Clase de Consulta

Álgebra Lineal - 2020

23/08/2020

Vectores

Ejercicio

Sean los puntos $P = (2, -1, 3)$, $Q = (1, -1, 2)$ *y* $R = (1, 1, 1)$. *Calcular área y perímetro del triángulo* PQR. *Además, calcular sus ángulos interiores*

Ejercicio

Sean los puntos $P = (2, -1, 3)$, $Q = (1, -1, 2)$ *y* $R = (1, 1, 1)$. *Calcular área y perímetro del triángulo* PQR. *Además, calcular sus ángulos interiores*

Debemos tener en cuenta que los datos que nos da el ejercicio son puntos. Para formar el triángulo con vectores debemos hacer las siguientes diferencias

Ejercicio

Sean los puntos $P = (2, -1, 3)$, $Q = (1, -1, 2)$ y $R = (1, 1, 1)$. Calcular área y perímetro del triángulo PQR. Además, calcular sus ángulos interiores

Debemos tener en cuenta que los datos que nos da el ejercicio son puntos. Para formar el triángulo con vectores debemos hacer las siguientes diferencias

$$P - Q = (1, 0, 1) \quad P - R = (1, -2, 2) \quad R - Q = (0, 2, -1)$$

Ejercicio

Sean los puntos $P = (2, -1, 3)$*,* $Q = (1, -1, 2)$ *y* $R = (1, 1, 1)$*. Calcular área y perímetro del triángulo* PQR*. Además, calcular sus ángulos interiores*

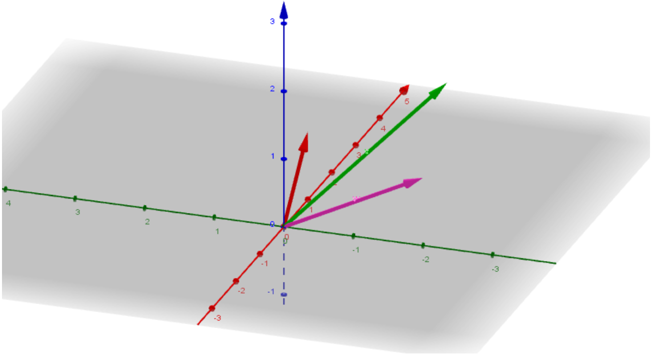
Debemos tener en cuenta que los datos que nos da el ejercicio son puntos. Para formar el triángulo con vectores debemos hacer las siguientes diferencias

$$P - Q = (1, 0, 1) \quad P - R = (1, -2, 2) \quad R - Q = (0, 2, -1)$$

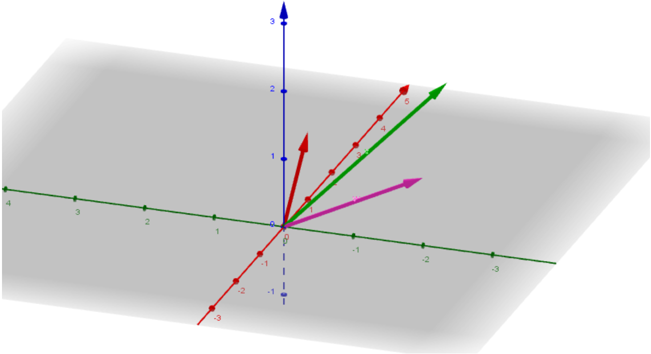
Entonces, los vectores que forman nuestro triángulo son los vectores

$$\vec{QP} = (1, 0, 1) \qquad \vec{RP} = (1, -2, 2) \qquad \vec{QR} = (0, 2, -1)$$

Si quisiéramos graficar estos vectores en **GeoGebra** obtendríamos lo siguiente

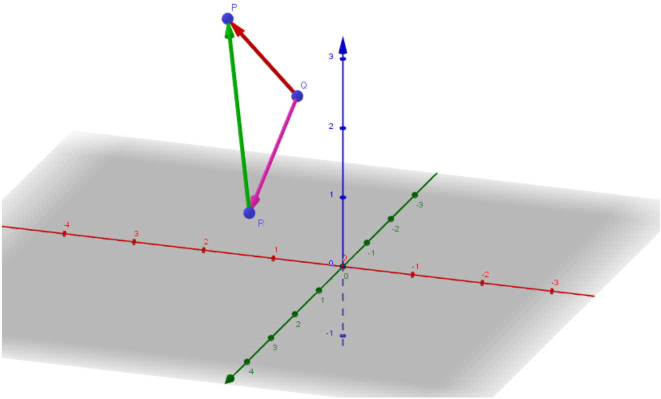


Si quisiéramos graficar estos vectores en **GeoGebra** obtendríamos lo siguiente



Estos vectores claramente no representan un triángulo. Sin embargo, son vectores que coinciden en norma, sentido y dirección a los que buscamos

Para hacer la construcción correctamente deberíamos ingresar en **GeoGebra** los puntos P, Q y R manualmente y armar los vectores manualmente con la **herramienta vector**, ubicada en la tercer pestaña de herramientas.



Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$\|\vec{QP}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}$$

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{QP}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|\vec{QP}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\|\vec{RP}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}
$$

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{QP}\| &= \sqrt{1^2+0^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{RP}\| &= \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{QP}\| &= \sqrt{1^2+0^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{RP}\| &= \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\|\vec{QR}\| = \sqrt{0^2+(2)^2+(-1)^2}$$

Retomando el ejercicio, calculemos el perímetro. Para ello debemos sumar la medida de los lados del triángulo PQR. Como se puede apreciar en la figura anterior, estas medidas estan dadas por las normas de los vectores $\vec{QR}$, $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{QP}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{RP}\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{QR}\| &= \sqrt{0^2 + (2)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Entonces el perimetro del triángulo será

$$Perimetro = \sqrt{2} + 3 + \sqrt{5}$$

Entonces el perimetro del triángulo será

$$\begin{aligned} Perimetro &= \sqrt{2} + 3 + \sqrt{5} \\ &= \approx 6{,}65 \end{aligned}$$

Ahora calculemos el área del trángulo. Recordemos la siguiente proposición.

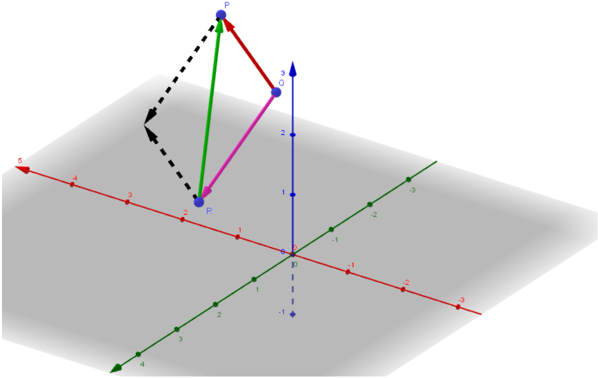
Proposición

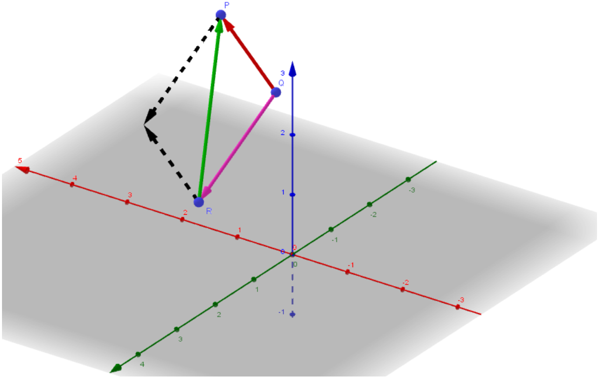
Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área del paralelogramo determinado por ellos se puede calcular como

$$\textit{Área del Paralelogramo} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

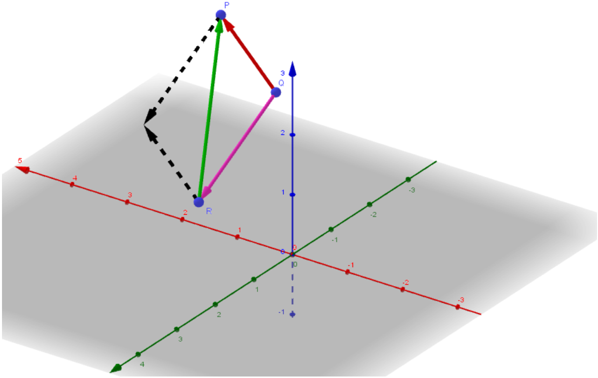
Donde θ es el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Esta proposición puede sernos de utilidad. Observemos ahora con el paralelogramo construido


P
Q
R
3
2
1
0
-1
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
4



El paralelogramo tiene el doble de área que la del triángulo.



El paralelogramo tiene el doble de área que la del triángulo. Pero ¿Qué vectores debemos utilizar para hacer los cálculos?

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$\|\vec{QR} \times \vec{QP}\| =$$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$\|\vec{QR} \times \vec{QP}\| = \| \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \|$$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$\begin{aligned} \|\vec{QR} \times \vec{QP}\| &= \| \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \| \\ &= \|(2,1,2)\| \end{aligned}$$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$\begin{aligned} \|\vec{QR} \times \vec{QP}\| &= \| \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \| \\ &= \|(2,1,2)\| \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{QR} \times \vec{QP}\| &= \| \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \| \\
&= \|(2,1,2)\| \\
&= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Siempre que utilicemos esta propiedad debemos utilizar vectores que coincidan en el origen. Entonces utilicemos los vectores $\vec{QR}$ y $\vec{QP}$

$$\begin{aligned}
\|\vec{QR} \times \vec{QP}\| &= \| \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \| \\
&= \|(2,1,2)\| \\
&= \sqrt{2^2+1^2+2^2} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Pero como buscamos el área del triángulo y no del paralelogramo, debemos dividir por 2 el resultado obtenido. Entonces

$$\text{Area del Triangulo} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, el ejercicio nos pide que calculemos los ángulos interiores del triángulo PQR.

Finalmente, el ejercicio nos pide que calculemos los ángulos interiores del triángulo PQR. Para calcularlos tenemos como herramienta la fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

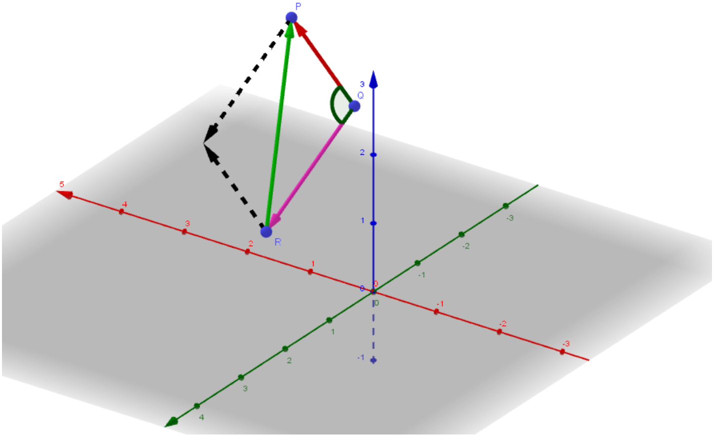
Finalmente, el ejercicio nos pide que calculemos los ángulos interiores del triángulo PQR. Para calcularlos tenemos como herramienta la fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$$

Pero ¿Se puede utilizar cualquier vector en esta fórmula?

Nuevamente, esta fórmula nos sirve para vectores que coinciden en su origen.

Nuevamente, esta fórmula nos sirve para vectores que coinciden en su origen. Entonces calculemos primero el ángulo PQR



$$\cos(\theta) \quad =$$

$$\cos(\theta) = \frac{(0,2,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(0,2,-1)\|\cdot\|(1,0,1)\|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{(0,2,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(0,2,-1)\|\cdot\|(1,0,1)\|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{(0,2,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(0,2,-1)\|\cdot\|(1,0,1)\|}\\
\cos(\theta) &= \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\\
\theta &= \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{(0,2,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(0,2,-1)\|\cdot\|(1,0,1)\|} \\
\cos(\theta) &= \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right) \\
\theta &= 108^\circ 26' 6''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{(0,2,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(0,2,-1)\|\cdot\|(1,0,1)\|} \\
\cos(\theta) &= \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right) \\
\theta &= 108^{\circ}26'6''
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos el nuevo próximo ángulo. Utilicemos los vectores $\vec{QP}$ y $\vec{RP}$

$$\cos(\alpha) \quad =$$

$$\cos(\alpha) \quad = \quad \frac{(1,0,1)\cdot(1,-2,2)}{\|(1,0,1)\|\cdot\|(1,-2,2)\|}$$

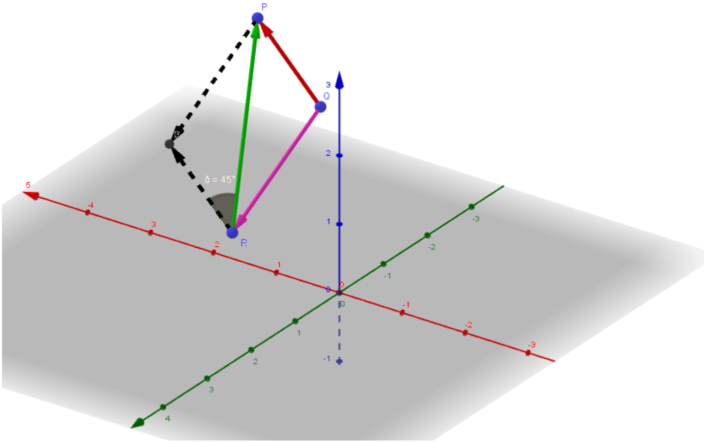
$$\cos(\alpha) = \frac{(1,0,1)\cdot(1,-2,2)}{\|(1,0,1)\|\cdot\|(1,-2,2)\|}$$

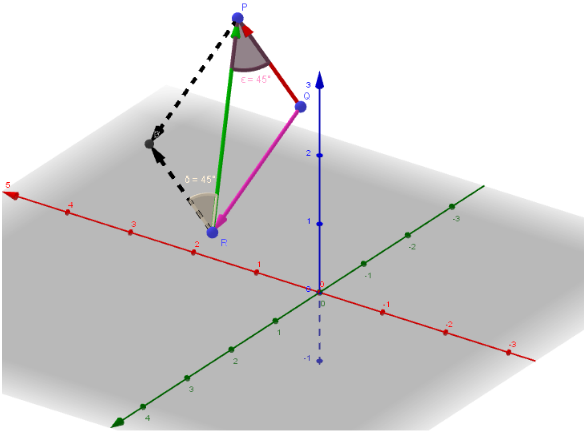
$$\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{(1,0,1)\cdot(1,-2,2)}{\|(1,0,1)\|\cdot\|(1,-2,2)\|} \\
\cos(\alpha) &= \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{(1,0,1)\cdot(1,-2,2)}{\|(1,0,1)\|\cdot\|(1,-2,2)\|} \\
\cos(\alpha) &= \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}\right) \\
\alpha &= 45^\circ
\end{aligned}
$$

Sin embargo, este no es el ángulo que buscamos. En realidad lo que estamos calculando es este ángulo


P
Q
R
δ = 45°
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3



P
Q
R
ε = 45°
δ = 45°

Entonces ahora podemos utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores

$$45^\circ + 108^\circ 26' 6'' + \gamma \quad = \quad 180^\circ$$

Entonces ahora podemos utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores

$$\begin{aligned} 45^\circ + 108^\circ 26' 6'' + \gamma &= 180^\circ \\ \gamma &= 26^\circ 33' 54'' \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *con* $\vec{v} = (1, 2, -1)$ *y* $\vec{w} = (2, 1, -3)$. *Sabiendo que* $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. *Calcular* $\vec{u}$

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$. Sabiendo que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. Calcular $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$. Sabiendo que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. Calcular $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que

$$\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *con* $\vec{v} = (1, 2, -1)$ *y* $\vec{w} = (2, 1, -3)$*. Sabiendo que* $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$*. Calcular* $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que

$$\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

Entonces reemplazando obtenemos

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$. Sabiendo que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. Calcular $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que

$$\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

Entonces reemplazando obtenemos

$$(1, 2, -1) \quad = \quad 2 \cdot (u_1, u_2, u_3) - (2, 1, -3)$$

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$. Sabiendo que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. Calcular $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que

$$\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

Entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} (1, 2, -1) &= 2 \cdot (u_1, u_2, u_3) - (2, 1, -3) \\ &= (2u_1, 2u_2, 2u_3) - (2, 1, -3) \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$. Sabiendo que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{w}$. Calcular $\vec{u}$

Supongamos que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que

$$\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

Entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} (1, 2, -1) &= 2 \cdot (u_1, u_2, u_3) - (2, 1, -3) \\ &= (2u_1, 2u_2, 2u_3) - (2, 1, -3) \\ &= (2u_1 - 2, 2u_2 - 1, 2u_3 + 3) \end{aligned}$$

Como lo que tenemos es una igualdad entre vectores, estos deben ser iguales componente a componente. Entonces

$$\begin{cases} 1 = 2u_1 - 2 & \rightarrow u_1 = \frac{3}{2} \\ 2 = 2u_2 - 1 & \rightarrow u_2 = \frac{3}{2} \\ -1 = 2u_3 + 3 & \rightarrow u_3 = -2 \end{cases}$$

Como lo que tenemos es una igualdad entre vectores, estos deben ser iguales componente a componente. Entonces

$$\begin{cases} 1 = 2u_1 - 2 & \to u_1 = \frac{3}{2} \\ 2 = 2u_2 - 1 & \to u_2 = \frac{3}{2} \\ -1 = 2u_3 + 3 & \to u_3 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto el vector que buscamos es $\vec{u} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -2)$

Ejercicio

Sean $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *dos vectores tales que*

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$$

Si $\|\vec{u}\| = 1$ *y* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$*, calcular* $\|\vec{v}\|$

Ejercicio

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$$

Si $\|\vec{u}\| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, calcular $\|\vec{v}\|$

Antes de comernzar con el ejercicio recordemos que dados $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar se define como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Entonces

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) \quad =$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Entonces

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) \quad = \quad 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) &= 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 3\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva
$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) &= 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= 3\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \\
&= 3 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Además, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades

- Distributiva

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

- Norma al cuadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) &= 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= 3\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \\
&= 3 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 = 5 - 2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 = 5 - 2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

Entonces despejando $\|\vec{v}\|^2$ obtenemos que

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \|\vec{v}\|$$