5.13. Ejercicios

Subespacios. Combinaciones lineales

Ejercicio 5.1. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios. Justificar la respuesta.

1. $S_7 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\right\}$
2. $S_3 = \{(x,y) : x = 0\}$.
3. $S_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 3y + 4z = 0\right\}$.
4. $S_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = s\,(1,0,-2) + t\,(3,2,1)\right\}$.
5. $S_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y,\, z = 3y\right\}$
6. $S_9 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y + z = 2\right\}$

Ejercicio 5.2. Interpretar geométricamente el subespacio S generado por el conjunto F, es decir $S = \langle F \rangle$. Indique en cada caso si el vector v pertenece al subespacio. Determinar que condiciones debe cumplirse para que un vector genérico $v \in S$.

1. $F = \{(1,2),(1,1)\}$, $v = (3,4)$.
2. $F = \{(1,2,3),(0,1,1)\}$, $v = (-2,-1,-3)$.
3. $F = \{(1,-1,-2),(-2,2,4)\}$, $v = (3,-3,6)$.
4. $F = \{(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-2,1,0)\}$, $v = (1,1,0,-1)$.

Independencia lineal. Bases

Ejercicio 5.3. Determinar en cada caso si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes. Hallar un sistema de ecuaciones paramétricas y cartesianas para cada subespacio generado.

1. $\{(1,-3),(-2,6)\}$, $\{(2,3),(1,0)\}$,
2. $\{(1,2,-1)\}$, $\{(2,-1,1),(-1,2,3)\}$.,
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 5.4. Determinar el valor de k para que cumpla las condiciones pedidas:

1. El vector $(1,2,0)$ sea combinación lineal del conjunto de vectores $\{(2,1,-1),(2,1+k,k),(2,2,1)\}$.
2. El vector $(1,-2,k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $u = (1,-1,4)$ y $v = (-2,3,1)$.
3. El conjunto de vectores $L = \{(0,k,k,k),(3,1,1,k),(k,0,0,2),(k,k,3,k)\}$ sea linealmente independiente.
4. El conjunto $S = \{(1,1,k),(k,1,1),(k,k,4)\}$ contiene a lo sumo dos vectores linealmente independientes.

Ejercicio 5.5. Supongamos que $L = \{u,v,w\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

1. $L_1 = \{3u, -4v, 5w\}$
2. $L_2 = \{2u, u-3v, u+v+w\}$
3. $L_3 = \{2u, u+3v, u-v-w, u-v\}$.
4. Para el conjunto $L_4 = \{u-2w, u+v, kw-u+v\}$, determinar si existen valores de k de tal forma que L_4 sea linealmente independiente.

Ejercicio 5.6. Encontrar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

1. $S = \langle (2,-1), (1,-2), (1,1) \rangle$.
2. $S = \langle (1,-1,3), (2,1,1), (0,-3,5) \rangle$
3. $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y = 0 \right\}$.
4. $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+3z = 0 \right\}$.
5. $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\, z-3y = 0 \right\}$.
6. $S = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+3w = 0,\, z = 4y \right\}$.

Ejercicio 5.7. Extensión de un conjunto LI a una base. Consideremos el conjunto de vectores linealmente independiente $\{(1,0,2), (2,-1,0)\}$. Extender este conjunto para obtener una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar una condición general que permita asegurar como deben ser los vectores $v = (x,y,z)$ tal que $\{(1,0,2), (2,-1,0), v\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

Subespacios fundamentales. Ecuaciones implícitas y paramétricas de subespacios

Ejercicio 5.8. Determinar los cuatro espacios fundamentales asociados a cada matriz. Determinar las ecuaciones cartesianas y las ecuaciones paramétricas los casos

$$(1)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (1)\; A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\; A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\; A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.9. Para cada subespacio S hallar matrices A, B y C tal que

$$S = \mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(B) = \mathrm{Fi}(C).$$

Determinar además las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas.

1. $S = \langle (-2,1,1), (3,-1,0) \rangle$.
2. $S = \langle (1,1,1), (-1,0,1), (0,1,2) \rangle$.
3. $S = \langle (-1,2,1), (0,1,2), (2,-1,3) \rangle$.
4. $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-3z = 0 \right\}$.
5. $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t,\, y = -t,\, z = 3t,\, t \in \mathbb{R} \right\}$.
6. $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+3z = 0,\, -x+y-z = 0,\, x-2y = 0 \right\}$.
7. $S = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 ; x-y+3z+w = 0,\, x+2y-z-3w = 0 \right\}$
8. $S = \{(\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma, 0)\}$.

Intersección y suma de subespacios

Ejercicio 5.10. Hallar la intersección y la suma de los subespacios en cada caso. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

1. $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}, \quad S_2 = \langle (1,1,1) \rangle$.
2. $S_1 = \begin{cases} x+y+z & =0 \\ x-y-z+t & =0 \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} x+y-z-t & =0 \\ x-y+z-t & =0 \end{cases}.$
3. $S_1 = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1+x_2+\ldots+x_n = 0\}$, $S_2 = \langle (1,1,0,\ldots,0), (1,-1,0,\ldots,0) \rangle$.
4. $S_1 = \langle (1,2,2),(0,1,1) \rangle$ y $S_2 = \langle (2,1,2),(1,0,-1) \rangle$.
5. $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y,\, z=2x\right\}$ y $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z=0\right\}$.

Ejercicio 5.11. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\, y=2z\right\}$$

y

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y,\, z=0\right\},$$

hallar un subespacio W cumpliendo las condiciones $T \subseteq W$ y $W \oplus S = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.12. Dados los siguientes subespacios

$$S_1 = \langle (0,1,-2), (1,1,0) \rangle, S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+hy-z=0\right\}$$

y

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{h^2-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\right\},$$

hallar $h \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $S_1 \cap S_2 = S$.

Ejercicio 5.13. Sean los subespacios

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x-y+az=0 \text{ y } 2x+y=0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3ay-z=0\right\}.$$

1. Determinar los posibles valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que $S_1 \subset S_2$.
2. Hallar los posibles valores de a tal que $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.14. Dados los subespacios

$$S_1 = \langle (1,2,1),(0,2,0) \rangle \text{ y } S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=y-kz=0\right\}.$$

1. Determinar los valores de k para los cuales $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.
2. Para $k=0$, comprobar que el vector $(3,2,1)$ puede expresarse de forma única como suma de un vector $v_1 \in S_1$ con un vector $v_2 \in S_2$.

Complemento ortogonal

Ejercicio 5.15. Dado el subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by+cz = 0\}$ determinar la ecuación vectorial de su complemento ortogonal.

Dado el subespacio $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(d,e,f)\}$, determinar la ecuación cartesiana de su complemento ortogonal.

Ejercicio 5.16. Para cada uno de los subespacios siguientes, determinar una base, hallar su complemento ortogonal, una base del complemento e indique su dimensión.

1. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-3z = 0\}$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-4z = 0,\ y-4z = 0\}$.
3. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+2z-t = 0,\ x+y-z = 0\}$.
4. S está definido por el conjunto de ecuaciones $\begin{cases} x-y-z+t &= 0 \\ x+y+z+t &= 0 \\ x-y-z+t &= 0 \end{cases}$

Ejercicio 5.17. Dados los subespacios S y T de $\mathbb{R}^3$ determinar el subespacio W que cumpla las condiciones indicadas

1. $S = \langle(1,1,-1,2)\rangle$, $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-t = 0 \text{ y } z+t = 0\}$, $S^\perp \cap T = W$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+3z = 0\}$, $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ y } z = 0\}$,$T \subseteq W$ y $W \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.18. Dada la matriz A, hallar un subespacio S tal que el vector v se exprese como suma de un vector $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (2,1,-1)$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1,-1,0)$.

Ejercicio 5.19. Para cada matriz dada, determinar los espacios $\mathrm{Fi}(A)$, $\mathrm{Co}(A)$,$\mathrm{N}(A)$, y $\mathrm{N}(A^t)$. Determinar para cada espacio un conjunto generador y un sistema de ecuaciones que determine cada subespacio. Chequear luego dimensiones y comprobar que $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^\perp = \mathrm{Co}(A^t)$ y $\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^\perp$.

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$(c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.20. Determinar el subespacio generado por los vectores indicados. Utilizando la igualdad $\mathrm{Co}(A)^\perp = \mathrm{N}(A^t)$, para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hallar una base y las ecuaciones implícitas de $S^\perp$.

1. $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.21. Consideremos el subespacio S_1 definido implicitamente por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y el subespacio S_2 definido paramétricamente por la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinar $S_1 \cap S_2$.

Ejercicio 5.22. Utilizando la igualdad $\mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$, determine un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el siguiente subconjunto

$$\pi = \langle (-1,0,0,1), (1,1-1,0) \rangle + (1,2,0,2).$$

Coordenadas de un vector. Cambio de base

Ejercicio 5.23. Consideremos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,1,1), (0,1,1), (2,0,1)\}.$$

1. Determinar las coordenadas del vector $v = (2,-3,2)$ en dicha base.

2. Conociendo que las coordenadas de un vector u son $[u]_B = (-1,3,2)^t$, encontrar el vector u.

3. Hallar las coordenadas de un vector genérico $v = (x,y,z)$

   en la base B.

Ejercicio 5.24. Dado el vector $v = (2,-1)$, determinar una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que las coordenadas de v en dicha base seas $[v]_B = (2,-3)^t$.

Ejercicio 5.25. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores, $u_1 = (1,-2,1,3)$, $u_2 = (2,-4,0,2)$, $u_3 = (3,-6,1,5)$ y $u_4 = (2,-4,-4,-6)$. Se pide

1. Determinar las ecuaciones implicitas o cartesianas que definen al subespacio $S = \langle u_1, u_2, u_3, u_3 \rangle$. La dimensión y una base de S.

2. Coordenadas de un vector genérico en la base hallada.

3. Ampliar la base de S para encontrar una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 5.26. Consideremos las bases de $\mathbb{R}^2$

$$S = \{(1,2), (0,1)\} \text{ y } T = \{(1,1), (2,3)\}.$$

Sea los vectores $v = (1,5)$ y $w = (5,4)$.

1. Determinar $[v]_T$ y $[w]_S$.

2. Hallar la matrices de cambio de base P_{TS} y P_{ST}, utilizando el esquema $[B_2 \mid B_1] \to [I \mid P_{B_1B_2}]$.

3. Hallar los vectores de coordenadas $[v]_T$ y $[w]_S$ utilizando las matrices P_{TS} y P_{ST}. Compare las respuestas con las del apartado (1).

Ejercicio 5.27. Sea $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial V. Sean $v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_3$ y $v_3 = 3u_1 - u_2 + 3u_3$.

1. Probar que $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V.

2. Determinar $P_{B_1B_2}$ y $P_{B_2B_1}$.

3. Hallar las coordenadas respecto de la base B_1 del vector $v = -2v_1 + 3v_2 + v_3$.

Ejercicio 5.28. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Se puede considerar la matriz A como una matriz de cambio de base de una base B a la base canónica? Si la respuesta es afirmativa determinar B.

2. ¿Se puede considerar la matriz A como una matriz de cambio de base de la base canónica a una base B ? Si la respuesta es afirmativa determinar B.

3. Si A es la matriz de transición de una base B_1 a la base $B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, determinar la base B_1.

Ejercicio 5.29. Dados los vectores $v = (2,3,1)$, $u = (-1,1,1)$ y $w = (2,1,-1)$ y sus coordenadas en una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, [u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } [w]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

determinar la base B.

Ejercicio 5.30. Sean $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Sea v un vector cuyas coordenadas en B_1 son $[v]_{B_1} = (1,a,b)^t$ y sus coordenadas en B_2 son $[v]_{B_2} = (c,c,c)^t$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Hallar v.

Ejercicio 5.31. Consideremos un vector $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y dos bases

$$B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,0),v\} \text{ y } B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),v\}.$$

Supongamos que las coordenadas del vector $w = (2,-1,-1)$ en la base B_1 son $[w]_{B_1} = (-2,a,1)^t$ y las coordenadas del vector $u = (3,1,1)$ en la base B_2 son $[u]_{B_2} = (-a,2,-2)^t$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ y el vector v.

Ejercicio 5.32. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran dos bases

$$B_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ y } B_2 = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,0,1)\}.$$

Si $P_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base B_1 a B_2. Determinar los vectores de la base B_1.

Ejercicio 5.33. Consideremos dos bases B_1 y B_2 del espacio $\mathbb{R}^2$ y sea $P_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz cambio de base de la base B_1 a la base B_2 .

1. Si $[w]_{B_1} = (2,-3)^t$,calcular $[w]_{B_2}$.

2. Si $[w]_{B_2} = (-1,1)^t$,calcular $[w]_{B_1}$. ¿Es posible determinar el vector w?

3. Si $B_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$, calcular B_2.