

**Taller de Matemática Computacional - TUDAI**  
**Trabajo Práctico 3 - 2020**  
**Funciones**

**Ejercicios indispensables**

1. Dada la función  $f(x) = \sqrt{x^2}$ 
  - a) Completar el siguiente diagrama  $f : \rightarrow$
  - b) ¿Cuál es el dominio y la imagen?
  - c) Decidir si la función es inyectiva, suryectiva o biyectiva.
2. Sea  $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 2$ . Calcular  $f(-2)$ ,  $f(\frac{1}{4})$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(x - h)$  y  $f(x) - f(h)$ .
3. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones corresponden a funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales,  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ .
  - a)  $f(x) = x - 10$ .
  - b) Toda función lineal con dominio en los reales.
  - c) La aplicación  $g : M \rightarrow H$  que asigna a cada perra con su cachorro, donde  $H$  es el conjunto de todos los cachorros y  $M$  el conjunto de todas las madres.
  - d)  $f(x) = x^2 - 2$ .
  - e) Toda función cuadrática con dominio en los reales.
  - f)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
  - g)  $f(x) = e^x$
4. Dadas las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar la representación gráfica. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales,  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ .
 

<i>a)</i> $f(x) = 3x - 1$	<i>e)</i> $f(x) = 3 \cos(2x) + 1$
<i>b)</i> $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$	<i>f)</i> $f(x) = 8 \sin(x - \frac{\pi}{2})$
<i>c)</i> $f(x) = \sqrt{x - 1}$	<i>g)</i> $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$
<i>d)</i> $f(x) = \ln(x - 2)$	<i>h)</i> $f(x) = 2e^x - 1$
5. Decidir cuáles de las funciones anteriores son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.
6. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.
 

<i>a)</i> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$	<i>b)</i> $f(x) = \begin{cases} 32(\frac{1}{2})^x, & x < 5 \\ \sqrt{x - 4}, & x \geq 5 \end{cases}$
---	---
7. Dados los siguientes pares de funciones, calcular:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ . Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

$$a) f(x) = -1 + x^2, g(x) = 1 + x \quad c) f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = x^2$$

8. Decidir si existen las funciones  $f \circ g$  y/o  $g \circ f$ . En caso de existir, determinar la función composición:

$$a) f(x) = x^3, g(x) = x^2 \quad c) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 3^x$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x^3$$

9. La familia de funciones parte entera agrupa a funciones de la forma  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , satisfaciendo la condición  $|x - f(x)| < 1$ . Estas funciones permiten, dado un numero con parte fraccionaria, obtener su parte entera. Existen al menos 4 funciones posibles:

- **Piso:** (*floor*) a cada número real asigna el número entero más próximo por defecto, es decir, el mayor número entero igual o menor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 2, a 2,9 le corresponde 2, a -3,1 le corresponde -4. Se nota  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ .
- **Techo:** (*ceil*) a cada número real asigna el número entero más próximo por exceso, es decir, el mayor número entero igual o mayor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 3, a 2,9 le corresponde 3, a -3,1 le corresponde -3. Se nota  $f(x) = \lceil x \rceil$ .
- **Truncamiento:** se ignora la parte decimal.
- **Redondeo:** se asigna el entero más próximo según su parte decimal.

- Grafique cada una de las funciones y compare sus gráficas.
- Definir la función truncamiento a partir de la función piso.
- Decir si cada una de las funciones son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justifique.

10. Resolver analíticamente y gráficamente las siguientes desigualdades

$$a) 2x^2 - 6x + 4 \leq 0 \quad f) \left| \frac{x+4}{x-3} \right| \leq 1$$

$$b) -x^2 + x - 1 < 0 \quad g) |x - 7| < |x - 3|$$

$$c) \frac{2x+1}{x-2} \geq 0 \quad h) |3x - 1| > 1$$

$$d) \frac{4}{x^2+6x+5} > 0 \quad i) \frac{|x+2|}{|x^2-4|} \geq 1$$

$$e) |5x - 2| < 1$$

11. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas:

$$a) f(x) = 2 \sin(x) - 1 \quad d) f(x) = \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 3$$

$$b) f(x) = 2 \sin(3x + \pi) - 1 \quad e) f(x) = \sin(2x) - 4$$

$$c) f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) + 3 \quad f) f(x) = -3 \sin(x - \frac{3\pi}{2}) - 2$$

## Ejercicios importantes

- Sea  $f(x) = 3x^2 - 4$ . Calcular  $f(-4)$ ,  $f(\frac{1}{2})$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(x - h)$  y  $f(x) - f(h)$ .
- Dadas las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar la representación gráfica. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales, ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

a)  $f(x) = |5 - \frac{1}{2}x| - 2$   
b)  $f(x) = 6 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 3$   
c)  $f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$

d)  $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$   
e)  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

3. Decidir cuáles de las funciones anteriores son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.
4. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-1}, & x \leq 0 \\ 4 \cos(x + \pi), & x > 0 \end{cases}$

5. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas:

a)  $f(x) = -2 \cos(x) + 3$       d)  $f(x) = 4 \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) + 1$   
b)  $f(x) = -\cos(-2x) + 3$       e)  $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2})$   
c)  $f(x) = 3 \sin(x + \frac{\pi}{4})$

6. Dadas las siguientes funciones, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

a)  $f(x) = 2|x - 1| + 3$       c)  $f(x) = 3|x + 1| - 2$   
b)  $f(x) = -3|x - 1| + 3$

7. Dados los siguientes pares de funciones, calcular:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ . Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$       b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{4 - x}$

8. Decidir si existen las funciones  $f \circ g$  y/o  $g \circ f$ . En caso de existir, determinar la función composición:

a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $g(x) = x^2$       b)  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g(x) = \sin(x)$