Vectores, rectas y planos

Álgebra lineal - Facultad de Ciencias Exactas - 2020

19 de Agosto de 2020

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n = \alpha \text{ ; con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ entonces

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n = \alpha \text{ ; con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \quad =$$

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n = \alpha \; ; con \; \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7)$$

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n = \alpha \ ; con \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) \\ &= 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) + 5 \cdot 7 = 0 + 6 + 35 \end{aligned}$$

Producto Escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n = \alpha \; ; con \; \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) \\ &= 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) + 5 \cdot 7 = 0 + 6 + 35 \\ &= 41 \end{aligned}$$

Ángulo entre vectores

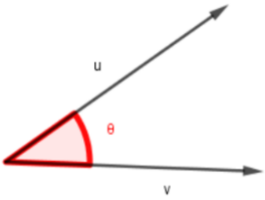
Además, podemos definir al producto escalar entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ a partir su ángulo comprendido θ.

Ángulo entre vectores

Además, podemos definir al producto escalar entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ a partir su ángulo comprendido θ.

Definicion

Se define el ángulo comprendido entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como ángulo de menor amplitud formado entre ellos



Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*.*

Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Definimos entonces al producto escalar como:*

Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Definimos entonces al producto escalar como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Definimos entonces al producto escalar como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

De esta manera, si se conocen $\vec{v}$ y $\vec{u}$ podemos calcular el ángulo comprendido:

Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Definimos entonces al producto escalar como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

De esta manera, si se conocen $\vec{v}$ y $\vec{u}$ podemos calcular el ángulo comprendido:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Producto escalar

Definicion

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* θ *el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Definimos entonces al producto escalar como:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

De esta manera, si se conocen $\vec{v}$ y $\vec{u}$ podemos calcular el ángulo comprendido:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde $\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{u}\|$ es la norma de cada vector no nulas.

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) = 41$$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) = 41$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) = 41$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) = 41$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 25} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (1, -2, 5)$ y $\vec{u} = (0, -3, 7) \in \mathbb{R}^3$ calculemos el ángulo θ comprendido entre ellos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Donde

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (0, -3, 7) = 41$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \\
&= \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 7^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \\
&= \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 7^2} \\
&= \sqrt{0 + 9 + 49}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\
&= \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 7^2} \\
&= \sqrt{0 + 9 + 49} \\
&= \sqrt{58}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \\
&= \sqrt{0^2+(-3)^2+7^2} \\
&= \sqrt{0+9+49} \\
&= \sqrt{58}
\end{aligned}
$$

Por último:

$$\cos\theta = \frac{41}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{58}}$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \\
&= \sqrt{0^2+(-3)^2+7^2} \\
&= \sqrt{0+9+49} \\
&= \sqrt{58}
\end{aligned}
$$

Por último:

$$\cos\theta = \frac{41}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{58}}$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arccos\left(\frac{41}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{58}}\right) \\
&= 0^\circ 11' 7''
\end{aligned}
$$

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

De esta manera, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y reemplazando en la fórmula anterior nos queda que:

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

De esta manera, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y reemplazando en la fórmula anterior nos queda que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} = 0$$

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

De esta manera, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y reemplazando en la fórmula anterior nos queda que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} = 0$$

Entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

con $\|\vec{v}\| \neq 0$ y $\|\vec{u}\| \neq 0$

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

De esta manera, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y reemplazando en la fórmula anterior nos queda que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} = 0$$

Entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

con $\|\vec{v}\| \neq 0$ y $\|\vec{u}\| \neq 0$
Por lo tanto:

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$ son ortogonales sii el ángulo comprendido entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

De esta manera, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y reemplazando en la fórmula anterior nos queda que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} = 0$$

Entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

con $\|\vec{v}\| \neq 0$ y $\|\vec{u}\| \neq 0$
Por lo tanto:

Definicion

Dos vectores $\vec{v}$ *y* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales sii* $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, algunas propiedades son:

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, algunas propiedades son:

- (Conmutativa)$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, algunas propiedades son:

- (Conmutativa)$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- (Asociativa) $\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{v}, \vec{u}\ y\ \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, algunas propiedades son:

- (Conmutativa)$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- (Asociativa) $\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
- (Distributiva)$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$*,* $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$*, donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$*. Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \quad = \quad \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva)$$

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$\begin{aligned}
(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Conmutativa)
\end{aligned}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$\begin{aligned}
(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Conmutativa) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) (Asociativa)
\end{aligned}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ *y que* $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, *donde* θ *es el ángulo comprendido entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$. *Estudiar si los vectores* $\vec{v} + 2\vec{u}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *son ortogonales.*

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$\begin{aligned}
(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Conmutativa) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) (Asociativa) \\
&= \|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\|^2
\end{aligned}$$

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ y que $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, donde θ es el ángulo comprendido entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$. Estudiar si los vectores $\vec{v} + 2\vec{u}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ son ortogonales.

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Conmutativa) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) (Asociativa) \\
&= \|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\|^2 \\
&= 2^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \cdot 3^2
\end{aligned}
$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.4) Supongamos que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 3$ y que $\cos(\theta) = -\frac{1}{6}$, donde θ es el ángulo comprendido entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$. Estudiar si los vectores $\vec{v} + 2\vec{u}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ son ortogonales.

Solución:
Dos vectores son ortogonales sii su producto escalar es igual a cero.
Veamos si $(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0$
Resolviendo:

$$\begin{aligned}
(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Distributiva) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} (Conmutativa) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{u})(Asociativa) \\
&= \|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\|^2 \\
&= 2^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \cdot 3^2
\end{aligned}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Y por lo tanto:

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Y por lo tanto:

$$(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \quad = \quad -14 + \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= -14 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= -14 + (-1)\end{aligned}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= -14 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= -14 + (-1) \\ &= -15\end{aligned}$$

Nos faltaría calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Como

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{3 \cdot 2}$$

Despejando nos queda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= -14 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= -14 + (-1) \\ &= -15\end{aligned}$$

Como el producto escalar es distinto a cero, entonces los vectores $\vec{v} + 2\vec{u}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ no son ortogonales.

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$*, determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$, *determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Solución:

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$*, determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$*, determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = x - y + z = 0$

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, determinar vectores ortogonales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 2.

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = x - y + z = 0$

b $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$*, determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = x - y + z = 0$

b $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (0, 1, 2) = y + 2z = 0$

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, 2)$*, determinar vectores ortogonales a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de módulo 2.*

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = x - y + z = 0$

b $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (0, 1, 2) = y + 2z = 0$

c $\| \vec{w} \| = 2$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio

1.6) Supongamos que $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, determinar vectores ortogonales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 2.

Solución:

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = x - y + z = 0$

b $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow (x, y, z) \cdot (0, 1, 2) = y + 2z = 0$

c $\| \vec{w} \| = 2 \Longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{w} = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):

$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$

Despejando x nos queda que:

$x = -3z$.

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):

$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$

Despejando x nos queda que:

$x = -3z$.

Por lo tanto:

$$y = -2z,\ x = -3z \ y \ z \in \mathbb{R}$$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$
Despejando x nos queda que:
$x = -3z$.
Por lo tanto:

$$y = -2z, \ x = -3z \ y \ z \in \mathbb{R}$$

Reemplazando lo obtenido en (c) nos queda que:

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$
Despejando x nos queda que:
$x = -3z$.
Por lo tanto:

$$y = -2z,\ x = -3z\ y\ z \in \mathbb{R}$$

Reemplazando lo obtenido en (c) nos queda que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \;\;=\;\; (-3z)^2 + (-2z)^2 + z^2$$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$
Despejando x nos queda que:
$x = -3z$.
Por lo tanto:

$$y = -2z, \ x = -3z \ y \ z \in \mathbb{R}$$

Reemplazando lo obtenido en (c) nos queda que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (-3z)^2 + (-2z)^2 + z^2 \\ &= 9z^2 + 4z^2 + z^2 \end{aligned}$$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$
Despejando x nos queda que:
$x = -3z$.
Por lo tanto:

$$y = -2z, \ x = -3z \ y \ z \in \mathbb{R}$$

Reemplazando lo obtenido en (c) nos queda que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (-3z)^2 + (-2z)^2 + z^2 \\ &= 9z^2 + 4z^2 + z^2 \\ &= 14z^2 = 4 \end{aligned}$$

Podemos despejar de (b) la y y reemplazarla en (a):
$y = -2z \Longrightarrow x - (-2z) + z = x + 2z + z = x + 3z = 0$
Despejando x nos queda que:
$x = -3z$.
Por lo tanto:

$$y = -2z,\ x = -3z\ y\ z \in \mathbb{R}$$

Reemplazando lo obtenido en (c) nos queda que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (-3z)^2 + (-2z)^2 + z^2 \\ &= 9z^2 + 4z^2 + z^2 \\ &= 14z^2 = 4 \end{aligned}$$

Despejando z, nos queda que:

$$z = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$$

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

$$(x, y, z) = \left(-3\sqrt{\frac{2}{7}}, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

$$(x, y, z) = \left(-3\sqrt{\frac{2}{7}}, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

Y el otro será tomando $z = -\sqrt{\frac{2}{7}}$

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

$$(x, y, z) = \left(-3\sqrt{\frac{2}{7}}, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

Y el otro será tomando $z = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ donde $x = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

$$(x, y, z) = \left(-3\sqrt{\frac{2}{7}}, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

Y el otro será tomando $z = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ donde $x = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Por lo tanto el otro vector ortogonal será:

Ahora que sabemos los dos valores posibles de z podemos calcular x e y:
Sea $z = \sqrt{\frac{2}{7}}$ entonces $x = -3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = -2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Entonces un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será:

$$(x, y, z) = \left(-3\sqrt{\frac{2}{7}}, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

Y el otro será tomando $z = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ donde $x = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $y = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$
Por lo tanto el otro vector ortogonal será:

$$(x, y, z) = \left(3\sqrt{\frac{2}{7}}, 2\sqrt{\frac{2}{7}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$