Práctica 6 - Matrices. Sistemas Lineales. Determinantes. Autovalores y autovectores

Álgebra I - 2020 - Facultad de Ciencias Exactas-UNICEN

Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal

Una **ecuación lineal** en las n indeterminadas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ en general $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

Ecuación lineal

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$

El conjunto de soluciones de la ecuación lineal son los vectores:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

tales que

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n = b$$

Sistemas de ecuaciones

Un **sistema** de m ecuaciones lineales en n indeterminadas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una familia de ecuaciones lineales, y se escribe de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde a_{ij} y b_i son elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$

Forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\color{red}x_1} \\ {\color{red}x_2} \\ \vdots \\ {\color{red}x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} y b_i son elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$

La matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz de los coeficientes del sistema

El vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ es el *vector de indeterminadas*

El vector $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$ se denomina *vector de coeficientes independientes*

El sistema en su forma matricial:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Vector Solución

Una solución del sistema, en caso de tenerla, será un vector $\mathbf{r} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ que debe solucionar todas y cada una de la ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistema Homogeneo Asociado

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema, se llama **sistema homogéneo asociado** al anterior
Para este sistema siempre existe una solución llamada trivial o nula

Clasificación

Consistente		Inconsistente
tiene solución		no tiene solución
Determinado solución única	Indeterminado infinitas soluciones	

Sistemas cuadrados de orden n

Lema: Dado el sistema

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

de n ecuaciones con n indeterminadas, si la matriz de coeficientes A es **inversible**, entonces el sistema tiene **solución única**:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

La dificultad de encontrar la solución de forma directa radica en el costo del cálculo de A^{-1} sobretodo para n grandes.

Sistema consistente determinado

Sistemas cuadrados de orden n

Método de Cramer Si A tiene inversa y se tiene el sistema

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

entonces

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{|A|} \mathrm{Adj}\,(A) \cdot \mathbf{b}$$

y se tiene que

$$x_i = \frac{1}{|A|} |A_i|$$

donde $|A_i|$ es el determinante de la matriz A en la que se ha cambiado la columna i de A por el vector $\mathbf{b}$

Método de Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinante de la matriz de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

como $-3 \neq 0$ la matriz tiene inversa y aplicamos el método de Cramer

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Reducción por filas

En la tabla siguiente se resumen las operaciones elementales por filas en una matriz que originan un sistema de ecuaciones equivalente al dado:

Símbolo	Efecto en matriz	Efecto en sistema
$F_i \leftrightarrow F_j$	intercambia 2 filas	intercambia 2 ecuaciones
$\alpha \cdot F_i \to F_i$	multiplica una fila por un número	multiplica una ecuación por un número
$F_i + \alpha F_j \to F_i$	Sumar αF_j a la fila F_i	sumar a una ecuación otra multiplicada por α

Matrices asociadas a un sistema de ecuaciones

Matriz ampliada

Es la matriz de los coeficientes del sistema a la que se agregan los coeficientes independientes. **Notación:** $A|\mathbf{b}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Método de eliminación gaussiana

Eliminación gaussiana

Se reduce por las filas la matriz ampliada $A|\mathbf{b}$ a la forma escalonada por filas

Sistema de ecuaciones lineales

Teorema de Roché-Frobenius

Un sistema de m ecuaciones con n indeterminadas admite solución **si y solo si** se verifica que el rango de la matriz de los coeficientes A es igual al rango de la matriz ampliada $A|\mathbf{b}$

- $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\mathbf{b}) = n$ (número de indeterminadas) es un sistema **consistente determinado**
- $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\mathbf{b}) < n$ (número de indeterminadas) es un sistema **consistente indeterminado**
- $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|\mathbf{b})$ es un sistema **inconsistente**

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Matriz de los coeficientes ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Cambios

Convertir en cero los elementos de la columna que no son lider:

$[F2 - F1 \rightarrow F2]$

$[(-1)\, F2 \rightarrow F2]$

$[F3 - F1 \rightarrow F3]$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Cambios

Convertir en cero los elementos de la columna que no son lider:

$[F1 - 2F2 \to F1]$

$[F3 + 3F2 \to F3]$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Cambios

$[F1 + F3 \rightarrow F1]$

$[F2 - F3 \rightarrow F2]$

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Teorema de Roché-Frobenius

Matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Solución

- rango (A) = rango $(A|B) = 3 < 4$

  el sistema es consistente indeterminado
- $x_1 - x_3 = 3 \rightarrow x_1 = 3 + x_3$
- $x_2 = -4$
- $x_4 = 7$

  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + x_3, -4, x_3, 7)$

  $= x_3\,(1, 0, 1, 0) + (3, -4, 0, 7)$

  Tendremos infinitas soluciones dependiendo del valor de x_3

Ejercicio 10. Resolver y clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes reales.

Ejercicio 10. (a) Forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos el $\det A$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot 2 - (-1)(-4) = -2$$

Calcular A^{-1}

Entonces, existe A^{-1}. Se obtiene de forma directa por la fórmula de la adjunta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = -7$ e $y = -11$

Ejercicio 11. Determinar $t \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente sistema sea consistente determinado

Sistema de Ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + tx_3 = t \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & t & t \end{array}$$

Ejercicio 11.

Símbolos

☛ $F_2 - 4F_1 \to F_2$

Forma matricial

$$\begin{array}{rrr|r}
1 & -2 & 3 & 11 \\
4 & 1 & -1 & 4 \\
2 & -1 & t & t \\
\hline
1 & -2 & 3 & 11 \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
2 & -1 & t & t
\end{array}$$

Ejercicio 11.

Símbolos

- $F_2 - 4F_1 \to F_2$
- $F_3 - 2F_1 \to F_3$

Forma matricial

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -2 & 3 & 11 \\
4 & 1 & -1 & 4 \\
2 & -1 & t & t \\
\hline
\color{red}{1} & \color{red}{-2} & \color{red}{3} & \color{red}{11} \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
\color{red}{2} & \color{red}{-1} & \color{red}{t} & \color{red}{t} \\
\hline
1 & -2 & 3 & 11 \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
\color{red}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{t-6} & \color{red}{t-22}
\end{array}
$$

Ejercicio 11.

Símbolos

- $F_2 - 4F_1 \to F_2$
- $F_3 - 2F_1 \to F_3$
- $F_3 - \frac{1}{3}F_2 \to F_3$

Forma matricial

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -2 & 3 & 11 \\
4 & 1 & -1 & 4 \\
2 & -1 & t & t \\
\hline
1 & -2 & 3 & 11 \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
2 & -1 & t & t \\
\hline
1 & -2 & 3 & 11 \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
0 & 3 & t-6 & t-22 \\
\hline
1 & -2 & 3 & 11 \\
0 & 9 & -13 & -40 \\
0 & 0 & t-\frac{5}{3} & t-\frac{26}{3}
\end{array}
$$

Ejercicio 11.

Forma matricial

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & | & 11 \\ 0 & 9 & -13 & | & -40 \\ 0 & 0 & t - {}^{5}\!/_{3} & | & t - {}^{26}\!/_{3} \end{array}$$

Si $t = {}^{5}\!/_{3}$ por el Teorema de Roché-Frobenius es un sistema inconsistente

Resultado: para $t \neq {}^{5}\!/_{3}$

$$\begin{aligned} (3t-5)\,x_3 &= 3t-26 \\ 9x_2 - 13x_3 &= -40 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Ejercicio 11.

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 0 & t - 5/3 & t - 26/3 \end{array}\right)$$

Si $t = 5/3$ por el Teorema de Roché-Frobenius es un sistema inconsistente

Resultado: para $t \neq 5/3$

$$x_3 = \frac{3t-26}{3t-5}$$
$$x_2 = -\frac{40}{9} + \frac{13}{9}\frac{3t-26}{3t-5}$$
$$x_1 = \frac{19}{9} - \frac{1}{9}\frac{3t-26}{3t-5}$$

Solución

$$\mathbf{x} = \left(\frac{19}{9}, -\frac{40}{9}, 0\right)^T + \frac{3t-26}{3t-5}\left(-\frac{1}{9}, \frac{13}{9}, 1\right)^T; \quad t \neq 5/3$$

Ejercicio 12. Usando la regla de Cramer determinar a y $b \in \mathbb{Q}$ tales que el sistema: i) Sea inconsistente ii) Sea consistente determinado iii) Sea consistente indeterminado

Ejercicio 12.

$$\begin{cases} x - 2y + bz = 3 \\ ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20 + 2ab - 4 = -24 + 2ab$$

Ejercicio 12.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & b \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 4b - 12 = -16 + 4b$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ a & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30 + ab - 10b - 2 = 28 - 10b + ab$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20 + 6a - 4 - +2a = -24 + 8a$$

Ejercicio 12.

$$\begin{aligned}
\Delta &= -24 + 2ab = 0 \to ab = 12 \\
\Delta_x &= -16 + 4b = 0 \to b = 4 \\
\Delta_y &= 28 - 10b + ab = 0 \\
\Delta_z &= -24 + 8a = 0 \to a = 3
\end{aligned}$$

$a = 3; b = 4;$ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	Compatible indeterminado	Infinitas soluciones
$\Delta = 0$ $\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0 \vee \Delta_z \neq 0$	Inconsistente	No tiene solución
$\Delta \neq 0$	Compatible determinado	Solución única

Ejercicio 13. Resolver los siguientes problemas usando técnicas de solución de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 13 (b)

Una compañía fabrica tazas y platos. En promedio un trabajador necesita para fabricar una taza 3 minutos y cuyo costo es $0.25, y para fabricar un plato tarda 2 minutos en promedio y consume $0.20.

(i) ¿Cuántas tazas y platos deben fabricarse en una jornada de 8 horas si se trabajan todos los minutos, y se gastan exactamente $44 en material?

Planteo

$$\begin{cases} 3t + 2p = 480 \\ 0.25t + 0.20p = 44 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Resolver los siguientes problemas usando técnicas de solución de sistemas de ecuaciones

Planteo

$$\begin{cases} 3t + 2p = 480 \\ 0.25t + 0.20p = 44 \end{cases}$$

Solución

- ☞ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0.25 & 0.20 \end{vmatrix} = 0.10$
- ☞ $\Delta_t = \begin{vmatrix} 480 & 2 \\ 44 & 0.20 \end{vmatrix} = 8$
- ☞ $\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 480 \\ 0.25 & 44 \end{vmatrix} = 12$

- ☞ $t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{8}{0.10} = 80$
- ☞ $p = \frac{\Delta_p}{\Delta} = \frac{12}{0.10} = 120$

Autovectores

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

La multiplicamos por un vector genérico

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$$

Por ejemplo si

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{w}$$

$\mathbf{v} = (0, 1)$ y $\mathbf{w} = (2, 4)$ **no tienen la misma dirección**

Ejemplo

Por ejemplo si

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \mathbf{v}$$

1. $\mathbf{v}$ **tiene la misma dirección** de $\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de A
2. $\mathbf{v}$ se dilató en 5 $\Rightarrow$ 5 es el autovalor correspondiente

Autovector

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diremos que el vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un autovector o un vector propio de A si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lambda \cdot \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{v}$$

λ es el autovalor o el valor propio de A

Veamos cómo calcular autovalores y autovectores:

$$\lambda \cdot \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{v} \implies \lambda \cdot \mathbf{v} - A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\implies \lambda \cdot I\mathbf{v} - A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \underbrace{(\lambda \cdot I - A)}_{\text{matriz característica}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Determinante de la matriz característica

Obtuvimos la expresión

$$(\lambda \cdot I - A)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Es la **expresión matricial de un sistemas de ecuaciones homogéneo**, donde $(\lambda \cdot I - A)$ es la matriz de los coeficientes

Si $\exists\,(\lambda \cdot I - A)^{-1}$, entonces $\det(\lambda \cdot I - A) \neq 0$ y $\mathbf{v} = (\lambda \cdot I - A)^{-1}\,\mathbf{0}$

Por lo tanto, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

En nuestro caso, el vector $\mathbf{v}$ tiene que ser un vector no nulo. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Concluimos que el sistema homogéneo tiene que ser **consistente indeterminado**, entonces

$$\boxed{\det(\lambda \cdot I - A) = 0}$$

Polinomio característico

Al calcular el determinante

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

obtenemos un polinomio en la indeterminada λ llamado **polinómio característico**: $P_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

Las raíces de este polinomio serán los autovalores de A

Para cada autovalor obtenido, podemos calcular los autovectores resolviendo el sistema de n ecuaciones con n indeterminadas

$$(\lambda \cdot I - A)\, v = 0$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Ejercicio 14. (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$P(\lambda) = |A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Polinomio característico

$$P = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + (1-\lambda) + 14 - 8(2-\lambda) - 3(1+\lambda)$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Polinomio característico

$$P = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + (1-\lambda) + 14 - 8(2-\lambda) - 3(1+\lambda)$$

Autovalores

$$\begin{aligned} 14 - 8(2-\lambda) - 3(1+\lambda) &= 14 - 16 + 8\lambda - 3 - 3\lambda \\ &= -5 + 5\lambda = -5(1-\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + (1-\lambda) - 5(1-\lambda) \\ &= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) - 4(1-\lambda) \\ &= -(1-\lambda)[(2-\lambda)(1+\lambda) + 4] \\ &= -(1-\lambda)\left[-\lambda^2 + \lambda + 6\right] \\ &= (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovalores

$P = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$; $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$

Autovectores

- $\mathbf{v}$ es autovector asociado al autovalor λ
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
- $(A - \lambda I_3)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  En este caso

$$(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovalores

$P = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)\,; \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (b)

☛ $F_1 \leftrightarrow F_3$

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (b)

- $F_1 \leftrightarrow F_3$
- $F_2 - {}^3/_2 F_1 \to F_2$

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (b)

- ☛ $F_1 \leftrightarrow F_3$
- ☛ $F_2 - {}^3\!/_2 F_1 \to F_2$
- ☛ $F_3 - 2F_2 \to F_3$

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejercicio 14. (b)

$$\begin{aligned} -1/2y + 2z &= 0 \Longrightarrow y = 4z \\ 2x + 4z - 2z &= 0 \\ 2x + 2z &= 0 \\ x &= -z \end{aligned}$$

Soluciones asociadas a $\lambda = 1$

$$z \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovalores

$P = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)\,; \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (b)

- ☛ $F_3 + F_1 \to F_3$
- ☛ $F_2 + {}^{3}/_{2}F_1 \to F_2$

Forma matricial

$$\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -{}^{5}/_{2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -5/2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio 14. (b)

$$\begin{aligned} -5/2y + 5z &= 0 \Longrightarrow {\color{red} y = 2z} \\ -2x - 2{\color{red}z} + 4{\color{red}z} &= 0 \\ -2x + 2{\color{red}z} &= 0 \\ {\color{red}x} &= {\color{red}z} \end{aligned}$$

Soluciones asociadas a $\lambda = 3$

$$z\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow {\color{red} v = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovalores

$P = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)\,; \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda_3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. (b)

- $F_2 - F_1 \to F_2$
- $F_3 - {}^{2}\!/_{3}F_1 \to F_3$
- $F_3 - {}^{1}\!/_{3}F_2 \to F_3$

Forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & {}^{5}\!/_{3} & -{}^{5}\!/_{3} & 0 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio 14.

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejercicio 14. (b)

$$\begin{aligned} 5y - 5z &= 0 \Longrightarrow y = z \\ 3x - z + 4z &= 0 \\ 3x + 3z &= 0 \\ x &= -z \end{aligned}$$

Soluciones asociadas a $\lambda = -2$

$$z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Auvalores y autovectores

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Ejercicio 14. (c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Polinomio característico

$$P = -\lambda (3-\lambda)^2 + 16\lambda + 4\lambda + 4\lambda + 16 + 16 + -12 - 12$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Polinomio característico

$$P = -\lambda\,(3-\lambda)^2 + 16\lambda + 4\lambda + 4\lambda + 16 + 16 + -12 - 12$$

Autovalores

$$\begin{aligned} -\lambda\,(3-\lambda)^2 + 24\lambda + 8 & \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 \\ &= -\,(\lambda+1)^2\,(\lambda-8) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = -1$ con multiplicidad 2

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovectores

Para $\lambda_1 = 8$

$$(A - 8I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovector para $\lambda_1 = 8$

$$\begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14.

Ejercicio 14. (c)

- $F_3 - F_1 \to F_3$
- $F_2 + 4F_1 \to F_2$
- $F_3 + \frac{1}{2}F_2 \to F_3$

Forma matricial

$$
\begin{array}{rrr|r}
-5 & 2 & 4 & 0 \\
2 & -8 & 2 & 0 \\
4 & 2 & -5 & 0 \\
\hline
-5 & 2 & 4 & 0 \\
2 & -8 & 2 & 0 \\
9 & 0 & -9 & 0 \\
\hline
-5 & 2 & -2 & 0 \\
-18 & 0 & 18 & 0 \\
9 & 0 & -9 & 0 \\
\hline
-5 & 2 & 4 & 0 \\
-18 & 0 & 18 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ -18 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejercicio 14. (c)

$$\begin{aligned} -18x + 18z &= 0 \\ \Longrightarrow \; z = x & \\ -5z + 2y + 4z &= 0 \\ \Longrightarrow \; z = 2y \text{ y } x = 2y & \end{aligned}$$

Soluciones asociadas a $\lambda = 8$

$$y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las matrices siguientes:

Autovalores

Para $\lambda_2 = -1$

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & -(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. (c)

- $F_3 - F_1 \to F_3$
- $F_2 - {}^{1}\!/_{2}F_1 \to F_2$

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 2 & 4 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 0 \\
4 & 2 & 4 & 0 \\
\hline
4 & 2 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ejercicio 14. (c)

Forma matricial

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejercicio 14. (c)

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 4z &= 0 \implies \\ y &= -2x - 2z \\ (x, y, z) &= (x, -2x - 2z, z) \end{aligned}$$

Soluciones asociadas a $\lambda = -1$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. (c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Auvalores y autovectores

$$\lambda_1 = 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

☞ Sean A una matriz de orden n, λ autovalor de A y $\mathbf{v}$ su autovector asociado. Entonces, se cumplen las propiedades siguientes:

1) λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $\mathbf{v}$ es el autovector asociado
2) Todos los autovalores de A son autovalores de A^t
3) Sea $I + \alpha A$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad, entonces $1 + \alpha\lambda$ su autovalor y $\mathbf{v}$ su autovector asociado

1) λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $\mathbf{v}$ es el autovector asociado

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ multiplicamos por A^{-1}

$A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v}$

$\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$

$\lambda^{-1}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$

Propiedades

☞ Sean A una matriz de orden n, λ autovalor de A y $\mathbf{v}$ su autovector asociado. Entonces, se cumplen las propiedades siguientes:

1) λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $\mathbf{v}$ es el autovector asociado
2) Todos los autovalores de A son autovalores de A^t
3) Sea $I + \alpha A$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad, entonces $1 + \alpha\lambda$ su autovalor y $\mathbf{v}$ su autovector asociado

2) Todos los autovalores de A son autovalores de A^t

$\det A = \det A^t$

$\det(A - \lambda I) = \det\left((A - \lambda I)^t\right)$

$\det(A - \lambda I) = \det(A^t - I^t\lambda^t) = \det(A^t - \lambda I)$

Entonces, A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Por lo tanto, mismo autovalores

Autovalores y autovectores

Propiedades

☞ Sean A una matriz de orden n, λ autovalor de A y $\mathbf{v}$ su autovector asociado. Entonces, se cumplen las propiedades siguientes:

1) λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $\mathbf{v}$ es el autovector asociado
2) Todos los autovalores de A son autovalores de A^t
3) Sea $I + \alpha A$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad, entonces $1 + \alpha\lambda$ su autovalor y $\mathbf{v}$ su autovector asociado

3) Sea $I + \alpha A$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad, entonces $1 + \alpha\lambda$ su autovalor y $\mathbf{v}$ su autovector asociado

$$(I + \alpha A)\,\mathbf{v} = \mathbf{v} + \alpha A\mathbf{v} = \mathbf{v} + \alpha\lambda\mathbf{v} = (1 + \alpha\lambda)\,\mathbf{v}$$

$$(I + \alpha A)\,\mathbf{v} = (1 + \alpha\lambda)\,\mathbf{v}$$