Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería.
Sin dar un definición estricta, diremos que:

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería. Sin dar un definición estricta, diremos que:

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta que tiene una orientación (segmento orientado).

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería. Sin dar un definición estricta, diremos que:

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta que tiene una orientación (segmento orientado).

Es decir, un vector queda determinado si conocemos

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería. Sin dar un definición estricta, diremos que:

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta que tiene una orientación (segmento orientado).

Es decir, un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector),

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería. Sin dar un definición estricta, diremos que:

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta que tiene una orientación (segmento orientado).

Es decir, un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector),
- El sentido (es la orientación),

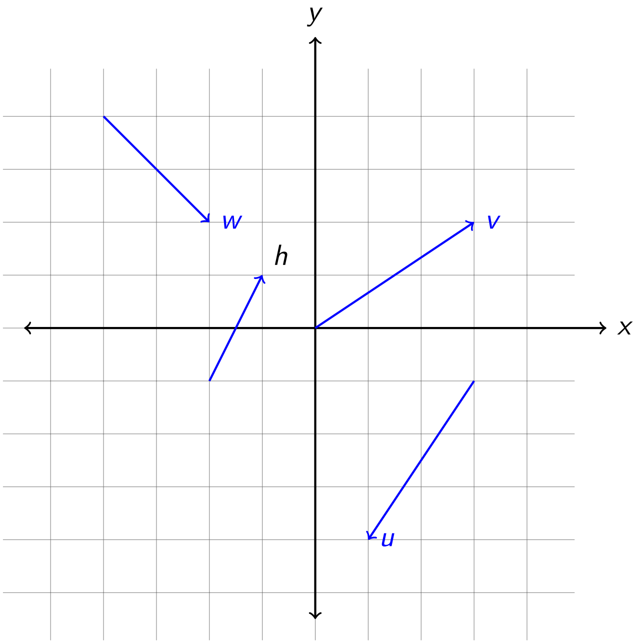
Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los vectores son entidades matemáticas con importantes aplicaciones a la Física y la Ingeniería. Sin dar un definición estricta, diremos que:

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta que tiene una orientación (segmento orientado).

Es decir, un vector queda determinado si conocemos

- Su dirección (la inclinación del vector),
- El sentido (es la orientación),
- La norma, módulo o longituddel vector.

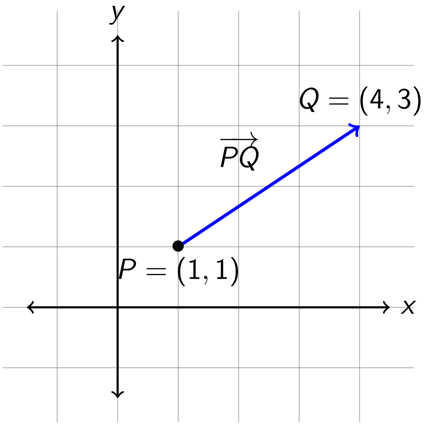

y
x
w
v
h
u

Considerando a un vector como un **segmento de recta orientado** que corresponde al desplazamiento en el plano o en el espacio de un punto P a otro punto Q, entonces podemos escribir al vector en la siguiente forma:

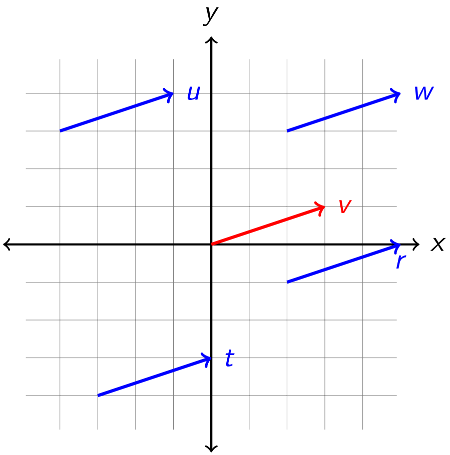
$$\overrightarrow{PQ}, \text{ donde } P \text{ es el punto inicial y } Q \text{ es el punto final.}$$

Considerando a un vector como un **segmento de recta orientado** que corresponde al desplazamiento en el plano o en el espacio de un punto P a otro punto Q, entonces podemos escribir al vector en la siguiente forma:

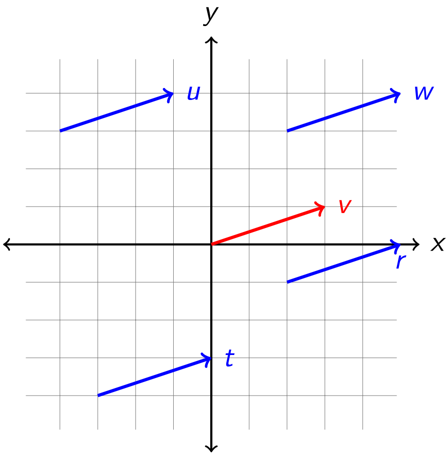
$$\overrightarrow{PQ}, \text{ donde } P \text{ es el punto inicial y } Q \text{ es el punto final.}$$



¿Que tienen de común los siguientes vectores?



¿Que tienen de común los siguientes vectores?



Todos estos vectores tienen el mismo módulo y el mismo sentido. Se llaman vectores equivalentes

Vectores posición

Vectores posición

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} : \text{ inicio en origen de coordenadas } (0,0) \text{ y finaliza en } P$$

Vectores posición

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P}: \text{ inicio en origen de coordenadas } (0,0) \text{ y finaliza en } P$$

- Cada vector posición $\vec{P}$ lo podemos identificar con el punto P y se representa por medio de sus **componentes** a y b:

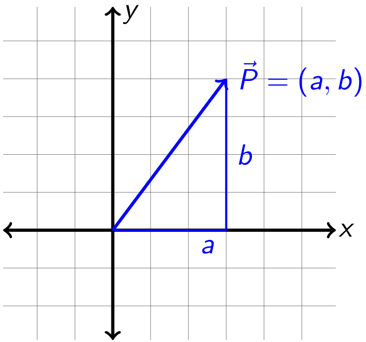
$$\vec{P} = (a, b) \text{ o } \vec{P} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vectores posición

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P}: \text{ inicio en origen de coordenadas } (0,0) \text{ y finaliza en } P$$

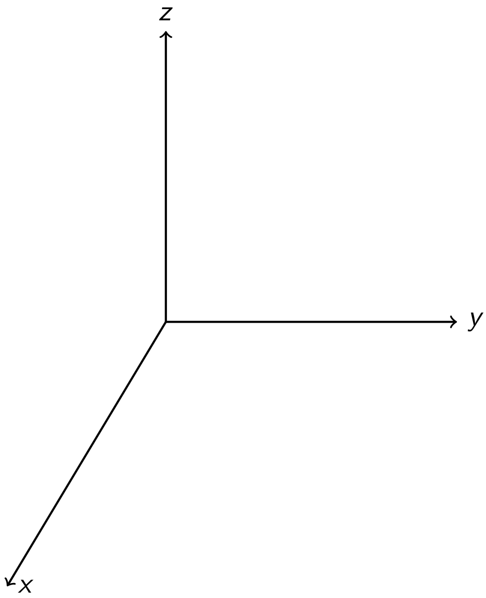
- Cada vector posición $\vec{P}$ lo podemos identificar con el punto P y se representa por medio de sus **componentes** a y b:

$$\vec{P} = (a, b) \text{ o } \vec{P} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Vectores en $\mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^3$



Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$
- Vector nulo:

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- Vector nulo:

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- Vector nulo:

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

- Vector opuesto de $u = (u_1, u_2, u_3)$

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$
- Vector nulo:
$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$
- Vector opuesto de $u = (u_1, u_2, u_3)$
$$-u = (-u_1, -u_2, -u_3).$$

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

- Suma

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- Vector nulo:

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

- Vector opuesto de $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$-u = (-u_1, -u_2, -u_3).$$

- Diferencia:

$$u - v = u + (-v) = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

Operaciones entre vectores

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

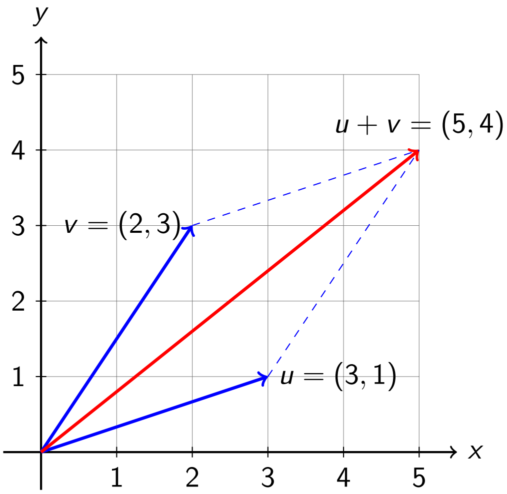
- Suma
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$
- Vector nulo:
$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$
- Vector opuesto de $u = (u_1, u_2, u_3)$
$$-u = (-u_1, -u_2, -u_3).$$
- Diferencia:
$$u - v = u + (-v) = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$
- Producto por un escalar. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces
$$k.u = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

$u = (3, 1)$ y $v = (2, 3)$

$$u + v = (3, 1) + (2, 3) = (5, 4)$$

$u = (3, 1)$ y $v = (2, 3)$

$$u + v = (3, 1) + (2, 3) = (5, 4)$$



Combinación lineal de vectores

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman las **coordenadas** del vector v.

Combinación lineal de vectores

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman las **coordenadas** del vector v.

- El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = (-4)\,(-1, 1) + \frac{1}{2}\,(0, 2)$$

Combinación lineal de vectores

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman las **coordenadas** del vector v.

- El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = \boldsymbol{(-4)}\,(-1, 1) + \boldsymbol{\frac{1}{2}}\,(0, 2)$$

- Cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se puede poner en combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues

$$(x, y) = \boldsymbol{x}\,(1, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1)$$

Combinación lineal de vectores

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman las **coordenadas** del vector v.

- El vector $(4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1)$ y $(0, 2)$ pues

$$(4, -3) = \boldsymbol{(-4)}\,(-1, 1) + \boldsymbol{\frac{1}{2}}\,(0, 2)$$

- Cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se puede poner en combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues

$$(x, y) = \boldsymbol{x}\,(1, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1)\,.$$

- De igual forma, un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede poner escribir como la siguiente combinación lineal:

$$(x, y, z) = \boldsymbol{x}\,(1, 0, 0) + \boldsymbol{y}\,(0, 1, 0) + \boldsymbol{z}\,(0, 0, 1)\,.$$

Ejercicio 1 (Práctico I) Dados los vectores $v = (2, -1, 1)$ y $u = (3, 0, -2)$.

1. Escribir al menos tres combinaciones lineales de v y u.
2. Determinar si los vectores v y u son combinación lineal de los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$ y $w_3 = (0, 0, -1)$

Ejercicio 1 (Práctico I) Dados los vectores $v = (2, -1, 1)$ y $u = (3, 0, -2)$.

1. Escribir al menos tres combinaciones lineales de v y u.
2. Determinar si los vectores v y u son combinación lineal de los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$ y $w_3 = (0, 0, -1)$

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$$

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{array}{rcl} u & = & c_1\, w_1 + c_2\, w_2 + c_3\, w_3 \\ (2, -1, 1) & = & c_1\ (1, 1, 0) + c_2\ (0, 1, 0) + c_3\ (0, 0, 1) \end{array}$$

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned} u &= c_1\, w_1 + c_2\, w_2 + c_3\, w_3 \\ (2,-1,1) &= c_1\ (1,1,0) + c_2\ (0,1,0) + c_3\ (0,0,1) \\ (2,-1,1) &= (c_1, c_1 + c_2, c_3) \end{aligned}$$

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned} u &= c_1\, w_1 + c_2\, w_2 + c_3\, w_3 \\ (2,-1,1) &= c_1\, (1,1,0) + c_2\, (0,1,0) + c_3\, (0,0,1) \\ (2,-1,1) &= (c_1, c_1 + c_2, c_3) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 \\ -1 &= c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1 - c_1 = -1 - 2 = -3 \\ 1 &= c_3 \end{aligned}$$

2. u es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3 si y sólo si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned} u &= c_1\, w_1 + c_2\, w_2 + c_3\, w_3 \\ (2,-1,1) &= c_1\,(1,1,0) + c_2\,(0,1,0) + c_3\,(0,0,1) \\ (2,-1,1) &= (c_1, c_1 + c_2, c_3) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 \\ -1 &= c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1 - c_1 = -1 - 2 = -3 \\ 1 &= c_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto existen $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ y $c_3 = 1$ tales que

$$(2,-1,1) = 2\,(1,1,0) + (-3)\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1)$$

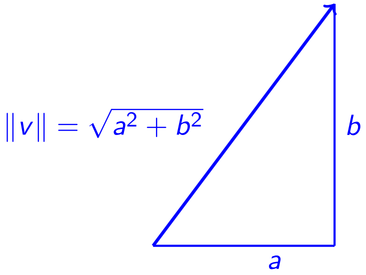
Módulo o norma de un vector

Módulo o norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular el módulo de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Módulo o norma de un vector

Por medio del teorema de Pitágoras podemos calcular el módulo de $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- Determinar el módulo de
$$v = (-3, 1, 2)$$

- Determinar el módulo de

$$v = (-3, 1, 2)$$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

- Determinar el módulo de
$$v = (-3, 1, 2)$$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

- Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

- Determinar el módulo de
$$v = (-3, 1, 2)$$
$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$
- Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.
$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow$$

- Determinar el módulo de
$$v = (-3, 1, 2)$$
$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$
- Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.
$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{circunferencia de radio 2}$$

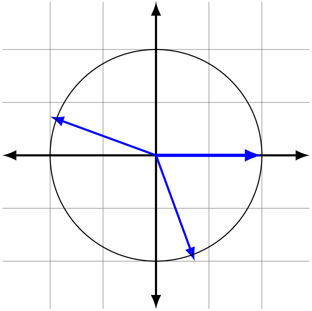
- Determinar el módulo de

$$v = (-3, 1, 2)$$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

- Hallar todos los vectores $v = (x, y)$ tal que $\|v\| = 2$.

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{circunferencia de radio 2}$$



Distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

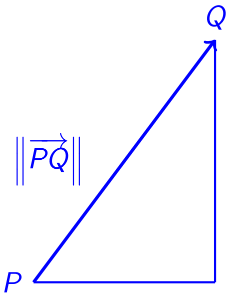
Distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\,,$$

Distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\,,$$

$$d(P, Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

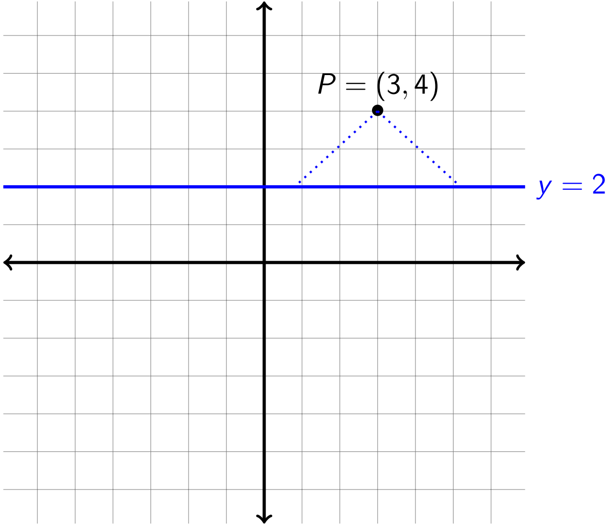


Ejemplo

Determinar todos los puntos sobre la recta $y = 2$ cuya distancia al punto $P = (3, 4)$ sea igual a 3. Graficar la situación.

Ejemplo

Determinar todos los puntos sobre la recta $y = 2$ cuya distancia al punto $P = (3, 4)$ sea igual a 3. Graficar la situación.



Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Resolución.

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Resolución.

1. Identificamos a cada punto con su vector posición. Es decir,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} = (1, 2, 2) \text{ y } \overrightarrow{OQ} = \vec{Q} = (2, -1, 2).$$

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Resolución.

1. Identificamos a cada punto con su vector posición. Es decir,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} = (1, 2, 2) \text{ y } \overrightarrow{OQ} = \vec{Q} = (2, -1, 2).$$

Luego

$$\overrightarrow{QP} = \vec{P} - \vec{Q} = (1, 2, 2) - (2, -1, 2) = (-1, 3, 0)$$

Ejercicio 2 (Práctico I)

Dados los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$

1. Determinar la distancia entre P y Q.
2. Hallar el punto medio entre P y R.
3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

Resolución.

1. Identificamos a cada punto con su vector posición. Es decir,

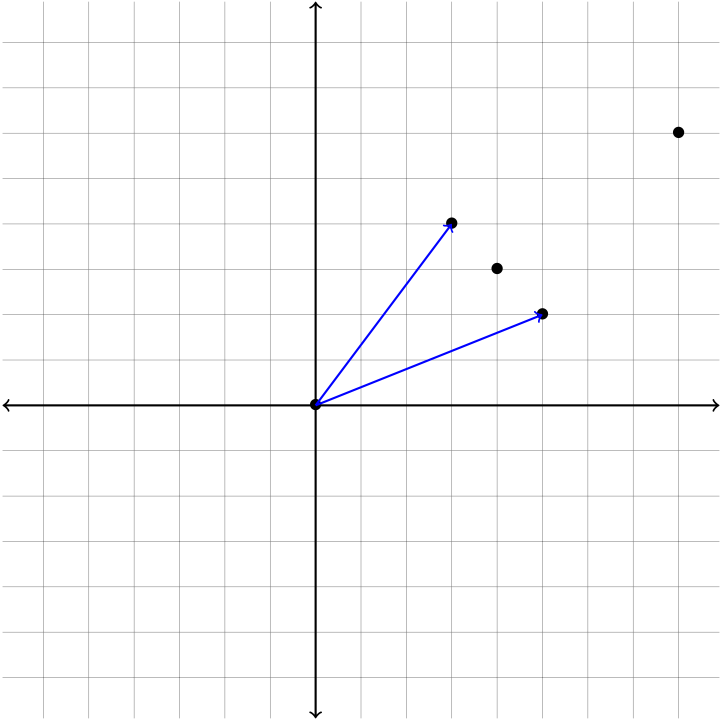
$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} = (1, 2, 2) \text{ y } \overrightarrow{OQ} = \vec{Q} = (2, -1, 2).$$

Luego

$$\overrightarrow{QP} = \vec{P} - \vec{Q} = (1, 2, 2) - (2, -1, 2) = (-1, 3, 0)$$

Entonces la distancia entre P y Q es:

$$d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{QP} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}.$$



3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Ahora buscamos un escalar $\lambda > 0$ (pedimos que sea mayor que cero para que no nos cambie el sentido del vector) tal que el vector $\vec{v} = \lambda\, \overrightarrow{RQ}$ y $\left\|\lambda\, \overrightarrow{RQ}\right\| = 5$, es decir,

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Ahora buscamos un escalar $\lambda > 0$ (pedimos que sea mayor que cero para que no nos cambie el sentido del vector) tal que el vector $\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{RQ}$ y $\left\|\lambda\,\overrightarrow{RQ}\right\| = 5$, es decir,

$$\left\|\lambda\,\overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow \lambda \left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow$$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Ahora buscamos un escalar $\lambda > 0$ (pedimos que sea mayor que cero para que no nos cambie el sentido del vector) tal que el vector $\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{RQ}$ y $\left\|\lambda\,\overrightarrow{RQ}\right\| = 5$, es decir,

$$\left\|\lambda\,\overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow \lambda\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|} = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

3. Hallar un vector de norma 5 y sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$.
Si $Q = (2, -1, 2)$ y $R = (-1, 3, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (-1, 3, -2) - (2, -1, 2) = (-3, 4, -4)$$

Buscamos un vector con sentido contrario al vector $\overrightarrow{QR}$

$$-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ} = (3, -4, 4)$$

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Ahora buscamos un escalar $\lambda > 0$ (pedimos que sea mayor que cero para que no nos cambie el sentido del vector) tal que el vector $\vec{v} = \lambda\, \overrightarrow{RQ}$ y $\left\|\lambda\, \overrightarrow{RQ}\right\| = 5$, es decir,

$$\left\|\lambda\, \overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow \lambda \left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|} = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Por lo tanto el vector $\vec{v}$ que buscamos es

$$\vec{v} = \lambda\, \overrightarrow{RQ} = \frac{5}{\sqrt{41}}(3, -4, 4).$$

Producto escalar o interno

Producto escalar o interno

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar entre u y v se define como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Producto escalar o interno

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar entre u y v se define como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

- **Definición alternativa**

$$u \cdot v = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores u y v.

Producto escalar o interno

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar entre u y v se define como

$$u\cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

- **Definición alternativa**

  $$u\cdot v = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

  donde θ es el ángulo entre los vectores u y v.
- Observemos que

  $$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Producto escalar o interno

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar entre u y v se define como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

- **Definición alternativa**

  $$u \cdot v = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

  donde θ es el ángulo entre los vectores u y v.
- Observemos que

  $$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

- Si $\vec{u} = \vec{v}$,

  $$u \cdot u = \|u\| \, \|u\| \cos 0 = \|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

Producto escalar o interno

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. El producto escalar entre u y v se define como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

- **Definición alternativa**

  $$u \cdot v = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

  donde θ es el ángulo entre los vectores u y v.
- Observemos que

  $$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

- Si $\vec{u} = \vec{v}$,

  $$u \cdot u = \|u\| \, \|u\| \cos 0 = \|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

- *Vectores ortogonales* o *perpendiculares*

  u y v son ortogonales sii $u \cdot v = 0$ sii $\cos\theta = 0$ sii $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Ejemplo

Determinar el ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 2)$ y $v = (1, -1, 2)$.

Ejemplo

Determinar el ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 2)$ y $v = (1, -1, 2)$.

$$u \cdot v = (1, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = 1 + 1.(-1) + 2.2 = 4.$$

Ejemplo

Determinar el ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 2)$ y $v = (1, -1, 2)$.

$$u \cdot v = (1, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = 1 + 1.(-1) + 2.2 = 4.$$

Como

$$u \cdot v = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

Ejemplo

Determinar el ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 2)$ y $v = (1, -1, 2)$.

$$u\cdot v = (1, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = 1 + 1.(-1) + 2.2 = 4.$$

Como

$$u\cdot v = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

entonces

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{4}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{1+1+4}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0,671.$$

Ejemplo

Dados los vectores $u = (2, 0, 1)$ y $v = (1, -1, 3)$, determinar vectores ortogonales a u y a v de módulo 2.

Ejemplo

Dados los vectores $u = (2, 0, 1)$ y $v = (1, -1, 3)$, determinar vectores ortogonales a u y a v de módulo 2.

Debemos buscar los posibles vectores de la forma $w = (x, y, z)$ tal que

Ejemplo

Dados los vectores $u = (2, 0, 1)$ y $v = (1, -1, 3)$, determinar vectores ortogonales a u y a v de módulo 2.

Debemos buscar los posibles vectores de la forma $w = (x, y, z)$ tal que

$w \cdot u = 0$

$w \cdot v = 0$

$\|w\| = 2$