0.1. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmith

Luego de observar la conveniencia de tener una base ortogonal para un espacio vectorial V, es natural preguntarse si es posible encontrar siempre una base ortogonal para dicho espacio. El propósito de esta sección es responder a esa pregunta con el llamado proceso de ortogonalización de Gram Schmith.
Recordemos que para un espacio vectorial V y dos vectores u, v, podemos encontrar la proyección de u en dirección a v de la siguiente manera

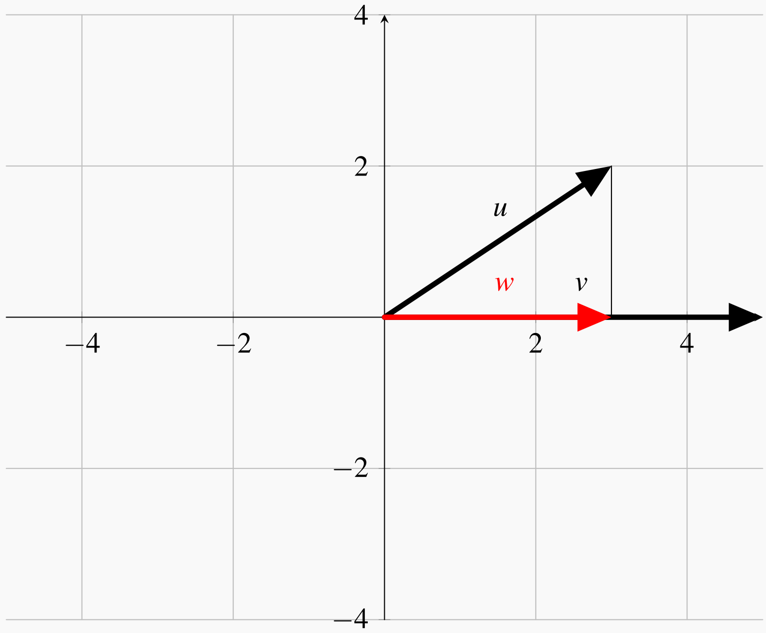
$$proy_v(u) = \frac{u \cdot v}{||v||^2} v$$

Ejemplo 0.1

Si consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y los vectores $u = (3,2)$ y $v = (5,0)$, al calcular la proyección de u en la dirección de v obtenemos

$$proy_v(u) = \frac{(3,2)\cdot(5,0)}{25}(5,0) = (3,0)$$

Gráficamente obtenemos lo siguiente:



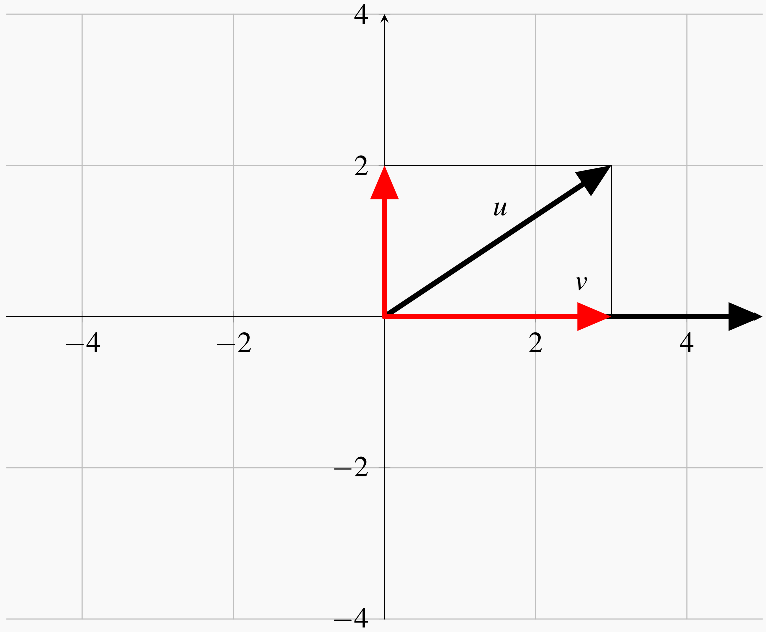
Es decir, al vector u lo hemos proyectado sobre la recta generada por el vector v, subespacio al cual llamaremos $S =< v >$. Recordemos además que existe la proyección de dicho vector sobre el subespacio ortogonal, es decir, $proy_{S^\perp}(u)$ y además, ambas proyecciones cumplen la ecuación

$$u = proy_S(u) + proy_{S^\perp}(u)$$

Ejemplo 0.2

En otras palabras, en el esquema que venimos trabajando, $u = (3,2)$ y $v = (5,0)$. Luego $S =< (5,0) >$ y es claro que $S^\perp =< (0,1) >$, de donde obtenemos que

$$proy_S(u) = (3,0) \qquad \text{y} \qquad proy_{S^\perp}(u) = (0,2)$$



Obteniendo así las proyecciones sobre cada subespacio $S =< (5,0) >$ y $S^{\perp} =< (0,1) >$, las cuales están marcadas en rojo.

En el ejemplo anterior es sencillo observar que $proy_S(u)$ y $proy_{S^{\perp}}(u)$ son vectores ortogonales y además $proy_S(u) = u - proy_{S^{\perp}}(u)$ y análogamente $proy_{S^{\perp}}(u) = u - proy_S(u)$. En resumen, notemos que los vectores v y $proy_{S^{\perp}}(u) = u - proy_v(u)$ son ortogonales.
A partir del ejemplo anterior podemos observar que dada $\{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ podemos obtener una base ortogonal de la siguiente manera:

1 Como primer vector de la base ortogonal seleccionamos $w_1 = v_1$.

2 Para obtener un vector ortogonal a v_1, hacemos $w_2 = v_2 - proy_{v_1}(v_2)$

Luego, por lo analizado anteriormente obetenemos que $B = \{w_1, w_2\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
La idea anterior se puede generalizar para el caso de tener un espacio vectorial de dimensión mayor a dos. Supongamos que tenemos V espacio vectorial de dimensión $dim(V) = n$ y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para dicho espacio, queremos encontrar una base $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ ortogonal. El siguiente teorema nos indica como proceder.

Teorema 0.1

Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base para V, entonces existe una base ortogonal B'.

Demostración. Supongamos que $B = \{v_1, ..., v_n\}$, vamos a construir una base $B' = \{w_1, .., w_n\}$ ortogonal para V a partir de la base B. Consideremos los siguientes pasos:

1 Tomamos $w_1 = v_1$.

2 Construimos w_2 como $w_2 = v_2 - proy_{<v_1>}(v_2) = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{||v_1||^2} v_1$

3 Para w_3 hacemos $w_3 = v_3 - proy_{<w_1,w_2>}(v_3)$. Notemos que w_1 y w_2 son ortogonales, por lo tanto la proyección de v_3 sobre el subespacio que generan w_1 y w_2 es dada por

$$proy_{<w_1,w_2>}(v_3) = \frac{v_3 \cdot w_1}{||w_1||^2} w_1 + \frac{v_3 \cdot w_2}{||w_2||^2} w_2$$

De manera que $w_3 = v_3 - proy_{<w_1,w_2>} = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{||w_1||^2} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{||w_2||^2} w_2$.

4 Para cada w_j hacemos $w_j = v_j - proy_{<w_1,..,w_{j-1}>}(v_j) = v_j - \sum_{i<j} \frac{w_i \cdot v_j}{||v_j||^2} w_i$

Obteniendo así una base ortogonal $B' = \{w_1, .., w_n\}$ $\square$

Ejemplo 0.1

Consideremos la base $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Vamos a buscar una base ortogonal a partir de la base B. Siguiendo los pasos del teorema 0.1, consideramos:

1 $w_1 = v_1 = (1,1,0)$.

2 Para el caso de w_2 debemos restarle a v_2 la proyección sobre w_1.

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - proy_{<w_1>}(v_2) \\ &= (0,1,1) - \frac{(1,1,0)\cdot(0,1,1)}{||(0,1,1)||^2}(1,1,0) \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ &= (0,1,1) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) \\ &= (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1) \end{aligned}$$

3 Para el caso de w_3 debemos restar a v_3 su proyección sobre el subespacio generado por w_1 y w_2.

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - proy_{<w_1,w_2>}(v_3) \\ &= v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{||w_1||^2} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{||w_2||^2} w_2 \\ &= (1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{2}(1,1,0) - \frac{(1,0,1)\cdot(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1) \\ &= (\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \end{aligned}$$