3 Determinantes

Ahora veremos como asociar a cada matriz cuadrada un número llamado el *determinante* de la matriz. Los determinantes surgieron en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante.

Antes de entrar en una definición formal, veamos algunos casos particulares. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Su determinante es el número

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

También podemos simbolizar al determinante de una matriz A como $|A|$.

Para una matriz de orden 3 como la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

su determinante se puede calcular de la siguiente forma. Elegimos una fila. Multiplicamos cada elemento de la fila por el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna donde está ubicado. Sumamos o restamos en forma alternada todas la posibles elecciones para la fila elegida. Por ejemplo, si elegimos la primer fila el determinante nos quedará

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Más adelante daremos la noción de cofactores y podremos calcular el determinante de matrices de cualquier orden n.

Ejemplo 3.1

Calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 2(6+6) - (-4)(6+2) + 0$$
$$= 24 + 32 = 56$$

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método que permite calcular determinantes de matrices de orden 3 únicamente. Consideremos una matriz una matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Formamos un determinante agregando al final de la matriz A las dos primeras filas. El determinante se calcula sumando los productos indicados en negrita que van de izquierda a derecha y restando los productos indicados en negrita en otro arreglo que van de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Por ejemplo, calculemos el determinante de la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2{,}3{,}2 + (-4)(-1)2 + 360 - 032 - (-1)62 - 3(-4)2$$
$$= 12 + 8 + 0 - 0 + 12 + 24 = 56.$$

3.1. Cálculo del determinante por medio de cofactores

Para calcular el determinante de matrices de orden $n \geq 3$ vamos a introducir el concepto de menores y cofactores.

Definición 3.1

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- El *menor* asociado al lugar ij es la matriz M_{ij} que se obtiene eliminar de A la fila i y la columna j.
- El *cofactor* C_{ij} del elemento a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante del menor M_{ij} es decir:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Ejemplo 3.2

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores M_{21} y M_{32} de la matriz A son

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y los respectivos cofactores son

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^{2+1} \det M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-8) = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{32} &= (-1)^{3+2} \det M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-2) = 2. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el determinante de una matriz cuadrada utilizando los cofactores de cualquier fila o cualquier columna. Cualquier desarrollo que elijamos es lo mismo.

Consideremos una matriz de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 3.2

El **determinante** de A por la fila i es el número real

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Se puede comprobar que para calcular el determinante se puede utilizar cualquier fila i. Tamién se puede demostrar que el determinante de A se puede calcular desarrollando por una columna j arbitraria. Es decir, tomando la fila j, tenemos que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{2n}C_{2n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Ejemplo 3.3

Calcular el determinante de la siguiente matriz eligiendo primero una fila y después una columna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Para realizar el cálculo del determinante es conveniente elegir las filas o columnas que más ceros tengan. Si hacemos el cálculo por fila es conveniente elegir la segunda fila. Recordemos que cada cofactor tiene asociado un signo. Entonces el determinante es

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4(-6+1) + 2(4-1) + 0 = 20 + 6 = 26.\end{aligned}$$

Ahora hagamos el desarrollo elegiendo una columna. En este caso elegimos las última columna.

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{31}C_{31} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-4-2) + 0 + 2(4+12) = -6 + 32 = 26.\end{aligned}$$

Existen algunos casos en donde el determinante es muy sencillo de calcular.

- Si tenemos una matriz triangular (superior o inferior)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Es decir, el determinante de una matriz triangulares el producto de los elementos de la diagonal principal.

3.2. Propiedades de los determinantes

En muchos casos al intentar calcular determinantes es conveniente simplificarlos y reducirlos a otros de dimension menor. Para ello debemos conocer las siguientes propiedades de los determinantes. Las demostraciones quedan como ejercicio.

Lema 3.1 Sean A y B matrices de orden n. Entonces

1. $\det(A) = \det(A^t)$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. $\det(A^k) = \det(A)^k$.

4. $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Consideremos una matriz de orden n. Escribamos a esta matriz utilizando sus columnas, es decir escribimos a la matriz A como

$$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n),$$

donde A_i es la columna que está ubicada en el lugar i.

Como el $\det(A) = \det(A^t)$, entonces todo las propiedades que enunciemos para A utilizando filas son válidas también si utilizamos columnas.

Lema 3.2 Sea A una matriz de orden n.

1. Un escalar que multiplique a toda una fila (o columna) puede extraerse del determinante. Es decir
$$\det(A_1 \dots kA_i \dots A_n) = k\det(A_1 \dots A_i \dots A_n)$$
2. Si una fila o columna contiene únicamente ceros, el determinante es nulo.
$$\det(A_1 \dots \mathbf{0} \dots A_n) = 0.$$
3. Si una matriz tiene dos columnas (filas) iguales, su determinante es cero.
$$\text{Si } A_i = A_j, \text{ entonces } \det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0.$$
4. Si a una columna (o fila) le sumamos otra multiplicada por un numero, el determinante no cambia
$$\begin{aligned}\det(A_1 \dots A_i \dots A_i + kA_j \dots A_n) &= \det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) + \underbrace{\det(A_1 \dots A_j \dots kA_j \dots A_n)}_{0} \\ &= \det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n).\end{aligned}$$
5. Si intercambiamos dos columnas (o filas) el determinante cambia de signo.
$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n).$$
6. Si la matriz es triangular o diagonal, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Las propiedades anteriores, en particular la propiedad 4, es muy útil para calcular determinantes. Dado una matriz A se intenta diagonalizar la matriz. Como el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas diagonales, entonces el determinante de la matriz diagonalizada es igual al determinante de la matriz original.

Ejemplo 3.4

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Entonces
$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 5 & 7\end{vmatrix}.$$

Intercambiamos la fila 2 por la 3 . Por la propiedad 5 del Lema 3.2 se invierte el signo del determinante

$$\det(A)=-\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 10\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}5 & 7\\ 0 & 10\end{vmatrix}=-50.$$

Ejemplo 3.5

Calcular los determinantes de las siguientes matrices utilizando las propiedades anteriores.

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. En este caso para simplificar los cálculos, podemos sumas las dos primeras filas

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\\ &=(-1)^{2+1}0.\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\,0\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\,2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &=-2(-1-1)=4.\end{aligned}$$

2. $A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 4 & 4\\ 1 & -2 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & -7 & 5\end{pmatrix}$. Notemos que esta matriz tiene una fila de ceros. Entonces 2 del Lema 3.2 sabemos que el valor del determinante de A es cero.

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 0 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$. El determinante $|A|$ corresponde a una matriz triangular inferior. Por la propiedad 6 del Lema 3.2, el determinante es el producto de los elementos que están en la diagonal. Es decir $\det(A)=2(-2)(-7)=28$.

Ejemplo 3.6

Consideremos la matriz
$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A)=7$, calcular el determinante $\begin{vmatrix}3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33}\\ 4a_{11}-a_{21} & 4a_{12}-a_{22} & 4a_{13}-a_{23}\\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13}\end{vmatrix}.$

Indicamos en cada símbolo de igualdad las propiedad aplicada.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11}-a_{21} & 4a_{12}-a_{22} & 4a_{13}-a_{23} \\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \end{vmatrix} & \overset{1}{=} & 3\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11}-a_{21} & 4a_{12}-a_{22} & 4a_{13}-a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\
& [4\,f_1-f_2 \to f_2]5= & =-3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{11}-a_{21} & 4a_{12}-a_{22} & 4a_{13}-a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
& \overset{4}{=} & -3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
& =(-3)\,7 &
\end{aligned}
$$

Lema 3.3 Sea $A=(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ una matriz, donde $C_1,C_2,\ldots,C_n$ son las columnas de la matriz A. Si C_i es una una columna de A y se puede expresar como $C_i=D_1+D_2$, entonces el determinante de A se puede descomponer en la siguiente forma

$$\det(C_1,\ldots,D_1+D_2,\ldots C_n)=\det(C_1,\ldots,D_1,\ldots C_n)+\det(C_1,\ldots,D_2,\ldots C_n).$$

3.3. Determinante de una matriz inversa

Recordemos que una matriz cuadrada A tiene inversa si existe una matriz del mismo tamaño B tal que

$$AB=I.$$

Si A tiene inversa, esta es única y la denotamos por A^{-1}. Luego, por la propiedad del producto de matrices tenemos que

$$\det(AA^{-1})=\det(A)\det(A^{-1})=\det(I)=1.$$

Por lo tanto, si $\det(A)\neq 0$, tenemos la siguiente fórmula para calcular el determinante de la matriz inversa

$$\boxed{\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}.}$$

En realidad, es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 3.1

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces

$$A \text{ es inversible si y sólo si } \det(A)\neq 0.$$

Ejemplo 3.1

La matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa pues $\det(A)=17$. En cambio la matriz

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa pues $\det(B)=0$.

Ejemplo 3.2

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\det(A) = 3$, calcular $\det(A^{-1})$, $\det(3A)$, $\det(A^2)$, $\det((2A)^{-1})$, y $\det(2A^1)$.

Solución

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3}$.
- $\det(3A) = 3^3 \det(A) = 27{,}3 = 81$.
- $\det(A^2) = \det(A)^2 = 3^2 = 9$.
- $\det((2A)^{-1}) = \dfrac{1}{\det(2A)} = \dfrac{1}{2^3 \det(A)} = \dfrac{1}{8\,3} = \dfrac{1}{24}$.
- $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \dfrac{2^3}{\det(A)} = \dfrac{8}{3}$.

Ejemplo 3.3

Sabiendo que $\det(A) = 2$ y que $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ calcular $\det(A^3 B - A^3)$.

Solución

Primero observemos que

$$A^3 B - A^3 = A^3(B - I),$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^3$. Luego

$$\det(A^3(B-I)) = \det(A^3)\det(B-I) = \det(A)^3 \det(B-I) = 8\det(B-I).$$

Calculemos entonces $B - I$ y después su determinante de $B - I$:

$$B - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $B - I$ es una matriz diagonal superior, entonces el determinante es el producto de la diagonal, es decir

$$\det(B - I) = 2.(-4).(-2) = 16.$$

Por lo tanto

$$\det(A^3(B - I)) = 8{,}16 = 128.$$

Ejemplo 3.4

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\det(A) = -2$ y $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(B^3)$ y $\det(-3B)$ y $\det((-2B)^{-1})$.

Solución

Calculamos primero $\det(AB)$:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8-4 = -12.$$

Teniendo en cuenta que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, obtenemos

$$-12 = (-2)\det(B),$$

es decir $\det(B) = 6$. Luego

$$\det(-3B) = (-3)^3\det(B) = -27{,}6$$

Ahora podemos calcular el determinante de la inversa

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{6}.$$

Finalmente

$$\det((-2B)^{-1}) = \frac{1}{\det(-2B)} = \frac{1}{(-2)^3\det(B)} = \frac{1}{-8{,}6} = -\frac{1}{48}.$$

Ejemplo 3.5

Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que las siguiente matriz sea inversible.

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 \\ k+1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Debemos calcular el determinante de A y buscamos los valores donde el determinante se anule. En este caso nos conviene desarrollar el determinante por la primera columna o por la segunda fila. Si elegimos la fila tenemos que

$$\begin{vmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 \\ k+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(k-2)\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ k+1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}3\begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ k+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (k-2)(-2k-2-k-1) - 3(2k+2+k+1) = (k-2)(-3k-3) - 3(3k+3) \\ &= (k-2)(-3)(k+1) - 9(k+1) = (k+1)(-3k+6-9) = \\ &= (k+1)(-3k-3) = (-3)(k+1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\det(A) = 0 \text{ sii } k = -1.$$

Es decir,

$$\det(A) \neq 0 \text{ sii } k \neq 1 \text{ sii } A \text{ es inversible}.$$

3.4. Matriz adjunta. Cálculo de la inversa de una matriz

Sabemos que una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero. No es difícil calcular la inversa de una matriz de 2×2 o 3×3. Ahora veremos una otra forma de calcular la inversa para lo cual utilizaremos la noción de cofactores.

Recordemos que el cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} de una matriz A de tamaño $m\times n$ es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{det}M_{ij}.$$

Definición 3.1

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz de *cofactores* de A es la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento de la matriz A por su respectivo cofactor. La matriz de los cofactores se simboliza por $\mathrm{cof}(A)$.
La matriz *adjunta* de A es la traspuesta de la matriz de los cofactores de A. La adjunta se simboliza por $\mathrm{adj}(A)$.

Ejemplo 3.6

Determinar la matriz adjunta de una matriz 2×2.
Consideremos una matriz de orden 2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Primero determinamos los cofactores de cada elemento

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}a_{22} &&= a_{22}\\ C_{12} &= (-1)^{1+2}a_{21} &&= -a_{21}\\ C_{21} &= (-1)^{1+2}a_{12} &&= -a_{12}\\ C_{22} &= (-1)^{2+2}a_{11} &&= a_{11}.\end{aligned}$$

Entonces la matriz de los cofactores de A es

$$\mathrm{cof}(A)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21}\\ -a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}$$

y la *adjunta* de A es

$$\mathrm{adj}(A)=\mathrm{cof}(A)^t=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathrm{cof}(A)=\begin{pmatrix} 4 & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix} 4 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}.$$

Consideremos una matriz cuadrada A de orden n. Supongamos que $\det(A)\neq 0$. Queremos determinar la matriz A^{-1}. Enunciamos el siguientye resultado sin demostración.

Lema 3.1 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se cumple que

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)\,A$$

y

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,I_n.$$

Lema 3.2 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}.$$

Ejemplo 3.7

Hallar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede calcular que $\det(A) = 4$. Por lo tanto A tiene inversa. Determinemos los cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo tanto la matriz de cofactores de A es

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la adjunta es

$$\mathrm{cof}(A)^t = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la inversa es

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A)^t}{\det(A)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3.5. Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

Ahora veremos una aplicación muy útil para determinar las soluciones de una ecuación matricial de la forma

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n, $\vec{x}$ es la matriz de las incognitas y $\vec{b}$ es la matriz de los términos independientes.

1. Supongamos que $\det A \neq 0$. Entonces existe la matriz A^{-1}. Por lo tanto, multiplicando la igualdad $A\vec{x} = \vec{b}$ por A^{-1} obtenemos
$$\begin{aligned} A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$
Como la inversa de una matriz es única, entonces el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una única solución dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

2. Si $\det A = 0$, no existe la inversa y no podemos buscar la solución del sistema utilizando matriz inversa, ya que no existe. En este caso tenemos dos posibilidades.
   a) Si el sistema es homogéneo, es decir si $\vec{b} = 0$, entonces hay infinitas soluciones.
   b) Si $\vec{b} \neq 0$, entonces puede ser compatible indeterminado (infinitas soluciones), o incompatible.

En el siguiente diagrama resumimos las distintas posibilidades que se pueden presentar en un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incognitas:

$$A\vec{x} = \vec{b} \begin{cases} \det A \neq 0 \, \text{solución única } \vec{x} = A^{-1}B & . \\ \det A = 0 \begin{cases} \vec{b} = \vec{0} & \text{sistema homogéneo con infinitas soluciones} \\ \vec{b} \neq \vec{0} & \begin{cases} \text{infinitas soluciones} \\ \text{o} \\ \text{incompatible (sin solución)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 3.8

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Si resolvemos aplicando Gauss, debemos escalonar la matriz ampliada y estudiar su rango. La otra posibilidad es calcular el determinante de la matriz de los coeficientes A. Si es distinto de cero entonces el sistema tiene solución y viene dada por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
Calculemos el determinante de la matriz de los coeficientes. En este caso podemos aplicar la regla de Sarrus
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3-2+4-3-2-4 = -10.$$
La otra forma de calcular el determinante es utilizar los cofactores

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -5-6+1 = -10$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinta de cero, entonces el sistema tiene solución, y además es única. Ahora deberemos calcular la inversa de la matriz de los coeficientes. Podemos aplicar Gauss o el método de los cofactores. En este caso aplicamos Gauss. Entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Primero pasamos a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.9

Analizar, utilizando determinantes, el valor del parámetro para que el siguiente sistema sea compatible. Analizar el caso del sistema homogéneo asociado.

$$\begin{cases} \alpha x - 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Solución

Escribimos el sistema en notación matricial $A\vec{x}=\vec{b}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Analizamos el determinante de la matriz de los coeficientes A

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-\alpha+6.$$

Entonces tenemos los siguientes casos

1. Si $|A|\neq 0$, es decir, si $\alpha\neq 6$. En este caso existe la matriz inversa A^{-1} y el sistema tiene única solución dada por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
2. Si $|A|=0$, es decir, si $\alpha=6$, entonces
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & - & 3y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$
Es claro que este sistema es incompatible.

Ahora que conocemos calcular si una matriz cuadrada tiene inversa a través su determinante, podemos extender el Teorema **??** referido a cuando un sistema de n ecuaciones con n incognitas tiene solución.

Teorema 3.2

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es inversible.
2. $\operatorname{rg}(A)=n$.
3. $\det(A)\neq 0$.
4. El sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$ tiene una única solución (la trivial).
5. Todo vector $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores columna de A.
6. Para cada $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, la ecuación $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene única solución.
7. El sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución, para cualquier $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.
8. A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

3.6. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. Si $\det(A) = 4$ y $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\det(B^2)$ y $\det(-2B)$ y $\det((-3B)^{-1})$.

2. Si $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 4$,calcular $\det(AB^t)$.

Ejercicio 3.2. Sea $A = (C_1 C_2 C_3)$ una matriz donde C_1, C_2 y C_3 son las columnas de A. Dada la matriz $B = (C_1 - 3C_3\, C_3\, C_2)$, calcular $\det(\frac{3}{2}A^t B^{-1})$, sabiendo que $\det(A) = 2$.

Ejercicio 3.3. Supongamos que

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4,$$

Calcular, aplicando propiedades de determinantes, los determinantes de las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 & 3a_3 + b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5. Calcular los siguientes determinantes. Determine para que valor de α los determinantes de las siguientes matrices se anulen:

$$(a)\ \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{pmatrix}\quad (b)\ \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & 2 \\ 3 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.6. El polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden n es el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Para cada una de las siguientes matrices calcular su polinomio característico y, en los casos posibles, sus raices.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\quad (b)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -2 & -4 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.7. Utilizando determinantes, hallar condiciones para que las siguientes matrices sean inversibles.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ k & 2 & 4 \end{pmatrix}\quad (b)\ \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}\quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

$$(d)\ (A^t - \alpha I), \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.8. Para cada una de las siguientes matrices calcular si es posible la matriz inversa por el método de Gauss y por el método de los cofactores.

$$(a)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ (b)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\ (c)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\ a \dot{\neq} 0$$

Ejercicio 3.9. Estudiar, utilizando determinantes, la compatibilidad de los siguientes sistemas de acuerdo los valores de los parámetros.

1. $\begin{cases} 3x + ky = 0 \\ kx + y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 7y + \alpha z = 3 \end{cases}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & k \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -k \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.10. Dadas las rectas y planos siguientes, determinar los posibles valores de los parámetros k se indican en cada caso:

1. $L: \begin{cases} x+y & = 1 \\ 2x+y & = 3 \end{cases}$, $\pi: 2x+y+kz = 2$, $L \cap \pi = \{P\}$.

2. $L: \begin{cases} x+2y & -z = 1 \\ y+3z & = 3 \end{cases}$, $\pi: 2y + \left(k^2+2\right) z = k+2$, $L \cap \pi = \{P\}$.

3. $L: \begin{cases} x-2y & = 4 \\ -x+3y-z & = 1 \end{cases}$, $\pi: kx-2y+2z = a$, L sea paralela al plano π.

Ejercicio 3.11. Dados los planos $\pi_1 : x+2y+z = 3$, $\pi_2 : 2x+3y+2z = 2$ y $\pi_3 : x+4y+\left(k^2-8\right) z = k+14$, determinar todos los posibles valores de k para que la intersección de los tres planos sea un recta. Para cada uno de los valores hallados dar la ecuación paramétrica de la recta correspondiente.

Ejercicio 3.12. Consideremos la recta $L: \begin{cases} 2x-y-z & = 0 \\ x+y+z & = a \end{cases}$ y el plano $\pi: x-y+bz = -1$. Determinar los posibles valores de a y b para que la recta L esté contenida en el plano y $(1,2,0) \in L \cap \pi$.

Ejercicio 3.13. Dada la recta $L: \begin{cases} kx-y+z & = 1 \\ x+y+3kz & = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: (x,y,z) = (2,1,1) + \alpha(1,1,0) + \beta(-1,0,1)$, hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \parallel \pi$ y L no esté contenida en π.