# Práctica 6 - Matrices. Sistemas Lineales. Determinantes. Autovalores y autovectores

Álgebra I - 2020 - Facultad de Ciencias Exactas-UNICEN

## Definición

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Se llama matriz de $m$ filas y $n$ columnas sobre $\mathbb{K}$ a un arreglo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Los valores $a_{ij}$ pertenecen a $\mathbb{K}$
- $A$ matriz de $m$ filas y $n$ columnas, y su dimensión es: $m \times n$
- $\mathbb{K}^{m\times n}$ el conjunto de las matrices de dimensión $m \times n$
- Otra notación $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$ ó $A = (a_{ij})_{m\times n}$
- En general, el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

# Matrices

## Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & \sqrt{2} \\ 10 & 25 & 3 \\ 9 & -47 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 10 & 31 \\ 2.5 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

- ☛ $A$ tiene 3 filas y 3 columnas, su dimensión es $3 \times 3$
- ☛ el lugar $a_{32} = -47$ es el lugar que se encuentra en la fila 3 columna 2
- ☞ $B$ tiene 4 filas y 2 columnas, su dimensión es $4 \times 2$
- ☞ el lugar $b_{21} = 10$ es el lugar que se encuentra en la fila 2 columna 1

## Suma

Si las matrices $A$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la suma $A+B$ se define de la forma siguiente:

$$\text{A+B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- ☞ ¿Qué condición deben cumplir dos matrices para poder sumarlas?
- ☞ Las matrices deben tener la misma dimensión

## Suma. Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & \sqrt{2} \\ 10 & 25 & 3 \\ 9 & -47 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 10 & 31 \\ 2.5 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 1 & 14 \\ 4 & 12 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

☞ A+B, no está definido porque no tienen la misma dimensión $\dim A = 3 \times 3 \neq \dim B = 4 \times 2$

☞ B+C está defina porque tiene la misma dimensión $4 \times 2$

$$B + C = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 10 & 31 \\ 2.5 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 1 & 14 \\ 4 & 12 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+8 & 20+32 \\ 10+1 & 31+14 \\ 2.5+4 & 12+12 \\ 8+36 & 16+5 \end{pmatrix}$$

## Propiedades de la suma

- Ley de Cierre

  $A = (a_{ij}),\, B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n} \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$

- Ley Asociativa

  $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n} \Rightarrow A + (B + C) = (A + B) + C$

- Existencia del elemento neutro de la suma

  Para todo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existe $\mathbf{0} = (0_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

- Existencia del inverso aditivo

  Para todo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existe $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que $A + (-A) = -A + A = \mathbf{0}$

- Ley Conmutativa

  Para todo $A = (a_{ij}),\, B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se cumple que $A + B = B + A$

**(a) Calcular (i) $A + B$**

Primero verificamos que las dimensiones sean iguales
$\dim A = 3 \times 2 = \dim B$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

## (a) Calcular (i) $A+B$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&*\\ *&*\\ *&*\end{pmatrix}$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

(a) Calcular (i) $A + B$ Dim$(A)$ =Dim$(B)$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

**(a) Calcular (i) $A+B$ Dim$(A)$ =Dim$(B)$**

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

**(a) Calcular (i) $A + B$ $\quad$ $\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Dim}(B)$**

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \\ * & * \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

(a) Calcular (i) $A + B$ Dim($A$) =Dim($B$)

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \\ 5 & * \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

**(a) Calcular (i) $A+B$ Dim($A$) =Dim($B$)**

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

## Multiplicación por un escalar

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ la multiplicación de $\alpha$ por $A$ se define de la forma siguiente:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \ddots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

**(a) Calcular (ii) $3 \cdot A$**

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

## Producto

- ☞ Antes de definir el producto hacemos algunos comentarios:
- ☞ El requisito para poder multiplicar dos matrices $AB$ es que el **número de columnas de** $A$ sea igual al **número de filas de** $B$
- ☞ La dimensión del producto de $AB$ es **número de filas de** $A \times$ **número de columnas de** $B$
- ☞ El producto que vamos a definir **no es conmutativo**

## Producto

Sean las matrices $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$

Cumplen el requisito del **nro de columnas de** $A =$ **nro de filas de** $B = n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \ddots & b_{2p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

# Operaciones con Matrices

## Producto

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \ddots & b_{2p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Escribrimos $A$ en función de sus filas y $B$ de sus columnas

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C2 & \cdots & C_p \end{pmatrix}$$

El producto de $A \cdot B$ se define de la forma siguiente:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \langle F_1, C_1 \rangle & \langle F_1, C_2 \rangle & \cdots & \langle F_1, C_p \rangle \\ \langle F_2, C_1 \rangle & \langle F_2, C_2 \rangle & \cdots & \langle F_2, C_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \langle F_m, C_1 \rangle & \langle F_m, C_2 \rangle & \cdots & \langle F_m, C_p \rangle \end{pmatrix}$$

# Operaciones con Matrices

## Producto de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ por $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \langle F_1, C_1\rangle & \langle F_1, C_2\rangle & \cdots & \langle F_1, C_p\rangle \\ \langle F_2, C_1\rangle & \langle F_2, C_2\rangle & \cdots & \langle F_2, C_p\rangle \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \langle F_m, C_1\rangle & \langle F_m, C_2\rangle & \cdots & \langle F_m, C_p\rangle \end{pmatrix} = M$$

donde $\langle F_i, C_j\rangle$ es el producto escalar entre la fija $i$ y la columna $j$ y $M = (m_{ij})_{m\times p} \in \mathbb{K}^{m\times p}$

La ventaja de la notación es que el lugar $m_{ij} = \langle F_i, C_j\rangle$

Es decir, $m_{ij} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})\rangle$

- Aunque el producto de matrices no es conmutativo en general, si es asociativo
- **Lema**: Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, C \in \mathbb{K}^{p\times r}$, entonces $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

## (a) Calcular (iv) $C \cdot B$

- $C = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Para multiplicar las matrices $C$ por $B$: verificamos que $\text{columnas}\,(C) = 3 = \text{filas}\,(B)$
- La dimensión de $M = C \cdot B$ es $\text{filas}\,(C) \times \text{columnas}\,(B) = 3 \times 2$
- $C \cdot B = M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix}$

$$m_{11} = \langle F_1, C_1 \rangle = \langle (-7, 6, -1), (1, 1, 1) \rangle = -7 + 6 - 1 = -2$$
$$m_{12} = \langle F_1, C_2 \rangle = \langle (-7, 6, -1), (2, 3, 4) \rangle = -14 + 18 - 4 = 0$$
$$m_{21} = \langle F_2, C_1 \rangle = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$
$$m_{22} = \langle F_2, C_2 \rangle = \langle (1, 0, -1), (2, 3, 4) \rangle = 2 + 0 - 4 = -2$$
$$m_{31} = \langle F_3, C_1 \rangle = \langle (1, -2, 1), (1, 1, 1) \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$$
$$m_{32} = \langle F_3, C_2 \rangle = \langle (1, -2, 1), (2, 3, 4) \rangle = 2 + -6 + 4 = 0$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

## (a) Calcular (iv) $C \cdot B$

- $C = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Para multiplicar las matrices $C$ por $B$: verificamos que $\text{columnas}\,(C) = 3 = \text{filas}\,(B)$
- La dimensión de $M = C \cdot B$ es $\text{filas}\,(C) \times \text{columnas}\,(B) = 3 \times 2$
- $C \cdot B = M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$m_{11} = \langle F_1, C_1 \rangle = \langle (-7, 6, -1), (1, 1, 1) \rangle = -7 + 6 - 1 = -2$$
$$m_{12} = \langle F_1, C_2 \rangle = \langle (-7, 6, -1), (2, 3, 4) \rangle = -14 + 18 - 4 = 0$$
$$m_{21} = \langle F_2, C_1 \rangle = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$
$$m_{22} = \langle F_2, C_2 \rangle = \langle (1, 0, -1), (2, 3, 4) \rangle = 2 + 0 - 4 = -2$$
$$m_{31} = \langle F_3, C_1 \rangle = \langle (1, -2, 1), (1, 1, 1) \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$$
$$m_{32} = \langle F_3, C_2 \rangle = \langle (1, -2, 1), (2, 3, 4) \rangle = 2 + -6 + 4 = 0$$

## Matriz Traspuesta

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ se define la matriz traspuesta de $A$ como

$A^t = (a_{ji})$ de $n \times m$ cuyas filas (columnas) son las columnas (filas) de $A$

Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

# Matriz traspuesta

## Propiedades

- Traspuesta de una matriz traspuesta
  $(A^t)^t = A$
- Traspuesta de la suma de matrices
  $(A + B)^t = A^t + B^t$
- Traspuesta del producto de un escalar por una matriz
  $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t, \quad \alpha \in \mathbb{K}$
- Traspuesta del producto de matrices
  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

## (a) Calcular (iii) $A \cdot B^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para multiplicar las matrices $A$ por $B^t$: verificamos que columnas $(A) = 2 =$ filas $(B^t)$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle (1,0), (1,2) \rangle & \langle (1,0), (1,3) \rangle & \langle (1,0), (1,4) \rangle \\ \langle (0,3), (1,2) \rangle & \langle (0,3), (1,3) \rangle & \langle (0,3), (1,4) \rangle \\ \langle (4,2), (1,2) \rangle & \langle (4,2), (1,3) \rangle & \langle (4,2), (1,4) \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 1 Dadas las matrices con coeficientes reales

## (b) Verificar (ii) $(CB)^t = B^t C^t$

$$CB = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(CB)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 2

## Calcular

$$* \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d \cdot w$$

$$* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot a & x \cdot b & x \cdot c & x \cdot d \\ y \cdot a & y \cdot b & y \cdot c & y \cdot d \\ z \cdot a & z \cdot b & z \cdot c & z \cdot d \\ w \cdot a & w \cdot b & w \cdot c & w \cdot d \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |(a, b, c, d)|^2$$

# Ejercicio 3 Probar la siguientes propiedades de la trasposición de matrices

## (a) $(A^t)^t = A$

- ☞ $A^t$ tiene como filas (columnas) a las columnas (filas) de $A$.

  Por ejemplo: $F_1$ de $A^t$ es $C_1$ de $A$
- ☞ $(A^t)^t$ tiene como columnas (filas) a las filas (columnas) de $A^t$ que son las columnas (filas) de $A$

  Por ejemplo: $C_1$ de $(A^t)^t$ es la $F_1$ de $A^t$ que es $C_1$ de $A$
- ☞ Además, usando la notación $A = (a_{ij})$ se tiene $A^t = (a_{ji})$

  Por ejemplo: el lugar $a_{52}$ en $A$ ocupa el lugar $a_{25}$ en $A^t$
- ☞ $(A^t)^t = \left[(a_{ij})^t\right]^t = [(a_{ji})]^t = (a_{ij}) = A$

# Ejercicio 3 Probar la siguientes propiedades de la trasposición de matrices

## (b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

$$
\begin{aligned}
(A+B)^t &= \begin{pmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{21} & \cdots & (a+b)_{n1} \\ (a+b)_{12} & (a+b)_{22} & \cdots & (a+b)_{n2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (a+b)_{1m} & (a+b)_{2m} & \cdots & (a+b)_{nm} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & a_{n2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & \ddots & b_{n2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{1m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\
&= A^t + B^t
\end{aligned}
$$

## Matrices cuadradas de orden $n$

- Una matriz cuadrada es aquella que tiene la misma cantidad de **filas** que de **columnas**, su dimensión entonces, será $n \times n$
- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
- La matriz $A$ se denomina matriz cuadrada de **orden** $n$ ó matriz de **orden** $n$
- La **diagonal principal** de $A$ son los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

# Matrices cuadradas

## Ejemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 & 11 \\ 10 & 15 & 4 & -23 \\ -23 & 19 & 8 & 42 \\ 14 & 3 & 16 & 81 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 11 & 72 & 52 \end{pmatrix}$
- $A$ es una matriz cuadrada de orden 4 ($\dim A = 4 \times 4$)
- La **diagonal principal** de $A$ son los elementos $2, 15, 8, 81$
- $B$ es una matriz cuadrada de orden 3 ($\dim B = 3 \times 3$)
- La **diagonal principal** de $B$ son los elementos $\sqrt{2}, 7, 52$

# Matrices cuadradas

## Estructura de Anillo

- El conjunto $\mathbb{R}^{n\times n}$ con la suma y el producto definidos es Anillo no conmutativo
- El neutro de la suma $+$ es $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

  es una matriz que tiene todos sus lugares iguales a 0
- El neutro del producto $\cdot$ es $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

  Es una matriz que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y los demás elementos iguales a 0
- $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot, \mathbf{0}, I_n)$ es un anillo por lo tanto sólo algunos elementos tendrán inverso multiplicativo $A \cdot A^{-1} = I_n$

# Ejercicio 3 Probar la siguientes propiedades de la trasposición de matrices

**(d) Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$. Si existe la inversa de $A$, entonces también existe la inversa de $A^t$. Además, $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$**

$(\exists)\ A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \left(A \cdot A^{-1}\right)^t = I_n^t;$ Verificar que $I_n^t = I_n$

$\Rightarrow \left(A^{-1}\right)^t \cdot A^t = I_n;$ Propiedad: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$\Rightarrow \left(A^{-1}\right)^t$ es la inversa de $A^t$

Por definición de inversa se tiene que $\left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t = I_n$.

Entonces, $\boxed{\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t}$

### Triangular Superior

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{ij} = 0 \text{ cuando } i > j}$$

### Triangular Inferior

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{ij} = 0 \text{ cuando } i < j}$$

### Propiedades

- Sean $U_1$ y $U_2$ matrices triangulares superiores, entonces $M = U_1 \cdot U_2$ es triangular superior
- Sean $L_1$ y $L_2$ matrices triangulares inferiores, entonces $N = L_1 \cdot L_2$ es triangular inferior
- $U^t$ es matriz triangular inferior
- $L^t$ es matriz triangular superior

# Matrices Cuadradas

## Matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{ij} = 0 \text{ cuando } i \neq j}$$

## Ejemplo: Matriz identidad

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Neutro del producto}}$

## Propiedades

- Una matriz diagonal es triangular superior y triangular inferior
- El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal
- $D^t = D$
- El producto entre matrices diagonales es conmutativo

# Matrices cuadradas

## Matriz simétrica - Matriz antisimétrica

Una matriz simétrica en $\mathbb{K}^{n \times n}$ es aquella que verifica

$$A = A^t$$

Una matriz antisimétrica en $\mathbb{K}^{n \times n}$ es aquella que verifica

$$A = -A^t$$

### Matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

### Matriz antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matrices cuadradas

## Matriz simétrica - Matriz antisimétrica

☞ **Proposición**: Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica, mediante

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)}_{\text{antisimétrica}}$$

## Matriz simétrica

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}\left(A + A^t\right)\right]^t = \tfrac{1}{2}\left[\left(A + A^t\right)\right]^t$$
$$= \frac{1}{2}\left(A^t + \left(A^t\right)^t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(A^t + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$$

## Matriz antisimétrica

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}\left(A - A^t\right)\right]^t = \tfrac{1}{2}\left[\left(A - A^t\right)\right]^t$$
$$= \frac{1}{2}\left(A^t - \left(A^t\right)^t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(A^t - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

## Ejercicio 4 Descomponer las siguientes matrices con coeficientes reales como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(a)

- $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\right)$
- $\frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\right)$
- $A = \begin{pmatrix} 7 & -5/2 \\ -5/2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 13/2 \\ -13/2 & 0 \end{pmatrix}$

## Matrices elementales

- Una matriz elemental $E$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es aquella que se puede obtener a partir de la matriz identidad $I_n$, aplicando operaciones elementales por filas (o columnas).
- Existen tres operaciones elementales por filas (o columnas) a partir de $I_n$ y las tres matrices elementales asociadas

### 1) $t \cdot F_i \to F_i$

$E_i(t)$

Multiplicar la fila $i$ de $I_n$ por un escalar $t \neq 0$

$n = 3$

$$E_3(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

### 2) $F_i \leftrightarrow F_j$

$E_{ij}$

Intercambiar la fila $i$ y la fila $j$ con $i \neq j$ en $I_n$

$n = 3$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3) $F_i + t \cdot F_j \to F_i$

$E_{ij}(t)$

Sumar a la fila $i$ de $I_n$ $t$ por la fila $j$

$n = 3$

$$E_{23}(6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices cuadradas. Matrices elementales

## Ejemplos

Al multiplicar por izquierda una matriz $A$ por una matriz elemental $E$, en $A$ se logra la operación elemental realizada en $E$

1) $E_1(5) \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2) $E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $E_{21}(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

## Matrices en forma escalonada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La dim $A = 4 \times 3$, las matrices elementales que vamos a usar para llegar a la forma escalonada son de dimensión $4 \times 4$

## Propiedades

1) Las filas nulas se colocan al final
$F_3 \leftrightarrow F_4$

## Matriz escalonada

$$E_{34}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matrices en forma escalonada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## Propiedades

1) Las filas nulas se colocan al final
$F_3 \leftrightarrow F_4$
2) El primer elemento no nulo de cada fila se llama coeficiente lider debajo del cual solo debe haber 0
3) Por debajo y a la izquierda de un lider debe haber 0's $F_1 \leftrightarrow F_2$

## Matriz escalonada

$$E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matrices escalón reducida

Una matriz escalón reducida cumple las propiedades siguientes

1) Está en forma escalonada
2) El lider de cada fila no nula es 1
3) Todos los elementos de una columna en la que hay un lider son 0

## Matrices escalón reducida

La siguiente matriz está escalonada pero no es escalón reducida

$$E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Procedimiento

i) Convertir en 1 el lider de cada fila:
$[F1/5 \to F1]$; $[F2/2 \to F2]$; $[F3/4 \to F3]$

## Matriz escalón reducida

$$E_3\left(\frac{1}{4}\right)E_2\left(\frac{1}{2}\right)E_1\left(\frac{1}{5}\right)E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 1 & {}^1\!/_5 & 1 \\ 0 & 1 & {}^3\!/_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matriz escalón reducida

## Procedimiento

ii) Convertir en cero los elementos de la columna que no son lider:

$[F1 - F2/5 \to F1]$; $[F2 - \frac{3}{2}F3 \to F2]$ $[F1 - \frac{7}{10}F3 \to F1]$

## Matriz escalón reducida

$$E_{12}\left(-\frac{1}{5}\right)E_1\left(\frac{1}{4}\right)E_1\left(\frac{1}{2}\right)E_1\left(\frac{1}{5}\right)E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matriz escalón reducida

## Procedimiento

ii) Convertir en cero los elementos de la columna que no son lider:

$[F1 - F2/5 \to F1]$; $[F2 - \frac{3}{2}F3 \to F2]$; $[F1 - \frac{7}{10}F3 \to F1]$

## Matriz escalón reducida

$$E_{23}\left(-\tfrac{3}{2}\right)E_{12}\left(-\tfrac{1}{5}\right)E_{1}\left(\tfrac{1}{4}\right)E_{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)E_{1}\left(\tfrac{1}{5}\right)E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Procedimiento

ii) Convertir en cero los elementos de la columna que no son lider:

$[F1 - F2/5 \to F1]$; $[F2 - \frac{3}{2}F3 \to F2]$; $[F1 - \frac{7}{10}F3 \to F1]$

## Matriz escalón reducida

$$E_{13}\left(-\frac{7}{10}\right)E_{23}\left(-\frac{3}{2}\right)E_{12}\left(-\frac{1}{5}\right)E_{1}\left(\frac{1}{4}\right)E_{1}\left(\frac{1}{2}\right)E_{1}\left(\frac{1}{5}\right)E_{21}E_{34}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matrices inversibles

- ☞ Una matriz $A$ de orden $n$ es **inversible** si y solamente si existe una matriz $B$ tal que el producto de ambas es igual a la identidad
- ☞ $B$ es la inversa multiplicativa de $A$. En símbolos:
- ☞ $A$ es inversible $\Leftrightarrow \exists B$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$

## Matrices inversibles

**Lema:** Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene inversas $B$ y $C$, entonces $B = C$

**Lema:** Si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son ambas inversibles, entonces la matriz $A \cdot B$ es inversible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

**Corolario:**(Ley de la escalera)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son matrices inversibles de orden $n$, entonces el producto $A_1 \cdot A_2 \cdots A_k$ es inversible y

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

## Matrices elementales inversibles

**Teorema:** Los tres tipos de matrices elementales son inversibles:

- ☛ $[E_i(t)]^{-1} = E_i\left(\frac{1}{t}\right)$
- ☛ $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
- ☛ $[E_{ij}(t)]^{-1} = E_{ij}(-t)$

**Corolario:** Si una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ es producto de matrices elementales, entoces $A$ es inversible

## Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Matrices equivalentes

  Dos matrices son equivalentes cuando se puede obtener una de otra por operaciones elementales

- Rango

  El rango de una matriz es la cantidad de filas (columnas) no nulas cuando esta en foma escalonada (FE)

- Eliminación de Gauss-Jordan

  El proceso de llevar una matriz a la forma escalón reducida

### Cálculo de la matriz inversa por el método de elimanición de Gauss-Jordan

Para calcular $A^{-1}$ a partir de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

- Partimos de la matriz doble $(A|I_n)$

  esta matriz esta formada por $A$ y la matriz identidad en $n$
- Por operaciones elementales llevamos a la matriz $A$ a su forma es escalón reducida (ER) y realizamos las mismas operaciones en $I_n$
- Obtenemos la matriz ampliada $\left(I_n|A^{-1}\right)$
- En caso que la forma ER no sea $I_n$ (una fila de ceros) decimos que no existe $A^{-1}$

## Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes matrices, calcular su inversa utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan

### (c)

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{A \qquad\qquad I_3}$$

$$F_2 - F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 - F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

## Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes matrices, calcular su inversa utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan

### (c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 - 3F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 - 3F_3 \to F_1 \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{I_3 \qquad\qquad A^{-1}}$$

## Determinantes

- El determinante de una matriz es un número que se obtiene sumando todos los posibles productos que se pueden tomar de cada fila y de cada columna sin repetir ni fila ni columna.
- Si el determinante de $A$ es distinto de 0 entonces existe la inversa de $A$
- Notación: determinante de $A = \det(A) = |A|$

# Matrices cuadradas

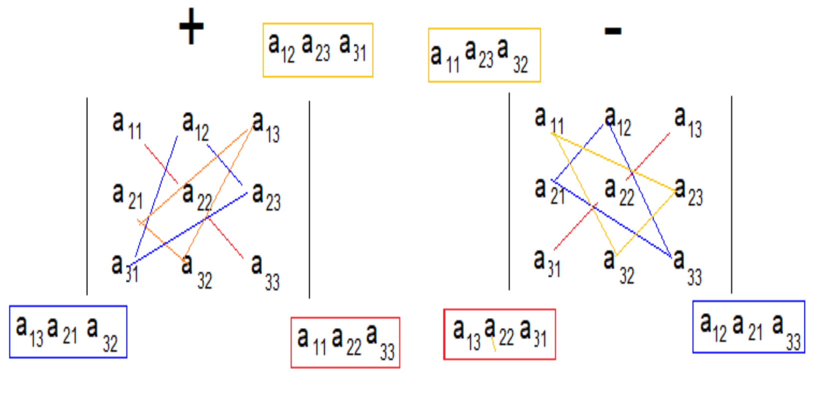
## Determinantes

- Si $A \in \mathbb{K}$ tal que $A = (a_{11}) \implies |A| = a_{11}$
- Si $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ tal que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\implies |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

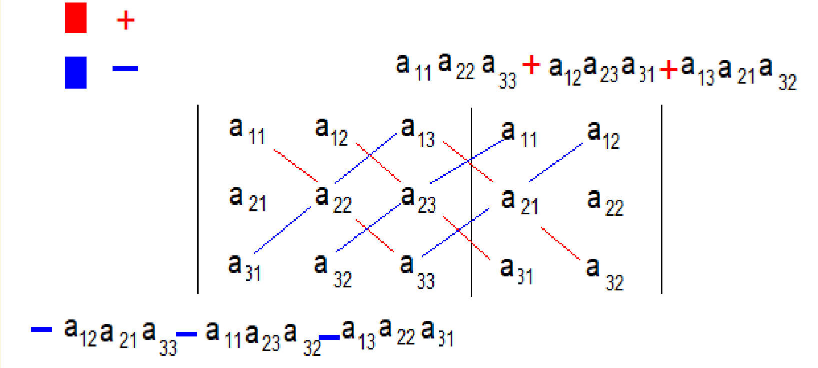
## Regla de Chio para $\mathbb{K}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



## Regla de Chio para $\mathbb{K}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



## Definiciones

- **Menor** de $a_{ij}$, notación: $M_{ij}$

  Llamamos menor complementario de un elemento $a_{ij}$ de una matriz $A$ de orden $n$ a la matriz $M_{ij}$ de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir la fila $i$ y la columna $j$ de $A$ y $m_{ij} = \det M_{ij}$

- Ejemplo: Determinante de la menor de $a_{11}$ de $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

- **Cofactor** de $a_{ij}$, notación: $c_{ij}$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} (-7) = -7$$

### Determinante de matriz de orden $n > 3$

- Sea $A$ una matriz de orden $n > 3$, entonces
  $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}$
- No es necesario elegir la primera fila es posible calcular el determinante elegiendo otra o una columna.
- En general la elección de la fila o columna se debe a la cantidad de ceros que haya en la misma. Más ceros equivale a una menor cantidad de cuentas.

**Propiedades**

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrices de orden $n$, entonces $|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$
- En particular, $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$ con $\alpha \in \mathbb{K}$

# Determinantes

## Propiedades

- El determinante de una matriz es igual al determinante de la traspuesta. $|A| = |A^t|$
- El determinante de la matriz identidad es igual a 1. $|I_n| = 1$
- El determinante de la inversa de una matriz $A$ es el inverso del determinante de la matriz. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$
- Si se permutan dos filas de una matriz el determinante cambia de signo. $|E_{ij}| = -1$
- Si en una matriz una fila es múltiplo de otra fila el determinante es 0.
- Si en una matriz una fila es nula el determinante es 0.
- Si en una matriz a una fila se le suma el múltiplo de otra el determinante no cambia.
- Las propiedades enunciadas para filas son válidas para las columnas

# Ejercicio 6. Calcular los determinantes de las siguientes matrices con coeficientes reales

## (c) Van der Monde

- $F_2 - xF_1 \to F_2$
- $F_3 - x^2F_1 \to F_3$
- $(-1)^{1+1} \times |M_{11}|$

## Ejercicio 6. (c) en $\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

# Ejercicio 6. Calcular el determinante de la matriz siguiente:

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {\color{red}1} & {\color{red}2} & {\color{red}3} & {\color{red}4} \\ {\color{red}1} + 4 & {\color{red}2} + 4 & {\color{red}3} + 4 & {\color{red}4} + 4 \\ {\color{red}1} + 2 \cdot 4 & {\color{red}2} + 2 \cdot 4 & {\color{red}3} + 2 \cdot 4 & {\color{red}4} + 2 \cdot 4 \\ {\color{red}1} + 3 \cdot 4 & {\color{red}2} + 3 \cdot 4 & {\color{red}3} + 3 \cdot 4 & {\color{red}4} + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 6. Calcular el determinante de la matriz siguiente:

**(f)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+4 & 2+4 & 3+4 & 4+4 \\ 1+2\cdot 4 & 2+2\cdot 4 & 3+2\cdot 4 & 4+2\cdot 4 \\ 1+3\cdot 4 & 2+3\cdot 4 & 3+3\cdot 4 & 4+3\cdot 4 \end{pmatrix}$$

**(f) en $\mathbb{R}$**

- ☛ $F_2 - F_1 \to F_2$
- ☛ $F_3 - F_1 \to F_3$
- ☛ $F_4 - F_1 \to F_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 4 & 2\cdot 4 & 2\cdot 4 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 4 & 3\cdot 4 & 3\cdot 4 \end{pmatrix}$$

Si en una matriz cuadrada una fila es múltiplo de otra fila, entonces el determinante es 0

# Ejercicio 7. Probar la siguiente identidad

$$\det\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

## Escribimos la matriz como suma de dos matrices

$$\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

## Matrices elementales

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 7.

$$\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = A + BA$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = [I_3 + B]\, A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 7.

## Cálculo del determinante

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{pmatrix} \\
= &\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}\right] \\
= &\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \\
= &\,{\color{red}2}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

# Matriz Inversa

## Definiciones

- **Cofactor** de $a_{ij}$: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$
- **Matriz de cofactores**

  $C = (c_{ij})$
- **Adjunta de** $A$

  $\mathrm{Adj}(A) = C^t$
- **Inversa de** $A$ **por fórmula**

  $$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,(A)}{|A|}$$

## Matriz de orden 2

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Cofactores**

  $c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = a_{22}$; $c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = -a_{21}$;

  $c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot m_{21} = -a_{12}$; $c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot m_{22} = a_{11}$

- $C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}\,(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{pmatrix}$

## Ejercicio 8. Se sabe que $A$ es una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar las siguientes afirmaciones utilizando propiedades de los determinantes:

**(b) $\det(A) \neq 0, \to \det(\operatorname{adj}(A)) = \det\left(A^{n-1}\right)$**

- $\det(A) \neq 0 \to \det(\operatorname{adj}(A)) = \det\left(A^{n-1}\right)$

  Notamos $\det(A) = d \neq 0 \implies \det\left(A^{n-1}\right) = d^{n-1}$
- Por definición de inversa $A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= (1/d) \cdot \operatorname{adj}(A) \\
dA^{-1} &= \operatorname{adj}(A) \\
dA^{-1}A &= \operatorname{adj}(A)\, A \\
dI &= \operatorname{adj}(A)\, A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(dI) &= \det(\operatorname{adj}(A)) \det(A) \\
d^n &= \det(\operatorname{adj}(A))\, d \\
d^{n-1} &= \det(\operatorname{adj}(A)) \\
\det(\operatorname{adj}(A)) &= \det\left(A^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

# Ejercicio 8. (c) Si $n = 3$, $det\,(A) \neq 0$ y $det\left[(2A)^T\left(A^{-1}\right)^n\right] = 8$, entonces $\det(A) = \pm 1$

$$det\left[(2A)^T\left(A^{-1}\right)^3\right] \underbrace{=}_{(1)} \det\left[(2A)^T\right]\left[\det\left(A^{-1}\right)\right]^3$$

$$\underbrace{=}_{(2)} \det(2A)\left[\det\left(A^{-1}\right)\right]^3 \underbrace{=}_{(3)} 2^3\det(A)\left[\det\left(A^{-1}\right)\right]^3$$

$$\underbrace{=}_{((4)/(5))} 2^3\det(A)\,\frac{1}{[\det(A)]^3} = 8 \to [\det(A)]^2 = 1 \to \det(A) = \pm 1$$

## Propiedades utilizadas

$$\begin{array}{lcl}
(1)\,\det(AB) & = & \det(A)\det(B) \\
(2)\,\det\left(A^T\right) & = & \det(A) \\
(3)\,\det(\alpha A) & = & \alpha^n\det(A^n) \\
(4)\,\det(A^n) & = & [\det(A)]^n \\
(5)\,\det\left(A^{-1}\right) & = & \frac{1}{\det(A)}
\end{array}$$

## Ejercicio 9. Usando determinantes, averiguar si las siguientes matrices son o no inversibles, y cuando lo sean, calcular sus inversas por la fórmula de la adjunta.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Calculamos el determinante de $A$

$|A| = 2 \cdot 7 - (-1) \cdot 5 = 19 \neq 0$, $A$ tiene inversa

Aplicamos la fómula de la inversa de forma directa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/19 & 1/19 \\ -5/19 & 2/19 \end{pmatrix}$$

## Ejercicio 9. Usando determinantes, averiguar si las siguientes matrices son o no inversibles, y cuando lo sean calcular sus inversas por la fórmula de la adjunta

**(b)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 7 + 0 + 0 - 0 + 4 - 0 = 11 \neq 0$, la matriz es inversible

# Ejercicio 9.

**(b)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$**

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}^T$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}^T$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

# Ejercicio 9.

## (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## $A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(A) &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}^T \\ c_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

# Ejercicio 9.

**(b)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$**

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}^T$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \; c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

# Ejercicio 9.

## (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## $A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -19 & 14 & 11 \end{pmatrix}^T$$

$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -19$; $c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14$;

$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 11$

# Ejercicio 9.

## (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## $A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -19 & 14 & 11 \end{pmatrix}^T$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -19 \\ -4 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

# Ejercicio 9.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & 1 & -19 \\ -4 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7/11 & 1/11 & -19/11 \\ -4/11 & 1/11 & 14/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$