

1.10. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Escribir los siguientes sistemas en notación matricial y vectorial. Estudie la compatibilidad de los mismos sistemas. Determine e identifique el conjunto solución en los casos posibles.

$$(1) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5 \\ 8x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 16 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ 2x + 5y + 20z = 10 \\ -x + 2y + 8z = 4 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + y - z + 3t = 4 \\ x + 3y - 2z + 6t = 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3x + 2y - t = 5 \\ x - z + 2t = 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + w = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.2. Recordemos que el *rango* de una matriz A es el número de filas no nulas en cualquier forma escalonada por filas.

- Determinar el rango de las siguientes matrices

$$(a) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

- Analizar el rango según los valores de α

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3. Determinar todos los valores de a para los que el sistema lineal resultante sea compatible, compatible determinado o incompatible

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - y + z + t = 2 \\ x + 2y - z + 4t = 3 \\ x + 7y - 4z + 11t = a \end{cases}$$

Ejercicio 1.4. Dadas las siguientes matrices, resolver los sistemas homogéneos asociados. En los casos posibles determinar si las matrices tienen inversa y calcularlas utilizando el método de Gauss.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5. Consideremos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1. $x = (2, 0, -1)^t$ es solución.
2. $x = (-7, 2, 2)^t$ es solución.
3. A es inversible.
4. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 1.6. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Determinar el valor de a para que el rango de la matriz sea 2.
2. Para el valor $a = 1$, determinar la solución del sistema homogéneo asociado.

Ejercicio 1.7. Dada la matriz A y la matriz \vec{b} , hallar el valor de α para que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ sea compatible. Resolver el sistema para alguno de los valores hallados

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - 3 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.8. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga rango 2 y determine su solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & a-4 & a^2-5 \\ 2 & a+4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nota. Para resolver este ejercicio es conveniente convertir el anterior sistema en la forma $A \cdot X = b$

Ejercicio 1.9. Hallar las condiciones para que un vector arbitrario v cumpla las siguientes condiciones

1. Que sea normal al hiperplano de \mathbb{R}^4 generado por los vectores $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$, y $(1, 3, 2, 4)$.
2. Que pertenezca al plano hiperplano $S = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 0) \rangle$.
3. Que pertenezca al hiperplano generado por los vectores $(1, 2, 3), (-1, 0, -2), (1, -2, 1)$.

Ejercicio 1.10. En cada apartado determinar si cada uno de los vectores es combinación de los vectores columna de la matriz dada. Luego estudiar si es posible una condición general que asegure que un vector genérico \vec{b} es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A .

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = (2, -1, 0), \quad v_2 = (-1, 0, 1).$$

Ejercicio 1.11. Hallar la solución general de cada sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, conociendo la solución particular indicada.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.12. Dado el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$.

1. ¿Para qué valores de k el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no existen soluciones?
2. Determine el conjunto S solución del sistema general y el conjunto solución $N(A)$ del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

Ejercicio 1.13. Hallar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones que tiene como matriz ampliada a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array} \right)$ tenga como conjunto solución una recta.

Ejercicio 1.14. Determinar los valores de k para los cuales el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x + 4y + k^2 z = -3 \\ 3x + 5y + (k^2 - 2)z = k^2 - 5k \end{cases}$$

sea una recta contenida en el plano $x + 3y + 6z = 0$.

Ejercicio 1.15. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\vec{x} \in N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}$ y $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.16. Sean $A\vec{x} = \vec{b}_1$ y $B\vec{x} = \vec{b}_2$ dos sistemas de ecuaciones lineales en \mathbb{R}^3 . Supongamos que el conjunto solución del primer sistema es una recta

$$L_A : (x, y, z) = (-2, -1, 2) + \lambda(1, 1, -2).$$

Supongamos además que los puntos $(3, 0, -2)$ y $(0, 3, -5)$ son dos soluciones del sistema $B\vec{x} = \vec{b}_2$. Hallar una solución común de $A\vec{x} = \vec{b}_1$ y $B\vec{x} = \vec{b}_2$.

Ejercicio 1.17. Determinar un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el conjunto indicado

1. $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = s(-1, 2, 1) + t(2, -4, -2)\}$.
2. $\pi_2 = \langle(-1, 0, 1), (0, 1, 2)\rangle + (1, 2, 2)$.
3. $\pi_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, -2, -2) + t(2, 0, -1)\}$