5 Valores y autovectores

Sabemos que las matrices asociadas a una transformación lineal cambian según las bases consideradas. En el caso de los espacios euclídeos una base muy sencilla es la base canónica. Pero no siempre las bases canónicas son las más adecuadas. Ahora estudiaremos como construir, en ciertos casos, bases asociadas a transformaciones lineales o matrices con buenas propiedades.

5.1. Valores y vectores propios

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal (endomorfismo) y sea A la matriz asociada a la base estándar. En muchas aplicaciones de transformaciones lineales es de gran utilidad conocer aquellos vectores $v \in V$ tales que verifican la ecuación

$$T(v) = \lambda v$$

o lo que es lo mismo

$$Av = \lambda v,$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, buscamos conocer aquellos vectores $v \in V$ tal que al transformarlos obtenemos vectores paralelos al vector que hemos transformado. A estos vectores los llamaremos *vectores propios*, mientras que a los valores λ los llamaremos *valores propios*. Otros nombres que se encuentran en la literatura son autovectores, vectores característicos, y auto valores y valores características.

Definición 5.1

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y sea A la matriz estándar asociada a la transformación. El número $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** si existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Los vectores v que verifican dicha ecuación son los **vectores propios** de la transformación asociado al valor propio λ.

Ejemplo 5.1

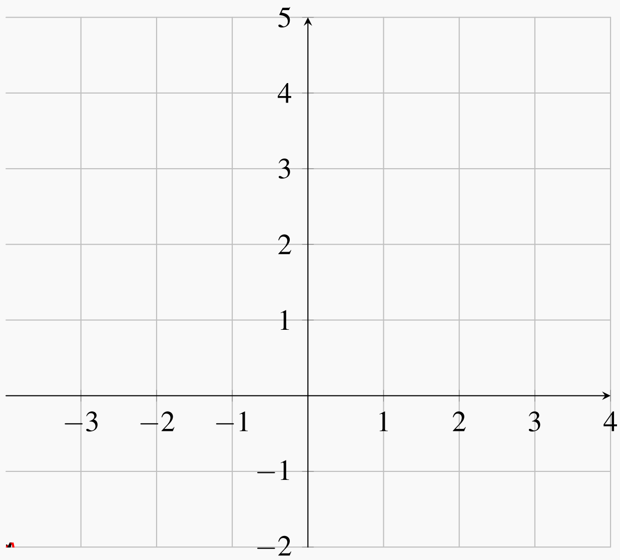
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. Su matriz estándar es

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\lambda = 3$ es un valor propio y $v = (1, 1)$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$.



N Notemos que en la misma definición de valores y vectores propios pedimos que el sistema

$$Av = \lambda v \tag{5.1}$$

Tenga solución no trivial. Es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio si y solo si existen vectores $v \in V$ tales que $Av = \lambda v$. Notemos además que la ecuación 5.1 es equivalente a

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

De manera tal que los valores propios serán aquellos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ tenga soluciones no triviales. Por último, recordemos que dicho sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

En vista de la observación anterior, definimos el polinomio característico de una matriz de la siguiente manera.

Definición 5.2

Sea A una matriz cuadrada de orden n. El polinomio característico de la matriz A es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Ejemplo 5.2

Consideremos la matriz estándar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior. Su polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 \end{aligned}$$

Obsevemos que, al factorizar $P(\lambda)$ obtenemos que $P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. De aquí vemos que $\lambda = 3$ es un valor propio como lo vimos en el ejemplo. EL valor $\lambda = -1\lambda$es otro valor propio.

Lema 5.1 Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces las siguiente condiciones son equivalentes:

1. v es vector propio de la matriz A.
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ es raíz del polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de la matriz.

Como ya sabemos, las raices de un polinomio tienen su respectiva multiplicidad. Lo que nos lleva a considerar la multiplicidad de los valores propios.

Definición 5.3 multiplicidad algebraica

Sea $T : V \to V$ un endomorfismo y sea A su matriz estándar. Diremos que un valor propio λ tiene *multiplicidad* k si en la factorización del polinomio característico $P(\lambda) = (x - \lambda)^k q(x)$.
Es decir, su multiplicidad algebraica es k. Indicaremos como $a(\lambda)$ a la multiplicidad algebraica de un valor propio λ.

Ejemplo 5.3

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right).$$

Para calcular los valores propios debemos hallar su matriz estándar $[T]$. Transformando a los vectores canónicos obtenemos que

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego calculamos el polinomio característico como

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda \end{aligned}$$

Obtenemos $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$. Es decir, tenemos dos valores propios $\lambda_1 = 0$ cuya multiplicidad algebraica es 1 y $\lambda_2 = 1$ cuya multiplicidad algebraica es 2.

N Sea $T : V \to V$ un endomorfismo y consideremos A la matriz de cuadrada de orden n estándar asociada a la transformación, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de la matriz. Recordemos que v es vector propio para el valor λ si verifica $Av = \lambda v$ si y sólo si v es solución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Recordemos además que siendo λ valor propio, sabemos que $\det(A - \lambda I) = 0$. Por este motivo, sabemos que el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ tiene infinitas soluciones. Entonces las infinitas soluciones de dicho sistema homogéneo forman un subespacio

$$E_\lambda = \{v \in V : (A - \lambda I)v = 0\}$$

de V.

Definición 5.4

Sea $T : V \to V$ un endomorfismo, y sea A su matriz estándar asociada a la transformación. Si λ es un valor propio de A, definimos el **subespacio propio** asociado al valor propio λ como

$$E_\lambda = \{v \in V : (A - \lambda I)v = 0\}.$$

Los vectores $v_\lambda \in E_\lambda$ son los vectores propios asociados al valor propio λ. A la dimensión del subespacio propio asociado a un valor propio le diremos **multiplicidad geométrica**.

Ejemplo 5.4

Consideramos el ejemplo de la matriz de proyección sobre el subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$. Ya sabemos que los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Para encontrar los vectores propios buscamos la solución de los sistemas homogéneos

$$(A - 0I)v = 0 \qquad \text{y} \qquad (A - 1I)v = 0$$

Para el caso de $(A - 0I)v = 0$, buscamos la solución de $Av = 0$. Escalonamos el sistema ampliado

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos que

$$E_\lambda = \langle (1,0,-1) \rangle.$$

Por lo tanto, el vector $(1,0,-1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$.
Para el caso de $\lambda_2 = 1$, procedemos de la misma manera, buscamos la solución del sistema homogéneo $(A - I)v = 0$. Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos que el subespacio propio

$$E_{\lambda_2} = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle.$$

Por lo tanto, los vectores que pertenezcan a dicho plano son vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 1$.

N Es importante resaltar, que no toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ posee valores propios, ya que estos existen en la medida en que su polinomio característico tenga raíces reales. Veamos por ejemplo el caso de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como

$$T(x,y) = (3y, -x + y).$$

Observemos que la matriz estándar de esta transformación está dada por:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

De donde obtenemos que $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 3$. Dado que el discriminante del polinomio anterior es $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = -11 < 0$, entonces la ecuación $\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$ no posee soluciones reales. En consecuencia, T no posee valores propios.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre los subespacios propios asociados a valores propios distintos.

Teorema 5.1

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son valores propios distintos de A, entonces, la suma de los subespacios propios es directa. En particular, tenemos que:

$$\dim(E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_k}) = \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_k})$$

El Teorema anterior nos sirve como motivación para estudiar la dimensión de un espacio propio. Razón por la cual introducimos la siguiente definición.

Definición 5.1

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Si λ es un valor propio de A, llamaremos multiplicidad geométrica de λ a la dimensión de E_λ y la notaremos como $g(\lambda)$.

Ejemplo 5.1

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$T(x,y,z) = (-x + 2y + 3z, -y + 9z, -z)$$

No es difícil verificar que la matriz estándar de T está dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $P(\lambda) = (-1 - \lambda)^3$; luego $\lambda = -1$ es el único valor propio de T y en consecuencia $a(-1) = 3$. Ahora, para hallar E_{-1}, debemos buscar las el conjunto solución del sistema homogéneo $([T] + I)v = 0$. Así pues, escalonando la matriz $[T] + I$, se puede chequear que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $E_{-1} = \langle (1,0,0) \rangle$ y por consiguiente $g(-1) = 1$. Esto es, $g(-1) < a(-1)$.

El resultado siguiente nos muestra la relación que existe entre la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica de un valor propio.

Teorema 5.2

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Si λ es un valor propio de A, entonces:

$$g(\lambda) \leq a(\lambda)$$

Teorema 5.3

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Si $\dim(V) = n$, entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A tiene n vectores propios linealmente independientes.
2. Para todo valor propio λ de A, $g(\lambda) = a(\lambda)$.

El Teorema anterior tiene una consecuencia remarcable al momento de considerar endomorfismos sobre espacios euclídeos (es decir, transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) ya que nos genera una descomposición del espacio en términos de los subespacios propios de la transformación.

Corolario 5.1 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Si para todo valor propio λ de A, $g(\lambda) = a(\lambda)$ entonces:

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k},$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son valores propios de A distintos.

Ejemplo 5.1

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida como

$$T(x,y,z) = (-2x, 3x + y, x + 2y + 3z)$$

Vamos a ver que a partir de los subespacios propios de T podemos obtener una descomposición de $\mathbb{R}^3$ como una suma directa de subespacios. Para tal efecto, necesitamos conocer primero los valores propios de T. Observemos que la matriz estándar de T está dada por:

$$[T] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, a partir del cálculo:

$$P(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Obtenemos que $P(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$. Por lo tanto, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$ son los valores propios de T. Ahora, para determinar a los subespacios propios de la transformación, debemos encontrar el conjunto solución de los sistemas homogéneos $([T] + 2I)v = 0$, $([T] - I)v = 0$ y $([T] - 3I)v = 0$.
Para encontrar E_{-2}, escalonando se verifica que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que $E_{-2} = \langle (5, -5, 1) \rangle$. De manera similar, para encontrar E_1 escalonamos a fin de verificar que

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual, a su vez implica que $E_1 = \langle (0,-1,1) \rangle$. Finalmente, para encontrar E_3, escalonamos con la finalidad de chequear que

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que tendrá como consecuencia que $E_3 = \langle (0,0,1) \rangle$. Así, dado que $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$ para $1 \leq i \leq 3$, por el Corolario 5.1 podemos afirmar que

$$\mathbb{R}^3 = E_{-2} \oplus E_1 \oplus E_2$$

Es claro que lo anterior también podría haberse comprobado manualmente, al verificar que el conjunto $\{(5,-5,1),(0,-1,1),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente.

A manera de resumen presentamos el siguiente Teorema, en el cual se da cuenta de algunos resultados previos que complementados con la influencia de los valores propios y vectores propios, permiten determinar si una transformación lineal es un isomorfismo.

Teorema 5.4

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A su matriz estándar. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. T es un isomorfismo.
2. A es inversible.
3. $\det(A) \neq 0$.
4. $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{N}(A) = \{\vec{0}\}$.
5. $\mathrm{rg}(A) = \dim(V)$.
6. La única solución al sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es la trivial.
7. El vector cero no es un valor propio de A.

5.2. Valores y vectores propios en diferentes bases

Hasta ahora hemos trabajo con la matriz estándar $[T]$de una transformación lineal T. La pregunta que nos podmeos hacer ahora es la siguiente. ¿Que ocurre si trabajamos con otra matriz $[T]_B$, donde B es una base diferente a la canónica?

Ahora veremos que en realidad los valores propios que obtenemos con una matriz $[T]_B$ son los mismos que si trabajamos con la matriz $[T]$ .Lo que puede cambiar son los vectores propios.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un transformación lineal y sea $B = \{v_1,..,v_n\}$ una base para $\mathbb{R}^n$. Recordemos que podemos obtener la matriz de la transformación asociada a la base B, a la cual indicaremos como $[T]_B$. Esta matriz trabaja con las coordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera

$$[T]_B\,[v]_B = [T(v)]_B.$$

Recordemos además que la matriz asociada a una base B se relaciona con la matriz estándar $[T]$ mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{[T]}"] & E \arrow[d, "P_{EB}"] \\ B \arrow[u, "P_{BE}"] \arrow[r, "{[T]_B}"'] & B \end{tikzcd}$$

De manera tal que podemos obtener la matriz $[T]_B$ sabiendo que

$$[T]_B = P_{EB}\,[T]\,P_{BE}.$$

Luego

$$[T]_B[v]_B = (P_{EB}\,[T]\,P_{BE})\,[v]_B = [T(v)]_B$$

En vista de lo observado anteriormente podemos estudiar que ocurre con los valores propios y los vectores propios de una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Supongamos que $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo y sea $B=\{v_1,..,v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Supongamos además que $A=[T]$ es la matriz de la transformación en la base estándar y $[T]_B$ la matriz de la transformación en la base B.

$$A=[T] \qquad \text{y} \qquad [T]_B$$

Supongamos además que $\lambda\in\mathbb{R}$ es un valor propio de A y v_λ un vector propio asociado a λ. Entonces se verifica la ecuación

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda.$$

Recordemos que las coordenadas del vector v_λ en la base canónica es el mismo vector, es decir, $v_\lambda = [v_\lambda]_E$ .También recordemos que $P_{BE}[v_\lambda]_B = [v_\lambda]_E = v_\lambda$.
Considerando las coordenadas de v_λ en la base B y aplicando $[T]_B$, obtenemos

$$\begin{aligned}
[T]_B[v_\lambda]_B &= \underbrace{(P_{EB}\,[T]\,P_{BE})}_{[T]_B}[v_\lambda]_B \\
&= P_{EB}A\,\underbrace{(P_{BE}\,[v_\lambda]_B)}_{[v_\lambda]_E=v_\lambda} \\
&= P_{EB}A\,v_\lambda \\
&= P_{EB}\,(\lambda v_\lambda) \\
&= \lambda P_{EB}\,v_\lambda \\
&= \lambda\,[v_\lambda]_B
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[T(v)]_B = [\lambda v_\lambda]_B = \lambda\,[v_\lambda]_B\,.$$

Las ecuaciones anteriores nos muestran que al tomar una base diferente a la estándar la matriz asociada a la transformación tiene los mismos *valores* propios. Sin embargo, los vectores propios cambian, pues en realidad obtenemos las coordenadas en la base B de los vectores propios asociados al valor propio λ.

Ejemplo 5.1

Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\}$. Consideremos la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=ref_S(x,y,z)$. Veamos cuales son los valores propios y vectores propios de dicha transformación. En primer lugar, debemos buscar cuál es la expresión explícita de la transformación. Recordemos que dado $S\subseteq\mathbb{R}^3$ un subespacio, entonces podemos calcular

$$ref_S(v) = v - 2\text{proy}_{S^\perp} v$$

De manera tal que buscaremos $\text{proy}_{S^\perp} v$. Además es claro que $S^\perp = \langle(1,-1,0)\rangle$, de donde se sigue que

$$\text{proy}_{S^\perp}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)\cdot(1,-1,0)}{||(1,-1,0)||^2}(1,-1,0) = (\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2},0)$$

De donde obtenemos que

$$t(x,y,z) = (x,y,z) - 2\text{proy}_{S^\perp}(x,y,z) = (y,x,z)$$

Calculamos ahora $[T]$ de manera usual y obtenemos $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cuyo polinomio característico lo calculamos como

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\lambda^2 - 1 \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica 1. Además notemos que para $\lambda = 1$ el subespacio

$$E_\lambda = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (A-1I)(x,y,z) = 0\right\}.$$

Buscamos entonces la solución al sistema

$$(A-1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz $A-1I$ para buscar la solución del sistema homogéneo obtenemos que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos como solución $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ verificando que $x-y=0$. Es decir $E_1 = S$ y podemos deducir también que $g(1) = 2$, es decir, la multiplicidad geom etrica de $\lambda = 1$ es 2.
Para el caso de $\lambda = -1$, es sencillo verificar que $E_{-1} = S^\perp$.
Consideremos ahora la base

$$B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$$

. Si calculamos $[T]_B$ obtenemos que

$$\begin{aligned} T(1,1,0) &= 1(1,1,0) \\ T(0,0,1) &= 0\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1) + 0\,(1,-1,0) \\ T(1,-1,0) &= (-1,1,0) = 0\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1) + (-1)\,(1,-1,0) \end{aligned}$$

De esta forma las coordenadas de cada vector son

$$\begin{aligned} [T(1,1,0)]_B &= (1,0,0)^t \\ [T(0,0,1)]_B &= (0,1,0)^t \\ [T(1,-1,0)]_B &= (0,0,-1)^t \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos los valores propios de la transformación utilizando la base B, es decir, utilizando $[tT]$, obtenemos que

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Observamos que los valores propios no han cambiado.

N Notemos que los valores propios nos brindan información geométrica de como actúa la transformación sobre los subespacios propios asociados a los valores propios. En el ejemplo anterior, tenemos que $\lambda = 1$ es valor propio y su subespacio propio $E_1 = S$. Esto nos está indicando que para cada $v \in S$, $T(v) = 1v$, es decir, los deja fijo bajo dicha transformación. Lo cual es razonable, pues dicha transformación corresponde a la reflexión respecto a S, y por lo tanto todo vector $v \in S$ queda fijo.

Por otro lado, notemos que para $\lambda = -1$, el subespacio asociado $E_{-1} = S^{\perp}$. Por lo tanto para cada $v \in S^{\perp}$, tenemos que $Av = -1v$. Esto es razonable, pues la reflexión de un vector $v \in S^{\perp}$ se refleja a su opuesto al tomar la reflexión respecto de S.

5.3. Diagonalización

Definición 5.1

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A es diagonal si es de la forma

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{i,j} \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases}$$

O bien, son matrices triangulares superior e inferior simultáneamente.

Ejemplo 5.2

Las siguientes matrices son diagonales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición 5.2

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Diremos que T es diagonalizable si existe una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que $[T]_B$ es diagonal.

Ejemplo 5.3

Es interesante notar que en el ejemplo 5.2 obtuvimos dos valores propios

- $\lambda_1 = 1$ cuya multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica, es decir $a(\lambda_1) =$

$g(\lambda_1) = 2$.

- $\lambda_2 = -1$, cuya multiplicidad geométrica también coincide con su multiplicidad algebraica, es decir $a(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$

De esta manera, en vista del teorema 5.1, podemos obtener una descomposición de $\mathbb{R}^3$ como la suma directa de $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$. Pero en vista de que $E_{\lambda_1} = S$ y $E_{\lambda_2} = S^{\perp}$, obtenemos

$$\mathbb{R}^3 = S \oplus S^{\perp}$$

Considerando que E_{λ_1} y E_{λ_2} están en suma directa, podemos obtener una base para $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera, $B = B_1 \cup B_2$ donde B_1 es base para E_{λ_1} y B_2 base para E_{λ_2}. Siendo $E_{\lambda_1} = S$ obtenemos que $E_1 =< (1,1,0),(0,0,1) >$. Por otro lado, $E_{\lambda_2} =< (1,-1,0) >$. Luego, $B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$. Pero aún más, observemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Generalizando la idea anterior, el teorema 5.1 nos asegura que para $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ endomorfismo y $\lambda_1, .., \lambda_k$ valores propios tales que $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, entonces obtenemos una descomposición de $\mathbb{R}^n$ como suma directa de los subespacios propios E_{λ_i}. Es decir

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

De esta manera, si consideramos B_1 base para E_{λ_1}, B_2 base para E_{λ_2},.., B_k base para E_{λ_k}, obtenemos una base para $\mathbb{R}^n$ como $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ para la cual $[T]_B$ es diagonal.

Ejemplo 5.4

Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una tranformación lineal, definida como

$$T(x,y,z) = \left(\frac{-2x+2y-z}{3}, \frac{2x+y-2z}{3}, \frac{-x-2y-2z}{3} \right).$$

Veamos que es una transformación diagonalizable. Es decir, veamos que existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ es diagonal. Buscaremos entonces los valores propios de la transformación para luego calcular los subespacios propios E_λ. Luego, la unión de las bases de dichos subespacios es la base que estamos buscando.
En primer lugar, consideremos $A = [T]$ la matriz de la transformación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculando el característico $P(\lambda)$, obtenemos $P(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. Es decir, tenemos dos valores propios $\lambda_1 = 1$ con $a(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con $a(\lambda_2) = 2$.

- Para $\lambda_1 = 1$, buscamos su subespacio asociado E_{λ_1}, es decir, la solución al sistema homogéneo $(A-1I)v = 0$, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así que $E_{\lambda_1} = \langle (1,2,-1) \rangle$ y por lo tanto $a(\lambda_1) = g(\lambda_1)$

- Para $\lambda_2 = -1$, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Obteniendo así que $E_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}$ y por lo tanto $E_{\lambda_2} = \langle (1,0,1)(0,1,2) \rangle$ y por lo tanto, $g(\lambda_2) = a(\lambda_2)$

Notemos que para ambos valores propios, su multiplicidad algebraica y geométrica coinciden, de manera tal que el teorema 5.1, nos asegura que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \mathbb{R}^3$ y así obtenemos que la base B, que resulta de unir las bases para ambos subespacios es una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto $B = \{(1,2,-1),(1,0,1),(0,1,2)\}$ es una base. Pero además, notemos que $T(1,2,-1) = 1(1,2,-1)$ por lo tanto $[T(1,2,-1)]_B = (1,0,0)^t$. De igual manera vemos que $[T(1,0,1)]_B = (0,-1,0)$ y $[T(0,1,2)]_B = (0,0,-1)$ de donde obtenemos

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto, la matriz es diagonal. Obteniendo así que la transformación es diagonalizable.

N Es importante notar que en la base hallada, la matriz $[T]_B$ tiene en su diagonal a los valores propios. Más aún, en la diagonal aparece el valor propio λ tantas veces como su multiplicidad geométrica. Es decir, en el ejemplo anterior, $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad geométrica $g(\lambda_1) = 1$ y por lo tanto aparece una sola vez en la diagonal. Mientras que para λ_2 tenemos que $g(\lambda_2) = 2$ y por lo tanto aparece dos veces en la diagonal.

Hemos definido a una transformación lineal diagonalizable como aquella $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para la cual existe una base B de $\mathbb{R}^n$ para la cual su matriz asociada a dicha base es diagonal. Definiremos ahora que entenderemos por matriz diagonalizable, lo cual no debe confundirse con la noción de transformación lineal diagonalizable.

Definición 5.3

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A es diagonalizable si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que $BAB^{-1} = D$ es una matriz diagonal.

Observemos que ambas definiciones están intimamente relacionadas, puesto que hablar de matrices y hablar de transformaciones lineales es equivalente. De esta manera podemos observar que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable, entonces existe una base $B = \{v_1, .., v_n\}$ tal que $[T]_B$ es diagonal. Pero recordando que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{[T]}"] & E \arrow[d, "P_{EB}"] \\ B \arrow[u, "P_{BE}"] \arrow[r, "{[T]_B}"'] & B \end{tikzcd}$$

Y además recordando que $[T] = P_{EB}\,[T]\,P_{BE}$, con $P_{EB}^{-1} = P_{BE}$, vemos entonces que la matriz estándar de la transformación $[T]$ es diagonalizable. Es decir, nuestra matriz B tal que $BAB^{-1} = D$ es la matriz cambio de base P_{EB}.

Podemos entonces obtener el siguiente lema

Lema 5.1 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, entonces son equivalentes:

1. La transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable.
2. La matriz estándar de la transformación $[T]$ es diagonalizable.

5.4. EJERCICIOS

Ejercicio 5.1. En caso de ser posible, determinar los valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales:

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida como $T(x,y)=(4x+3y,3x-4y)$.
2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida como $T(x,y,z)=(2y-z,2x-z,2x-y)$.
3. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y,z)=(y,-4x+4y,-2x+y+2z)$
4. $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, definida por $T(x,y,z,t)=(x+y+z+t,x+y-z-t,x-y+z-t,x-y-z+t)$.

Ejercicio 5.2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida como $T(v)=ref_S(v)$, la reflexión respecto a un subespacio S. Hallar los valores y vectores propios de la transformación correspondiente a cada subespacio y describir en cada caso los subespacios propios asociados a la transformación obtenida.

1. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x-z=0\}$.
2. $S=L\cap M$, donde $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2x+y+3z=0\}$ y $L=\langle(-2,1,4)\rangle$.
3. $S=\langle(-1,3,2),(1,-1,1)\rangle$.
4. S es el subespacio nulo de la matriz
$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.3. Sea $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida como $T(x,y,z)=(ax+y+z,ay,bz)$. ¿Es posible hallar valores a y b, tales que $\mathbb{R}^3$ se puede descomponer como suma de los subespacios propios de T?

Ejercicio 5.4. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso positivo determine la matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

1. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$

Ejercicio 5.5. Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

1. Determinar todos los posibles valores de a para los cuales A es diagonalizable.
2. Para el valor $a=1$ estudiar si A es diagonalizable, y en caso afirmativo determinar la matriz P y D tal que $D=P^{-1}AP$.

Ejercicio 5.6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 1 & b\\ 2 & 2 & c\end{pmatrix}$,

1. Determinar los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que $\lambda_1=1$ sea un valor propio de A y tenga como vector propio a $v_1=(1,1,1)$.

2. Con los valores de a, b y c hallados anteriormente, estudiar si A es diagonalizable.

Ejercicio 5.7. Supongamos que $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que su matriz estándar es $[T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = 2$ sea un valor propio de $[T]$. Para el valor de a hallado estudiar si $[T]$ es diagonalizable.

Ejercicio 5.8. Indicar en cada caso si la matriz es diagonalizable y en caso de serlo hallar la matriz P y la matriz D.

1. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, polinomio característico $P(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)$ y subespacios propios $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z=0\right\}$ y $H = \langle(0,1,-1)\rangle$.
2. $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, polinomio característico $P(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda+2)$ y subespacios propios $S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z-w\right.$ y $T = \langle(3,-1,4,-3),(1,-1,0,2)\rangle$.

Ejercicio 5.9. Determinar para cada transformación lineal T una base B para que la matriz de T respecto de B sea diagonal. Hallar una transformación lineal H que tenga los mismos valores propios que T.

1. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, x+y)$.
2. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (-2x+2y-3z, 2x+y-6z, -x-2y)$.

Ejercicio 5.10. Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (3x+y+2z, ay, x-y+2z)$, determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la transfomación T es diagonalizable. Para los casos posibles especificar una base B y la matriz de transformación $[T]_B$ que sea diagonalizable.

Ejercicio 5.11. Determinar las transformaciones lineales siguiente bajo las condiciones indicadas. Indicar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de transformación $[T]_B$ sea diagonal. ¿Son únicas?

1. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que el valor propio $\lambda = -1$ tiene como subespacio propio al subespacio $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z=0\right\}$ y $(1,2,1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.
2. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que el valor propio $\lambda = -1$ tiene como subespacio propio al subespacio $S = \langle(-1,1,1)\rangle$ e $\mathrm{Img}T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\right\}$.