Bases ortogonales y ortonormales

Álgebra lineal 2020. FCEx

Ejemplo

Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

¿Existe alguna propiedad relevante entre los vectores de la base E?

$$\begin{aligned} (1,0,0)\cdot(0,1,0) &= (0,0,0) \\ (1,0,0)\cdot(0,0,1) &= (0,0,0) \\ (0,1,0)\cdot(0,0,1) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente conjunto

$$B = \{(1,0,-1), (1,-2,1), (1,1,1)\}$$

$$\begin{aligned} (1,0,-1)\cdot(1,-2,1) &= (0,0,0) \\ (1,0,-1)\cdot(1,1,1) &= (0,0,0) \\ (1,-2,1)\cdot(1,1,1) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

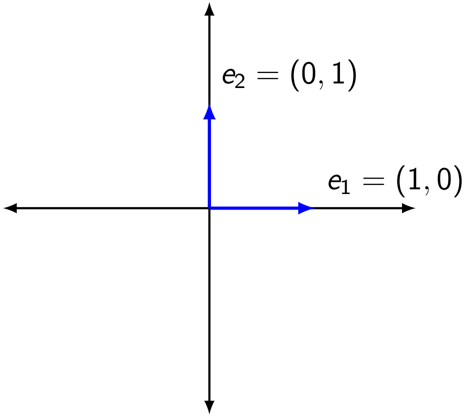
Igual que antes, los vectores son ortogonales entre si.

$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es ortogonal si $v_i \cdot v_j = 0$, para cada $i \neq j$.

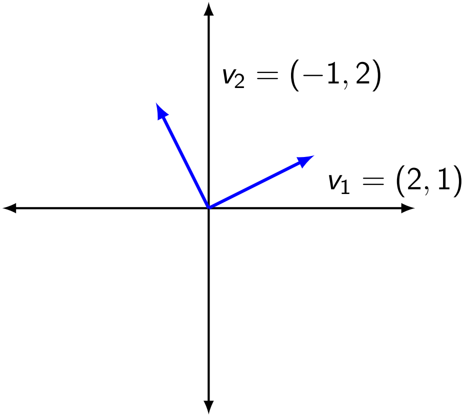
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es ortonormal si es ortogonal y los vectores tienen módulo igual a 1

$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es base y ortogonal $\Longrightarrow$ base ortogonal

$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es base y ortonormal $\Longrightarrow$ base ortonormal



$E = \{e_1, e_2\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$



$B = \{v_1, v_2\}$

- La base canónica
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$
de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal, pues para cada $i \neq j$,
$$e_i \cdot e_j = 0 \text{ y } \|e_i\| = 1, \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

- El conjunto
$$\{v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, -1, 1)\}$$
es ortogonal como es sencillo comprobar. Pero no es ortonormal.
Para obtener una base ortonormal debemos vector **normalizar** cada vector. Es decir,
$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \quad \vec{v}_2' = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \text{ y } \vec{v}_2' = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|},$$
Entonces el conjunto
$$\{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'\} = \left\{\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}\right\} \text{ es una base } \textbf{ortonormal.}$$

Propiedades

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal, entonces es **linealmente independiente**.
2. Si S es un subespacio generado por un conjunto ortogonal $\{v_1, \ldots, v_k\}$, entonces dicho conjunto es una **base** de S.
   Por lo tanto, todo conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonales es una base de $\mathbb{R}^n$.
3. **Cuidado** !!!!!
   No todo conjunto linealmente independiente es ortogonal.
   Por ejemplo, el conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es linealmente independiente y, obviamente, no es ortogonal.

Ventajas de las bases ortogonales y ortonormales

Recordemos que las coordenadas de un vector $v = (x, y, z)$ en una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ son los escalares c_1, c_2 y c_3 que permiten formar la combinación lineal

$$v = (x, y, z) = c_1\, v_1 + c_2\, v_2 + c_3\, v_3.$$

Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(1, 0, 0,), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Una ventaja de la base canónica es que las coordenadas de cualquier vector $v = (x, y, z)$ son las mismas componentes del vector y además

$$c_1 = x = \frac{(x, y, x) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} \quad c_2 = y = \frac{(x, y, x) \cdot (0, 1, 0)}{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)} \qquad c_3 = z = \frac{(x, y, x) \cdot (0, 0, 1)}{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)}$$

.

Ventajas de las bases ortogonales y ortonormales

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base **ortogonal** del subespacio S.

1. Entonces las coordenadas de $u \in S$ en la base B están dadas por
$$c_i = \frac{u \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$
Es decir el vector u se expresa como combinación lineal en la base B en la siguiente forma
$$u = \underbrace{\left(\frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right)}_{c_1} v_1 + \underbrace{\left(\frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right)}_{c_2} v_2 + \cdots + \underbrace{\left(\frac{u \cdot v_k}{v_k \cdot v_k}\right)}_{c_k} v_k.$$

2. Si B es un conjunto **ortonormal**, entonces las coordenadas de w en la base B están dadas por
$$c_i = u \cdot v_i, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$
Es decir, el vector u se expresa como combinación lineal en la base B en la siguiente forma
$$u = (u \cdot v_1)\ v_1 + (u \cdot v_2)\ v_2 + \cdots + (u \cdot v_k)\ v_k.$$

Ejemplo 1

Determinar si el conjunto

$$B = \{(2,1,-1), (0,1,1), (1,-1,1)\}$$

es una base. Hallar las coordenadas de $w = (2,-1,3)$ en dicha base. Determinar una base ortonormal

---

$$\{(2,1,-1), (0,1,1), (1,-1,1)\} \text{ es ortogonal } \Rightarrow \text{ linealmente independiente } \Rightarrow \text{ base de } \mathbb{R}^3.$$

Cada coordenada c_i se determina por la fórmula

$$c_i = \frac{u \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$$

Recordemos que

$$v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2$$

$$
\begin{aligned}
w = {} & \frac{(2,-1,3)\cdot(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|^2}\,(2,1,-1) + \frac{(2,-1,3)\cdot(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|^2}\,(0,1,1) \\
& + \frac{(2,-1,3)\cdot(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}\,(1,-1,1) = 0\,(2,1,-1) + \frac{2}{2}\,(0,1,1) + 2\,(1,-1,1)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las coordenadas de $w = (2,-1,3)$ en la base B son

$$
[w]_B = (0,1,2)^t\,.
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
(2,-1,3) &= c_1\,(2,1,-1) + c_2\,(0,1,1) + c_3\,(1,-1,1) \\
&= 0\ (2,1,-1) + 1\ (0,1,1) + 2\ (1,-1,1)\,.
\end{aligned}
$$

Podemos hallar una base ortonormal calculando el módulo de cada vector v_i y considerando el vector normalizado $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \\ w_2 &= \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \\ w_3 &= \frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$$

es una base ortonormal.

Ejemplo 2

Dado el subespacio

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\}.$$

1. Encontrar una base ortogonal y una base ortonormal de S.
2. Hallar las coordenadas del vector $w = (-3, 2, 1) \in S$ en la base ortogonal hallada.
3. Determinar el subespaciop $S^\perp$.

---

1. Primero buscamos una base de S. Como $x = -2y + z$, entonces

$$(x, y, z) = (-2y + z, y, z) = y\,(-2, 1, 0) + z\,(1, 0, 1).$$

Luego el subespacio es de la forma

$$S = \{(x, y, z) = t\,(-2, 1, 0) + k\,(1, 0, 1)\} = \langle(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle.$$

Los vectores $(-2,1,0),(1,0,1)$ constituyen una base de S pero **no son ortogonales.**
Para encontrar una base ortogonal es suficiente encontrar otro vector de S que se ortogonal a cualquiera de ellos.
Sea (x,y,z) dicho vector. Entonces se debe verificar

$$\begin{array}{ccc} (x,y,z) \in S & & \Rightarrow \quad x++2y-z=0 \\ & \text{y} & \\ (x,y,z)\cdot(1,0,1)=0 & & \Rightarrow \quad x+z=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2y-z & =0 \\ x+z & =0 \end{cases} \Longrightarrow x=-z \ \text{ y } \ -z+2y-z=0 \Longrightarrow \begin{cases} x & =-z \\ y & =z \end{cases}.$$

Por lo tanto cualquier vector no nulo de la forma

$$v=(-z,z,z)=z(-1,1,1)$$

servirá para formar una base ortogonal, pues los dos vectores satisfacen la ecuación que define al subespacio S y además

$$(-1,1,1)\cdot(1,0,1)=-1+0+1=0$$

Ejemplo 2

Entonces

$$B = \{(1,0,1)\,,(-1,1,1)\}$$

es una base ortogonal de S.
Podemos hallar una base ortonormal dividiendo cada vector por su módulo

$$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \|(-1,1,1)\| = \sqrt{3}$$

Entonces

$$N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\,, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right\}$$

es una base ortonormal de S.

2. Ahora debemos hallar las coordenadas de w en la base B. Debemos comprobar que el vector w pertenece a S. En caso contrario no tiene sentido la pregunta.
Como B es ortogonal, entonces

$$(-3,2,1) = c_1\,(1,0,1) + c_2\,(-1,1,1)$$

donde

$$c_1 = \frac{(1,0,1)\cdot(-3,2,1)}{\|(1,0,1)\|^2} = \frac{-3+0+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

y

$$c_2 = \frac{(-1,1,1)\cdot(-3,2,1)}{\|(-1,1,1)\|^2} = \frac{3+2+1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Por lo tanto

$$[(-3,2,1)]_B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (-3,2,1) = \left(-\frac{3}{2}\right)(1,0,1) + (2)\,(-1,1,1)$$

Ejemplo 2

3. Hallar $S^\perp$
Recordemos que

$$(x,y,z) \in S^\perp \iff (x,y,z) \text{ es ortogonal a los generadores de } S = \langle (-2,1,0), (1,0,1) \rangle .$$

$$\iff \begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(-2,1,0) = (0,0,0) \\ (x,y,z)\cdot(1,0,1) = (0,0,0) \end{array}$$

Entonces

$$\begin{cases} -2x + y & = 0 \\ x + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = 2x \\ z & = -x \end{cases} \iff (x,y,z) = x\,(1,2,-1)$$

Por lo tanto

$$S^\perp = \langle (1,2,-1) \rangle .$$