

3.6. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

1. Si $\det(A) = 4$ y $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\det(B^2)$ y $\det(-2B)$ y $\det((-3B)^{-1})$.
2. Si $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 4$, calcular $\det(AB^t)$.

Ejercicio 3.2. Sea $A = (C_1 C_2 C_3)$ una matriz donde C_1, C_2 y C_3 son las columnas de A . Dada la matriz $B = (C_1 - 3C_3 C_3 C_2)$, calcular $\det(\frac{3}{2}A^t B^{-1})$, sabiendo que $\det(A) = 2$.

Ejercicio 3.3. Supongamos que

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4,$$

Calcular, aplicando propiedades de determinantes, los determinantes de las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 & 3a_3 + b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5. Calcular los siguientes determinantes. Determine para qué valor de α los determinantes de las siguientes matrices se anulen:

$$(a) \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & 2 \\ 3 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.6. El polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden n es el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Para cada una de las siguientes matrices calcular su polinomio característico y, en los casos posibles, sus raíces.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -2 & -4 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.7. Utilizando determinantes, hallar condiciones para que las siguientes matrices sean inversibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ k & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

(d) $(A^t - \alpha I)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.8. Para cada una de las siguientes matrices calcular si es posible la matriz inversa por el método de Gauss y por el método de los cofactores.

$$(a) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} (b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} (c) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} a \neq 0$$

Ejercicio 3.9. Estudiar, utilizando determinantes, la compatibilidad de los siguientes sistemas de acuerdo los valores de los parámetros.

$$1. \begin{cases} 3x + ky = 0 \\ kx + y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 7y + \alpha z = 3 \end{cases}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & k \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -k \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & k \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.10. Dadas las rectas y planos siguientes, determinar los posibles valores de los parámetros k se indican en cada caso:

$$1. L: \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+y = 3 \end{cases}, \pi: 2x+y+kz=2, L \cap \pi = \{P\}.$$

$$2. L: \begin{cases} x+2y-z = 1 \\ y+3z = 3 \end{cases}, \pi: 2y+(k^2+2)z=k+2, L \cap \pi = \{P\}.$$

$$3. L: \begin{cases} x-2y = 4 \\ -x+3y-z = 1 \end{cases}, \pi: kx-2y+2z=a, L \text{ sea paralela al plano } \pi.$$

Ejercicio 3.11. Dados los planos $\pi_1: x+2y+z=3$, $\pi_2: 2x+3y+2z=2$ y $\pi_3: x+4y+(k^2-8)z=k+14$, determinar todos los posibles valores de k para que la intersección de los tres planos sea un recta. Para cada uno de los valores hallados dar la ecuación paramétrica de la recta correspondiente.

Ejercicio 3.12. Consideremos la recta $L: \begin{cases} 2x-y-z = 0 \\ x+y+z = a \end{cases}$ y el plano $\pi: x-y+bz=-1$. Determinar los posibles valores de a y b para que la recta L esté contenida en el plano y $(1, 2, 0) \in L \cap \pi$.

Ejercicio 3.13. Dada la recta $L: \begin{cases} kx-y+z = 1 \\ x+y+3kz = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: (x, y, z) = (2, 1, 1) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$, hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \parallel \pi$ y L no esté contenida en π .