# Algebra Lineal 2020

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

# Conjunto solución de un sistema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Una *solución* de sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

es una $n$-upla de números reales

$$\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

que satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

# Conjunto solución de un sistema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Una *solución* de sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

es una $n$-upla de números reales

$$\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Simbolizaremos con

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\,\vec{x} = \vec{b}\right\},$$

al conjunto de todas las soluciones del sistema,

# Conjunto solución de un sistema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Una *solución* de sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

es una $n$-upla de números reales

$$\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Simbolizaremos con

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\right\},$$

al conjunto de todas las soluciones del sistema, y con

$$\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

al conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

# Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ donde:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

# Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ donde:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o no.

# Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ donde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o no.

a. $x = (-7, 2, 2)^t$ es solución.

# Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o no.

a. $x = (-7, 2, 2)^t$ es solución.

b. $x = (2, 0, -1)^t$ es solución.

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Por lo tanto la afirmación es Falsa.

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Por lo tanto la afirmación es Falsa.

b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Por lo tanto la afirmación es Verdadera $x = (2, 0, -1)^t$ es solución del sistema.

### Ejemplo

*Estudiar el conjunto solución del siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ -y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 5 \end{array}\right.$$

Ejemplo

*Estudiar el conjunto solución del siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ -y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 5 \end{array}\right.$$

Podemos escribirlo como $A\vec{x} = \vec{b}$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b}$$

Resolvemos el sistema por eliminación gausseana:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Resolvemos el sistema por eliminación gausseana:

$$
\begin{array}{rrr|ll}
1 & 1 & -1 & 2 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & \\
2 & 1 & -1 & 5 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 2 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & f_3 \mapsto f_3 - 2f_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Resolvemos el sistema por eliminación gausseana:

$$
\begin{array}{rrr|rl}
1 & 1 & -1 & 2 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & \\
2 & 1 & -1 & 5 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 2 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & f_3 \mapsto f_3 - 2f_1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 2 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_3 \mapsto f_3 - f_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \\ \end{array}$$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \\ \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = 1 + y$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \phantom{0} \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = 1 + y$
Reemplazando en la primera ecuación:
$x + y - (1 + y) = 2 \rightarrow x + y - 1 - y = 2 \rightarrow x = 3$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \\ \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = 1 + y$
Reemplazando en la primera ecuación:
$x + y - (1 + y) = 2 \to x + y - 1 - y = 2 \to x = 3$
Luego la solución serán los
$(x, y, z) = (3, y, 1 + y) = (3, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \phantom{0} \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = 1 + y$
Reemplazando en la primera ecuación:
$x + y - (1 + y) = 2 \rightarrow x + y - 1 - y = 2 \rightarrow x = 3$
Luego la solución serán los
$(x, y, z) = (3, y, 1 + y) = (3, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (3, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

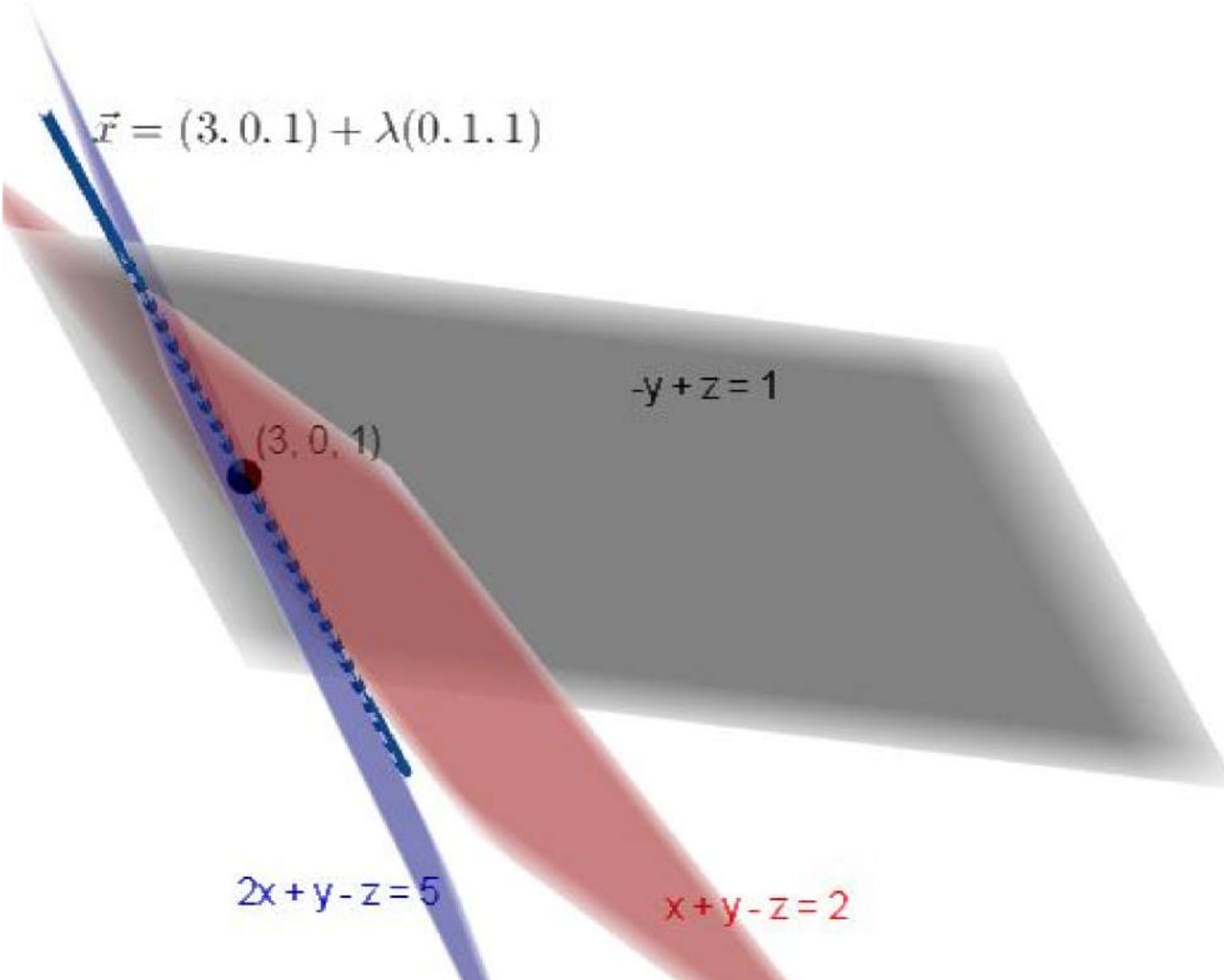
$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mapsto x+y-z=2 \\ \mapsto -y+z=1 \\ \\ \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = 1 + y$
Reemplazando en la primera ecuación:
$x + y - (1 + y) = 2 \to x + y - 1 - y = 2 \to x = 3$
Luego la solución serán los
$(x, y, z) = (3, y, 1 + y) = (3, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (3, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

¿De qué objeto geométrico se trata?

## Geométricamente:



Ejemplo

*Consideremos ahora, el sistema homogéneo asociado:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

### Ejemplo

*Consideremos ahora, el sistema homogéneo asociado:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

Podemos escribirlo como $A\vec{x}=\vec{0}$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Para resolverlo, no es necesario trabajar con la matriz ampliada:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Para resolverlo, no es necesario trabajar con la matriz ampliada:

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
2 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & f_3 \mapsto f_3 - 2f_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Para resolverlo, no es necesario trabajar con la matriz ampliada:

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
2 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & f_3 \mapsto f_3 - 2f_1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & f_3 \mapsto f_3 - f_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Para resolverlo, no es necesario trabajar con la matriz ampliada:

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
2 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & f_3 \mapsto f_3 - 2f_1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & f_3 \mapsto f_3 - f_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Notemos que hicimos las mismas operaciones!

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = y$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = y$
Reemplazando en la primera ecuación: $x + y - y = 0 \rightarrow x = 0$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = y$
Reemplazando en la primera ecuación: $x + y - y = 0 \rightarrow x = 0$
Luego la solución serán los $(x, y, z) = (0, y, y) = y.(0, 1, 1)$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = y$
Reemplazando en la primera ecuación: $x + y - y = 0 \rightarrow x = 0$
Luego la solución serán los $(x, y, z) = (0, y, y) = y.(0, 1, 1)$

$$N(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \lambda(0, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Al tener la matriz escalón, podemos resolver el sistema equivalente:

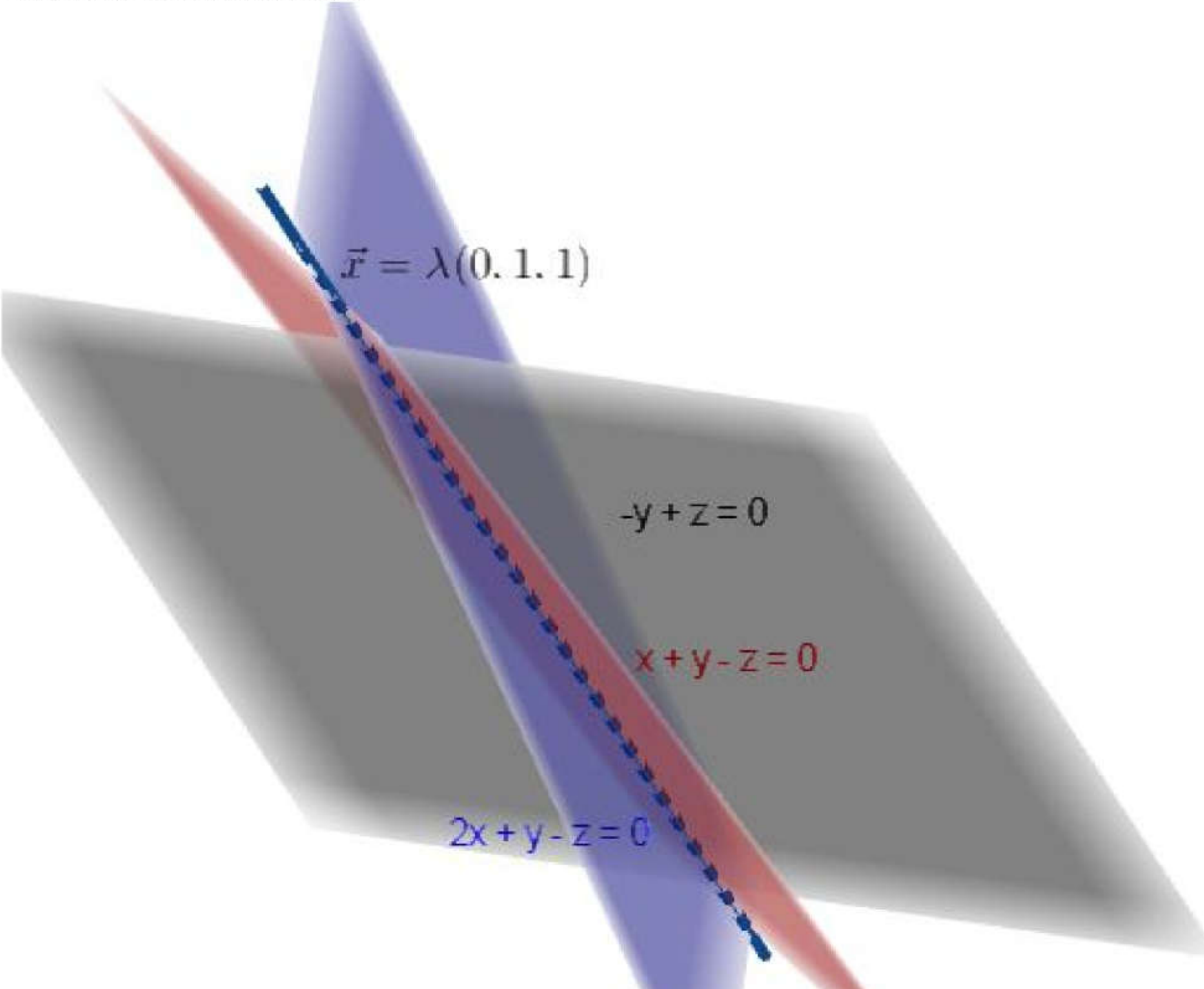
$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & -1 & \mapsto x+y-z=0 \\ 0 & -1 & 1 & \mapsto -y+z=0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

De la segunda ecuación $z = y$
Reemplazando en la primera ecuación: $x + y - y = 0 \to x = 0$
Luego la solución serán los $(x, y, z) = (0, y, y) = y.(0, 1, 1)$

$$N(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \lambda(0, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

¿De qué objeto geométrico se trata? ¿Qué diferencia tiene con la solución anterior?

Geométricamente:



El conjunto $N(A)$ corresponde a una recta que pasa por el origen y como tiene igual vector director que S, entonces las dos rectas son paralelas.
Observamos que el punto $(3,0,1)$ es la solución particular $(s_p)$ del sistema.

El conjunto $N(A)$ corresponde a una recta que pasa por el origen y como tiene igual vector director que S, entonces las dos rectas son paralelas.
Observamos que el punto $(3, 0, 1)$ es la solución particular $(s_p)$ del sistema.
**Todas las soluciones pueden escribirse entonces como la suma de la solución del sistema homogéneo + solución particular.**

El conjunto $N(A)$ corresponde a una recta que pasa por el origen y como tiene igual vector director que S, entonces las dos rectas son paralelas.
Observamos que el punto $(3, 0, 1)$ es la solución particular $(s_p)$ del sistema.
**Todas las soluciones pueden escribirse entonces como la suma de la solución del sistema homogéneo + solución particular.**

$$S = N(A) + s_p$$

### Ejemplo

*Resolver el siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 4 \\ -6x + 3y - 3z & = & -12 \end{array}\right.$$

## Ejemplo

*Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 4 \\ -6x + 3y - 3z &= -12 \end{cases}$$

Podemos escribir la matriz ampliada como:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & -3 & -12 \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo

*Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 4 \\ -6x + 3y - 3z &= -12 \end{cases}$$

Podemos escribir la matriz ampliada como:

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & -1 & 1 & 4 & \\ -6 & 3 & -3 & -12 & \\ \hline 2 & -1 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \mapsto f_2 + 3f_1 \end{array}$$

Ejemplo

*Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 4 \\ -6x + 3y - 3z &= -12 \end{cases}$$

Podemos escribir la matriz ampliada como:

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & -1 & 1 & 4 & \\ -6 & 3 & -3 & -12 & \\ \hline 2 & -1 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \mapsto f_2 + 3f_1 \end{array}$$

Notemos que se trata del mismo plano, y nos queda la ecuación $2x - y + z = 4$

### Ejemplo

*Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 4 \\ -6x + 3y - 3z &= -12 \end{cases}$$

Podemos escribir la matriz ampliada como:

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & -1 & 1 & 4 & \\ -6 & 3 & -3 & -12 & \\ \hline 2 & -1 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \mapsto f_2 + 3f_1 \end{array}$$

Notemos que se trata del mismo plano, y nos queda la ecuación $2x - y + z = 4$

¿Cómo escribimos ese conjunto solución?

$$2x - y + z = 4 \to z = 4 - 2x + y$$

$2x - y + z = 4 \to z = 4 - 2x + y$
Luego
$(x, y, z) = (x, y, 4 - 2x + y) = (0, 0, 4) + x(1, 0 - 2) + y(0, 1, 1)$

$2x - y + z = 4 \to z = 4 - 2x + y$
Luego
$(x, y, z) = (x, y, 4 - 2x + y) = (0, 0, 4) + x(1, 0 - 2) + y(0, 1, 1)$

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (0, 0, 4) + \lambda(1, 0, -2) + \beta(0, 1, 1), \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$2x - y + z = 4 \rightarrow z = 4 - 2x + y$
Luego
$(x, y, z) = (x, y, 4 - 2x + y) = (0, 0, 4) + x(1, 0 - 2) + y(0, 1, 1)$

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (0,0,4) + \lambda(1,0,-2) + \beta(0,1,1), \lambda, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Donde

$2x - y + z = 4 \to z = 4 - 2x + y$
Luego
$(x, y, z) = (x, y, 4 - 2x + y) = (0, 0, 4) + x(1, 0 - 2) + y(0, 1, 1)$

$$S = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (0,0,4) + \lambda(1,0,-2) + \beta(0,1,1), \lambda, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Donde

$$N(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \lambda(1,0,-2) + \beta(0,1,1), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

y

$$s_p = (0, 0, 4)$$