Algebra Lineal 2020

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Valores y vectores propios

En la clase de ayer vimos que:

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y A_{nxn} su matriz estándar. Si se cumple que

$$\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

- λ es el **valor propio** asociado a A.
- $\vec{v}$ es el **vector propio** asociado al valor propio λ.
- E_λ es el **subespacio propio** asociado a λ y tiene como generador a $\vec{v}$.

Valores y vectores propios

¿Cómo calculábamos los valores y vectores propios?

- **Valores propios:** debemos primero buscar el **polinomio característico** $P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_n)$ y los valores propios serán las raices reales de éste.
- **Vectores propios**: son los vectores solución al sistema $(A - \lambda \cdot I_n)\vec{v} = \vec{0}$.

Valores y vectores propios: multiplicidad

Una vez que calculamos los valores y vectores propios asociados a la matriz A podemos analizar la **multiplicidad**.

- **Multiplicidad algebraica:** correspondiente a los valores propios λ. Al factorizar el polinomio característico: $P(\lambda) = (x - \lambda)^k q(x)$ el k es la multiplicidad correspondiente al valor λ. Se denota $a(\lambda) = k$.
- **Multiplicidad geométrica:** correspondiente a los subespacios propios E_λ generados por los vectores propios. La denotamos como $g(\lambda)$ donde $g(\lambda) = dim(E_\lambda)$.

Valores y vectores propios en diferentes bases

Ahora... si queremos calcular los valores y vectores propios asociados a una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sabemos que se debe cumplir que:

$$[T] \cdot \vec{v_\lambda} = \lambda \cdot \vec{v_\lambda}$$

Donde λ es el valor propio y $\vec{v_\lambda}$ es el vector propio asociado a ese λ.

¿Qué deberíamos hacer si la matriz de transformación que nos da el problema no es la estándar sino que es la matriz asociada a otra base B de $\mathbb{R}^n$ que no es la canónica?

Es decir, no conocemos $[T]_E = A = [T]$ sino a $[T]_B = B \neq A$.

Siendo λ el valor propio y $\vec{v_\lambda}$ el vector propio asociado a ese λ tenemos que:

1. Si conocemos la matriz estándar utilzamos:

$$[T] \cdot \vec{v_\lambda} = \lambda \cdot \vec{v_\lambda} \ (3)$$

2. Si no sabemos quién es la matriz estándar, pero sí conocemos a $[T]_B$ utilizamos:

$$[T]_B \cdot [v_\lambda]_B = \lambda \cdot [v_\lambda]_B \ \ (4)$$

Obs: Comparando (3) y (4) podemos afirmar que los **valores propios** son los **mismos**. Mientras que con los **vectores propios** no sucede lo mismo. En (3) son los vectores propios, mientras que en la (4) **son las coordenadas del vector propio en la base** B**.**

Ejemplo:

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $B = \{(-1, 0); (2, -1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea la matriz de transformación en la base B:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores y vectores propios de $[T]$.

Tenemos dos maneras de pensar la resolución del problema:

1. Resolver utilizando la igualdad (4):

$$[T]_B \cdot [v_\lambda]_B = \lambda \cdot [v_\lambda]_B \quad (4)$$

2. Conociendo quién es $[T]_B$ buscar quién es $[T]_E = [T]$ sabiendo que $[T]_E = P_{BE} \cdot [T]_B \cdot P_{EB}$ y resolver como veníamos haciendo hasta ahora.

Resolvamos de ambas maneras:

1. Resolver utilizando la igualdad (4):

$$[T]_B \cdot [v_\lambda]_B = \lambda \cdot [v_\lambda]_B \ \ (4)$$

Comencemos calculando los valores propios. Para esto busquemos el polinomio característico $P(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det([T]_B - \lambda \cdot I_2) \\ &= det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los **valores propios** asociados a $[T]_B$ son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Recordemos que vimos que los valores propios de las matrices de transformación en la base estándandar o en otra se mantienen, por lo que $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ son valores propios también de $[T]_E = [T]$.

Nos faltaría calcular los vectores propios: para esto debemos resolver el sistema homogéneo:

$$([T]_B - \lambda \cdot I_2) \cdot [v]_B = \vec{0}$$

$$([T]_B - \lambda \cdot I_2) \cdot [v]_B = \vec{0}$$

- $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} ([T]_B - 2 \cdot I_2) \cdot [v]_B &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema nos queda que:

$$\alpha + 2\beta = 0 \rightarrow \alpha = -2\beta$$

$$(\alpha, \beta) = (-2\beta, \beta) = \beta(-2, 1)$$

Luego, $[v]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Luego,

$$v_2 = -2(-1, 0) + 1(2, -1) = (4, -1)$$

Por lo tanto $E_2 = \langle (4, -1) \rangle$. Donde $(4, -1)$ es el vector propio asociado a $\lambda = 2$ de $[T]$

$$([T]_B - \lambda \cdot I_2) \cdot [v]_B = \vec{0}$$

- $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} ([T]_B - I_2) \cdot [v]_B &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema nos queda que:

$$\alpha + \beta = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$$

$$(\alpha, \beta) = (-\beta, \beta) = \beta(-1, 1)$$

Luego, $[v]_B = \begin{pmatrix} \text{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$ Luego,

$$v_1 = -1(-1, 0) + 1(2, -1) = (3, -1)$$

Por lo tanto $E_1 = \langle (3, -1) \rangle$. Donde $(3, -1)$ es el vector propio asociado a $\lambda = 1$ de $[T]$.

Vamos a resolver el problema de la manera 2: Conociendo quién es $[T]_B$ buscar quién es $[T]_E = [T]$ sabiendo que $[T]_E = P_{BE} \cdot [T]_B \cdot P_{EB}$ y resolver como veníamos haciendo hasta ahora.

Como $B = \{(-1, 0), (2, -1)\}$ entonces:

$$P_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $P_{BE}^{-1} = P_{EB}$ entonces:

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[T]_E &= P_{BE} \cdot [T]_B \cdot P_{EB} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora conociendo la matriz estándar buscamos los valores y vectores propios como siempre:

Pero calculemos el polinomio característico para conocer los valores propios (que ya sabemos que deben ser $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$).

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= det([T] - \lambda \cdot I_2) \\
&= det\left(\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 12 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\
&= (\lambda - 2)\cdot(\lambda - 1)
\end{aligned}
$$

Que corrobora lo que nos había dado.

Corroboremos que los subespacios propios de $[T]$ son

$$E_2 = \langle (4,-1) \rangle \ y \ E_1 = \langle (3,-1) \rangle$$

Que es lo que obtuvimos utilizando $[T]_B$ ▶ $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} ([T] - 2 \cdot I_2) \cdot v &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema nos queda que:

$$x + 4y = 0 \rightarrow x = -4y$$

$$(x, y) = (-4y, y) = y(-4, 1)$$

Luego $E_2 = \langle (-4,1) \rangle = \langle (4,-1) \rangle$ ya que, ambos generan la misma recta $(-4,1) = -(4,-1)$

Corroboremos que los subespacios propios de $[T]$ son

$$E_2 = \langle(4,-1)\rangle \ y \ E_1 = \langle(3,-1)\rangle$$

Que es lo que obtuvimos utilizando $[T]_B$ ▶ $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} ([T] - I_2)\cdot v &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema nos queda que:

$$x + 3y = 0 \rightarrow x = -3y$$

$$(x, y) = (-3y, y) = y(-3, 1)$$

Luego $E_1 = \langle(-3,1)\rangle = \langle(3,-1)\rangle$ ya que, ambos generan la misma recta $(-3,1) = -(3,-1)$

Conclusión:

Si debemos buscar valores y vectores propios de una transformación lineal debemos tener en cuenta que:

▷ Si nos da como dato la matriz estándar trabajamos como lo veníamos haciendo.

▷ Si nos da como dato la matriz asociada a la transformación en otra base que no es la canónica, entonces debemos tener cuidado. Operamos igual que con la estándar. Los valores propios serán los mismos. Pero la solución al sistema $([T]_B - \lambda \cdot I_2) \cdot [v]_B = \vec{0}$ no son los vectores propios de la transformación. Son las coordenadas del vector propio en la base dada. Por lo tanto, debo terminar de buscarlos para poder definirlos y así también a los subespacios propios correspondientes.

Conclusión:

▷ Si no quiero trabajar con la matriz asociada a la transformación en una base B que no es la canónica, teniendo la base podemos buscar la matriz estándar de la transformación $[T]_E = P_{BE} \cdot [T]_B \cdot P_{EB}$ y resolver como lo veníamos haciendo.

Diagonalización

Definición

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal. Diremos que* T *es* *diagonalizable* *si existe una base* B *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que la matriz asociada* $[T]_B$ *es diagonal.*

Teorema

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal. Son equivalentes:*

- T *es diagonalizable,*
- *para cada valor propio* λ *de* T*, se tiene que* $g(\lambda) = a(\lambda)$.

¿Quién sería la base B en el caso de que T es diagonalizable?

$$\boxed{B \text{ base de los vectores propios tal que } [T]_B \text{ es diagonal}}$$

Diagonalización

Recordemos que:

Teorema

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de T entonces

$$S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_n}$$

y por lo tanto

$$\dim(S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + \cdots + S_{\lambda_n}) = \dim(S_{\lambda_1}) + \dim(S_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(S_{\lambda_n})$$

De esta manera, si consideramos B_1 base para S_{λ_1}, B_2 base para S_{λ_2},..., B_n base para S_{λ_n}, obtenemos una base para $\mathbb{R}^n$ como $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ para la cual $[T]_B$ es diagonal.

Diagonalización

Corolario

Como

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$$

Entonces si $a(\lambda) = 1$ *para todos los* λ, *la transformación siempre será diagonalizable!*

Diagonalización

Ejemplo: $t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$t(x, y, z) = (-2x, 3x + y, x + 2y + 3z)$$

La matriz estándar de t resulta ser

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Diagonalización

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

y los valores propios son $\boxed{\lambda_1 = -2}$ $\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\boxed{\lambda_3 = 3}$.
Además sus multiplicidades algebraicas son

$$a(-2) = 1 \qquad a(1) = 1 \qquad a(3) = 1$$

Buscamos los subespacios propios S_{-2}, S_1 y S_3, y sus dimensiones, es decir, las multiplicidades geométricas de los valores propios.
¿Podemos afirmar qué multiplicidad geométrica tendrán?

Diagonalización

Si $\lambda = -2$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando llegamos a que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $x + y = 0$ es decir $y + 5z = 0$. Entonces

$$(x, y, z) = (5z, -5z, z) = z(5, -5, 1)$$

y se sigue que

$$\boxed{S_{-2} = \langle (5, -5, 1) \rangle}$$

Diagonalización

Si $\lambda = 1$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando llegamos a que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $x = 0$ e $y + z = 0$. Luego

$$(x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$$

y

$$\boxed{S_1 = \langle (0, -1, 1) \rangle}$$

Diagonalización

Si $\lambda = 3$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando llegamos a que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $x = 0$, $y = 0$ y

$$(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

Por lo tanto

$$\boxed{S_3 = \langle (0, 0, 1) \rangle}$$

Diagonalización

Entonces las multiplicidades geométricas de los valores propios son

$$g(-2) = 1 \qquad g(1) = 1 \qquad g(3) = 1$$

Como habíamos anticipado.
Como $g(\lambda) = a(\lambda)$ para todo valor propio λ de t, entonces t es diagonalizable y la base de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$B = \{(5, -5, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$$

tal que $[t]_B$ es diagonal.

Diagonalización

En efecto, $t(x, y, z) = (-2x, 3x + y, x + 2y + 3z)$ y para escribir $[t]_B$ transformamos los vectores de la base B y los escribimos en coordenadas de B.

$$t(5, -5, 1) = \underbrace{(-2)}_{\lambda}\underbrace{(5, -5, 1)}_{v} \longrightarrow [t(5, -5, 1)]_B = (-2, 0, 0)^t$$

$$t(0, -1, 1) = (0, -1, 1) = \underbrace{1}_{\lambda}\underbrace{(0, -1, 1)}_{v} \longrightarrow [t(0, -1, 1)]_B = (0, 1, 0)^t$$

$$t(0, 0, 1) = (0, 0, 3) = \underbrace{3}_{\lambda}\underbrace{(0, 0, 1)}_{v} \longrightarrow [t(0, 0, 1)]_B = (0, 0, 3)^t$$

$$[t]_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^3 = S_{-2} \oplus S_1 \oplus S_3$$

Observemos que en la diagonal se encuentran los valores propios. En caso de repetirse la multiplicidad geométrica del autovalor, se repetirá en la diagonal también.

Hemos definido a una transformación lineal diagonalizable como aquella $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para la cual existe una base B de $\mathbb{R}^n$ para la cual su matriz asociada a dicha base es diagonal.
Definiremos ahora que entenderemos por matriz diagonalizable:

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A es diagonalizable si existe una matriz cuadrada P de orden n tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

Matriz diagonalizable

Observemos que ambas definiciones están relacionadas, puesto que hablar de matrices y de transformaciones lineales es equivalente.
De esta manera podemos observar que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable, entonces existe una base $B = \{v_1, .., v_n\}$ tal que $[T]_B$ es diagonal.
Recordemos que:

$$[T]_B = P_{EB}\,[T]\,P_{BE}$$

$$D = P^{-1}AP$$

Es decir, la matriz P tal que $P^{-1}AP = D$ es la matriz cambio de base P_{BE} para que la matriz $[T]$ sea diagonalizable.

Lema

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal, entonces son equivalentes:*

1. *La transformación* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es diagonalizable.*
2. *La matriz estándar de la transformación* $[T]$ *es diagonalizable.*

Ejemplo

Determinar si la siguiente matriz es diagonalizable. En caso positivo determine la matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Resolución

Tomemos A como $[T]$ para alguna transformación T. Para saber si la matriz es diagonalizable, debemos ver si T es diagonalizable, es decir si existe una base B para que $[T]_B$ sea diagonal. Buscamos esa base, estableciendo los vectores propios.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

Polinomio característico: $Det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$

Autovalores: $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$

Para hallar el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 4$ resolvemos el sistema homogéneo asociado:

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{op.elem} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -x + y = 0 \to x = y$

$S_{\lambda=4} =< (1,1) >$

Para hallar el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ resolvemos el sistema homogéneo asociado:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{op.elem} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -x + 3y = 0 \to x = 3y$

$S_{\lambda=2} =< (3,1) >$

Luego $B = \{(1,1),(3,1)\}$

Por lo obtenido anteriormente, T es diagonalizable por lo tanto A también lo es. Busquemos la matriz P. Recordemos que

$$[T]_B = P_{EB}\,[T]\,P_{BE}$$

Y estamos buscando P tal que:

$$D = P^{-1}AP$$

Establecemos P como P_{BE} con $B = \{(1,1),(3,1)\}$
Luego $P = P_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Observemos que $D = [T]_B$ y tiene los autovalores λ_1 y λ_2 en la diagonal.