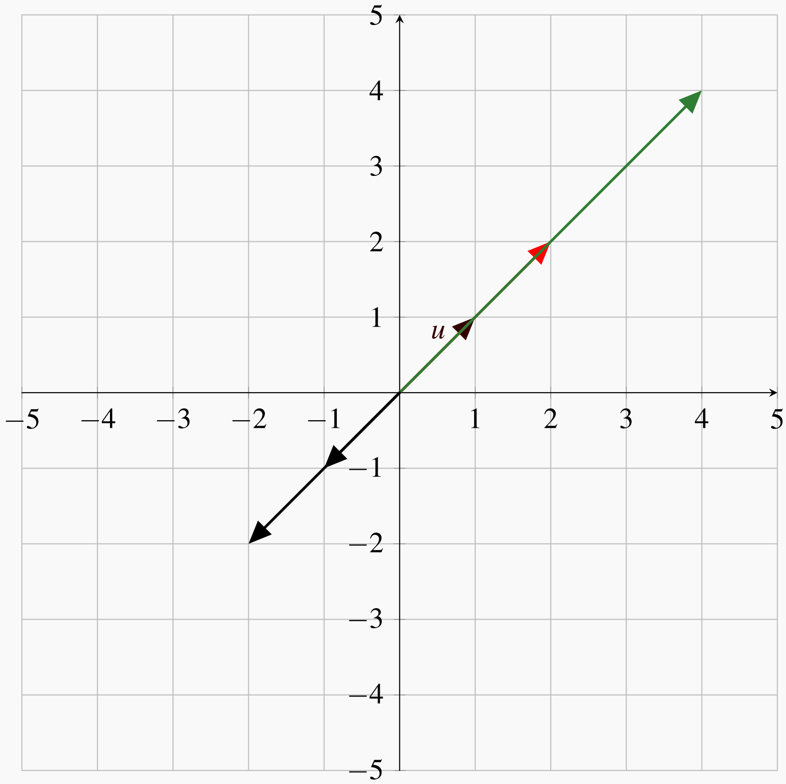
1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.
2. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son multiplo escalar.

2 Rectas y Planos

Recordemos que para un vector canónico $\vec{v}$ el efecto geométrico que conseguimos al multiplicar dicho vector por un valor real (escalar) es estirarlo o contraerlo e incluso cambiarle el sentido (si $\lambda \leq 0$). Veamos el siguiente gráfico para ilustrarlo mejor

Ejemplo 2.1

Consideremos el vector $\vec{v} = (1,1)$.



En verde vemos que $\lambda\vec{v}$, con $\lambda = 4$, tenemos el vector $4(1,1) = (4,4)$. En rojo vemos que $\lambda\vec{v}$ con $\lambda = 2$, tenemos el vector $2(1,1) = (2,2)$. También pueden observarse que ocurre con $\lambda = -1, -2$.

De esta manera si vamos variando el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces obtenemos una recta con la dirección del vector $\vec{v}$. La recta se describe como un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^2$

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda\vec{v} \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Puede verse tal efecto en el siguiente enlace de geogebra: `https://www.geogebra.org/m/vw5byeyd`

De lo observado anteiormente damos la siguiente definición

Definición 2.1

Dado un vector canónico $\vec{v}$, la recta generada por dicho vector es el subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$

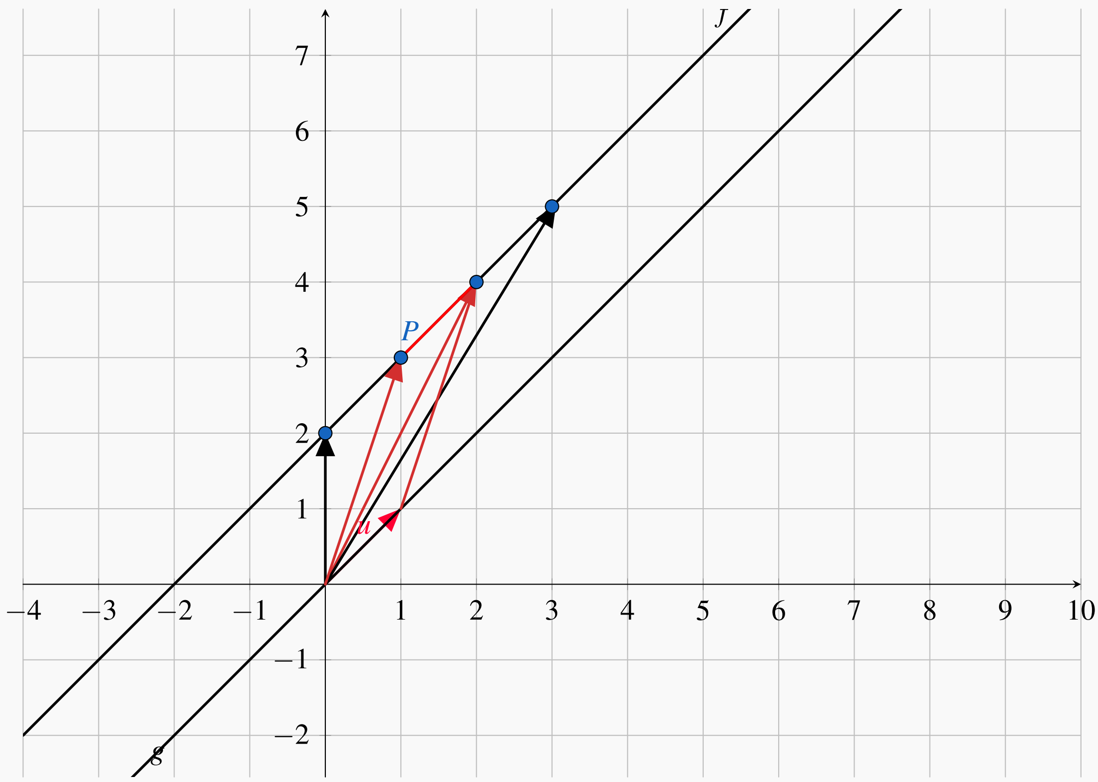
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda \vec{v}, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

N El vector $\vec{v}$ le dá una dirección a la recta, esto es, le dá el ángulo de inclinación respecto a la horizontal. El vector $\vec{v}$ se dirá vector director de la recta.

Consideremos ahora un vector director $\vec{v}$ y un punto P de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que el punto P nos determina un vector canónico $\vec{P}$. Además, sabemos que podemos sumar ambos vectores canónicos. Geométricamente obtenemos, por la regla del paralelogramo, un nuevo vector canónico que resulta ser la diagonal del paralelogramo que forman sumandos. Si sumamos a cada múltiplo del vector director $\vec{v}$, el punto P vemos que cada uno de los vectores resulta tener su cabeza sobre una recta paralela a la que genera $\vec{v}$, pero esta pasa por el punto P.

Ejemplo 2.2

Consideremos el vector director $\vec{v} = (1,1)$ y el punto $P = (1,3)$. En rojo, podemos observar la suma de $\vec{v} + \vec{P} = (1,1) + (1,3) = (2,4)$. Pero si lo hacemos con diferentes multiplos escalares de $\vec{v}$, vemos que los vectores tienen su punto final (cabeza) sobre una recta que tiene misma dirección que la generada por el vector $\vec{v}$ pero desplazada, de manera tal que pasa por el punto P.



Definición 2.2

Sea $\vec{v}$ un vector canónico y P un punto del plano. Definimos la recta con dirección $\vec{v}$ y que pasa por el punto P como el subconjunto

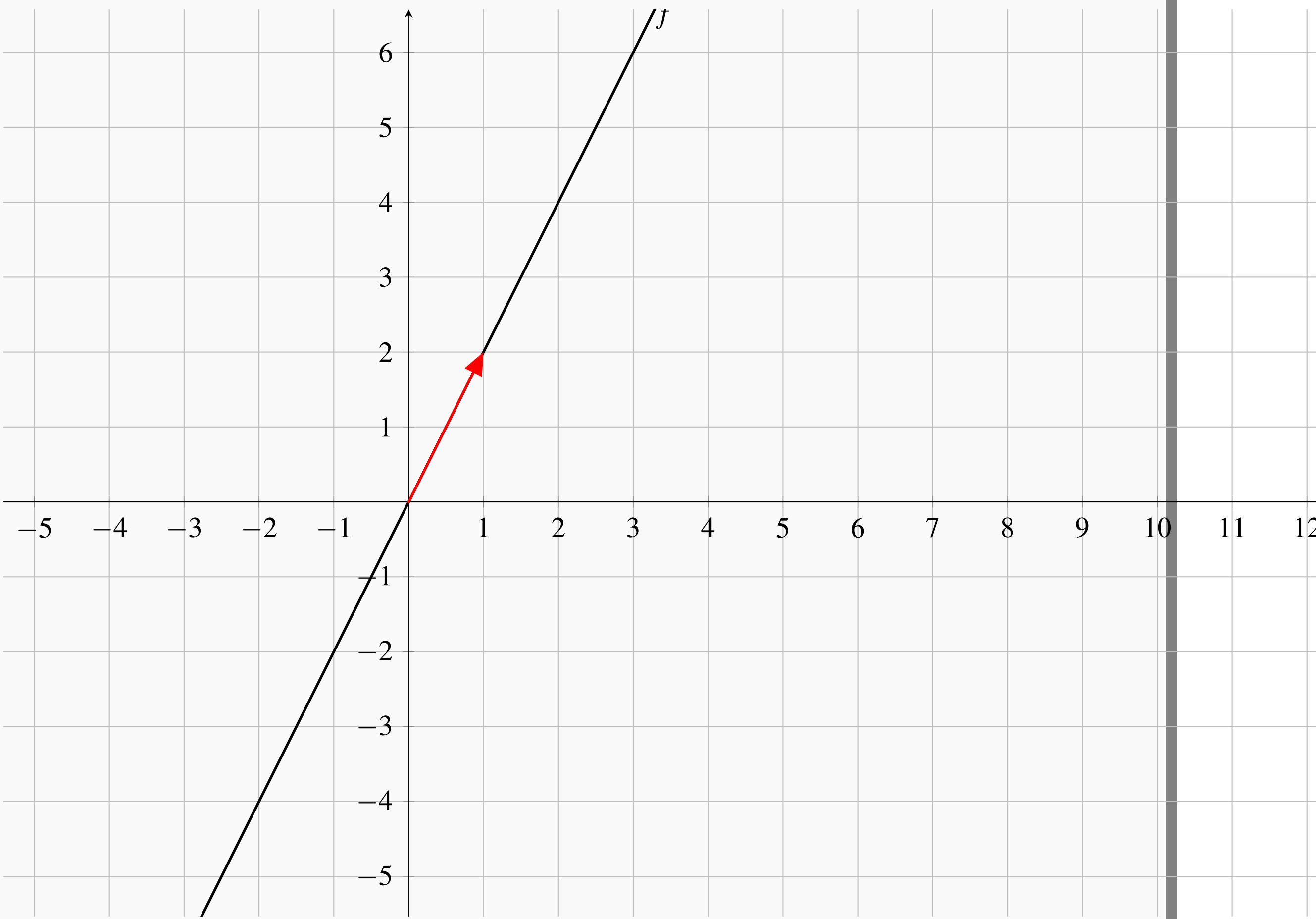
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda \vec{v} + P, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(N) Notemos que la recta desplazada es paralela a la que genera el vector $\vec{v}$, es decir tiene la misma dirección que la recta generada por $\vec{v}$. Esto se debe a que tienen el mismo vector director. De manera más general, recordemos que dos vectores son paralelos si son multiplo escalar uno de otro. Por lo tanto, si dos rectas tienen vectores directores paralelos, serán paralelas.

Ejemplo 2.3

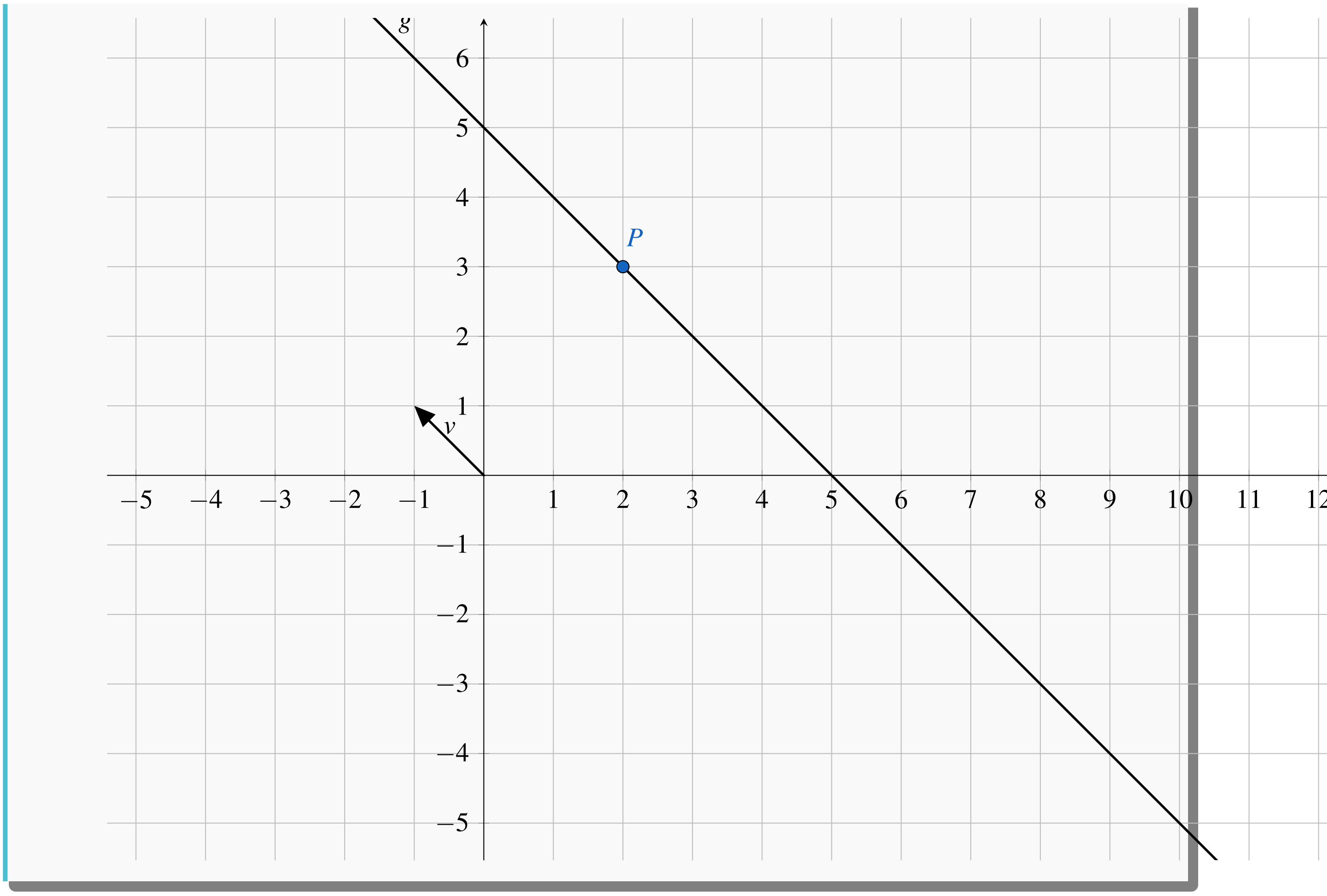
Determinar las siguientes rectas de $\mathbb{R}^2$:

1. La recta cuyo vector director es $\vec{u} = (1,2)$. Esta es la recta $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) = \lambda(1,2), \ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.



2. La recta que es paralela a $L = \{\lambda(-1,1) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ y pasa por el punto $P = (2,3)$.
   En este caso, tenemos a la recta desplazada. Es decir, sabemos que tiene que ser paralela a L, por lo tanto, nuestro vector director serÃ¡ $\vec{v} = (-1,1)$. Pero además debemos sumarle el punto $P = (2,3)$. Por lo tanto, nuestra recta serÃ¡

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) = \lambda(-1,1) + (2,3) \ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$



En adelante, haremos un abuso de notación. Para indicar que un punto $X = (x_1,..,x_n)$ es un punto de la recta $\{(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1,..,x_n) = \lambda\vec{v} + P, \lambda \in \mathbb{R}\}$, como

$$X = \lambda\vec{v} + P$$

Además, a la recta que está generada por el vector $\vec{v}$ y que pasa por el punto P, la indicaremos como

$$(x_1,\ldots,x_n) = \lambda\vec{v} + P$$

sobre entendiendo que se trata de un subconjunto del plano. A esta manera de expresar a la recta por medio de operaciones entre vectores, se la conoce como la ecuación vectorial de la recta.

Definición 2.3

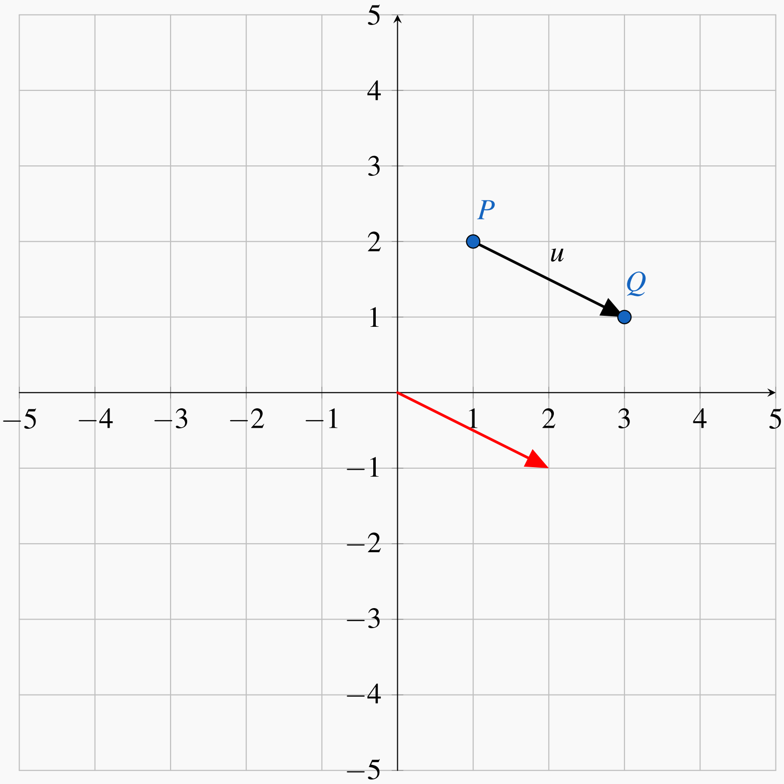
La ecuación vectorial de la recta que es generada por el vector $\vec{v}$ y pasa por el punto P, es dada por la expresión

$$(x_1,..,x_n) = \lambda\vec{v} + P \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

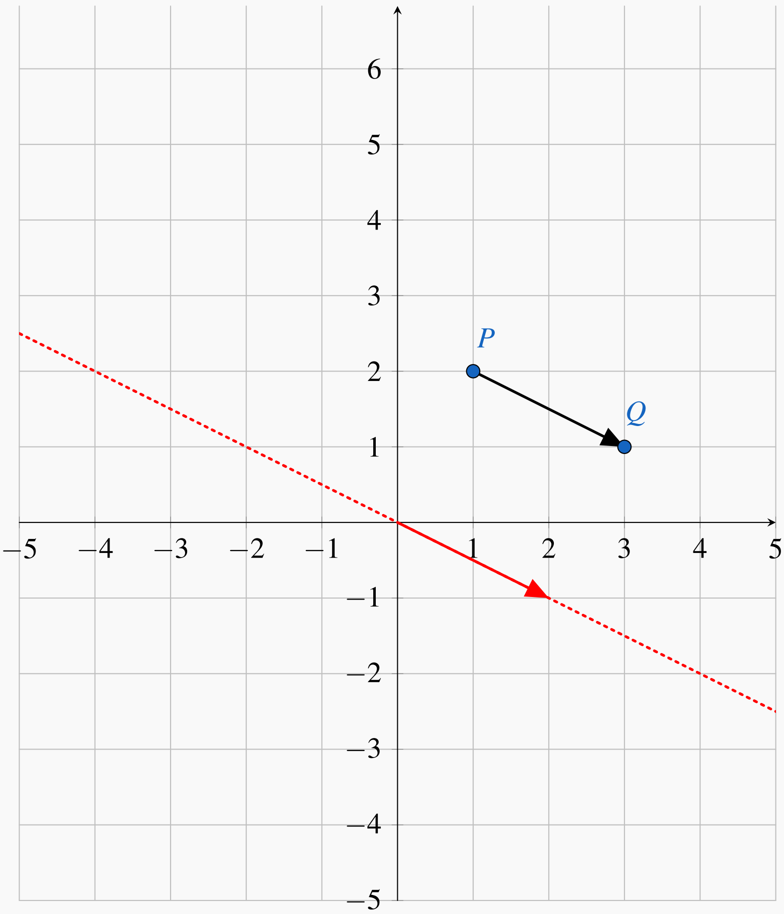
Ejemplo 2.4

Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (3,1)$.
Para determinar la ecuación vectorial de una recta necesitamos dos datos fundamentales:

1. Un vector director. Para determinar una dirección correcta de la recta, vamos a considerar el vector canónico, equivalente al vector que une los puntos P y Q. Recordemos que, geométricamente, el vector $\vec{PQ} = P - Q = (3,1) - (1,2) = (2,-1)$ es el vector canónico, equivalente al vector que une los puntos P y Q.



Nuestra recta tendrá como vector director al vector $\vec{v} = (2, -1)$. Notemos que la recta generada por este vector es



2. Un punto por donde debe pasar la recta. Si desplazamos la recta por cualquiera de los puntos, en-

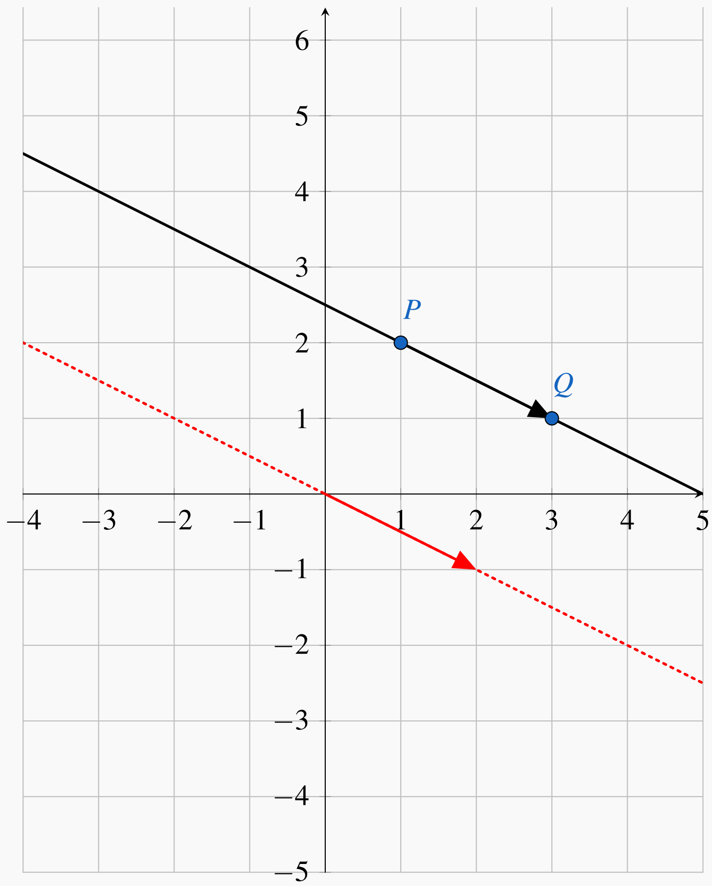
tonces obtenemos la recta que buscamos. Por lo tanto, nuestra recta tendrá como ecuación vectorial

$$\lambda(P-Q)+P$$

Es decir, nuestra ecuación será

$$(x,y)=\lambda(2,-1)+(2,3)$$

Y su gráfico es



2.0.1. Rectas en $\mathbb{R}^3$

Como hemos visto en el plano $\mathbb{R}^2$, mediante las operaciones con vectores podemos generar una recta y desplazarla hacia donde sea necesario.Este mismo método nos será útil en el espacio. Es decir, para construir una recta en el espacio necesitamos dos elementos:

1. Un vector director.
2. Un punto por donde pase dicha recta.

Como vemos en el siguiente ejemplo.

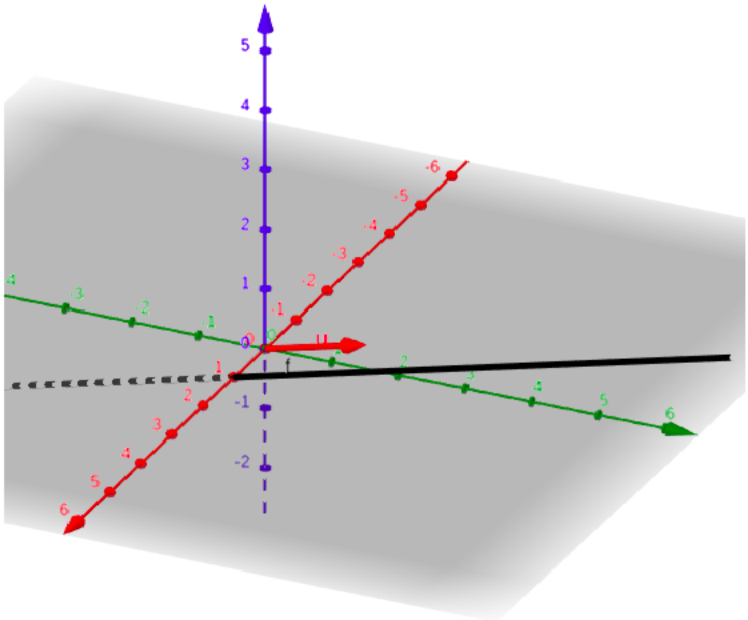
Ejemplo 2.5

Determinar la ecuación vectorial de la recta que tiene dirección $\vec{u}=(1,2,-1)$ y pasa por el punto $P=(1,0,0)$.
Sabemos que un punto $X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ es un punto de la recta si verifica la igualdad

$$X=\lambda\vec{u}+P$$

Es decir,

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,-1) + (1,0,0)$$



2.0.1.1. Ecuaciones paramétricas, segmentarias y normal de la recta

Asi como obtenemos una representación de la recta por medio de las operaciones vectoriales, a la cual hemos llamado ecuación vectorial de la recta, también podemos obtener diferentes representaciones para una misma recta.
Sabemos que una recta que tiene como vector director al vector $\vec{v}$ y pasa por el punto P la representamos vectorialmente como

$$(x_1,..,x_n) = \lambda\vec{v} + P$$

También suele utilizarse la notación

$$X = \lambda\vec{v} + P$$

Donde indicamos que el punto X satisface dicha ecuación. Es decir, para $X = (x1,..,x_n)$, decimos que satisface dicha ecuación si y solo si existe un valor real λ tal que

$$(x_1,...,x_n) = \lambda(v_1,..,v_n) + (p_1,...,p_n)$$

Operando como mencionamos antes, podemos decir que

$$(x_1,..,x_n) = (\lambda v_1 + p_1,...,\lambda v_n + p_n)$$

Utilizando el criterio de igualdad de los puntos, sabemos que esta igualdad es cierta si y solo si

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda v_1 + p_1 \\ x_2 & = & \lambda v_2 + p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda v_n + p_n \end{array}$$

A estas ecuaciones se las conoce como ecuaciones paramétricas de la recta $(x_1,..,x_n) = \lambda\vec{v} + P$. El nombre de dichas ecuaciones proviene de expresar a cada una de las coordenadas de los puntos de la recta, en función del parámetro λ.

Definición 2.4

Sea $(x_1,..,x_n) = \lambda\vec{v} + P$ una recta en $\mathbb{R}^n$. Las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda v_1 + p_1 \\ x_2 & = & \lambda v_2 + p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda v_n + p_n \end{array}$$

Son las ecuaciones paramétricas de la recta.

Notemos que en las ecuaciones paramétricas expresamos a cada componente de un punto de la recta en fución del parámetro λ.
Supongamos ahora que un punto X es un punto de la recta, es decir, existe un valor real λ tal que

$$X = \lambda\vec{v} + P$$

Por lo tanto, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda v_1 + p_1 \\ x_2 & = & \lambda v_2 + p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda v_n + p_n \end{array}$$

Por lo tanto, si despejamos λ de cada una de las ecuaciones, tendremos

$$\lambda = \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

A las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} \lambda & = & \frac{x_1-p_1}{v_1} \\ \lambda & = & \frac{x_2-p_2}{v_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & = & \frac{x_n-p_n}{v_n} \end{array}$$

Se las conoce como ecuaciones simétricas de la recta.

Definición 2.5

Sea $X = \lambda\vec{v} + P$ la ecuación vectorial de una recta. Las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} \lambda & = & \frac{x_1-p_1}{v_1} \\ \lambda & = & \frac{x_2-p_2}{v_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & = & \frac{x_n-p_n}{v_n} \end{array}$$

Son las ecuaciones simétricas de la recta.

Ejemplo 2.6

Determinar las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^n$ con $n = 2,3$.

1. Recta que pasa por los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (-1,3)$.
   Hagamos primero la ecuación vectorial de la recta. Debemos obtener primero el vector director de la recta. Para esto, hacemos

   $$\vec{v} = Q - P = (-1,3) - (1,2) = (-2,1)$$

   El vector director que obtenemos es el representante canónico de aquel que une dichos puntos. Por lo tanto, a la recta que generamos con el vector $\vec{v} = (-2,1)$, la debemos desplazar para que pase por los puntos que necesitamos. Por lo tanto

   $$(x_1,x_2) = \lambda\vec{v} + P \Rightarrow (x_1,x_2) = \lambda(-2,1) + (1,2)$$

   Con la ecuación vectorial de la recta, podemos encontrar las ecuaciones paramétricas como

   $$(x_1,x_2) = \lambda(-2,1) + (1,2) \Rightarrow x_1 = -2\lambda + 1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \lambda + 2$$

   Por último, las ecuaciones simétricas de la recta serán

   $$\lambda = \frac{x_1 - 1}{-2} = \frac{x_2 - 2}{1}$$

2. Recta que pasa por el punto $P = (2,3)$ y es perpendicular a la recta $(x_1,x_2) = \lambda(-1,-1) + (1,3)$.
   Buscaremos armar la ecuación vectorial. Sabemos que nuestra recta debe ser perpendicular a la recta $(x_1,x_2) = \lambda(-1,-1) + (1,3)$. Por lo tanto, debemos buscar un vector director que sea perpendicular al vector director de esta recta. Recordemos que dos vectores son perpendiculares entre sí, cuando el producto interno entre ellos es nulo. Es decir, buscamos un vector director $\vec{v} = (v_1,v_2)$ tal que verifica la condición

   $$(v_1,v_2) \cdot (-1,-1) = 0$$

De aquí, obtenemos que $-v_1 - v_2 = 0$ por lo tanto, cualquier vector tal que $-v_1 = v_2$ funcionará. Elegimos, por simplicidad en las cuentas, al vector $\vec{v} = (-1,1)$. Luego, la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular a $(x_1,x_2) = \lambda(-1,-1)+(1,3)$, y pasa por $(2,3)$ es

$$(x_1,x_2) = \lambda(-1,1)+(2,3)$$

Sus ecuaciones paramétricas serán

$$(x_1,x_2) = \lambda(-1,1)+(2,3) = (-\lambda+2,\lambda+3)$$

Por lo tanto

$$x_1 = -\lambda+2$$

$$x_2 = \lambda+3$$

Por último, sus ecuaciones simétricas serán

$$\lambda = \frac{x_1-2}{-1} = \frac{x_2-3}{1}$$

3. Recta que pasa por los puntos $P = (1,1,-1)$ y $Q = (0,-1,2)$.
   Del mismo modo que hacemos en $\mathbb{R}^2$, buscamos primero el vector director de la recta que nos interesa. Si hacemos $\vec{A} = Q-P = (0,-1,2)-(1,1,-1) = (-1,-2,3)$, obtenemos el representante canónico del vector que une los puntos P y Q. Luego, la ecuación vectorial de la recta que une dichos puntos es

$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda(-1,-2,3)+(1,1,-1)$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de la recta serán

$$(x_1,x_2,x_3) = (-\lambda+1,-2\lambda+1,3\lambda-1)$$

De donde obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = -\lambda+1$$

$$x_2 = -2\lambda+1$$

$$x_3 = 3\lambda-1$$

Además, de estas expresiones podemos obtener las ecuaciones simétricas como

$$\lambda = \frac{x_1-1}{-1} = \frac{x_2-1}{-2} = \frac{x_3+1}{3}$$

Las diferentes representaciones de una recta nos permiten estudiar problemas que involucran a las rectas de diferentes enfoques. Es muy usual utilizar estas representaciones para buscar distancias de un punto a una recta, e intersecciones de rectas.
Nos resta estudiar la representación normal (o, representación escalar) de las rectas. En principio, estudiaremos esta representación solo en el plano $\mathbb{R}^2$.

2.0.1.2. Ecuación normal de una recta en $\mathbb{R}^2$

Como hemos estudiado, la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^2$ es de la forma

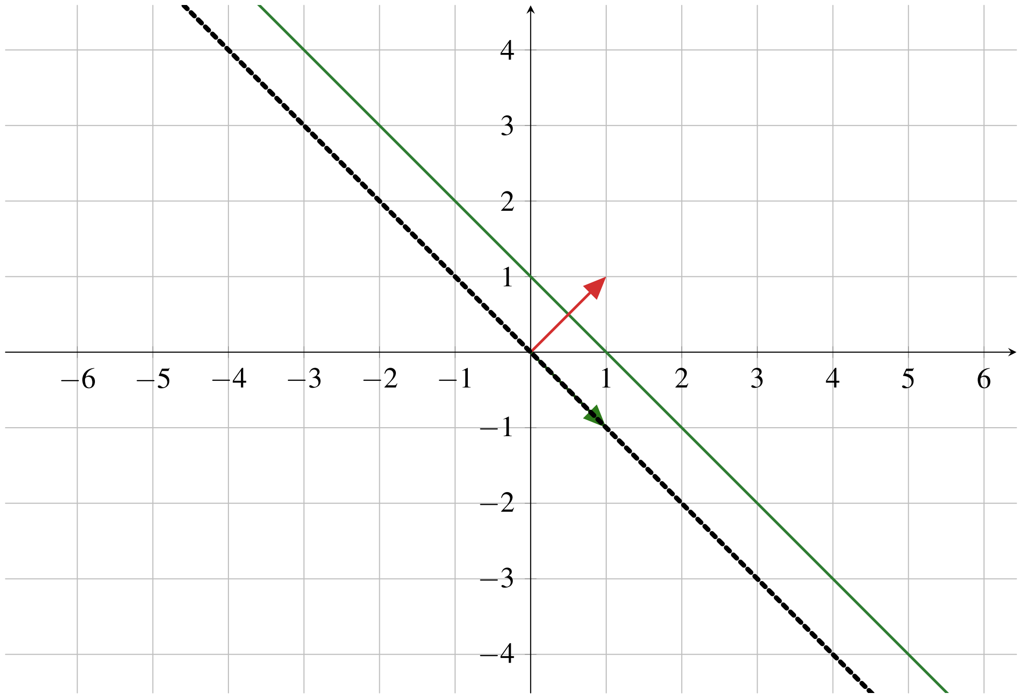
$$(x_1,x_2) = \lambda\vec{v}+P$$

Si $\vec{N}$ es un vector normal (perpendicular, ortogonal) al vector director de la recta $(x_1,x_2) = \lambda\vec{v}+P$ sabemos que $\vec{N}\cdot\vec{v} = 0$.

Si tomamos el producto escalar de cada punto de la recta, $(x_1,x_2) = \lambda\vec{v}+P$, con el vector normal $\vec{N}$, y aplicamos las propiedades del producto escalar, obtenemos

$$\begin{aligned} N\cdot(x_1,x_2) &= N\cdot(\lambda\vec{v}+P) \\ &= \lambda\left(\vec{N}\cdot\vec{v}\right)+\left(\vec{N}\cdot P\right) \\ &= \lambda 0+\vec{N}\cdot P \\ &= \vec{N}\cdot P \end{aligned}$$

Es decir, obtenemos una ecuación de la recta utilizando el producto escalar con un vector normal, como vemos en el siguiente gráfico.



En verde, observamos al verctor director de la recta $(x_1,x_2) = \lambda(1,-1)+(1,0)$. Dicha recta estÃ¡ graficada en verde también. En cambio, en rojo, vemos el vector normal a dicha recta, $\vec{N} = (1,1)$. La ecuación normal de la recta será

$$(x_1,x_1)\cdot(1,1) = (1,0)\cdot(1,1)$$

Es decir,

$$x_1+x_2 = 1$$

Esta forma de representar una recta nos es más familiar. Si cambiamos el nombre de la variable x_2 por y, la recta resultante es $x+y=1$ y por lo tanto $y=1-x$.

Definición 2.6

Sea $(x_1,x_2) = \lambda\vec{v}+P$ la ecuación vectorial de una recta y sea $\vec{N}$ un vector normal a dicha recta. Entonces la ecuación normal (escalar) de la recta es

$$\vec{N}\cdot(x_1,x_2) = \vec{N}\cdot P$$

Ejemplo 2.7

Determinar las ecuaciones vectoriales, paramétricas, simétricas y normales de cada una de las siguientes rectas.

1. Recta que pasa por los puntos $P = (1,1)$ y $Q = (-2,1)$.

2. Recta que es perpendicular a la recta $X = \lambda(1,2) + (1,1)$ y pasa por el punto $(-1,-1)$.

3. Recta que es paralela al vector $\vec{v} = (2,1)$ y pasa por el punto $P = (1,1)$.

1) En el caso de la recta que pasa por los puntos $P = (1,1)$ y $Q = (-2,1)$, buscamos primero el vector director $\vec{u} = Q - P = (-2,1) - (1,1) = (-3,0)$. Además, sabemos que debe pasar por alguno de los puntos, por lo tanto, la ecuación vectorial será

$$(x_1,x_2) = \lambda(-3,0) + (1,1)$$

De esta ecuación, calculamos las ecuaciones paramétricas como

$$(x_1,x_2) = \lambda(-3,0) + (1,1) = (-3\lambda + 1, 1)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$x_1 = -3\lambda + 1$$

$$x_2 = 1$$

Por último, las ecuaciones simétricas, en este caso, no existen, pues λ se anula en la segunda ecuación . Para la ecuación normal, necesitamos un vector normal al vector $\vec{u} = (-3,0)$. Para esto, buscamos un vector (n_1,n_2) tal que

$$(n_1,n_2) \cdot (-3,0) = 0 \Rightarrow -3n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = 0$$

Por lo tanto, cualquier vector cuya primera cordenada sea nula, nos sirve. Por simplicidad en las cuentas, tomemos $\vec{N} = (0,1)$. Luego, la ecuación normal de la recta la calculamos tomando el producto escalar de los vectores de la recta con dicho vector normal. Es decir, si $(x_1,x_2) = \lambda(-3,0) + (1,1)$, entonces

$$(0,1) \cdot (x_1,x_2) = \lambda(0,1) \cdot (-3,0) + (0,1) \cdot (1,1)$$

De donde obtenemos que la ecuación normal de la recta es

$$x_2 = 1$$

2) Para la recta que es perpendicular a la recta $(x_1,x_2) = \lambda(1,2) + (1,1)$ y pasa por el punto $P = (-1,-1)$, sabemos que nuestro vector director debe ser perpendicular al vector $\vec{v} = (1,2)$. Para encontrar dicho vector, recordemos que un vector $\vec{N}$ es perpendicular a $\vec{v}$ si y solo si $\vec{v} \cdot \vec{N} = 0$. Por lo tanto, para encontrar al vector $\vec{N} = (n_1,n_2)$ hacemos

$$(n_1,n_2) \cdot (1,2) = 0$$

De donde vemos que

$$n_1 + 2n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = -2n_2$$

Cualquier vector que verifique esa relación será útil. Tomemos $\vec{N} = (-2,1)$. Por lo tanto, el vector $\vec{N} = (-2,1)$ es el vector director de la recta que debemos crear. Luego, la ecuación vectorial de la recta perpendicular a $(x_1,x_2) = \lambda(1,2) + (1,1)$ y que pasa por el punto $(-1,-1)$ será

$$(x_1,x_2) = \lambda(-2,1) + (-1,-1)$$

De la ecuación anterior, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la siguiente manera

$$(x_1,x_2) = (-2\lambda - 1, \lambda - 1)$$

Es decir,

$$x_1 = -2\lambda - 1$$

$$x_2 = \lambda - 1$$

De estas expresiones podemos obtener las ecuaciones simétricas como

$$\lambda = \frac{x_1+1}{-2} = \frac{x_2+1}{1}$$

Por último, para la ecuación normal, de la recta, ya tenemos nuestro vector normal. Pues, nuestra recta debe ser perpendicular a la recta $(x_1,x_2) = \lambda(1,2)+(1,1)$. Por lo tanto, nuestro vector normal será el vector director de dicha recta, es decir, $\vec{N} = (1,2)$. De esta manera, tendremos

$$(1,2)\cdot(x_1,x_2) = (1,2)\cdot(-1,-1)$$

Es decir,

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

3) Este ejemplo queda como ejercicio.

2.1. Planos en $\mathbb{R}^3$

En la presente sección estudiaremos los planos en el espacio $\mathbb{R}^3$. No tiene mucho sentido estudiarlos en $\mathbb{R}^2$ puesto que todo $\mathbb{R}^2$ es en escencia un plano. Pero estamos interesados en estudiar subconjuntos que guardan ciertas particularidades, a los cuales estudiaremos mÃ¡s en detalle en el curso.
Recordermos que para construir las rectas, se necesita de un vector el cual la genera por medio de estirar o contraer ese mismo vector. A este vector lo llamamos vector director o generador de la recta.
Para el caso de los planos necesitaremos dos vectores que lo generen. Consideremos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.7

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Llamaremos plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al subconjunto de R^3

$$\pi = \{(x,y,z) \in R^3 : \ (x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} \qquad \lambda,\beta \in \mathbb{R}\}$$

Suele hacerse un abuso de notación y usarse la expresión

$$(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Para indicar la ecuación vectorial del plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esta definición puede interpretarse geométricamente de la siguiente manera:

1. Recordemos que al sumar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtenemos un paralelogramo.

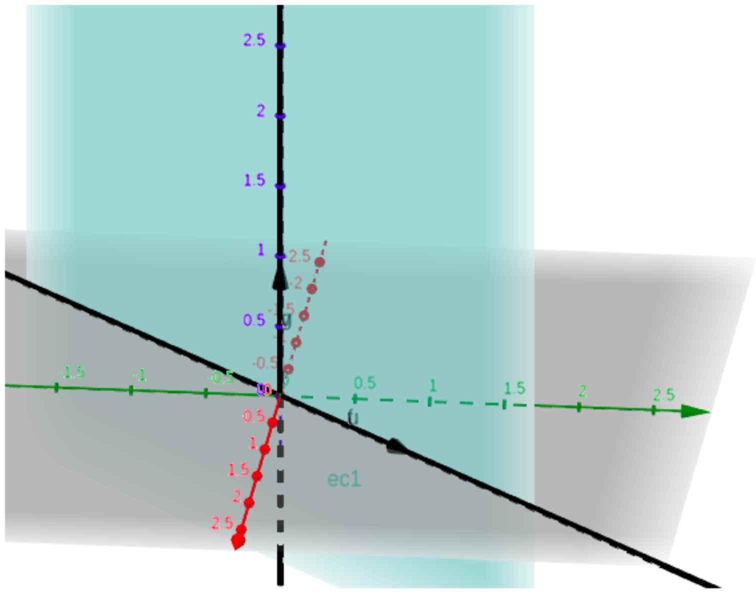
2. Si estiramos y contraemos los vectores que sumamos, entonces generamos paralelogramos de diferentes superficies.

3. Sabemos que para los escalares λ y β, ambos vectores generan rectas. Pero si sumamos ambas rectas, obtendremos todos los posibles paralelogramos que generan los multiplos escalares de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Por lo tanto, obtenemos una "pared.en donde se encuentran todas estas sumas.

Esto puede verse en el siguiente link: `https://www.geogebra.org/m/kmw78r3r`

Ejemplo 2.8

Sean $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,0,1)$ el plano que generan ambos vectores los podemos ver en gráfico



Definición 2.8

Sean $\vec{u}$ $\vec{v}$ dos vectores y P un punto de $\mathbb{R}^3$, la ecuación vectorial del plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto P es dada por

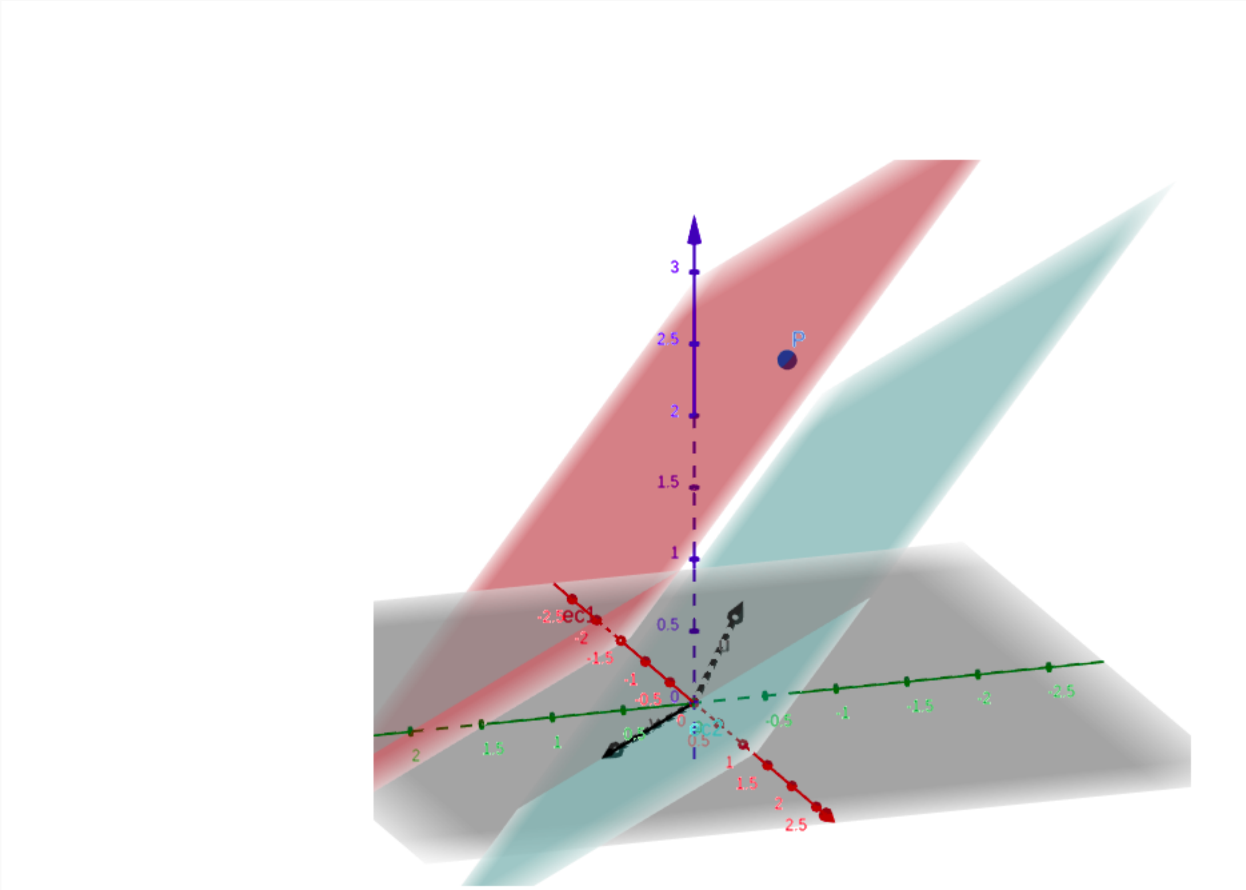
$$(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + P$$

Notemos que es simplemente un desplazamiento del plano que generan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hacia el punto P

Ejemplo 2.9

El plano generado por los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$ y pasa por el punto $P = (-1,-1,2)$ tiene como ecuación vectorial

$$(x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \beta(1,1,0) + (-1,-1,2)$$



En el gráfico anterior se observa el plano generado por los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$ (en azul), mientras que en rojo se observa el plano pero desplazado hacia el punto P.
Asi como las rectas tienen diferentes ecuaciones para su descripción, los planos también tendrán su representación mediante ecuaciones paramétricas.

Definición 2.9

Sea $(x_1,x_2,x_3) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + P$ la ecuación vectorial de un plano que esta generado por los vectores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ y que pasa por el punto $P = (p_1,p_2,p_3)$. Las ecuaciones

$$x_1 = \lambda u_1 + \beta v_1 + p_1$$

$$x_2 = \lambda u_2 + \beta v_2 + p_2$$

$$x_3 = \lambda u_3 + \beta v_3 + p_3$$

Son las ecuaciones paramétricas del plano.

2.1.1. Plano que pasa por tres puntos

Dados $A,B,C \in \mathbb{R}^3$ tres puntos del espacio, podemos obtener un plano π que contenga a esos tres puntos de la siguiente manera:

1. Primero nos buscamos dos generadores de dicho plano. Estos serán los siguientes vectores canónicos $\overrightarrow{AC} = (C-A)$ y $\overrightarrow{BA} = (B-A)$. Estos son los representantes canónicos de los vectores que unen los puntos A y C, y los puntos A y B respectivamente.

2. Sabemos que con esos generadores, el plano

$$(x,y,z) = \lambda\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AC}$$

Es un plano que pasa por el origen. Restará desplazarlo hacia un punto adecuado para que contenga a los puntos que queremos. Para esto, lo desplazaremos hacia el punto A.

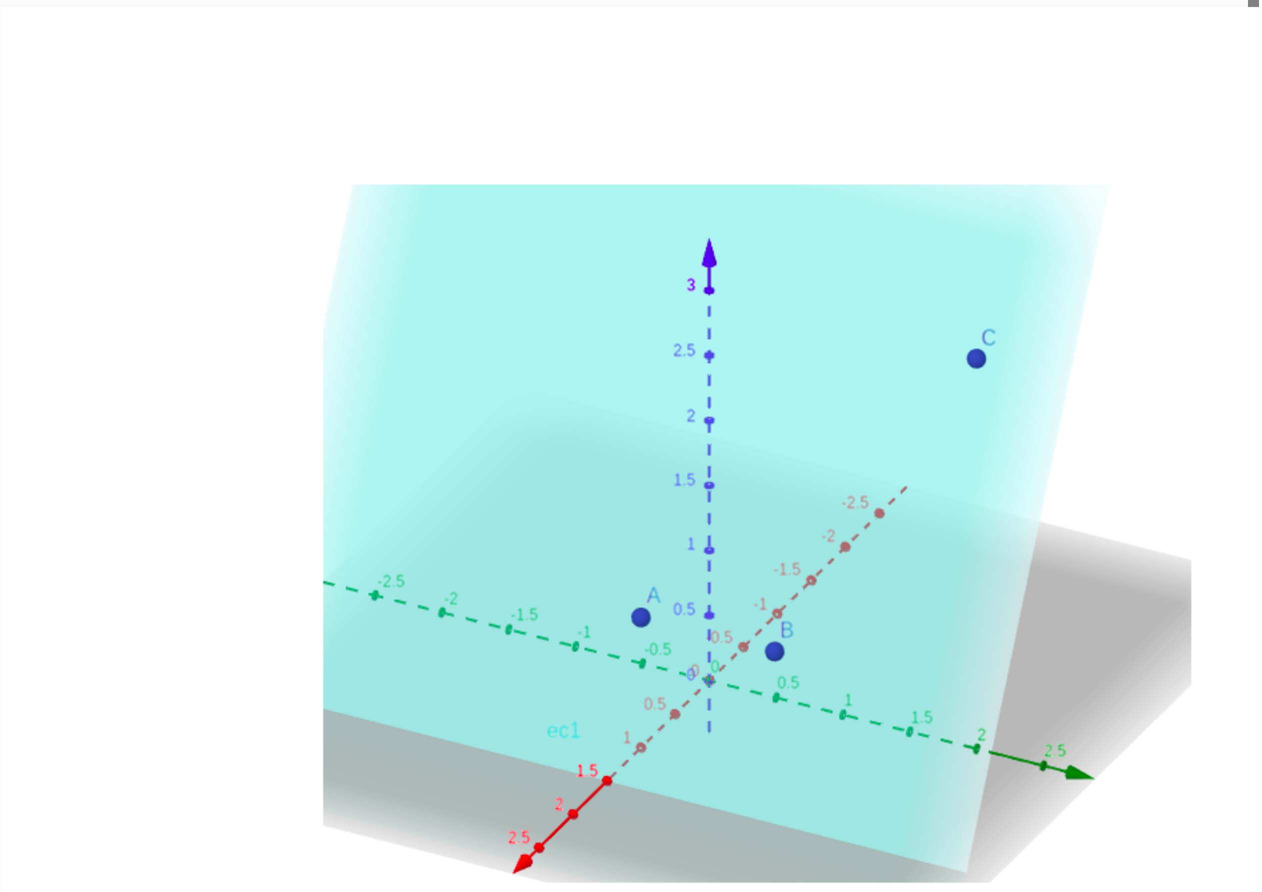
$$(x,y,z) = \lambda\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AC} + A$$

Ejemplo 2.10

Para los puntos $A = (1,0,1)$ $B = (1,1,1)$ y $C = (0,2,3)$, encontrar un plano que los contenga.
Siguiendo el procedimiento anterior, hacemos $\vec{AC} = (0,2,3) - (1,0,1) = (-1,2,2)$ y $B\vec{-}A = (0,1,0)$.
Luego, la ecuación vectorial del plano que buscamos es

$$X = \lambda(-1,2,2) + \beta(0,1,0) + (1,0,1)$$

Plano que vemos en el gráfico



2.1.2. Producto vectorial

Para continuar con las presentaciones de los planos y rectas en $\mathbb{R}^3$ es necesario introducir una operación de gran importancia: **el producto vectorial**. Dicho producto solo está definido para vectores en el espacio, es decir, para vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

El producto vectorial será el resultado de calcular el determinante de una matriz un poco particular. Esa matriz es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Observemos que en la primera fila tenemos vectores. Es por esto que decimos que es una matriz un poco particular. Estos vectores se los conoce como vectores de direcciones canónicas ó *Versores*. En términos de la física, suelen escribirse como

$$i = (1,0,0)$$
$$j = (0,1,0)$$
$$k = (0,0,1)$$

Por lo tanto, para no causar confusión en el cálculo, suele utilizarse la matriz

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Para calcular el producto vectorial entre los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
Con estas aclaraciones, definimos el producto vectorial

Definición 2.10

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, definimos el producto vectorial, y lo indicamos $\vec{u} \times \vec{v}$, como el determinante de la matriz

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} i u_2 v_3 - v_2 u_3 + (-1)^{1+2} j u_1 v_3 - v_1 u_3 + (-1)^{1+3} k u_1 v_2 - v_1 u_2 \\ &= (1,0,0) u_2 v_3 - v_2 u_3 - (0,1,0) u_1 v_3 - v_1 u_3 + (0,0,1) u_1 v_2 - v_1 u_2 \\ &= (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11

Calcular el producto vectorial para los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,2)$.

Para esto, consideramos el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = i(1 \times 2 - 0 \times 0) + j((-1) \times 0 - 1 \times 2) + k(1 \times 0 - (-1) \times 1) = (2, -2, 1)$$

Proposición 2.1

Propiedades del producto vectorial Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dos vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.

3. $(\alpha \vec{u}) \times \vec{b} = \vec{u} \times (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$.

4. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{w} = 0$.

5. $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ si y solo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Como sabemos, producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen como resultado un nuevo vector $\vec{u} \times \vec{v}$. Este vector, tiene la siguiente propiedad

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

y

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

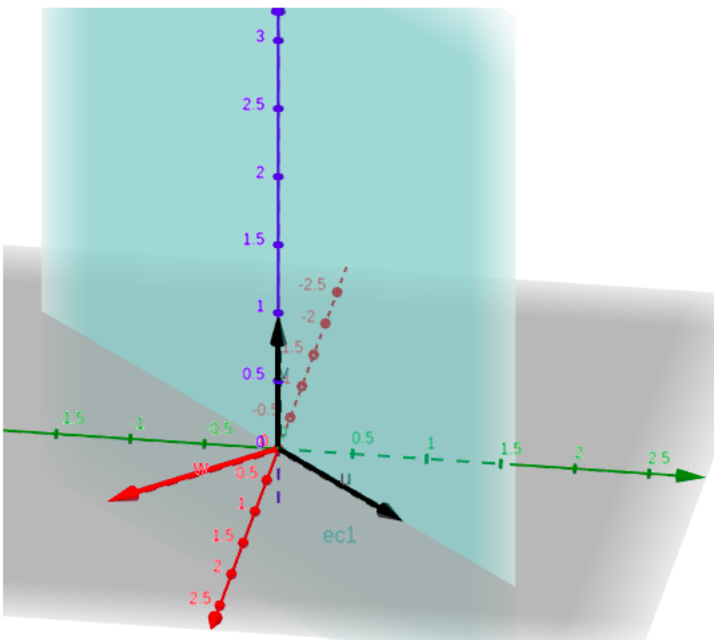
Es decir, el producto vectorial es perpendicular a cada multiplicando. Como consecuencia, para cualquier punto $(x, y, z) = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}$ en el plano que generan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vemos que

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\lambda \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \lambda (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} + \beta (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano que generan ambos vectores. como vemos en el siguiente gráfico.
Para los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, 1)$ el producto vectorial será

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

Y vemos que dicho vector es perpendicular al plano que generan $\vec{u}$ y $\vec{v}$



2.1.3. Ecuación general del plano

La representación general de un plano (o ecuación escalar) es una herramienta fundamental para la resolución de diferentes problemas tales como buscar intersección de rectas y planos.
Recordemos que la ecuación vectorial de un plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el punto C es dada por la expresión

$$(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + C$$

La idea es expresar al plano como aquellos puntos que son perpendiculares a un vector $\vec{N}$. Para esto, buscamos un vector normal al plano y tomamos el producto escalar a todos los puntos del plano

$$\vec{N} \cdot X = \vec{N} \cdot (\lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + C)$$

Sabiendo que $\vec{N}$ es perpendicular a cada generador del plano, entonces $\vec{N} \cdot \vec{u} = \vec{N} \cdot \vec{v} = 0$. Usando propiedades del producto interno obtenemos

$$\vec{N} \cdot (\lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + C) = \lambda\vec{N} \cdot \vec{u} + \beta\vec{N} \cdot \vec{v} + \vec{N} \cdot C$$

De donde concluimos

$$\vec{N} \cdot (x,y,z) = \vec{N} \cdot C$$

Definición 2.11

Sea $\vec{N}$ un vector normal al plano $(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + C$, entonces la ecuación

$$\vec{N} \cdot (x,y,z) = \vec{N} \cdot C$$

Es la ecuación general del plano.

Ejemplo 2.12

Consideremos el plano del último ejemplo que hemos visto. Es decir, el plano generado por los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,0,1)$. Sabemos que su ecuación vectorial es

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \beta(0,0,1) + (0,0,0)$$

Ya que no está desplazado, le sumamos el vector nulo. Sabemos que el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector normal al plano, por lo tanto, podemos usar $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = (1,-1,0)$. Luego, la ecuación escalar de dicho plano es

$$(x,y,z) \cdot (1,-1,0) = (1,1,0) \cdot (0,0,0)$$

De donde obtenemos

$$x - y = 0$$

Ejemplo 2.13

Encontrar la ecuación general del plano normal al vector $\vec{N} = (1,-1,2)$ y que pasa por el punto $C = (1,2,0)$.
La solución aquÃ es muy sencilla, puesto que tenemos todo lo necesario. La ecuación escalar del plano será

$$(x,y,z) \cdot (1,-1,2) = (1,-1,2) \cdot (1,2,0)$$

De donde obtenemos

$$x-y+2z=-1$$

N De los ejemplos anteriores, podemos observar lo siguiente:
La ecuación general de un plano es de la forma

$$ax+by+cz=d$$

Donde a,b,c son las coordenadas del vector normal al plano y además d queda determinado por el producto interno del vector $\vec{N}=(a,b,c)$ y el punto por donde está desplazado el plano.

Como hemos visto, a partir de la ecuación vectorial de un plano, podemos obtener la ecuación general. El procedimiento inverso también puede hacerse como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14

Encontrar la ecuación vectorial del plano cuya ecuación general es $x+y-z=2$.

Para el plano $x+y-z=2$, despejamos una variable en función de las demás

$$x+y-z=2 \Rightarrow x=2-y+z$$

Por lo tanto, un punto (x,y,z) estará en el plano si lo podemos escribir como

$$(x,y,z)=(2-y+z,y,z)=y(-1,1,0)+z(1,0,1)+(-2,0,0)$$

La ecuación vectorial del plano es $y(-1,1,0)+z(1,0,1)+(-2,0,0)$.

2.1.4. Intersección de planos

En la presente sección estudiaremos la manera de encontrar la intersección entre dos planos en el espacio $\mathbb{R}^3$. Dados dos planos, al buscar la intersección tenemos tres posibles soluciones:

1. Un plano: Esto ocurre cuando los planos son los mismos.

2. Una recta: Dados dos planos no paralelos, la intersección entre dos planos es una recta, como vemos en el gráfica

3. No hay solución: Si los dos planos son paralelos, entonces no será posible encontrar solución. Notemos que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

Para encontrar la intersección entre dos planos, la técnica más usual es utilizar las ecuaciones generales de los planos. Además de simplificar los cálculos, es conveniente utilizar estas expresiones por la información que nos aporta, de mucha importancia al problema. Sabemos que la expresion general de un plano nos indicará quien es el vector normal al mismo, y por lo tanto, si ambos planos tienen los mismos coeficientes, serán paralelos.

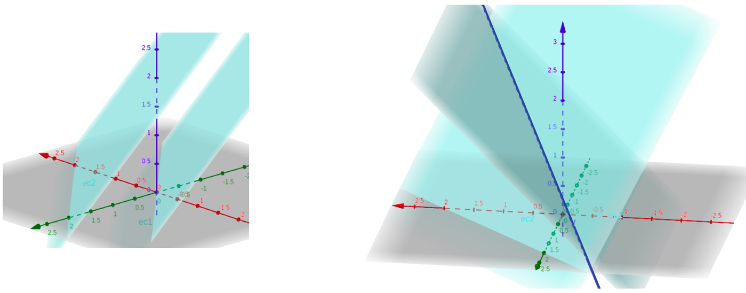


Figura 2.1: En la izquierda, no hay solución, mientras que en la derecha vemos la recta solución

Ejemplo 2.15

Buscar la intersección de los planos π: $x+y+z=1$ y el plano perpendicular a la recta $(x,y,z)=t(1,1,1)+(2,3,1)$.
Notemos que, el plano perpendicular a la recta tiene vector normal $\vec{N}=(1,1,1)$, por lo tanto su ecuación escalar es

$$x+y+z=0$$

Buscamos ahora la intersección entre los planos

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$$

Sin embargo, sabemos que ambos planos tienen igual vector normal, por lo tanto, serán paralelos y no habrá intersección posible.

Dados los planos $\pi_1: ax+by+cz=d$ y π_2: $a'x+b'y+c'z=d'$, ambos con su expresión general. Para buscar su intersección planteamos el sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz &= d \\ a'x+b'y+c'z &= d' \end{cases}$$

Buscamos entonces resolver el sistema despejando una variable de alguna ecuación y reemplazando en la otra ecuación. En general, debemos obtener una expresión que dependa de una sola variable, como mostraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16

Encontrar la intersección de los planos $\pi_1: x-2y+z=1$ y π_2: $-x+z=1$.
Planteamos entonces el sistema

$$\begin{cases} x-2y+z &= 1 \\ -x+z &= 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, vemos que $x=z-1$, por lo tanto, si reemplazamos en la primera tenemos

$$(z-1)-2y+z=1 \Rightarrow -2y+2z=2 \Rightarrow y=z-1$$

De manera que, un punto está en la intersección $\pi_1\cap\pi_2$ si y solo si $x=z-1$, $y=z-1$ y $z=z$. Por lo tanto

$$(x,y,z)=(z-1,z-1,z)=z(1,1,1)+(-1,-1,0)$$

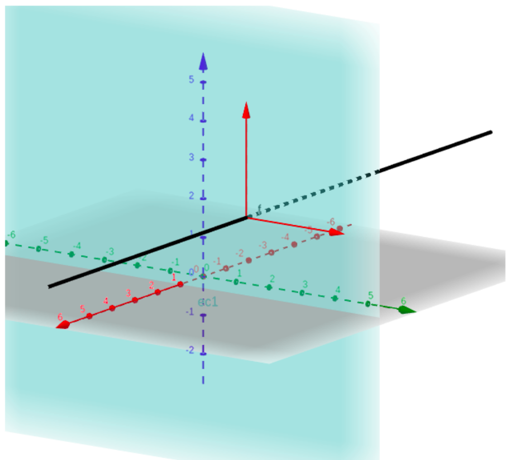
Por lo tanto, la recta $z(1,1,1)+(-1,-1,0)$ es la solución a la intersección de ambos planos.

Recta en $\mathbb{R}^3$ como intersección de planos

: Recordemos que para las rectas de $\mathbb{R}^2$ obtenemos diferentes presentaciones, entre ellas, la representación normal, la cual consiste en escribir los puntos de la recta $X = \lambda\vec{v} + P$, utilizando el producto escalar y un vector $\vec{N}$ normal al vector director de la recta

$$\vec{N} \cdot (x,y) = \vec{N} \cdot P$$

El problema se puede extender al espacio $\mathbb{R}^3$, sin embargo, se complejiza en algunos aspectos. En primer lugar, notemos que en el espacio no solo tenemos un posible vector normal, sino que hay un plano normal a la recta. Es decir, vemos que



Ya que tenemos un plano normal a la recta, entonces tenemos infinitos vectores normales a la recta. La pregunta es, Â¿Cuál de todos estos vectores es conveniente tomar?. Sabemos que el plano normal tiene dos vectores que generan a dicho plano, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se obtienen cuando buscamos la ecuación vectorial del plano normal

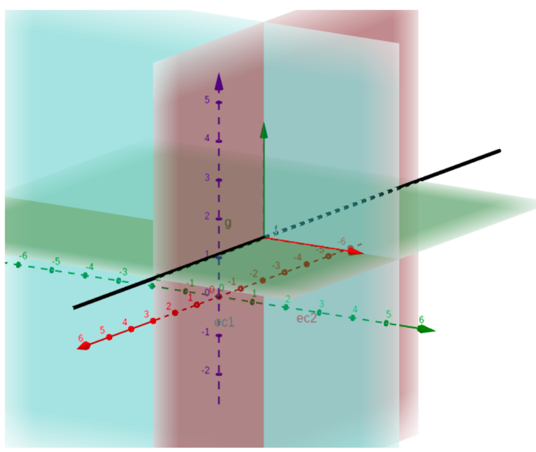
$$(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + P$$

Como vemos en el gráfico anterior. Los vectores que generan al plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores normales que usaremos para representar a la recta. Renombraremos $\vec{N}_1 = \vec{u}$ y $\vec{N}_2 = \vec{v}$.
Si tomamos el producto escalar de cada vector N_1 y N_2, respecto a los puntos de la recta vemos que

$$N_1 \cdot (x,y,z) = N_1 \cdot P$$

$$N_2 \cdot (x,y,z) = N_2 \cdot P$$

Recordemos que cada una de las expresiones anteriores corresponden a los planos normales a cada uno de esos vectores. La intersección de ambos planos generan a la recta que queremos representar, como vemos en el siguiente gráfico.



Definición 2.12

Sea $(x,y,z)=\lambda\vec{v}+P$ una recta en $\mathbb{R}^3$. Las ecuaciones de los planos que dan origen a la recta al intersecarse son

$$N_1\cdot(x,y,z)=N_1\cdot P$$

$$N_2\cdot(x,y,z)=N_2\cdot P$$

Donde N_1 y N_2 generan al plano normal a la recta.

Ejemplo 2.17

Calcular las ecuaciones de los planos que generan a la recta

$$(x,y,z)=\lambda(1,2,-1)+(1,0,1)$$

En primer lugar, debemos buscar el plano normal a la recta. Sabiendo que el vector $\vec{V}=(1,2,-1)$ es el vector normal al plano, entonces nuestro plano es $(1,2,-1)\cdot(x,y,z)=(1,2,-1)\cdot(1,0,1)$, es decir

$$x+2y-z=0$$

Luego, buscamos la ecuación vectorial del plano, para encontrar los generadores del mismo. Si despejamos $z=x+2y$, podemos expresar los puntos del plano (x,y,z) de la siguiente manera $(x,y,z)=(x,y,x+2y)=x(1,0,1)+y(0,1,2)$. De la ecuación vectorial del plano vemos que los generadores de dicho plano son $N_1=(1,0,1)$ y $N_2=(0,1,2)$. Las ecuaciones que buscamos serán

$$\begin{cases} N_1\cdot(x,y,z) &= N_1\cdot P \\ N_2\cdot(x,y,z) &= N_2\cdot P \end{cases}$$

Donde P es el punto por donde pasa la recta. Es decir, $P=(1,0,1)$. De donde obtenemos

$$\begin{cases} x+z &= 2 \\ y+2z &= 2 \end{cases}$$

N Algoritmo para calcular ecuación normal a la recta en el espacio: Dada la recta $X=\lambda\vec{v}+P$ en $\mathbb{R}^3$, para encontrar las ecuaciones normales a la recta hacemos lo siguiente:

1. Paso 1: Buscamos el plano normal a la recta.
2. Paso 2: Buscamos los generadores de dicho plano, a los cuales llamaremos $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$
3. Paso 3: Armamos las ecuaciones

$$\begin{cases} N_1\cdot(x,y,z) &= \vec{N}_1\cdot P \\ N_2\cdot(x,y,z) &= \vec{N}_2\cdot P \end{cases}$$