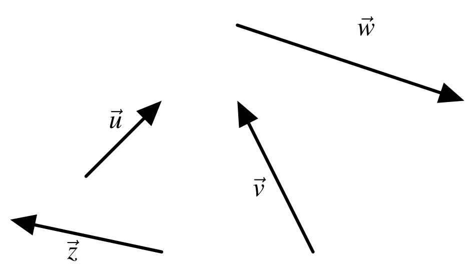
1 Vectores, rectas y planos

1.1. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería.

Sin dar un definición estricta, un vector en el plano $\mathbb{R}^2$, en el espacio $\mathbb{R}^3$ o más generalmente en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, es un segmento que tiene una orientación (segmento orientado), donde uno de los puntos finales del segmento es el origen y otro punto es el final del vector. Es decir, un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector),
- el sentido (es la orientación),
- la longitud, norma o módulo del vector.



En general trabajaremos sobre el plano $\mathbb{R}^2$ o el espacio $\mathbb{R}^3$, pero la mayoría de los resultados y notaciones se extienden al plano n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Vamos a identificar a los puntos en el plano o en el espacio con vectores cuyo extremo inicial está en el origen de coordenadas y final en el punto considerado. Es decir, por ejemplo, si tenemos un punto $P = (x,y,z)$ lo identificaremos con el vector posición $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$.

Sean $u = (u_1,u_2,u_3)$ y $v = (v_1,v_2,v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma: $u+v = (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)$=$(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$.
- Vector nulo: $\vec{0} = (0,0,0)$.

- Vector opuesto $-u = (-u_1, -u_2, -u_3)$.
- Resto o diferencia: $u - v = u + (-v) = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
- Módulo o norma de u: $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Combinación lineal de vectores

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n$ si existen escalares $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ se llaman las coordenadas del vector v.

Por ejemplo, el vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pues existen escalares $c_1 = 4$ y $c_2 = -3$ tales que

$$(4, -3) = 4\,(1, 0) + (-3)\,(0, 1).$$

Notemos que cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se puede poner en combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues

$$(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1)\,.$$

De igual forma, un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como la siguiente combinación lineal:

$$(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)\,.$$

En general, cualquier vector $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

pues

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\,(1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n\,(0, 0, \dots, 1)\,.$$

Los vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ se llaman los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

El conjunto de ***todos*** los vectores que son combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ será simbolizado por

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{v \in \mathbb{R}^n : v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \text{ para algunos escalares } c_1, \dots, c_n\}\,.$$

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores que se generan a partir del vector $(2, 3)$ es

$$\langle (2, 3) \rangle = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda\,(2, 3)\,, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

En el próximo ejemplo estudiamos cómo podemos comprobar si un vector dado es o no combinación lineal de ciertos vectores.

Ejemplo 1.1

Estudiar si el vector $v = (2, 3)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -2)$ y $v_2 = (-3, 1)$.

Solución

De acuerdo a la definición de combinación lineal debemos determinar escalares α y β tales que

$$(2, 3) = \alpha\,(1, -2) + \beta\,(-3, 1).$$

Entonces debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta &= 2 \\ -2\alpha + \beta &= 3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y nos queda $\alpha = -\frac{11}{5}$ e $\beta = -\frac{7}{5}$. Luego se es sencillo comprobar que

$$(2, 3) = (-\frac{11}{5})\,(1, -2) + (-\frac{7}{5})\,(-3, 1).$$

Norma o módulo de un vector

La *norma* o *módulo* de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es la longitud o magnitud del vector. La norma se simboliza por $\|v\|$. En $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ la norma de un vector se define en la siguiente forma

1. $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces
$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
2. $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces
$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
3. $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Recordemos que el *producto escalar* entre dos vectores $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es un número real que se define como
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$
El producto escalar tambien se lo conoce como producto interno, producto interior o producto punto. Observemos que el producto es una operación algebraica que toma dos vectores y produce un único número.

En forma alternativa podemos definir el producto escalar de la siguiente forma. Si θ es el ángulo entre los vectores u y v entonces definimos el producto escalar como
$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta.$$
Conociendo los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la identidad anterior nos permite hallar el ángulo entre ellos por medio de la fórmula
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Si $\vec{u} = \vec{v}$, entonces
$$u \cdot u = \|u\| \, \|u\| \cos 0 = \|u\|^2$$
y por lo tanto obtenemos otra forma de hallar el módulo de un vector conociendo su producto escalar:
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Dos vectores son *ortogonales* o *perpendiculares* cuando forman un ángulo recto entre sí. Si el producto escalar de dos vectores es cero, ambos vectores son ortogonales. Es decir, si $\|u\| \neq 0$ y $\|v\| \neq 0$, entonces
$$u \cdot v = 0 \text{ sii } \cos\theta = 0 \text{ sii } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ sii } u \text{ y } v \text{ son ortogonales.}$$

Podemos generalizar la noción de perpendicularidad a vectores de $\mathbb{R}^n$ en la siguiente forma.

Definimos el producto escalar de dos vectores $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ como el número real dado por
$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Recordemos que todo vector $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como
$$(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$$
En Física o en Ingeniería, es usual escribir a los vectores canónicos como
$$\check{i} = (1, 0, 0)\,,\ \check{j} = (0, 1, 0)\ \text{ y } \check{k} = (0, 0, 1)\,.$$
En estos casos los vectores $\check{i}$, $\check{j}$ y $\check{k}$ se suelen llamar ***versores***. Teniendo en cuenta estos versores un vector genérico en

$\mathbb{R}^3$ se escribe como

$$(x,y,z) = x\underbrace{(1,0,0)}_{\check{i}} + y\underbrace{(0,1,0)}_{\check{j}} + z\underbrace{(0,0,1)}_{\check{k}}$$
$$(x,y,z) = x\check{i} + y\check{j} + z\check{k}.$$

Esta forma de escribir a los vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se conoce como expresión canónica.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. El *producto vectorial* entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se define como

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1).$$

Una manera sencilla de recordar la fórmula anterior es formar un arreglo, llamado determinante (se repasarán más adelante) como se indica a continuación y realizar los productos indicados

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_2v_3\check{i} + u_3v_1\check{j} + u_1v_2\check{k} - v_1u_2\check{k} - v_2u_3\check{i} - u_1v_3\check{j}.$$
$$= (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2).$$

Se puede probar que

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \text{ y } \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0,$$

es decir,

$$\vec{u} \times \vec{v} \text{ es ortogonal a } \vec{v} \text{ y } \vec{u}.$$

También se puede probar que dados dos vectores no paralelos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el módulo de su producto vectorial representa el área del paralelogramo determinado por dichos vectores. Es decir,

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta = \text{área del paralelogramo determinado por } u \text{ y } v.}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ecuación vectorial de la recta

Para dar la ecuación vectorial de una recta necesitamos un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, llamado *vector director* de la recta, y un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ que pertenezca a la recta.

La ecuación es

$$\boxed{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Ecuación paramétrica de la recta

Las ecuaciones paramétricas o cartesianas de una recta se determinan directamente de la ecuación vectorial

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a,b,c)$$

Igualando componente a componente obtenemos

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda a \\ y & = & y_0 + \lambda b \\ z & = & z_0 + \lambda c \end{array} \right. \text{ ecuaciones paramétrica}}$$

Ecuación simétrica

La ecuación simétrica de la recta se puede obtner de las ecuacines paramétrica despejando el parámetro λ de cada ecuación y después igualando. Es decir

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a & \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x-x_0}{a} \\ y = y_0 + \lambda b & \Rightarrow \quad \lambda = \frac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 + \lambda c & \Rightarrow \quad \lambda = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

Entonces

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ ecuación simétrica.}}$$

Recordaremos muy brevemente las diferentes formas en que se pueden definir a los planos en $\mathbb{R}^3$.

Ecuación general del plano

Un plano π queda determinado si conocemos un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$y un vector normal $n = (a, b, c)$ (perpendicular) al plano. Debemos hallar una forma que nos indique cuando un punto genérico (x, y, z) pertenece o no al plano.

Entonces consideremos un punto genérico $P = (x, y, z)$ y construímos un vector

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

que estará en el plano. Por lo tanto este vector deberá ser perpendicular al vector normal n. Luego

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

sii

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

sii

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0.$$

Por lo tanto la ecuación general del plano nos queda

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{Ecuación general del plano}}$$

Ecuación vectorial del plano

La determinar la ecuación vectorial del plano necesitamos dos vectores u y v no paralelos que esten en el plano y un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ del plano. La ecuación vectorial es

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda u + \beta v. \qquad \text{Ecuación vectorial del plano}}$$

Ecuación paramétrica del plano

A partir de la ecuación vectorial del plano se puede hallar la ecuación paramétrica. Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores no paralelos del plano π y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto del plano, entonces

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$$

Luego

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \beta v_2 \\ y = z_0 + \lambda u_3 + \beta v_3 \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas del plano}}$$

Ecuación segmentaria

La determinar la ecuación segmentaria se puede obtener a partir de la ecuación general. Consideremos la ecuación general del plano, donde suponemos que a,b,c y d son distintos de cero.

$$ax+by+cz+d=0.$$

Entonces

$$\frac{a}{-d}x+\frac{b}{-d}y+\frac{c}{-d}z=1,$$
$$\frac{x}{\left(-\frac{d}{a}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{d}{b}\right)}+\frac{z}{\left(-\frac{d}{c}\right)}=1.$$

Entonces llamando $p=-\frac{d}{a}, q=-\frac{d}{b}, r=-\frac{d}{c}$,

$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1 \qquad \text{Ecuación segmentaria del plano}}$$

Recta definida como intersección de dos planos

Una recta puede ser definida como la intersección de dos planos (no paralelos). Consideremos dos planos no paralelos

$$\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

y

$$\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

La recta r que determinan estos dos planos al cortarse se puede expresar como

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 &= 0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 &= 0\end{cases}$$

El vector director de la recta r se puede hallar haciendo el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$v_d=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

Si queremos obtener un punto de la recta, fijamos el valor de cualquiera de las variables y resolvemos el sistema resultante.

Recordemos que dos rectas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$se dicen *coplanares* si existe un plano π que las contiene. Dos rectas r_1y r_2 son *alabeadas* si no son paralelas y no tienen un punto en comun (intersección vacía).

Diremos que dos rectas son ***coplanares*** si están contenidas en el mismo plano. Tenemos los siguientes casos:

1. Si son concurrentes, es decir, tienen un punto en comun, entonces podemos determinar el vector normal del plano haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las rectas. Después tomamos cualquier punto de alguna de las rectas.

2. Si son paralelas. En este caso no podemos tomar como vector normal el producto vectorial de los directores, pues son paralelos. En ese caso tomamos un vecor director y el otro lo construímos con dos puntos, uno de cada recta. Luego hacemos el producto vectorial.

Recordemos que dos rectas r_1 y r_2 son *alabeadas* si *no* son paralelas ni concurrentes. En ese caso no pueden estar contenidas en el mismo plano.

1.2. Ejercicios resueltos

Ejemplo 1.2

Consideremos las rectas $r_1 : (x,y,z) = (1,-2,2) + \lambda(1,2,3)$ y la recta r_2 determinada por los puntos $P = (1,3,1)$, y $Q = (3,1,a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Hallar un valor de a para que las rectas sean concurrentes y determinar el plano que las contiene.

Solución

Recordemos que dos rectas r_1 y r_2 son concurrentes si tienen un punto de intersección. En este ejercicio nos piden que hallemos un valor de a (si es que existe) para que las dos rectas tengan un punto intersección.

Lo primero que conviene hacer es hallar la ecuación vectorial de la recta r_2 que pasa los puntos $P = (1,3,1)$, y $Q = (3,1,a)$.
Como vector director podemos considerar al vector

$$\overrightarrow{PQ} = (3,1,a) - (1,3,1) = (2,-2,a-1).$$

Para escribir la ecuación vectorial de una recta necesitamos un punto (o un vector posición) y un vector director.Como punto para $r_2$podemos elegir P o Q. En este caso decidimos elegir P. Entonces la ecuación vectorial de la recta r_2 es:

$$r_2 : \quad (x,y,z) = (1,3,1) + \alpha(2,-2,a-1).$$

Como el punto intersección es un punto común a las dos rectas, entonces igualamos las ecuaciones vectoriales de las rectas r_1 y r_2 :

$$\begin{aligned}
(1,3,1) + \alpha(2,-2,a-1) &= (1,-2,2) + \lambda(1,2,3) \\
(1,3,1) - (1,-2,2) + \alpha(2,-2,a-1) &= \lambda(1,2,3) \\
(0,5,-1) + (2\alpha, -2\alpha, (a-1)\alpha) &= (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{lll}
2\alpha = \lambda & \Rightarrow \lambda = 2\alpha & \\
5 - 2\alpha = 2\lambda & \Rightarrow 5 - 2\alpha = 4\alpha & \Rightarrow \alpha = \dfrac{5}{6} \\
-1 + \alpha(a-1) - 3\lambda = 0 & &
\end{array}$$

Entonces $\lambda = \frac{5}{3}$. Por lo tanto $-1 + \frac{5}{6}(a-1) - 5 = 0$, es decir, $\frac{5}{6}(a-1) = 6$

$$a = \frac{36}{5} + 1 = \frac{41}{5}.$$

es el valor de a para que exista intersección entre las dos rectas.
Con este valor la recta r_2 nos queda

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (1,3,1) + \alpha(2,-2,a-1) \\
&= (1,3,1) + \alpha\left(2,-2,\frac{36}{5}\right).
\end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir el valor encontrado de λ o de α en las ecuaciones para tener el punto. Sustituímos $\lambda = \frac{5}{3}$ en la primera recta

$$(x,y,z) = (1,-2,2) + \frac{5}{3}(1,2,3) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 7\right) \text{ punto de intersección.}$$

Plano que contiene a r_1 y r_2. Para obtener la ecuación del plano π tal que contenga a las dos rectas podemos proceder de dos maneras.

- Primero tratamos de hallar un vector normal del plano, que puede ser el producto vectorial de los directores de las rectas

$$n = (1,2,3) \times \left(2,-2,\frac{36}{5}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & \frac{36}{5} \end{vmatrix} =$$

y tomar cualquier punto de cualquiera de las rectas. Por ejemplo el punto $(1,-2,2)$. Con estos datos obtendremos el valor correspondiente a d de la ecuación general $ax+by+cz+d=0$.

- La otra forma consistes en buscar la ecuación vectorial del plano. Como el plano contiene a las dos rectas y estas no son paralelas, podemos tomar los vectores directores de las mismas para que generar la ecuación vectorial de la recta junto con cualquiera de los puntos de la recta. Por ejemplo

$$\pi \quad (x,y,z) = (1,-2,2) + \lambda(1,2,3) + \alpha\left(2,-2,\frac{36}{5}\right).$$

Ejemplo 1.3

Derminar la ecuación de dos rectas diferentes que pasen por el punto $(-1,3,2)$ y sean perpendiculares a la recta $L:(x,y,z) = (1,0,3)+\lambda(2,3,-1)$.

Solución

Cada recta debe tener un vector director que sea perpendicular al vector director $v = (2,3,-1)$ de L. Por lo tanto los vectores que necesitamos son vectores ortogonales a v. Es decir, son las soluciones de la ecuación

$$(x,y,z).(2,3,-1) = 0,$$

es decir de

$$2x+3y-z=0.$$

Dos vectores que satisfacen la ecuación anterior son $(-1,1,1)$ y $(1,2,8)$. Entonces dos posibles rectas (hay infinitas) son $L_1:(x,y,z) = (-1,3,2)+\lambda(-1,1,1)$ y $L_2\ (x,y,z) = (-1,3,2)+\lambda(1,2,8)$.

Ejemplo 1.4

Consideremos las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad (x,y,z) = (1,0,4)+\lambda(0,1,-1) \\ L_2 &: \quad (x,y,z) = (0,3,0)+\lambda(0,4,2) \\ L_3 &: \quad (x,y,z) = \lambda(1,0,1) \end{aligned}$$

Sea P un punto de un plano π y de la recta L_1. Supongamos que el plano contiene a la recta L_2. Determinar el punto P de tal forma que el plano π sea paralelo a la recta L_3.

Solución

Sea v_n el vector normal de π. Ya que π contiene a la recta L_2, entonces este vector debe ser perpendicular al vector director $v_2 = (0,4,2)$ de L_2. Además el plano debe ser paralelo a la recta L_3. Entonces también debe ocurrir que v_n sea perpendicular al vector director $v_3 = (1,0,1)$ de L_3. Luego

$$v_n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 2j - 4k.$$

Entonces$v_n = (4,2,-4)$. Luego

$$\pi : 4x + 2y - 4z = d.$$

Por otra parte, como $L_2 \subset \pi$, entonces el punto $(0,3,0)$ satisface la ecuación de π. Sustituyendo obtenemos

$$6 = d.$$

Entonces la ecuación del plano es

$$\pi : 4x + 2y - 4z = 6,$$

o lo que es igual

$$\pi : 2x + y - 2z = 3.$$

Ahora debemos encontrar el punto P de tal forma que el plano π sea paralelo a la recta L_3. Para ello primero recordemos que el punto P está en π y L_1. Entonces considerando las ecuaciones paramétricas de L_1

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= \lambda \\ z &= 4 - \lambda \end{cases}$$

y sustituyendo en la ecuación del plano

$$2x + y - 2z = 2 + \lambda - 8 + 2\lambda = -6 + 3\lambda = 3,$$

entonces

$$\lambda = 3.$$

Finalmente se sustituye $\lambda = 3$ en las ecuaciones paramétricas de la recta L_1 obteniendo el punto

$$P = (1,3,1).$$

Ejemplo 1.5

Consideremos una recta que pasa por los puntos $P_1 = (2,3,2)$ y $P_2 = (0,5,0)$. Consideremos el plano $\pi = \{(x,y,z) : x + y - 2z = -1\}$. Determinemos una recta L' que esté contenida en π, que corte a la recta L y que sea perpendicular a ella.

Solución

Primero determinemos la ecuación de la recta L. Tenemos dos puntos. Por lo tanto podemos encontrar un vector director $v = (2,3,2) - (0,5,0) = (2,-2,2)$. Entonces podemos construir la recta que pasa por el punto P_2 y que tiene la siguiente ecuación

$$L : (x,y,z) = (0,5,0) + \lambda(2,-2,2).$$

Ahora para hallar la otra recta

$$L' : (x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda v,$$

debemos encontrar un vector director v de L' y un punto donde por donde pase la recta L'. Para encontrar el vector v debemos tener en cuenta lo que pide el problema. Por un lado la recta debe estar contenida en el plano π. En consecuencia el vector normal del plano $(1,1,-2)$ debe ser perpendicular al vector v (director de la recta). Pero también debemos tener en cunta que debe cortar en forma perpendicular a la recta L. Por lo tanto el vector v también debe ser perpendicular al vector director $(2,-2,2)$ de L. Es decir, se deben dar la siguiente situación:

$$v \perp (1,1,-2)$$
$$v \perp (2,-2,2)$$

Una forma de encontrar un vector perpendicular a dos vectores dados en utilizar el producto vectorial de $(1,1,-2)$ con $(2,-2,2)$. Es decir,

$$\begin{aligned} v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 2j + 2k - (-2k - 4j + 2i) \\ &= 2i + 6j + 4k. \end{aligned}$$

Por lo tanto el vector buscado es

$$v = (2,6,4).$$

Ahora nos queda determinar el punto Q. Para ello debemos tener en cuenta que la recta L'pertenece al plano y debe cortar a la recta L. Por lo tanto podríamos buscar un punto de intersección entre el plano π y la recta L.
Debemos encontrar la intersección

$$L \cap \pi : \begin{cases} (x,y,z) = (0,5,0) + \lambda(2,-2,2) \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Igualando los términos de la primer ecuación obtenemos $x = 2\lambda$, $y = 5 - 2\lambda$ y $z = 2\lambda$. Sustituimos en la ecuación de la recta y nos queda $2\lambda + 5 - 2\lambda - 4\lambda = -11$, y luego $5 - 4\lambda = -1$, es decir, $\lambda = -\frac{3}{2}$. Por lo tanto el punto buscado es

$$Q = (2\lambda, 5 - 2\lambda, 2\lambda) \overset{\lambda = -\frac{3}{2}}{=} (-3,8,-3).$$

En conclusión la recta buscada L' tiene la siguiente ecuación

$$L' : (x,y,z) = (-3,8,-3) + \alpha(2,6,4).$$

Ejemplo 1.6

Consideremos el plano π de ecuación $x + y - 2z = 3$, y la recta

$$L = \{(x,y,z) : (x,y,z) = (-1,1,2) + \lambda(1,-1,-1)\}.$$

Determinar una recta L_1 tal que $L \perp L_1$, pase por el punto $(2,1,-1)$ y $L_1 \cap \pi = \emptyset$.

Solución

En este caso debemos determinar la recta L_1 de ecuación $(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda\vec{w}$. Primero debemos hallar el vector director w de L_1. Para ellos observemos que $w \perp (1,-1,-1)$. Como $L_1 \cap \pi = \emptyset$, entonces debe ocurrir que π es paralelo a L_1. Por lo tanto el vector normal de π debe ser perpendicular al vector w. Luego podemos encontrar

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3i + j + 2k.$$

Es decir $\vec{w} = (3,1,2)$. La recta buscada tiene la siguiente ecuación

$$L_1 : (x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(3,1,2).$$

Deberíamos comprobar que esta recta tiene intersección vacía con π. La ecuación de la recta en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x &= 2+3\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= -1+2\lambda. \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano y obtenemos

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 2+3\lambda+1+\lambda-2(-1+2\lambda) \\ &= 1 \neq 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7

Consideremos las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &\qquad (x,y,z) = (1,1,0)+\lambda(1,-1,1) \\ L_2 &\qquad (x,y,z) = (-1,0,0)+\lambda(1,-2,1) \\ L_3 &\qquad (x,y,z) = (1,0,-1)+\lambda(0,-1,1). \end{aligned}$$

Hallar dos planos π_1 y π_2 tales que $L_1 \subset \pi_1$, $L_2 \subset \pi_2$ y L_3 es paralelo a $\pi_1 \cap \pi_2$.

Solución

Para encontrar π_1 vamos a tener en cuenta que $L_1 \subset \pi_1$ y $L_3 \| \pi_1 \cap \pi_2$. Entonces el vector normal de π_1 es el producto vectorial del vector director de L_1 y del vector director director de L_3. Por lo tanto

$$\begin{aligned} n_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= -i+0j-k-0k+i-j \\ &= -j-k. \end{aligned}$$

Entonces $n_1 = (0,-1,-1)$. Luego la ecuación del plano es $-y-z=d$.
Como $L_1 \subset \pi_1$, el punto $(1,1,0)$ pertenece al plano. Entonces $-1-0=-1=d$. Por lo tanto la ecuación del plano π_1 es

$$-y-z=-1.$$

Para encontrar el plano π_2 razonamos de igual forma. Como $L_2 \subset \pi_2$ y $L_3 \| \pi_1 \cap \pi_2$,

$$n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i-j-k.$$

Entonces $n_2 = (-1,-1,-1)$ y la ecuación del plano es $-x-y-z=d$. Como $L_2 \subset \pi_2$, entonces el punto $(-1,0,0)$ satisface la ecuación del plano. En consecuencia $-x-y-z=1$.
Si queremos trabajar un poco más podemos determinar la recta que es intersección de los planos π_1 y π_2. Para ellos debemos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} -y-z &= -1 \\ -x-y-z &= 1. \end{cases}$$

Resolviendo encontramos el valor $x=2$. Como $y=1-z$, haciendo $z=0$, determinamos $y=1$. Por lo tanto tenemos un punto $P=(2,1,0)$ de la recta intersección. Como L_3 es paralelo a $\pi_1 \cap \pi_2$, entonces podemos tomar como vector director cualquieruier vector que sea múltiplo del vector director de L_3. Entonces la recta nos queda

$$L_4 = \pi_1 \cap \pi_2 : (x,y,z) = (2,1,0) = \lambda(0,-1,1).$$

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1. Dados los vectores $v = (2,-1,1)$ y $u = (3,0,-2)$.

1. Escribir tres vectores diferentes que sean combinaciones lineales de v y u.
2. Determinar si los vectores v y u son combinación lineal de los vectores $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,1,0)$ y $w_3 = (0,0,-1)$.
3. Hallar $\|v\|$, $\|2u\|$, $\|v+u\|$, y $\|v\|+\|u\|$.
4. Determinar los puntos sobre el eje x cuya distancia al punto $(2,2,1)$ es igual a 4. Graficar la situación.

Ejercicio 2. Dados los puntos $P = (1,2,2)$,$Q = (2,-1,2)$ y $R = (-1,3,-2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Ejercicio 3. Calcular el producto escalar $u\cdot v$, donde $u = (2,-1,3)$ y $v = (0,1,2)$. Hallar el ángulo entre los dos vectores.

Ejercicio 4. Supongamos que $\|v\| = 2$, $\|u\| = 3$ y que $\cos\theta = -\frac{1}{6}$, donde θ es el ángulo entre v y u. Estudiar si los vectores $v+2u$ y $v-u$ son ortogonales.

Ejercicio 5. Determinar un vector ortogonal a $u = (-1,2,1)$ y a $v = (2,-1,-2)$ de módulo 5. ¿Es único el vector?

Ejercicio 6. Dados los vectores $u = (1,-1,1)$ y $v = (0,1,2)$, determinar vectores ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ de módulo 2.

Ejercicio 7. Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\frac{3}{4}\pi$, $\|u\| = \sqrt{2}$ y que el vector $2v+u$ es ortogonal a u.

Ejercicio 8. Sean $u = (1,2,-1)$, $v = \check{i}+\check{j}-\check{k}$ y $w = \check{i}-\check{j}+4\check{k}$. Calcular

1. $u\times v$.
2. $u\cdot(v\times w)$.
3. $u\times(v\times w)$.
4. $u\times(u\times w)$.

Ejercicio 9. Consideremos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Supongamos que $u\times v = (1,2,1)$ y $u\cdot v = -2$.

1. Determinar el área del paralelogramo que determinan estos vectores.
2. Calcular el ángulo θ entre u y v.

Ejercicio 10. Dados los puntos $P = (1,1,-1)$, $Q = (-2,1,-3)$ y $R = (1,2,2)$. Encontrar el perímetro y el área del triángulo PQR.

Ejercicio 11 (Rectas y planos)**.** Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, y simétrica de la recta que cumple cada uno de las siguientes condiciones.

1. Pasa por los puntos $P = (1,-2,3)$ y $Q = (3,-1,1)$.
2. Pasa por el punto $P = (1,-2,3)$ y su vector director es paralelo al vector $v = (-3,2,-2)$.
3. Es paralela al eje de ordenadas (eje y) y pasa por el punto $(3,2,1)$.
4. Pasa por el origen de coordenadas y tiene un vector cuyas componentes son iguales.
5. Pasa por el punto medio que une los puntos $P = (0,2,1)$ y $Q = (-2,4,3)$ y su vector director es ortogonal al vector $v = (2,1,-1)$.

Ejercicio 12. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones.

1. Pasa por el punto $P=(2,2,-1)$ y su vector normal es $n=(-1,2,-3)$.
2. Que pasa por los puntos $P=(1,-2,3)$, $Q=(3,-1,1)$ y $R=(1,0,4)$.
3. Es perpendicular al segmento que une los puntos$P=(0,2,1)$ y $Q=(-2,4,3)$ y que pase por el punto medio del segmento.
4. Contiene al punto $(-1,0,1)$ y a la recta $(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(1,7,-1)$.
5. Contiene al eje z y pasa por el punto $P=(-2,-3,2)$.
6. Contiene a los puntos $P=(-1,2,1)$, $Q=(3,-2,2)$ y es paralelo al eje x.
7. Pasa por el punto $P=(0,-1,1)$ y es paralelo a los vectores $v=(-2,1,1)$ y $u=(-3,1,-1)$.
8. Pasa por el punto $(3,-2,4)$ y es paralelo al plano π que contiene a los ejes x e y.
9. Contiene a la recta $r:\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-2z+3 & =0 \\ x-y+z-4 & =0 \end{array}\right.$ y pasa por el punto $P=(2,-1,4)$

Ejercicio 13. Estudiar en cada caso existencia o no de la intersección de los planos y rectas siguientes.

1. $(x,y,z)=(1,-1,3)+\lambda(1,1,-2)$, $\quad (x,y,z)=(1,-1,3)+\beta(-2,-2,4)$.
2. $(x,y,z)=(0,-1,2)+\lambda(1,3,1)$, $\quad (x,y,z)=(-1,2,2)+\alpha(-2,2,0)$.
3. El plano π: $3x+y-2z+4=0$ con las rectas

   a) $(x,y,z)=(-1,2,1)+\lambda(1,-1,1)$
   b) $(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(1,-1,3)$
   c) $r:\left\{\begin{array}{ll} x-y-z+1 & =0 \\ x-2y-3z-2 & =0 \end{array}\right.$

Ejercicio 14. Determinar rectas cumpliendo las siguientes condiciones

1. Pasa por el punto $P=(2,3,-1)$ y es perpendicular al plano $2x+3y-z+4=0$.
2. Pasa por el punto $P=(1,-2,2)$ y es paralela al plano $x-y+2z=4$.

Ejercicio 15. Determinar la distancia entre el punto $P=(3,-1,2)$ y la recta $(x,y,z)=(1,-1,2)+\lambda(-2,3,-1)$.

Ejercicio 16. En los siguientes apartados, determinar, en los casos posibles, los planos que contienen a las rectas indicadas.

1. $r_1:(x,y,z)=(1,-2,2)+\lambda(1,2,3)$ y $r_2:(x,y,z)=(3,-2,4)+\lambda(-2,-4,-6)$
2. $r_1:(x,y,z)=(1,4,-1)+\lambda(1,0,0)$ y $r_2\,(x,y,z)=(0,1,0)+\alpha(0,0,1)$.

Ejercicio 17. Dado el plano $\pi: x+3y-z=4$, la recta $L=\{(x,y,z):(x,y,z)=(2,0,-1)+\lambda(0,1,1)\}$, determinar una recta L' tal que $L\subset\pi$, $L\perp L'$ y $L'\cap L\neq\emptyset$.

Ejercicio 18. Dado el plano $\pi: x-y+2z-1=0$. Determinar

1. La distancia del punto $P=(2,1,3)$ al plano π.
2. Un plano paralelo al plano π sabiendo que el punto $Q=(1,-2,3)$ equidista de ambos planos.
3. Los valores del parámetro k para que la distancia del origen al plano π': $kx-y+2z-12=0$ sea igual 2 .

Ejercicio 19. Las rectas $r_1:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z}{3}$ y $r_2:(x,y,z)=\lambda(1,2,3)$ son coplanares. Determine el plano que las contiene.

Ejercicio 20. Determinar la recta incluida en el plano $\pi: x-y+2z=4$ perpendicular a la recta $r:(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(2,-1,1)$ en el punto de intersección de r con π.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 21. Dadas las rectas $r_1 : (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(2,-11,)$ y $r_2 : \begin{cases} y+z &= 2 \\ x+ay &= 0 \end{cases}$. Hallar un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que r_1 sea paralela a r_2 y calcular la distancia entre r_1 y r_2.

Ejercicio 22. Determinar la recta incluida en el plano $\pi : x - y + 2z = 4$ perpendicular a la recta $r : (x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(2,-1,1)$ en el punto de intersección de r con π.

Ejercicio 23. Sea Q el punto intersección entre el eje x y el plano $\pi : x + 2y - z - 2 = 0$. Determine todos los valores $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el punto Q está a una distancia de $\sqrt{6}$ unidades de la recta $r : (x,y,z) = (3,a,2) + \lambda(-1,-1,0)$.