4 ESPACIOS VECTORIALES

En lo que sigue V denotará un conjunto de elementos llamados *vectores*. Con el símbolo $+$ denotaremos una operación, llamada suma de vectores, y sujeta al cumplimiento de ciertas propiedades definidas más adelante. Similarmente trabajaremos con un conjunto de elementos llamados *escalares*. Estos escalares serán, en general, de números reales $\mathbb{R}$. Además trabajaremos con el producto y la suma usuales entre números reales.

Definición 4.1

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma de vectores $+$ y el producto de un escalar c por un vector v, denotado por $c\,v$, satisfaciendo los siguientes diez axiomas:

1. $u+v \in V$,
2. $u+v = v+u$ conmutatividad
3. $(u+v)+w = u+(v+w)$ asociatividad
4. Existe un elemento, llamado vector nulo, $0 \in V$, tal que $v+0 = 0+v$.
5. Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v+(-v) = 0$.
6. $c\,v \in V$, para cualquier escalar $c \in \mathbb{R}$, y para cualquier vector $v \in V$.
7. $c\,(u+v) = c\,u + cv$, para cualquier escalar $c \in \mathbb{R}$.
8. $(c+d)\,v = c\,v + d\,v$, para cualquier par de escalares c y d, y para cualquier vector v.
9. $c\,(d\,v) = (cd)\,v$, para cualquier par $c, d \in \mathbb{R}$.
10. $1\,v = v$.

En la definición anterior, cuando decimos “escalares” nos estamos refiriendo a números reales. En este caso, se dice que V es un espacio vectorial real. También es posible que los escalares pertenezcan a otro conjunto numérico, por ejemplo los números complejos, pero en este curso únicamente trabajaremos con números reales.

Utilizando tan sólo estos axiomas, es posible probar que el vector cero 0 es único, y el vector $-v$, llamado el opuesto de v, es único para cada vector v de V.

Lema 4.1 Sea V un espacio vectorial. Entonces las siguientes propiedades son válidas:

1. $0\,v = \vec{0}$.
2. $c\vec{0} = \vec{0}$.
3. $-v = (-1)\,v$

Ejemplo 4.1 Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Para cualquier $n \geq 1$, el conjunto $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar es un espacio vectorial. Este espacio se conoce con el nombre de espacio euclídeo n-dimensional.
Recordemos que la suma $+$ de dos vectores $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y el producto por un escalar α se definen como

$$\begin{aligned} u + v &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + v_2, \ldots, v_n + v_n) \end{aligned}$$

y

$$\alpha v = \alpha (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n),$$

respectivamente.
En particular, el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ y el espacio $\mathbb{R}^3$ son espacios vectoriales.

Ejemplo 4.2 Espacio de las matrices

El conjunto de las matrices de coeficientes reales de orden $m \times n$ con la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz forma un espacio vectorial denotado por $M_{m\times n}$. Por ejemplo, el conjunto

$$M_{3\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

junto con la suma de matrices y producto de un escalar por una matriz forma un espacio vectorial.

4.1. Subespacios

Dado un espacio vectorial V es posible determinar subconjuntos de V que formen un espacio vectorial utilizando las mismas operaciones que tenemos en V. Por ejemplo, el conjunto de puntos que forma una recta en $\mathbb{R}^2$ es un ejemplo de subespacio. Primero presentamos la definición formal y procedemos a desarrollar varios ejemplos.

Definición 4.2

Sea V un espacio vectorial. Un subespacio S de V es un subconjunto de V satisfaciendo las siguientes condiciones:

(S0) $\vec{0} \in S$.

(S1) Para cada $x \in S$, y para cada escalar k, $cx \in S$.

(S2) Si $x, y \in S$, entonces $x + y \in S$.

La definición anterior nos dice que un subespacio vectorial de un espacio V es un subconjunto $S \subseteq V$ que en sí mismo es un espacio vectorial bajo las mismas operaciones definidas en el espacio vectorial V.

Antes de dar ejemplos ppresentamos una caracterización de los subespacios que será útil para determinar si un subconjunto de un espacio es un subespacio.

Lema 4.2 Sea V un espacio vectorial. Entonces un subconjunto S de V es un subespacio si y sólo si S es distinto del vacío y para todo $u, v \in S$ y para todo $c, d \in \mathbb{R}$,

$$cu + dv \in S.$$

Como un subespacio es un espacio vectorial, siempre debe contener al vector nulo $\vec{0}$. Esto debe ser tenido en cuenta a la hora de averiguar si un subconjunto es o no un subespacio vectorial.

Ejemplo 4.3

Dado un espacio vectorial V, el mismo conjunto V y el conjunto $\{0\}$ son espacios vectoriales. Estos son los llamados *subespacios triviales*. Es decir, siempre existen y además cualquier otro subespacio S de V cumple que

$$\{0\} \subseteq S \subseteq V.$$

Ejemplo 4.4

Analicemos si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ son subespacios.

1. Consideremos el conjunto de punto que forma una recta que pasa por el origen

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 0\right\}.$$

No es difícil comprobar que este conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

2. Consideremos ahora una recta que no pasa por el origen

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 2\right\}.$$

Se puede comprobar que H si está cerrado bajo la suma de vectores y producto de un escalar distinto de cero por un vector está en H, pero claramente $(0,0) \notin H$, pues $0 \neq 3 0 + 2$. Entonces el vector nulo $(0,0) \notin H$. Por lo tanto H no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

3. El conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ o } y = 0\right\}$ no es un subespacio, pues $(1,0), (0,1) \in D$, pero $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin D$.

4. Consideremos el subconjunto

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y \geq 0\right\}.$$

Claramente se cumple que $(0,0) \in S$. Pero no está cerrado bajo la suma, pues $v = (-2,-1) \in S$ y $u = (3,0) \in S$ y

$$v + u = (-2,-1) + (3,0) = (1,-1) \notin S.$$

Por lo tanto S no es un subespacio.

5. El conjunto

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En efecto, si $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ 3k \end{pmatrix},$$

y en general $3k \neq 3$. Por lo tanto E no es cerrado bajo producto de un escalar por un vector. Se puede comprobar que tampoco es cerrado bajo suma de vectores.

Ejemplo 4.5

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$. Veamos si los siguientes subconjuntos son subespacio de $\mathbb{R}^3$.

1. Sea
$$S = \{(x,y,z) : x = y\}.$$
Claramente $(0,0,0) \in S$. Por lo tanto $S \neq \emptyset$. Por otra parte, si $k \in \mathbb{R}$, entonces $k(x,y,z) \in S$, pues $kx = ky$.

   Supongamos que, $(x_1,x_2,x_3),(x_2,y_2,z_2) \in S$, entonces
$$(x_1,x_2,x_3)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \in S,$$
pues $x_1+x_2 = y_1+y_2$. Entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   Observemos que si (x,y,z) es un vector de S entonces
$$(x,y,z) = (x,x,z) = x(1,1,0)+z(0,0,1).$$
Los puntos de $\mathbb{R}^3$que satisfacen esta igualdad son los puntos que pertenecen a un plano que pasa por el origen y con vectores directores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$. Por lo tanto el subespacio vectorial
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = x(1,1,0)+z(0,0,1)\right\}$$
es un plano que pasa por el origen.

2. Sea $H = \{(x,y,2) : x,y \in \mathbb{R}\}$. En este caso es sencillo comprobar que $(0,0,0) \notin H$, y en consecuencia no es un subespacio vectorial.

   Observemos que los puntos de H son los puntos que satisfacen la siguiente identidad:
$$(x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+(0,0,2).$$
Es decir, que H es un plano en $\mathbb{R}^3$ que tiene como vectores directores a $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ y pasa por el punto $(0,0,2)$.

Ejemplo 4.6

Recordemos que un plano en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos, cuya ecuación en forma cartesiana es
$$ax+by+cz = d.$$
De igual forma, un *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = d,$$
donde $a_1,\ldots,a_n,d \in \mathbb{R}$. Un hiperplano pasa por el origen cuando $d = 0$.
Observemos que el vector nulo $\vec{0} = (0,\ldots,0)$ no satisface la ecuación de un hiperplano cuando $d \neq 0$, pues
$$a_10+a_20+\cdots+a_n0 \neq d.$$
Por lo tanto el conjunto de los puntos que pertenecen a un hiperplano **no** forman un subespacio vectorial, excepto cuando pasa por el origen y eso ocurre solamente si $d = 0$.

De acuerdo a los ejemplos anteriores, podemos afirmar lo siguiente:

1. En $\mathbb{R}^2$ las rectas que pasan por origen son subespacios.

   Las rectas que no pasan por el origen no son subespacios.

2. En $\mathbb{R}^3$ las rectas y planos que pasan por el orgien son subespacios.

   Las rectas y planos que no pasan por el origen no son subespacios.

3. En $\mathbb{R}^n$ los hiperplanos pasan por el origen son subespacios.

   Los hiperplanos que no pasan por el origen de coordenadas, no son subespacios.

4.2. Subespacios generados

Anteriormente definimos lo que es una combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Ahora vamos a extender esta noción a cualquier espacio vectorial y posteriormente veremos que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores es un subespacio.

Definición 4.3

Sea $v_1,\dots,v_n$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Diremos que un vector v es *combinación lineal* de los vectores $v_1,\dots,v_n$ si existen escalares $c_1,\dots,c_n$ tales que

$$v = c_1v_1+\cdots+c_nv_n.$$

Sea V un espacio vectorial. El *conjunto generado* por el conjunto de vectores $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, en símbolos $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ o $sg(v_1,v_2,\dots,v_n)$, es el conjunto de *todas* las combinaciones lineales de los vectores de $v_1,\dots,v_n$, es decir:

$$\langle v_1,\dots,v_n\rangle = \{v\in V : v = c_1v_1+\cdots+c_nv_n \text{ para algunos escalares } c_1,\dots,c_n\}$$

El conjunto $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es el conjunto generador de $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

Ahora formulamos el siguiente resultado fundamental sobre conjuntos generados por vectores.

Lema 4.3 Sea V un espacio vectorial. Para cada conjunto de vectores $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ el conjunto

$$S = \langle v_1,\dots,v_n\rangle$$

es un subespacio de V, llamado el *subespacio generado* por el conjunto $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$.

Ejemplo 4.7

Sean los vectores $w_1=(1,1,1)$ y $w_2=(1,-2,2)$.

1. Estudiar si w_1 y w_2 son combinación lineal de los vectores

$$v_1=(1,2,3), v_2=(0,1,2), v_3=(-1,0,1).$$

2. Identificar el subespacio $S=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

Solución

1. Comenzamos estudiando el vector $w_1=(1,1,1)$. Como

$$w_1\in\langle v_1,v_2,v_2\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \exists c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\, w_1=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3 \ .$$

Entonces supongamos que existen escalares c_1,c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= c_1(1,2,3)+c_2(0,1,2)+c_3(-1,0,1)\\ &= (c_1,2c_1,3c_1)+(0,c_2,2c_2)+(-c_3,0,c_3)\\ &= (c_1-c_3,2c_1+c_2,3c_1+2c_2+c_3).\end{aligned}$$

Igualando las componentes obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 - c_3 &= 1 \\ 2c_1 + c_2 &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1 \end{cases}$$

En notación matricial escribimos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema acudimos a Gauss. Consideramos la matriz aumentada del sistema y escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} c_1 &= 1 + c_3 \\ c_2 &= -1 - 2c_3 \\ c_3 &= c_3 \end{cases}$$

y en consecuencia tenemos tenemos un conjunto *infinito* de soluciones. Luego w_1 es combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3 y son de la forma

$$(1,1,1) = (1 + c_3)\, v_1 + (-1 - 2c_3)\, v_2 + c_3 v_3$$

Para obtener una combinación particular podemos elegir un valor para c_3 y de esa forma determinamos los valores para c_1 y c_2. Por ejemplo, si elegimos $c_3 = 3$, entonces obtenemos $c_1 = 4$ y $c_2 = -7$. Por lo tanto,

$$w_1 = 4\, v_1 + (-7)\, v_2 + 3v_3.$$

Claramente las posibilidades de expresar a w_1 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 son infinitas. Analizamos ahora el caso del vector $w_2 = (1,-2,2)$. Vamos a emplear la misma técnica que en el caso anterior. Directamente podemos considerar la matriz

$$A = (v_1\, v_2\, v_3\, w_2)\,,$$

donde estamos entendiendo que los vectores v_1, v_2, v_3 y w_2 están escritos como columnas. Entonces escribimos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Escalonando obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

En la última fila tenemos que $0 = 1$, lo cual es claramente imposible. Por lo tanto el sistema es *incompatible* y en consecuencia no hay solución. Por lo tanto

$$w_2 \notin S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle\,.$$

2. Sabemos que $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Ahora trataremos de encontrar sus ecuaciones que identifiquen. Consideremos un vector genérico $v = (x, y, z)$. Entonces razonando como en el apartado anterior tenemos las siguientes equivalencias:

$$(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ (x,y,z) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

si y sólo si el sistema siguiente tiene solución

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b).$$

Por lo tanto debemos estudiar el rango de la matriz ampliada. Escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)F_1+F_3]{(-2)F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -2x+y \\ 0 & 2 & 4 & -3x+z \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & -2x+y \\ 0 & -1 & -1 & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & -2 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) \text{ sii } -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0.$$

Entonces los vectores que están en el subespacio generado por los vectores v_1, v_2 y v_3 son los que satisfacen la ecuación $-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0$, o la ecuación equivalente $-x + 2y - z = 0$.

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y - z = 0 \right\}.$$

Por lo tanto S es un plano que pasa por el origen.

Sea V un espacio vectorial. Diremos que V es *(finitamente) generado* por un conjunto de vectores si existen vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$ tal que

$$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

En este caso diremos que el conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ es un conjunto de generadores del espacio. Cuando presentamos a un subespacio por un conjunto de generadores decimos que tenemos una *representación paramétrica* del subespacio.

Ejemplo 4.8 Generadores de $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Para cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ podemos escribir

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2.$$

Es decir, todo vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $e_1 = (1,0)$y $e_2 = (0,1)$. Por lo tanto los vectores e_1 y e_2 generan a todo el espacio:

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle.$$

De igual forma se prueba que el espacio $\mathbb{R}^3$ está generado por el conjunto de vectores $e_1 = (1,0,0)$,

$e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$:
$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle .$$
En general, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ está generado por los n-vectores
$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1),$$
pues
$$(x_1,\ldots,x_n) = x_1\, e_1 + \ldots + x_n\, e_n,$$
para todo vector $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, podemos escribir
$$\mathbb{R}^n = \langle e_1,\ldots,e_n \rangle .$$
Los vectores e_1, e_2,$\ldots,e_n$ se los conoce como los *vectores canónicos* de $\mathbb{R}^n$.

Lema 4.4 Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Entonces todo subespacio S es finitamente generado.

4.2.1. Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son espacios finitamente generados, todos sus subespacios son finitamente generados. Ahora vamos dar cuales son exactamente los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1. Supongamos que S es un subespacio propios de $\mathbb{R}^2$. Es decir
$$\left\{\vec{0}\right\} \subset S \subset \mathbb{R}^2.$$
Como $\mathbb{R}^2$ es finitamente generado, entonces S tambien es finitamente generado. Luego existe un vector $v = (v_1, v_2)$ tal que
$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda v\right\} = \langle v \rangle$$
Por lo tanto S es una recta que pasa por el origen.

2. Supongamos que S es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$. Es decir
$$\left\{\vec{0}\right\} \subset S \subset \mathbb{R}^3.$$
En este caso S puede estar generado por un vector o por dos vectores. Es decir, S es una recta que pasa por el origen o un plano que pasa por el origen. Si S es una recta entonces, entonces existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$, llamado vector director, tal que
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) = \lambda v\right\} = \langle v \rangle .$$
Si S es un plano, entonces existen dos vectores v y u tales que
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) = \lambda v + \alpha u\right\} = \langle v, u \rangle .$$
No existen más subespacios propios en $\mathbb{R}^3$.

Ya conocemos que todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ está generado por un conjunto finito de vectores. La pregunta ahora es la siguiente:

¿Como podemos hallar un conjunto de generadores de un subespacio S de $\mathbb{R}^n$?

En el siguiente ejemplo explicamos como determinar un conjunto de generadores de un subespacio vectorial de que está definido por ecuaciones cartesianas o implícitas.

Ejemplo 4.9

Consideremos el plano

$$\pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 4z = 0\right\}.$$

Determinar generadores del subespacio π.

Solución

Como todo plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, entonces π es un subespacio finitamente generado pues $\mathbb{R}^3$ es finitamente generado. Es decir, existe un conjunto finito de vectores que generan a todo el plano π.
Si despejamos la variable x y parametrizamos las otras dos variables como $y = t$ y $z = s$, obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t - 4s \\ y & = & t \\ z & = & s \end{array}\right.$$

Es decir,

$$(x,y,z) = (2t - 4s, t, s) = t\,(2,1,0) + s\,(-4,0,1).$$

Esta es la representación paramétrica del subespacio. Por lo tanto, el subespacio es un plano generado por estos vectores. Es decir,

$$\begin{aligned} \pi &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(2,1,0) + s\,(-4,0,1)\right\} \\ &= \langle (2,1,0), (-4,0,1) \rangle . \end{aligned}$$

4.3. Independencia lineal

En esta sección vamos a estudiar el concepto de independencia lineal. En general dos vectores son dependientes si uno se puede obtener a partir del otro.

- Si consideramos los vectores $v = (1,-3)$ y $u = (-2,6)$ de $\mathbb{R}^2$ podemos comprobar que están conectados por medio de la siguiente identidad

  $$u = (-2)\,(1,-3) = -2\,v,$$

  o lo que es igual

  $$u + 2\,v = (0,0).$$

  La última identidad indica que el vector nulo $\vec{0} = (0,0)$ es una combinación lineal de los vectores u y v. En este caso decimos que los vectores u y v son *linealmente dependientes*.

- Consideremos ahora los tres vectores $v_1 = (-2,4)$, $v_2 = (1,1)$ y $v_3 = (-1,7)$, entonces podemos comprobar que el vector v_3 es *combinación lineal* de los vectores v_1 y v_2 pues

  $$(-2,4) + 3\,(1,1) = (-1,7).$$

  En este caso decimos que el vector $(-1,7)$ depende de los vecores v_1 y v_2.

Ahora presentamos la definición de independencia lineal para cualquier espacio vectorial.

Definición 4.4

Sea V un espacio vectorial.

- Diremos que un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_k\}$ es linealmente *independiente* si

$$c_1v_1+\cdots+c_kv_k=\vec{0} \text{ implica que } c_1=\ldots=c_k=0.$$

En otras palabras, la única forma de expresar al vector nulo 0 como una combinación lineal de v es la combinación trivial $0v_1+\cdots+0v_k=\vec{0}$.

- Diremos que el conjunto $\{v_1,\ldots,v_k\}$ es linealmente *dependiente* si no es linealmente independiente. Es decir, existe alguna combinación lineal

$$c_1v_1+\cdots+c_kv_k=0 \text{ donde algún } c_i \text{ es distinto de cero.}$$

Ejemplo 4.10

Estudiar si el conjunto de vectores

$$B=\{(1,1,-2),(1,-1,2),(3,1,4)\}.$$

es linealmente independiente.

Solución

Primero formamos la ecuación vectorial

$$c_1(1,1,-2)+c_2(1,-1,2)+c_3(3,1,4)=(0,0,0).$$

Para saber si este conjunto es linealmente independiente debemos comprobar que la única solución es la trivial $c_1=c_2=c_3=0$.
La ecuación anterior nos induce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & + & 3c_3 & = & 0\\ c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0\\ -2c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema lo podemos escribir en notación matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz A son los vectores de la base escritos como vectores columna. Escalonamos la matriz A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llegamos al sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 0 & + & 0 & = & 0\\ & & c_2 & + & 0 & = & 0\\ & & & & c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Es decir, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Por lo tanto la única solución es la trivial y podemos concluir que el conjunto de vectores es linealmente independiente.
Como es un sistema homogéneo de 3×3 , entonces un método alternativo es estudiar si el determinante de la matriz A es nulo o no. En este caso

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4-2+6-6-2-4 = -12.$$

Como el determinante $\det A \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución y que es obviamente la trivial. Por lo tanto $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

N Motivados por el Ejemplo 4.3 en $\mathbb{R}^n$ podemos conocer en forma muy sencilla si un conjunto de n vectores es linealmente independiente. Para ellos podemos utilizar los conocimientos sobre solución de sistemas de n ecuaciones con n incognitas homogéneos.
Consideremos un conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y la matriz A cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$

$$A = (v_1 \cdots v_n),$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.
2. El sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene como única solución la trivial.
3. $\mathrm{rg}(A) = n$.
4. $\det A \neq 0$.

Ahora damos un criterio de independencia lineal.

Lema 4.5 Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si y sólo si todo vector v tal que $v \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ tiene una única forma de representarlo como combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_k\}$, salvo el orden de los vectores.

Es importante interpretar geométricamente que significa que un conjunto de vectores sea linealmente independiente o dependiente en $\mathbb{R}^3$.

1. En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, sabemos que dos vectores v_1 y v_2 son linealmente dependientes, si uno es múltiplo de otro. En el caso de considerar vectores que tienen su origen en el origen podemos afirmar que

$$\begin{array}{rcl} v_1 \text{ y } v_2 \text{ son LD} & \text{sii} & \text{uno es múltiplo del otro} \\ & \text{sii} & \text{están sobre la misma recta.} \end{array}$$

2. En $\mathbb{R}^3$

$$v_1, v_2, v_3 \text{ son LD} \quad \text{sii} \quad \text{están sobre el mismo plano (coplanares)}\ .$$

Ejemplo 4.11

Supongamos que $\{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente. Probar que $\{u+2v, v-w, u+3w\}$ es también linealmente independiente.

Solución

Supongamos que

$$(u+2v)\,c_1+(v-w)\,c_2+(u+3w)\,c_3=\vec{0}.$$

Debemos probar que $c_1=c_2=c_3=0$.
Aplicando distributiva en la igualdad anterior obtenemos

$$uc_1+2vc_1+c_2v-wc_2+c_3u+3wc_3=\vec{0}$$

Luego

$$u\,(c_1+c_3)+v\,(2c_1+c_2)+w\,(-c_2+3c_3)=\vec{0}$$

Como el conjunto $\{u,v,w\}$ es linealmente independiente entonces

$$\begin{aligned} c_1+c_3&=0\\ 2c_1+c_2&=0\\ -c_2+3c_3&=0 \end{aligned}$$

Resolviendo el anterior sistema vemos que $c_1=c_2=c_3=0$. Por lo tanto $\{u+2v,v-w,u+3w\}$ es linealmente independiente.

4.4. Bases y dimensión de un espacio

El objetivo de esta sección es estudiar conjuntos de vectores que son linealmente independientes y que además generan a todo el espacio. Comenzamos analizando el ejemplo más sencillo del espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.12

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ y los vectores

$$e_1=(1,0)\text{ y }e_2=(0,1).$$

1. Es inmediato comprobar que el conjunto $\{e_1,e_2\}$ es linealmente independiente, basta con observar que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ tiene determinante igual distinto de cero.
2. Además todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de e_1 y e_2, pues si $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ entonces

$$(x,y)=x\,(1,0)+y\,(0,1).$$

Estos vectores no son los únicos que generan a $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, se puede comprobar que el siguiente conjunto de vectores genera al espacio $\mathbb{R}^2$:

$$B=\{(1,2),(-2,3)\}.$$

Las dos características de los vectores dados en el ejemplo anterior: independencia lineal y que generan a todo el espacio motiva la noción de base de un espacio vectorial.

Definición 4.5 Base de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial. Una *base* de V es un conjunto finito de vectores $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V tal que:

1. $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.
2. $\{v_1,\ldots,v_n\}$ genera a V, es decir, $V=\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$.

En $\mathbb{R}^n$ tenemos una base muy sencilla para trabajar, llamada la base *estándar* o *canónica*. La base está formada por el conjunto de vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots 0)\\ e_2 &= (0,1,\ldots 0)\\ \vdots &\qquad \vdots\\ e_n &= (0,0,\ldots 1)\end{aligned}$$

Es claro que este conjunto de vectores es linealmente independiente y todo vector de $\mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de estos vectores, pues si $v=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es un vector arbitrario, entonces

$$v=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\,(1,0,0\ldots,0)+x_2\,(0,1,0,\ldots,0)+\cdots+x_n\,(0,0,\ldots,1)\,.$$

Existen otras bases en $\mathbb{R}^n$ distintas a la estándar.

Teorema 4.1

Sea V un espacio vectorial. Supongamos que V tiene una base de n-vectores $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Entonces

1. Todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.
2. Si $C=\{w_1,\ldots,w_n\}$ es un conjunto de n vectores linealmente independiente, entonces D es también una base.
3. Sean B_1 y B_2 dos bases de un subespacio S vectorial de V. Entonces B_1 y B_2 tienen la misma cantidad de vectores.

De acuerdo al teorema anterior, para comprobar que un conjunto de n vectores $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}^n$ únicamente será necesario comprobar que B es un conjunto linealmente independiente pues ya conocemos que $\mathbb{R}^n$ tiene una base de n vectores: la base canónica.

Ejemplo 4.1

Estudiar si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es una base.

$$B=\{(1,1,0),(2,2,1),(0,1,1)\}\,.$$

Solución

Debemos probar que B es un conjunto de vectores linealmente independiente y que todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de B. Primero probamos que es linealmente independiente. Como

$$\det\begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1-2-1=2\neq 0$$

Luego el conjunto B es linealmente independiente. La otra forma de probar la independencia lineal es plantear la ecuación

$$\alpha\,(1,1,0)+\beta\,(2,1,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$

y probar que la única solución es $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Ahora debemos comprobar que cualquier vector $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de la base. Es decir, debemos determinar escalares α,β y γ tales que

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(2,1,1)+\gamma(0,1,1).$$

De la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha+2\beta&=x\\ \alpha+\beta+\gamma&=y\\ \beta+\gamma&=z \end{aligned}$$

y resolviendo este sistema llegamos a los siguientes valores de los escalares α,β y γ en función de las coordenadas x,y y z del vector v

$$\begin{aligned} \alpha&=y-z,\\ \beta&=\frac{1}{2}(x-y+z),\\ \gamma&=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

Entonces cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner en combinación lineal de los vectores de la base B. Por ejemplo, para el vector $v=(2,-2,3)$ tenemos que $\alpha=-5$, $\beta=\frac{1}{2}(2+2+3)=\frac{7}{2}$ y $\gamma=-1-1+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$. Luego

$$(2,-2,3)=(-5)(1,1,0)+\frac{7}{2}(2,1,1)+(-\frac{1}{2})(0,1,1).$$

De acuerdo al Teorema anterior, cuando tenemos un espacio vectorial generado por una base finita de vectores, cualquier otra conjunto de generadores linealmente independiente deberá tener la misma cantidad de elementos y en consecuencia ser una base. Es decir,

- Si un espacio V está generado por un conjunto finito de vectores, entonces todas las bases tienen la misma cantidad de vectores.

Lo anterior permite dar la siguiente definición.

Definición 4.1 Dimensión de un espacio

Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si S tiene una base de k vectores, entonces diremos que el espacio vectorial es de *dimensión* k.

Si $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces la dimensión n de V será indicada como

$$\dim V=n.$$

Por convención la dimensión del espacio trivial $V=\left\{\vec{0}\right\}$ es cero, es decir

$$\dim\left\{\vec{0}\right\}=0.$$

Ejemplo 4.2

Observemos que

$$\begin{aligned} &\dim\mathbb{R}^2=2 \qquad \text{pues} \qquad \mathbb{R}^2=\langle(1,0),(0,1)\rangle\\ &\dim\mathbb{R}^3=3 \qquad \text{pues} \qquad \mathbb{R}^3=\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

De igual forma
$$\dim \mathbb{R}^n = n \text{ pues } \mathbb{R}^n = \langle e_i : 1 \leq i \leq n \rangle$$
donde e_i es el vector cuya coordenadas son cero, excepto en el lugar i que es igual a 1.

Lema 4.1 Supongamos que S y G son dos subespacios de un espacio vectorial V tal que
$$S \subseteq G \text{ y } \dim S = \dim G.$$
Entonces
$$S = G$$
.

Ejemplo 4.3

Analizar en $\mathbb{R}^3$ los posibles subespacios generados por uno, dos y tres vectores linealmente independientes.

Solución
En $\mathbb{R}^3$ sabemos que los únicos posibles subespacios, además de los triviales, son las rectas que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen.
Si el subespacio es una recta, entonces está generado por un solo vector $u = (u_1, u_2, u_3)$. Oviamente el conjunto formado por un único vector es linealmente independiente. Por lo tanto toda recta tiene una base de un vector, el vector director de la recta (o cualquier otro múltiplo de él). El subespacio que genera es
$$L = \langle v \rangle = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \lambda v, \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
Luego
$$\dim L = 1.$$
Si tenemos un plano S, entonces sabemos que está generado por dos vectores linealmente indendientes $\{w, u\}$. Es decir,
$$S = \langle u, v \rangle = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha u + \beta v, \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$
y en consecuencia
$$\dim S = 2.$$
Si tenemos un conjunto de tres vectores linealmente v, u, w independientes en $\mathbb{R}^3$ entonces cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ está en el subespacio $\langle v, u, w \rangle$. Por lo tanto es una base, es decir:
$$\mathbb{R}^3 = \langle v, u, w \rangle.$$

Ejemplo 4.4

Determinar una base para el subespacio generado por los siguientes vectores
$$v_1 = (1, -2, 1), \, v_2 = (0, 1, 3), \, (-1, 1, 3), \text{ y } v_4 = (1, 0, -1).$$
Como tenemos 4 vectores de $\mathbb{R}^3$, por el Teorema 4.4, el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente dependiente. Veamos cual es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que genera este conjunto. Primero formamos la ecuación vectorial
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_v = \vec{0}.$$

Es decir
$$c_1(1,-2,1)+c_2(0,1,3)+c_3(-1,1,3)+c_4(1,0,-1)=(0,0,0).$$
Igualando las componentes correspondientes obtenemos el siguiente sistema homogéneo:
$$\begin{cases} c_1 - c_3 + c_4 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 - c_4 &= 0 \end{cases}$$
Formamos la matriz del sistema
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
y determinamos una forma escalonada por filas
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} [F_1 - F_4 \to F4]F_1 + F_3 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} [2\,F_1 + F_4 \to F4]F_2 - F_3 \to F_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Los pivotes aparecen en las primeras tres filas. Por lo tanto los vectores v_1, v_2 y v_3 forman una base para el subespacio $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. En consecuencia, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, entonces
$$\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$
y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base.

El siguiente resultado nos permite extender un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio hasta obtener una base del mismo.

Teorema 4.2 Extensión a una base

Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto propio de vectores linealmente independientes de un espacio V de dimensión n, con $k < n$. Entonces existen vectores $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tal que
$$B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$
es una base de V.

Ejemplo 4.1

Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los vectores linealmente independiente $v_1 = (1,0,1)$ y $v_2 = (0,1,1)$. Determinar un vector v_3 tal que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$. Si es posible, determinar una condición general que permita hallar el vector v_3.

Solución

Como el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, por la propiedad (4) del Lema **??**, se puede extender este conjunto a una base de $\mathbb{R}^3$. Un posible vector v_3 puede ser $v_3 = (0,0,2)$.

Es sencillo comprobar que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es 3. Por lo tanto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
Veamos como podemos determinar una condición general que permita determinar los posibles vectores $v_3 = (x, y, z)$ tal que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ debe ser un conjunto linealmente independiente, entonces se debe cumplir que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 3.$$

Entonces debemos escalonar la matriz para obtener una matriz reducida pero donde todos nuestros vectores filas sean distintos de cero. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -y & x-z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y+x-z \end{pmatrix}$$

Entonces para que la última matriz tenga rango 3 se debe cumplir que

$$y + x - z \neq 0,$$

es decir, $y + x \neq z$. Por ejemplo seleccionando $x = y = 2$ y $z = 5$ obtenemos un vector $v_3 = (2, 2, 5)$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto una base de $\mathbb{R}^3$.
Otra forma de analizar este problema es determinar un tercer vector v_3 que no sea coplanar con los vectores v_1 y v_2. Un vector que cumpla tal condición es el vector que corresponde al producto vectorial de los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$

$$(1,0,1) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \check{k} - \check{i} - \check{j} = (-1, -1, 1).$$

Luego

$$\{(1,0,1), (0,1,1), (-1,-1,1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

4.5. Subespacios asociados con matrices

Ahora veremos que toda matriz A de tamaño $m \times n$ se le pueden asociar cuatros subespacios, llamados los *subespacios fundamentales*. Rrecordemos que todo un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lo podemos considerar como una matriz de n-columnas con una única fila. Luego la matriz (vector) traspuesta es una matriz de una columna con n-fila. En resumen

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1\times n} \text{ sii } \vec{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Consideremos la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sabemos el espacio $\mathrm{N}(A)$ es el conjunto solución del sistema homogéneo

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuando escribimos al sistema anterior como $A\vec{x} = 0$ estamos considerando al vector $\vec{x}$ como vector columna, pero en muchas ocasiones utilizamos denotamos a los vecores en en formato fila. Para eliminar posibles confusiones debemos tener presente que cuando consideremos vectores del espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ los escribiremos como vectores filas, aunque en la ecuación $A\,\vec{x} = \vec{0}$ corresponda a vectores columna.

Denotamos con $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ los n-vectores columna y denotamos $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$ los m-vectores filas, como se indica en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \dots & \vec{c}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{f}_1 \;\rightarrow \\ \vec{f}_2 \;\rightarrow \\ \vdots \\ \vec{f}_m \;\rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 4.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- El *espacio nulo* de A es el conjunto solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$. Es decir el conjunto
$$\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A.\vec{x} = \vec{0}\right\}.$$
- El *espacio nulo* de la traspuesta de A es el conjunto solución del sistema homogéneo ${}^tA\vec{x} = \vec{0}$. Es decir el conjunto
$$\mathrm{N}(A^t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : A^t.\vec{x} = \vec{0}\right\}.$$
- El *espacio columna* de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columnas de A:
$$\mathrm{Co}(A) = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \rangle\,.$$
- El *espacio fila* es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A:
$$\mathrm{Fi}(A) = \left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m \right\rangle.$$

Notemos que
$$\mathrm{Fi}(A) = \mathrm{Co}(A^t) \text{ y } \mathrm{Fi}(A^t) = \mathrm{Co}(A).$$

Observemos que un vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ es un elemento del espacio columna $\mathrm{Co}(A)$ si y sólo si es combinación lineal de los vectores columnas de la matriz A. Es decir,

$$\vec{b} \in \mathrm{Co}(A) \quad \text{sii} \quad \begin{array}{l} \text{existen } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tales que} \\ \vec{b} = x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n \end{array}$$

Por lo tanto
$$\mathrm{Co}(A) = \left\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : A\,\vec{x} = \vec{b} \text{ es compatible }\right\}.$$

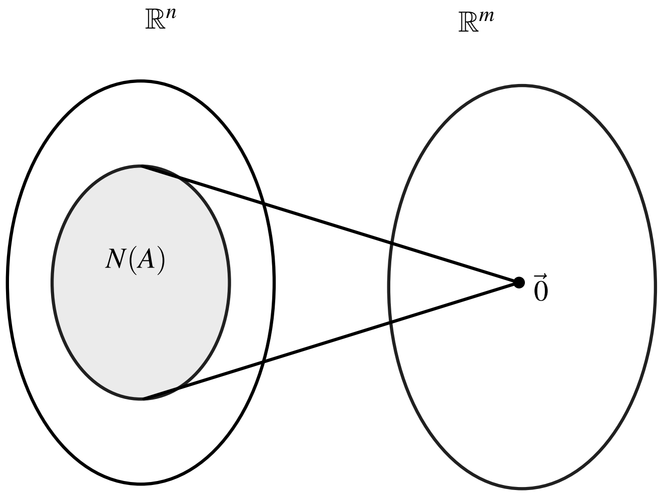
Los espacios fila y columna son subespacios por la propia definición de subespacios generados.

Lema 4.1 Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

es un subespacio vectorial..

Podemos interpretar al espacio nulo asociado a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como la función que envía vectores de $\mathbb{R}^n$ en el vector nulo de $\mathbb{R}^m$, como se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo 4.2

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar los subespacios $\mathrm{N}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{Co}(A)$.

Solución

Es conveniente trabajar con matrices de rango menor. Es decir, si nos dan una matriz A podemos escalonarla y obtener una matriz B equivalente a la matriz A pero con una cantidad menor de filas. En este caso no es necesario pues $\mathrm{rg}(A) = 2$ y no es posible encontrar una matriz equivalente a la matriz A de menor rango.

Para hallar el espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ debemos buscar el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, $3y = 2z = 0$, de donde obtenemos $y = -\frac{2}{3}z$. Luego $x = -\frac{1}{2}y + 2z = \frac{1}{3}z + 2z = \frac{7}{2}z$. Entonces

$$(x,y,z) = \left(\frac{7}{2}z, -\frac{2}{3}z, z\right) = z\left(\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}, 1\right).$$

Por lo tanto el espacio nulo de A es la recta siguiente

$$\mathrm{N}(A) = \left\langle \left(\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}, 1 \right) \right\rangle.$$

Ahora buscamos el espacio fila. Los vectores fila son $(2,1,-2)$ y $(-1,1,1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Fi}(A) &= \langle (2,1,-2), (-1,1,1) \rangle \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(2,1,-2) + \beta(-1,1,1) \right\}. \end{aligned}$$

Luego $\mathrm{Fi}(A)$ corresponde a un plano de $\mathbb{R}^3$.
Ahora el espacio columna es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ pues

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Entonces un vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Co}(A)$ si y sólo si existen $x,y,z \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3

Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinar $\mathrm{N}(A)$, $\mathrm{Fi}(A)$, y $\mathrm{Co}(A)$.

Solución

Determinar los espacios fila y columna $\mathrm{Fi}(A)$ y $\mathrm{Co}(A)$, es inmediato. Los describimos utilizando los generadores

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (1,3,2,-1), (2,1,-1,-1), (-3,1,2,3) \rangle$$

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Notemos que un vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Co}(A)$ si y sólo si existen $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a determinar el subespacio $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$. Como

$$\mathrm{N}(A) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para hallar un conjunto generador de $\mathrm{N}(A)$ vamos a escalonar la matriz A ya que la matriz que se encuentre será más sencilla de manipular y el conjunto de soluciones es el mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\mathbf{5} & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, obtenemos la solución general en forma paramétrica

$$\begin{cases} x &= \frac{5}{7}t \\ y &= -\frac{4}{5}t \\ z &= t \\ w &= t \end{cases}$$

Luego los vectores de $\mathrm{N}(A)$ tienen la forma

$$(x, y, z, w) = t\,(\frac{5}{7}, -\frac{4}{5}, 1, 1),$$

es decir,

$$\mathrm{N}(A) = \left\langle \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{5}, 1, 1 \right) \right\rangle.$$

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, podemos considerar la matriz traspuesta $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Es sencillo comprobar que

$$\mathrm{Fi}(A) = \mathrm{Co}(A^t) \text{ y } \mathrm{Co}(A) = \mathrm{Fi}(A^t).$$

De igual forma que definimos el subespacio nulo $\mathrm{N}(A)$ asociado a la matriz A, podemos considerar el subespacio nulo de la matriz traspuesta

$$\mathrm{N}(A^t) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m : A^t \vec{x} = \vec{0} \right\}.$$

De esta forma, para cada matriz A, tenemos cuatro subespacios asociados

$$\mathrm{N}(A), \mathrm{Fi}(A), \mathrm{Co}(A) \text{ y } \mathrm{N}(A^t).$$

Más adelante estudiaremos las relaciones entre estos cuatro subespacios.

Base del espacio columna

Ahora queremos saber como hallar una base para el espacio fila y una base para el espacio columna de una matriz A.

Teorema 4.3

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Sea B una matriz escalonada por filas de A. Entonces

1. Las filas distintas de la fila nula de B forman una base de $\mathrm{Fi}(A)$.
2. Las columnas de A correspondiente a las columnas pivote de B forman una base de $\mathrm{Co}(A)$.

Lema 4.1 Rango de una matriz Sea A una matriz $m \times n$. Entonces

$$\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Fi}(A) = \dim \mathrm{Co}(A).$$

Ejemplo 4.1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

determinar el espacio nulo, el espacio fila y el espacio columna.

Solución

Escalonamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E.$$

Entonces

$$\mathrm{Fi}(A) = \mathrm{Fi}(E) = \langle (1,2,-1,1), (0,0,1,2) \rangle.$$

Según la matriz E, los vectores columnas que son linealmente independientes corresponden a las columnas donde se ubican los pivotes. En este caso la primer y tercer columna. Tomando la primer y tercer columa de la matriz A obtenemos el siguiente subespacio

$$\mathrm{Co}(A) = \langle (1,2,1), (-1,-3,1) \rangle.$$

Si queremos obtener una ecuación del plano que corresponda a $\mathrm{Co}(A)$, podemos plantear la ecuación como

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,1) + \beta(-1,-3,1).$$

Entonces obtenemos un sistema

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \beta \\ y &= 2\alpha - 3\beta \\ z &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos la ecuación
$$5x-2y-z=0.$$
Por lo tanto el subespacio $\mathrm{Co}(A)$ queda definido como
$$\mathrm{Co}(A)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 5x-2y-z=0\right\}.$$
Hallemos el espacio nulo $\mathrm{N}(A)$. El espacio nulo es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$. Al escalonar la matriz A obtuvimos la matriz E y en consecuencia llegamos a las ecuaciones
$$\begin{aligned} x+2y-z+t&=0\\ z+2t&=0 \end{aligned}$$
y por lo tanto tenemos que
$$\mathrm{N}(A)=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-z+t=0,\ z+2t=0\right\}.$$
Obtengamos conjunto de generadores. Como $z=-2t$ entonces $x=-2y+z-t=-2y-2t-t=-2y-3t$. Finalmente,
$$(x,y,z,t)=(-2y-3t,y,-2t,t)=y\,(-2,1,0,0)+t\,(-3,0,-2,1),$$
es decir
$$\mathrm{N}(A)=\langle(-2,1,0,0),(-3,0,-2,1)\rangle.$$

N Observemos en el ejemplo anterior que tomando la primer y tercer columa de la matriz E obtenemos el siguiente subespacio
$$\mathrm{Co}(E)=\langle(1,0,0),(-1,1,0)\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\right\}.$$
Claramente los dos subespacios $\mathrm{Co}(A)$ y $\mathrm{Co}(E)$ son diferentes, aunque la dimensión es la misma.

4.6. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio

En el apartado anterior hemos visto que toda matriz A tiene asociado cuatro subespacios vectoriales. Ahora veremos que cualquier subespacio tiene esencialmente dos formas de representarlo. Una es por medio de ecuaciones paramétricas y la otra es por medio de ecuaciones implícitas o cartesianas. Expresar un subespacio según sus ecuaciones implícitas o paramétricas es equivalente a determinar una matriz B tal que $S=\mathrm{N}(A)$. Expresar un subespacio S según sus ecuaciones paramétricas es equivalente a determinar una matriz A tal que $S=\mathrm{Co}(A)$.

Ecuaciones implícitas

Sabemos que cualquier matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ determina un sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$. Ahora enunciaremos que cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es de esta forma.

Teorema 4.4

Todo subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k es el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo, es decir, existe una matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ tal que
$$S=\mathrm{N}(A).$$

Definición 4.1

Si $S = \mathrm{N}(A)$, entonces al conjunto de ecuaciones que define la solución sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ se lo denomina *sistema de ecuaciones implícitas o cartesianas del subespacio S*. También podemos decir que el subespacio S está definido implícitamente o cartesianamente.

Ejemplo 4.1

Dado el subespacio

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \lambda(-1,2,-3)\right\}.$$

Determinar las ecuaciones cartesianas y la matriz A tal que $S = \mathrm{N}(A)$.

El subespacio S representa ua recta de $\mathbb{R}^3$ y la ecuación de esta recta está dada en forma vectorial. Para hallar las ecuaciones cartesianas llevamos primero a las paramétricas y de ahí formamos sistema de ecuaciones que será la representación cartesiana o implicita de S. Entonces

$$(x,y,z) = \lambda(-1,2,-3) \Longrightarrow \begin{cases} x &= -\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -3\lambda \end{cases} \Longrightarrow y = -2x \text{ y } z = 3x.$$

Por lo tanto la ecuaciones cartesianas de S corresponde a la intersección de dos planos $y + 2x = 0$ y $z - 3x = 0$. Si lo escribimos como un sistema homogéneo podremos determinar la matriz de los coeficientes

$$\begin{cases} y + 2x &= 0 \\ z - 3x &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz buscada, es decir

$$S = \mathrm{N}(A).$$

Ejemplo 4.2

Determinar si el espacio solución $\mathrm{N}(A)$ del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen o sólo el origen. Si es un plano, encontrar su ecuación general o cartesiana; si es una recta, encontrar sus ecuaciones paramétricas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & 2 & 3 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \mathrm{N}(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \lambda \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right) \right\}$$

Por lo tanto el espacio nulo es una recta.

Ecuaciones paramétricas

Como todo subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es finitamente generado. Entonces debe existir un conjunto finito de vectores $v_1, \ldots, v_k$ tal que

$$S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\}.$$

Si consideramos la matriz A cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_k$ entonces

$$S = \mathrm{Co}(A)$$

Por lo tanto, cada vector v de S es combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_k$, es decir existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Si igualamos componente a componente en la anterior identidad obtenemos la representación *paramétrica* de S.

Resumiendo la discusión anterior.

Un subespacio S está dado en forma *paramétrica* si existe un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ tal que

$$S = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathrm{Co}(A),$$

donde las columnas de A son los vectores $v_1, \ldots, v_n$.

Esencialmente para la representación paramétrica de un subespacio S necesitamos un conjunto de vectores que generan a S. Con esos vectores planteamos una combinación lineal de un vector genérico de S y de ahí obtenemos las ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 4.3

Dado el subespacio S generado por los vectores v_1, v_2, v_3. Determinar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio y las matrices A y B tales que $S = \mathrm{N}(A)$ y $S = \mathrm{Co}(B)$

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

donde $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (-3,2,0,1)$ y $v_3 = (-2,3,1,2)$.

Solución

Primero hallamos la representación paramétrica. Sea $v = (x,y,z,w) \in S$. Entonces existen escalares α, β, y δ tales que

$$\begin{aligned} (x,y,z,w) &= \alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 \\ &= \alpha(1,1,1,1) + \beta(-3,2,0,1) + \delta(-2,3,1,2) \end{aligned}$$

Escríbimos en forma paramétrica la ecuación vectorial anterior y obtenemos las ecuaciones paramétricas del subespacio S:

$$(\text{Par})\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha-3\beta-2\delta \\ y & = & \alpha+2\beta+3\delta \\ z & = & \alpha+\delta \\ w & = & \alpha+\beta+2\delta \end{array}\right.$$

Llegado a este punto tenemos que S está está representado paramétricamente por las ecuaciones (Par), o si queremos podemos decir que las columnas de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

generan a S, es decir

$$S=\text{Co}(A)$$

.

Se puede comprobar que los tres vectores v_1, v_2, v_3 son linealmente indpendientes.

Ahora veamos como determinar las ecuaciones cartesianas. De las anteriores ecuaciones paramétricas obtenemos el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{b}$$

Este sistema tiene solución sii

$$\text{rg}(A)=\text{rg}(A \mid b).$$

Para determinar las ecuaciones implícitas debemos escalonar la matriz ampliada del sistema anterior y estudiar su rango. Al escalonar la matriz obtendremos las ecuaciones implícitas del subespacio. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & | & x \\ 1 & 2 & 3 & | & y \\ 1 & 0 & 1 & | & z \\ 1 & 1 & 2 & | & w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & x \\ 0 & 5 & 5 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2x-3y+5z}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x-4y+5w}{5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\text{rg}(A)=\text{rg}(B \mid b) \Leftrightarrow S=\left\{\begin{array}{ll} -2x-3y+5z & =0 \\ -x-4y+5w & =0 \end{array}\right.$$

Luego las ecuaciones implicitas o cartesianas de S son

$$S:\left\{\begin{array}{ll} -2x-3y+5z & =0 \\ -x-4y+5w & =0 \end{array}\right.$$

Este sistema homogéneo lo podemos escribir en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$S=\text{N}(B).$$

Por lo tanto la matriz buscada es B.

En el ejemplo anterior el subespacio estaba definido por un conjunto de generadores.Por lo tanto la representación paramétrica de un subespacio es más o menos inmediata si conocemos conjunto de vectores que lo generan. La representación implícita se obtuvo escalonando la matriz ampliada $(A \mid b)$ donde las columnas de la matriz A son los vectores que generan al espacio. Ahora veremos como pasar de la representación implícita o cartesiana a la paramétrica.

Ejemplo 4.4

Determinar ecuaciones paramétricas del siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$ y las matrices A y B tales que $S+$ $\mathrm{N}(A)$ y $S=\mathrm{Co}(B)$.

$$S=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+3z-w=0, x+y-z+2w=0\right\}.$$

Solución

En este caso el espacio S está dado por medio de ecuaciones implícitas

$$S:\begin{cases} x-2y+3z-w & =0 \\ x+y-z+2w & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$S=\mathrm{N}(A).$$

Ahora queremos hallar la representación paramétrica. Para lo cual deberemos hallar un conjunto de generadores de S. Tenemos dos ecuaciones con 4 incognitas. Entonces dos variables quedarán en función de otras dos. Por ejemplo,

$$x-2y+3z-w=0 \Rightarrow x=2y-3z+w$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 2y-3z+w+y-z+2w&=0 \\ 3y-4z+3w&=0 \end{aligned}$$

Luego $y=\frac{4}{3}z-w$. Como

$$x=2y-3z+w=2\left(\frac{4}{3}z-w\right)-3z+w=-\frac{1}{3}z-w.$$

Llamando $z=\lambda_1$ y $w=\lambda_2$, las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x & =-\frac{1}{3}\lambda_1-\lambda_2 \\ y & =\frac{4}{3}\lambda_1-\lambda_2 \\ z & =\lambda_1 \\ w & =\lambda_2 \end{cases}$$

Podemos buscar los generadores del espacio

$$\begin{aligned} (x,y,z,w)&=\left(-\frac{1}{3}\lambda_1-\lambda_2,\frac{4}{3}\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2\right) \\ &=\lambda_1\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1,0\right)+\lambda_2(-1,-1,0,1). \end{aligned}$$

Si consideramos la matriz B cuyas columnas son los vectores que generan a S, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$S = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right), (-1,-1,0,1) \right\rangle = \mathrm{Co}(B).$$

Ejemplo 4.5

Dado el subespacio S generado por los vectores $(1,-1,0)$, $(0,2,1)$, determinar matrices adecuadas A, B y C tales que

$$S = \mathrm{Co}(A) = \mathrm{Fi}(B) = \mathrm{N}(C).$$

Solución

Como nos dan los vectores que generan al espacio, podemos determinar las ecuaciones paramétrica del subespacio:

$$(x,y,z) = \alpha(1,-1,0) + \beta(0,2,1),$$

Luego podemos considerar la matriz formada cuyas columnas son los vectores que generan a S. Es decir, consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$S = \mathrm{Co}(A).$$

El subespacio S se puede considerar como el subespacio fila $\mathrm{Fi}(B)$ de la matriz

$$B = A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora queremos hallar las ecuaciones implícitas o cartesianas que definen al subespacio. Entonces debemos hallar una matriz C tal que $S = \mathrm{N}(C)$.
Si queremos encontrar la ecuación cartesiana partimos de la ecuación vectorial $(x,y,z) = \alpha(1,-1,0) + \beta(0,2,1)$, igualamos componente a componente y obtenemos la paramétricas

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -\alpha + 2\beta \\ z &= \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz ampliada del sistema anterior obtend:remos las ecuaciones cartesianas del subespacio

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & x+y-2z \end{array}\right)$$

Entonces el sistema es compatible cuando

$$x + y - 2z = 0.$$

Por lo tanto

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z = 0 \right\}.$$

Podemos escribir a la ecuación

$$x+y-2z = (1,1,-2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Si consideramos la matriz fila $C = (1,1,-2)$ tenemos que

$$S = \mathrm{N}(C).$$

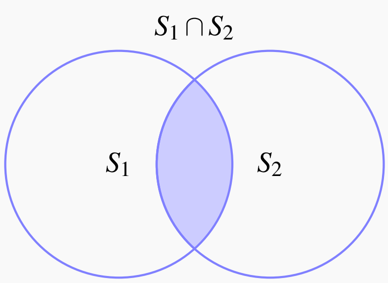
4.7. Intersección y suma de subespacios

Ya sabemos que con cualquier conjunto de vectores de un espacio vectorial podemos generar un subespacio realizando todas las posibles combinaciones lineales. Ahora veremos otras formas de generar subespacios a partir de subespacios conocidos. El primer ejemplo de esto es la intersección de subespacios.

Proposición 4.1 Intersección de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces la intersección de los subespacios S_1 y S_2, es el conjunto de vectores del espacio vectorial V que pertenecen simultaneamente a los dos subespacios. En símbolos

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in S_1 \text{ y } \vec{x} \in S_2\}$$



Teorema 4.5

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Si $A\vec{x} = 0$ es un sistema de ecuaciones cartesianas de S_1 y $B\vec{x} = \vec{0}$ sistema de ecuaciones cartesianas de S_2, entonces,

$$\begin{cases} A\vec{x} = \vec{0} \\ B\vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones de $S_1 \cap S_2$.

Ejemplo 4.1

Consideremos los subespacios vectoriales

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z = 0 \right\}$$

y

$$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x-y+3z = 0 \right\}.$$

Determinar $S_1 \cap S_2$.

Solución

Debemos determinar los vectores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezcan simultaneamente a los dos subespacios. Para ello debemos resolver el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2-F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto nos queda el sistema equivalente

$$\begin{cases} -x + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} x = 5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Tomando a z como parámetro, obtenemos que los puntos de la intersección son de la forma

$$(x, y, z) = (5t, -2t, t) = t\,(5, -2, 1).$$

Es decir la intersección es la recta

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t\,(5, -2, 1) \right\}.$$

Una base del espacio $S_1 \cap S_2$ es $\{(5, -2, 1)\}$.

Otra forma

Como la intersección entre dos planos, si existe, es una recta, entonces podemos buscar el vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales del plano. Es decir

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\check{i} - 2\check{j} + \check{k}.$$

Luego

$$n = (5, -2, 1)$$

es el vector director de la recta intersección de los planos S_1 y S_2. Este es el mismo vector que encontramos anteriormente.

.

Ahora vamos a definir la suma de subespacios.

Definición 4.1

Consideremos S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Definimos la ***suma*** de S_1 con S_2 como el conjunto

$$S_1 + S_2 = \{w \in V : w = u + v, \text{ para algún } u \in S_1 \text{ y } v \in S_2\}.$$

Notemos que siempre $S_1 \cup S_2 \subseteq S_1 + S_2$, pues cualquier vector se puede escribir como

$$v = v + 0 = 0 + v$$

y $\vec{0} \in S_1 \cap S_2$.

Lema 4.1 Dados S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V, entonces $S_1 + S_2$ es un subespacio de V.

Si conocemos un conjunto de generadores para cada espacio, entonces podemos formar un conjunto de generadores para el espacio suma. Es decir, si

$$S_1 = \langle B_1 \rangle \text{ y } S_2 = \langle B_2 \rangle,$$

entonces la unión de los conjuntos generadores es un conjunto generador de la suma, es decir:

$$\boxed{S_1 + S_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle.}$$

Ejemplo 4.2

Determinar la suma de los subespacio siguientes y una base de la suma

$$S_1 = \langle (1,0,1),(2,1,2) \rangle \text{ y } S_2 = \langle (1,-1,0),(1,3,2) \rangle.$$

Solución
Sabemos que

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2) \rangle.$$

Determinemos una base de $S_1 + S_2$. El conjunto de vectores $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0),(1,3,2)$ genera al subespacio suma, pero no es una base pues la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ es 3 y en este caso tenemos cuatro vectores. El subespacio suma debe ser de dimensión menor o igual a 3. Hallemos un conjunto de vectores linealmente independiente a partir del conjunto generador. Foormamos la matriz siguente y diagonalizamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3,\, F_1-F_4]{2F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de la matriz es 3, por lo tanto una base del espacio es $(1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0)$. Entonces

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,1),(2,1,2),(1,-1,0) \rangle.$$

.

Definición 4.2 Suma directa

Diremos que la suma de los subespacios S_1 y S_2 es ***directa*** si y sólo si la intersección de los subespacios es el vector nulo. Es decir,

$$S_1 + S_2 \text{ es directa sii } S \cap S_2 = \{\vec{0}\}.$$

.

Para indicar que la suma de los subespacios S_1 y S_2 es directa escribimos

$$S_1 \oplus S_2.$$

(N) Cuando la suma de dos subespacios S_1 y S_2 es directa, cualquier vector $v \in S_1 \oplus S_2$ se expresa en forma *única* como la suma de un vector de S_1 más un vector de S_2.
Para justificar esta afirmación, supongamos que un vector $v \in S_1 \oplus S_2$ tiene dos formas de escribirlo como suma de vectores de S_1 y S_2. Entonces existen $\vec{x_1}, \vec{x_1} \in S_1$ y $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in S_2$ tales que

$$\vec{v} = \vec{x_1} + \vec{y_1} = \vec{x_2} + \vec{y_2}.$$

Es decir,

$$\vec{x_1} + \vec{y_1} = \vec{x_2} + \vec{y_2},$$

y por lo tanto

$$\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{y_2} - \vec{y_1} \in S_1 \cap S_2 = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Luego,

$$\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{y_2} - \vec{y_1} = \vec{0}.$$

Entonces $\vec{x_1} = \vec{x_2}$ y $\vec{y_2} = \vec{y_1}$. Por lo tanto la representación es única.

Ejemplo 4.3

Sean los subespacios

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x = y = 2z\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3x,\ z = -2x\right\}.$$

Determinar $S_1 + S_2$ y analizar si la suma es directa.

Solución
Primero podemos ver como son los vectores del subespacio $S_1 + S_2$. Notemos que los vectores de S_1 son de la forma $(x,y,z) = (x,-2x,-x) = x\,(1,-2,-1)$. Es decir, $(x,y,z) = \alpha\,(1,-2,-1)$. Los vectores de S_2 son de la forma $(x,y,z) = \beta\,(1,3,-2)$. Entonces los subespacios corresponden a rectas que pasan por el orrigen de coordenadas. Si tomamos un vector genérico $(x,y,z) \in S_1 + S_2$ entonces existe $u \in S_1$ y $v \in S_2$ tal que

$$(x,y,z) = u + v = \alpha\,(1,-2,-1) + \beta\,(1,3,-2).$$

De esta ecuación v las ectorail podemos determinar las ecuaciones paramétricas del plano. Es claro que $\{(1,-2,-1),(1,3,-2)\}$ es una base de $S_1 + S_2$, es decir,

$$S_1 + S_2 = \langle (1,-2,-1),(1,3,-2) \rangle.$$

Si queremos las ecuaciones cartesianas del plano escalonamos las matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -2 & 3 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 5 & 2x+y \\ 0 & -1 & x+z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 5 & 2x+y \\ 0 & 0 & 7x+y+5z \end{array}\right)$$

De esta manera obtenemos la ecuación cartesiana del subespacio suma

$$S_1+S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 7x+y+5z\right\}.$$

Finalmente debemos estudiar si la suma es directa o no. es decir, debemos determinar la intersección $S_1\cap S_2$. Sea $(x,y,z)\in S_1\cap S_2$. DLuego obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -2x=y=2z \\ y=3z \\ z=-2x \end{cases}$$

De $y=2z$ e $y=3z$, obtenemos $z=y=0$. Luego $x=0$. Entonces $S_1\cap S_2=\{(0,0,0)\}$, por lo tanto la suma es directa.

Vamos a finalizar esta sección con un resultado que permite calcular la dimensión de la suma de dos subespacios de un espacio vectorial dado.

Teorema 4.6 (de la dimensión de la suma de subespacios)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V. Entonces

$$\dim(S_1+S_2)=\dim S_1+\dim S_2-\dim(S_1\cap S_2).$$

Si $S_1\cap S_2=\left\{\vec{0}\right\}$, entonces

$$\dim(S_1+S_2)=\dim S_1+\dim S_2.$$

Ejemplo 4.1

Consideremos los subespacios $S_1=\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle$ y $S_2=\langle(-1,1,0),(2,1,2)\rangle$.

1. Determinar $S_1\cap S_2$, una base y su dimensión.
2. Determinar S_1+S_2, una base y su dimensión.
3. Comprobar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

Solución

1. Un vector $(x,y,z)\in S_1\cap S_2$ si y sólo si existen $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z)=a\,(1,0,0)+b\,(0,1,1) \tag{4.1}$$

y

$$(x,y,z)=c\,(-1,1,0)+d\,(2,1,2). \tag{4.2}$$

Entonces igualando

$$(x,y,z)=a\,(1,0,0)+b\,(0,1,1)=c\,(-1,1,0)+d\,(2,1,2),$$

es decir

$$a\,(1,0,0)+b\,(0,1,1)+c\,(1,-1,0)+d\,(-2,-1,-2)=(0,0,0).$$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

y obtenemos

$$\begin{cases} a & = & d \\ b & = & 2d \\ c & = & d \\ c & = & d \end{cases}$$

Entonces

$$(a,b,c,d) = (d,2d,d,d) = d(1,2,1,1).$$

Podemos sustituir los valores de a y b en la ecuación (4.1) y obtenemos

$$(x,y,z) = d\,(1,0,0) + 2d\,(0,1,1) = d(1,2,2).$$

Estos puntos corresponden a una recta con vector director $(1,2,2)$. Si sustituimos los valores de c y d en la ecuación (4.2) obtenemos los mismos puntos. Porlo tanto

$$S_1 \cap S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = d(1,2,2)\right\}.$$

Claramente el conjunto $\{(1,2,2)\}$ es una base de $S_1 \cap S_2$ y la dimensión es 1.
2. La suma de los subespacios S_1 y S_2 está formada por los vectores

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in S_1 \text{ y } \vec{z} \in S_2.$$

Teniendo en cuenta que conocemos bases de S_1 y S_2, entonces expresamos cada vector como combinación lineal de los vectores de su base, es decir

$$\vec{x} = \underbrace{\alpha_1\,(1,0,0) + \alpha_2\,(0,1,1)}_{\in S_1} + \underbrace{\beta_1\,(-1,1,0) + \beta_2\,(2,1,2)}_{\in S_2}.$$

Por lo tanto

$$\vec{x} \in \langle (1,0,0),(0,1,1),(-1,1,0),(2,1,2) \rangle.$$

Entonces

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,0),(0,1,1),(-1,1,0),(2,1,2) \rangle$$

Por (4.3), la matriz asociada a estos vectores es de rango 3 y los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(-1,1,0)$ son linealmente independientes. Por lo tanto

$$S_1 + S_2 = \langle (1,0,0),(0,1,1),(-1,1,0) \rangle$$

y una base es el conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,0)\}$. Luego $\dim(S_1+S_2) = 3$.
3. Por el Teorema de la dimensión tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(S_1+S_2) &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &= 2+2-1 = 3. \end{aligned}$$

Entonces como S_1+S_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3, entonces $S_1+S_2 = \mathbb{R}^3$.

4.8. Complemento ortogonal de un subespacio

Recordemos la noción de producto escalar o producto interno de dos vectores de $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

En algunas ocasiones el producto escalar es conveniente definirlo como un producto de matrices en la siguiente forma. Consideramos a los vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como matrices de tamaño $1 \times n$. Entonces la traspuesta del vector fila $\vec{v}$ es el vector columna de tamaño $n \times 1$

$$\vec{v}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Luego podemos definir al producto escalar entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como el producto matricial

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^t \, \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Por ejemplo, si $v = (2, -1, 4)$ e $w = (1, 3, 2)$, entonces

$$vw = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} (1, 3, 2) = 2 - 3 + 8 = 7.$$

Recordemos también la noción de vectores ortogonales. Dos vectores v e w de $\mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero, es decir:

$$v \cdot w = 0.$$

Ahora introduciremos un importante concepto que en cierta forma extiende la noción de perpendicularidad entre dos rectas de $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.1 Complemento ortogonal de un subespacio

Sea S un subespacio del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$. El complemento *ortogonal* de S es el conjunto

$$S^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0, \text{ para todo } w \in S\}.$$

Vamos a decir que un vector v es ortogonal a un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ si v es ortogonal a cada vector de H, es decir:

$$v \text{ es ortogonal a } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ sii } v \cdot v_1 = v \cdot v_2 = \cdots = v \cdot v_n = 0.$$

Lema 4.1 Sean $v, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Si v es ortogonal al conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces v es ortogonal a culaquier combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Lo primero que podemos preguntarnos es si el complemento ortogonal de un subespacio es otro subespacio. En el siguiente Teorema respondemos a esta cuestión y damos algunas propiedades del complemento ortogonal de un subespacio.

Teorema 4.7

Sean S y W dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Entonces

1. $S^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
2. $S \cap S^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$.

3. $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

4. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base del subespacio S. Entonces el complemento ortogonal de S es el conjunto de los vectores ortogonales a los vectores que generan a S. Es decir:

$$S^{\perp} = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v_i = \vec{0}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \right\}$$

5. $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\dim S + \dim S^{\perp} = n$.

El siguiente resultado no dice que conociendo una base para S y una base para $S^{\perp}$, entonces conocemos una base para todo el espacio.

Corolario 4.1 Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces si B_1 es una base de S, y B_2 es una base de $S^{\perp}$, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos que tenemos un subespacio S de $\mathbb{R}^n$. Entonces por el Teorema 4.8 si $v \in \mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$ existen vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que

$$v = u + w \text{ y } u \cdot w = 0.$$

En otras palabras, cualquier vector v de $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer en la suma de dos vectores, uno del subespacio S y otro del complemento ortogonal $S^{\perp}$. Esto lo dejamos explicitado en el siguiente teorema.

Teorema 4.8

de descomposición ortogonal Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Para cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ existen vectores únicos $w \in S$ y $w^{\perp} \in S^{\perp}$ tales que

$$v = w + w^{\perp}.$$

Ejemplo 4.1

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el subespacio S generado por los vectores $v_1 = (1, -1, 2)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$.

1. Determinar una base de $S^{\perp}$.

2. Descomponer al vector $w = (2, -3, 1)$ como suma de un vector de S y otro vector de $S^{\perp}$.

Solución

1. Por el Teorema 4.8, el conjunto de vectores de $S^{\perp}$ son los vectores ortogonales a los vectores de la base de S. Entonces

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in S^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} (x,y,z)\cdot(1,-1,2) &=& x - y + 2z = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,1,1) &=& y + z = 0 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ genera el subespacio $S^{\perp}$. De $y = -z$, obtenemos $x = y - 2z = -z - 2z = -3z$. Entonces

$$S^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t\,(-3,-1,1) \right\} = \langle (-3,-1,1) \rangle.$$

2. Como la unión de las bases de S con la base de $S^{\perp}$ nos da una base de $\mathbb{R}^3$, es decir

$$B = \{(1,-1,2),(0,1,1),(-3,-1,1)\}$$

es base de $\mathbb{R}^3$, entonces podemos buscar una combinación lineal para el vector $w = (2,-3,1)$ y de esa forma tendremos la descomposición buscada.
Buscamos escalares a,b,c tales que

$$(2,-3,1) = \underbrace{a(1,-1,2)+b(0,1,1)}_{\in S} + \underbrace{c(-3,-1,1)}_{\in S^{\perp}}.$$

Escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $a = -\frac{2}{11}$, $b = -\frac{19}{11}$ y $c = \frac{16}{11}$.

Ejemplo 4.2

Dado el subespacio $L = \langle (2,-4,5) \rangle$.

1. Determinar $L^{\perp}$.
2. Comprobar que $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$.
3. Comprobar que $L \oplus L^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

Solución
1. Sea $v = (x,y,z)$ un vector. Si $v \in L^{\perp}$, entonces en particular es ortogonal al vector $(2,-4,5)$, es decir

$$\begin{aligned} (x,y,z)(2,-4,5) &= 0 \\ 2x-4y+5z &= 0. \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que todo vector ubicado sobre la recta $L = \langle (2,-4,5) \rangle$ es ortogonal al plano $2x-4y+5z = 0$. Por lo tanto los vectores ortogonales al vector $(2,-4,5)$ o a la recta $L = \langle (2,-4,5) \rangle$ es el plano

$$\begin{aligned} L^{\perp} &= \left\{ (x,y,z) \in S^{\perp} : (x,y,z)(2,-4,5) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in S^{\perp} : 2x-4y+5z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Hallamos ahora una base de $L^{\perp}$. Como $2x-4y+5z = 0$, entonces $x = 2y - \frac{5}{2}z$. Luego

$$(x,y,z) = (2y - \frac{5}{2}z, y, z) = y(2,1,0) + z(-\frac{5}{2},0,1)$$

Para simplificar podemos tomar como base los vectores $(2,1,0)$ y $(-5,0,2)$. Entonces

$$L^{\perp} = \langle (2,1,0),(-5,0,2) \rangle.$$

2. Nos preguntan cual es el complemento ortogonal del plano $L^{\perp}$. Veamos que dicho complemento es la misma recta L generada por el vector $(2,-4,5)$. Conociendo la base del subespacio $L^{\perp}$ podemos determinar el complemento ortogonal.

Sea entonces un vector $(x,y,z) \in L^{\perp\perp}$. Dicho vector debe ser ortogonal a cada vector de la base $\{(2,1,0),(-5,0,2)\}$ recién encontrada. Es decir

$$\begin{aligned}(x,y,z).(2,1,0) &= 0\\(x,y,z).(-5,0,2) &= 0\end{aligned}$$

Esto no da el sistema

$$\begin{aligned}2x+y&=0\\-5x+2z&=0\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}y&=-2x\\z&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Luego

$$(x,y,z)=(x,-2x,\frac{5}{2}x)=x(1,-2,\frac{5}{2}).$$

Entonces el vector $(1,-2,\frac{5}{2})$ genera al subespacio $L^{\perp\perp}$. Como todo múltiplo de un generador es un generador, entonces el vector $(2,4,5)$ tambien genera a $L^{\perp\perp}$. Por lo tanto

$$L=L^{\perp\perp}.$$

De esta forma hemos comprobado que el complemento ortogonal de la recta L es un plano, y el complemento ortogonal de ese plano es la recta inicial:

$$\begin{array}{lllll} L & \longrightarrow & L^{\perp} & \longrightarrow & L^{\perp\perp}=L\\ \text{recta} & & \text{plano} & & \text{recta}\end{array}$$

2. Comprobemos que $L\oplus L^{\perp}=\mathbb{R}^3$. Observemos que la unión de la base de L con la base de $L^{\perp\perp}$, es decir el conjunto

$$B=\{(2,4,5),(2,1,0),(-5,0,2)\}$$

es un conjunto linealmente independiente de vectores, y como la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ es 3, entonces B es una base de $\mathbb{R}^3$. Luego

$$\begin{aligned}L\oplus L^{\perp} &= \left\{w\in\mathbb{R}^3 : w=u+v,\, u\in S,\, v\in S^{\perp}\right\}\\&=\left\{w\in\mathbb{R}^3 : w=c_1(2,4,5)+c_2(2,1,0)+c_3(-5,0,2)\right\}\\&=\mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

N En $\mathbb{R}^3$ los posibles subespacios no triviales son rectas o planos que pasan por el origen. Por lo tanto,

Si S es una recta, entonces su complemento ortogonal $S^{\perp}$ es un plano.

Si S es un plano, entonces su complemento ortogonal $S^{\perp}$ es una recta.

4.9. Relación entre los cuatros espacios fundamentales

Sabemos que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene asociada cuatro espacios vectoriales, a saber:

$$\mathrm{N}(A), \mathrm{Co}(A), \mathrm{Fi}(A) \text{ y } \mathrm{N}(A^t).$$

La relación entre todos estos espacios se expone en el siguiente teorema.

Teorema 4.9 Fundamental de los subespacios de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces

1. $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^{\perp}$.
2. $\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Fi}(A^t)^{\perp}$.
3. $\mathrm{Co}(A)^{\perp} = \mathrm{N}(A^t)$.
4. $\mathrm{N}(A^t)^{\perp} = \mathrm{Co}(A)$.

Demostración. Vamos a demostrar la igualdad $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^{\perp}$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Sean $f_1,\dots,f_m$ las filas de la matriz A, es decir:

$$f_1 = (a_{11},,a_{12},\dots a_{1n}),\dots,f_m = (a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn}).$$

Entonces la matriz A se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

El espacio fila $\mathrm{Fi}(A)$ es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores $f_1,\dots,f_m$. Consideremos un vector $\vec{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ tal que de $\mathrm{N}(A)$. Los vectores de $\mathrm{N}(A)$ los escribimos como vectores columnas. y lo denotemos en forma de vector columna. (columna) $\vec{x}^t = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathrm{N}(A)$. Entonces

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} f_1\cdot\vec{x} \\ f_2\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ f_m\cdot\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$f_1\cdot\vec{x} = 0, f_2\cdot\vec{x} = 0,\dots,f_m\cdot\vec{x} = 0$$

sii

$$\vec{x} \text{ es ortogonal al conjunto } \{f_1,\dots,f_m\} \text{ sii } \vec{x} \text{ es ortogonal al subespacio generado } \{f_1,\dots,f_m\}$$

sii

$$\vec{x} \in \mathrm{Fi}(A)^{\perp}.$$

Con esto hemos probado que cualquier vector $\vec{x}$ de $\mathrm{N}(A)$ es ortogonal a todo vector de $\mathrm{Fi}(A)$, es:decir,

$$\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{Fi}(A)^{\perp}.$$

Para la otra inclusión, consideremos un vector $\vec{x} \in \mathrm{Fi}(A)^{\perp}$. Entonces $\vec{v}$ es ortogonal a cualquier vector de $\mathrm{Fi}(A)$. En particular $\vec{x}$ es ortogonal al conjunto $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Entonces $A\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $\vec{x} \in \mathrm{N}(A)$. Por lo tanto $\mathrm{N}(A) = C(A^t)^{\perp}$.

El apartado 2 se prueba de igual forma pero utilizando la matriz traspuesta A^t. Queda como ejercicio. □

Las dimensiones de los espacios asociados a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ queda establecida en el siguiente resultado.

Teorema 4.10 Teorema del rango y la nulidad

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

1. $\dim \mathrm{Fi}(A) = \dim \mathrm{Co}(A) = \mathrm{rg}(A)$.
2. $\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{N}(A) = n$.
3. $\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{N}(A^t) = m$.

Para finalizar, formulamos siguiente teorema como corolario de los Teoremas 4.8 y 4.9.

Teorema 4.11

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

$$\mathrm{Fi}(A) + \mathrm{Fi}(A)^{\perp} = \mathrm{Co}(A^t) + \mathrm{N}(A) = \mathbb{R}^n$$

y

$$\mathrm{Co}(A) + \mathrm{Co}(A)^{\perp} = \mathrm{Co}(A) + \mathrm{N}(A^t) = \mathbb{R}^m.$$

Ejemplo 4.1

Consideremos el subespacio dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \\ x-y+z+3t &= 0 \end{cases}$$

Este sistema lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces las soluciones de este sistema son los vectores de S. Es decir

$$S = \mathrm{N}(A).$$

Luego

$$S^{\perp} = \mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A) = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0), (1,-1,1,3) \rangle.$$

Ahora calculemos $\mathrm{Co}(A)$. Recordemos que el espacio columna está generado por los vectores columna que están ubicados en los pivotes dela matriz que se obtiene después de escalonar la matriz A. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(A^t) = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle.$$

Ejemplo 4.2

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los espacios $\mathrm{Fi}(A)$, $\mathrm{Co}(A)$ y $\mathrm{N}(A)$, una base para cada uno de ellos y las ecuaciones los definen.
2. Comprobar que $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^{\perp}$y que $\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^{\perp}$.
3. Después de resolver el apartado 2 pensar como determinar un sistema de ecuaciones que definan el espacio $\mathrm{Fi}(A)$.
4. Determinar matrices X e Y tales que $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Co}(X)$ y $\mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(Y)$.

Solución

1. Primero debemos escalonar la matriz A para obtener una matriz equivalente escalonada por filas. Escalonamos A y obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces los vectores $(1,-1,3)$ y $(0,3,-5)$ forman una base del espacio fila $\mathrm{Fi}(A)$:

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (1,-1,3),(0,3,-5) \rangle .$$

y por lo tanto

$$\mathrm{rg}(A) = 2.$$

Determinemos una conjunto de ecuaciones.

$$(x,y,z) = \alpha(1,-1,3) + \beta(0,3,-5).$$

Luego

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= -\beta + 3\beta \\ z &= 3z - 5\beta \end{aligned}$$

realizando algunas manipulaciones algebraicas obtenemos la ecuación del plano $3z = 4x - 5y$. Por lo tanto

$$\mathrm{Fi}(A) = \langle (1,-1,3),(0,3,-5) \rangle = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 5y - 3z = 0 \right\}.$$

Ahora queremos determinar el espacio columna $\mathrm{Co}(A)$. Recordemos que los vectores columnas que están ubicados en esos pivotes de la matriz U generan el espacio $\mathrm{Co}(A)$. Es decir:

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Ahora nos piden determinar las ecuaciones que definen al espacio $\mathrm{Co}(A)$. Para ello vamos a determinar las ecuaciones del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ para que el mismo sea consistente. Es decir, debemos determinar las condiciones para que un vector $\vec{b}$ sea combinación lineal de los vectores columna de A:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

Para ello debemos escalonar la matriz aumentada $(A \mid b)$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. En este caso

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & b_1 \\ 2 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -3 & 5 & b_3 \end{array}\right) \overset{2F_1-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & 5 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & -3 & 5 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & 5 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 - b_2 - b_3 \end{array}\right).$$

Luego como el rango de la matriz es 2, la última fila define la ecuacion

$$2b_1 - b_2 - b_3 = 0.$$

Esta ecuación nos permite dar una descripción cartesiana del espacio $\mathrm{Co}(A)$. Sustituyendo las variables b_1, b_2 y b_3 por las usuales x, y y z podemos escribir

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\right\}.$$

Es claro que $\mathrm{Co}(A)$ corresponde a un plano en $\mathbb{R}^3$. Si queremos podemos determinar las ecuaciones paramétricas procedemos de la siguiente forma. De la ecuacion $2x - y - z = 0$ despejamos, por ejemplo z, obteniendo $z = 2x - y$. Entonces

$$(x, y, z) = (x, y, 2x - y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, -1)\right\}.$$

Notemos que los vectores obtenidos no coinciden con los vectores columnas $c_1 = (1, 2, 0)$ y $c_2 = (-1, 1, -3)$, pero es sencillo comprobar que los vectores satisfacen a la ecuación $2x - y - z = 0$.
El lector puede comprobar que se llega al mismo resultado utilizando los vectores columnas que generan al espacio $\mathrm{Co}(A)$, y que habíamos determinado anteriormente.
Para determinar el espacio $\mathrm{N}(A)$ determinamos las soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$. Escalonando la matriz A obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto obtenemos un sistema compatible con infinitas soluciones y que están dadas por

$$\begin{cases} x &= -\dfrac{4}{3}z \\ y &= \dfrac{5}{3}z \end{cases}.$$

Podemos llamar $t = z$ y obtenemos que el conjunto de vectores de $\mathrm{N}(A)$ son los puntos que están sobre la recta con vector director $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1)$. Es decir

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1).\right\} = \left\langle(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1)\right\rangle.$$

Notemos que

$$\dim \mathrm{N}(A) = 1$$

y como el $\mathrm{rg}(A) = 2$, entonces

$$\dim \mathrm{N}(A) + \mathrm{rg}(A) = 3 = \text{cantidad de filas de la matriz } A.$$

Por último, observemos que cada vector generador del espacio fila $\mathrm{Fi}(A)$ es ortogonal al vector que genera el espacio nulo $\mathrm{N}(A)$. Es decir:

$$(1,-1,3).(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},1) = 0$$

y

$$(0,3,-5).(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},1) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^{\perp}.$$

Veamos ahora que $\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^{\perp}$. Primero determinamos $\mathrm{N}(A^t)$. Escalonamos la matriz A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1-F_2]{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos las ecuaciones

$$x+2y = 0 \text{ y } x-z = 0.$$

Despejando

$$\begin{aligned} x &= -2y \\ z &= y \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x,y,z) = (-2y,y,y) = y(-2,1,1)$. Entonces

$$\mathrm{N}(A^t) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(-2,1,1)\right\} = \langle(-2,1,1)\rangle.$$

Para comprobar que $\mathrm{N}(A^t)$ es ortogonal a $\mathrm{Co}(A)$ es suficiente comprobarlo con los vectores de las bases. Entonces

$$\begin{aligned} (-2,1,1)(1,0,2) &= -2+0+2 = 0 \\ (-2,1,1)(0,1,-1) &= 0+1-1 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^{\perp}.$$

3. Como $\mathrm{N}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},1).\right\} = \left\langle(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},1)\right\rangle$, entonces

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{Co}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ahora debemos hallar una matriz Y tal que $\mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(Y)$. Conociendo que $\mathrm{Co}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\right\}$, entonces la matriz $Y = (2,-1,-1)$ es tal que

$$\mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(Y),$$

pues

$$(2,-1,-1)_{1\times 3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = 2x - y - z.$$

Ejemplo 4.3

Determine un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tal que su conjunto solución sea

$$D = \langle(-2,1,0),(3,0,1)\rangle + (1,2,-1).$$

Solución

Recordemos que la solución S de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ está dada como la solución del homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$ más una solución particular s_p del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Es decir,

$$S = \mathrm{N}(A) + s_p.$$

En este caso nos están dando $\mathrm{N}(A) = D$. Luego debemos determinar una matriz A tal que

$$\mathrm{N}(A) = \langle(-2,1,0),(3,0,1)\rangle.$$

Es decir, tenemos los vectores que generan al espacio $\mathrm{N}(A)$ pero no tenemos la matriz A. Recordemos que $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^{\perp}$, es decir, $\mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)$. Entonces

$$f = (x,y,z) \in \mathrm{Fi}(A) = \mathrm{N}(A)^{\perp} = \langle(-2,1,0),(3,0,1)\rangle^{\perp}$$

sii

$$f\cdot(-2,1,0) = 0 \text{ y } f\cdot(3,0,1) = 0$$

sii

$$-2x + y = 0 \text{ y } 3x + z = 0.$$

Es sencillo ver $y = -2x$ y $z = -3x$. Entonces el conjunto solución está dado por los vectores $(x,y,z) = t(1,-2,3)$. Es decir,

$$(x,y,z) \in \mathrm{Fi}(A) \text{ sii } (x,y,z) = t(1,-2,3).$$

Haciendo $t = 1$ obtenemos una fila de A. Cualquier otro valor de t dará una fila que es combinación lineal de la fila $(1,-2,3)$. Entonces $A = (1,-2,3)$ es la matriz buscada. Podemos observar que

$$(1,-2,3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 2y + 3z = 0.$$

Ahora como $(1,2,-1)$ es una solución particular podemos hallar b. Entonces

$$(1,-2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 4 - 3 = -6.$$

Notemos que la matriz A también se puede obtener del siguiente modo. Tomemos un vector genérico (x,y,z). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(x,y,z) \in \mathrm{N}(A) = \langle (-2,1,0),(3,0,1) \rangle$$

si y sólo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z) = \alpha(-2,1,0) + \beta(3,0,1)$$

si y sólo si el sistema siguiente es compatible

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta & = x \\ \alpha & = y \\ \beta & = z \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{b}$$

sii

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$$

Entonces escalonamos la matriz ampliada y obtenemos

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & | & x \\ 0 & 3 & | & 2y+x \\ 0 & 0 & | & 2y+x-z \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) \Leftrightarrow 2y+x-z=0.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Por el Teorema 4.9 tenemos que

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{Co}(A^t)^{\perp} = \mathrm{Fi}(A)^{\perp} \text{ y } \mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^{\perp} = \mathrm{Fi}(A^t).$$

Como $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S$, para cualquier subespacio de $\mathbb{R}^k$, obtenemos que

$$\mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{Co}(A^t) = \mathrm{Fi}(A) \text{ y } \mathrm{N}(A^t)^{\perp} = \mathrm{Co}(A) = \mathrm{Fi}(A^t)^{\perp}.$$

Entonces

$$\mathrm{Co}(A) \oplus \mathrm{Co}(A)^{\perp} = \mathbb{R}^n.$$

Esto quiere decir que dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ existen vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$v = v_1 + v_2,\ \vec{v}_1 \in \mathrm{Co}(A),\, v_2 \in \mathrm{Co}(A)^{\perp} \text{ y } v_1 \cdot v_2 = \vec{0}.$$

Este hecho será de suma importancia más adelante cuando estudiemos proyecciones de un vector sobre un subespacio.

4.10. Coordenadas de un vector

La propiedad más importante de una base de un espacio vectorial V es que todo vector se puede escribir de forma única como combinación lineal de los vectores de la base. Para que quede bien claro lo dejamos expresado en el siguiente teorema, cuya demostración queda para el lector.

Teorema 4.12

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Entonces todo vector $v \in V$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de vectores de la base. Es decir, existen únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Definición 4.1

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Entonces los únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que permiten expresar a un vector v como combinación lineal (ordenada) de los elementos de la base B

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

se denominan l*as coordenadas del vector* v en la base B, o relativas a la base B o vector de coordenadas de v respecto de la base B.

Cuando hablamos de las coordenadas de un vector en una base es importante el orden en que están dados los vectores de la base, pues al cambiar el orden también cambian las coordenadas. En toda esta sección y en las siguientes cuando hablemos de base estaremos suponiendo que son bases ordenadas. En general escribiremos $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para indicar una base ordenada.

Las coordenadas las coordenadas del vector v en una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ se suelen escribir como un vector columna en la siguiente forma

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ o } [v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t .$$

Notemos que coordenadas de un vector permiten relacionar cualquier espacio vectorial con una base finita de n vectores con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ pues a cada vector $v \in V \in$ le podemos asociar su vector coordenadas $[v]_B \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.1

Veamos algunos ejemplos de coordenadas de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1. Consideremos el vector $v = (3,2)$ de $\mathbb{R}^2$ y las bases

$$E = \{(1,0),(0,1)\} \text{ y } B = \{(1,-1),(1,0)\} .$$

Entonces

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{pues} \quad v = \mathbf{3}(1,0) + \mathbf{2}(0,1)$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{pues} \quad v = (-\mathbf{2})(1,-1) + \mathbf{5}(1,0)$$

2. Consideremos el vector $v = (-3,2,4)$ y a las bases

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \text{ y } B = \{(1,1,0),(1,0,-1),(0,0,2)\} .$$

Entonces

$$[v]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{pues} \quad (-3,2,4) = \mathbf{3}(1,0,0) + \mathbf{2}(0,1,0) + \mathbf{4}(0,0,1)$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{pues} \quad (-3,2,4) = \mathbf{2}(1,1,0) + (-\mathbf{5})(1,0,-1) + (-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})(0,0,2).$$

Más adelante veremos como determinar las coordenadas de un vector en una base dada.

Como se mostró en el ejemplo anterior para el caso $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, las coordenadas de un vector $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ respecto a base canónica

$$E = \{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), e_n = (0,0,\ldots,1)\}$$

son las componentes del vector pues

$$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,0,\ldots,1).$$

Es decir, en la base canónica el las componentes del vector coinciden con sus coordenadas.

Llegado a este punto tenemos el siguiente interrogante

¿Como determinar las coordenadas de un vector en una base distinta a la canónica?

Para simplificar, vamos a explicar el procedimiento con un ejemplo en $\mathbb{R}^2$,pero el mismo se puede extender a $\mathbb{R}^3$ y en general a $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.2

Consideremos un vector $v = (3,2) \in \mathbb{R}^2$ y consideremos una base $B = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (2,1)\}$. Si queremos determinar las coordenadas del vector v en la base B deberemos encontrar escalares α_1 y α_2 tal que

$$(3,2) = \alpha_1 (1,-1) + \alpha_2 (2,1).$$

Esto se resuelve planteando un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $\alpha_1 = \frac{5}{3}$ y $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ cambia las coordenadas de v en la base B a la base canónica. Es decir, si miramos al vector como un vector columna tenemos

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = [v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v]_B.$$

Entonces

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v]_B$$

.

La matriz

$$M_B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

es la *matriz asociada a la base* B. También se dice que la matriz M_B es la matriz cambio de base de la base B a la base canónica. Notemos que se forma colocando como vectores columnas a los vectores de la base.

Ejemplo 4.3

En el espacio $\mathbb{R}^2$ consideremos la base

$$B = \{(2,1),(1,3)\}.$$

1. Determinar las coordenadas del vector $v = (8,9)$.
2. Determinar las coordenadas de un vector genérico $v = (x,y)$.
3. Si las coordenadas de un vector w son $[w] = (2,-1)^t$, determinar el vector w.

Lo primero que debemos hacer es expresar al vector v como combinación lineal de los vectores de B. Entonces

$$\begin{aligned} v &= \alpha(2,1) + \beta(1,3) \\ &= (2\alpha,\alpha) + (\beta,3\beta) \\ (8,9) &= (2\alpha+\beta,\alpha+3\beta) \end{aligned}$$

Entonces queda planteado el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta &= 8 \\ \alpha+3\beta &= 9 \end{cases}$$

Escrito en la forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M_B} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{[v]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}}_{v}$$

Resolviendo este sistema encontramos que

$$\alpha = 3 \text{ y } \beta = 3.$$

Por lo tanto las coordenadas del vector $v = (8,9)$ en la base $B = \{u,w\}$ son

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geométricamente, las coordenadas del vector nos dicen como se mueve desde el origen hasta el punto $(8,9)$, desplazandose primero en la dirección del vector $u = (2,1)$, y después en la dirección del vector w. En forma similar, si cambiamos el orden de la base, es decir, tomamos como base ordenada $B' = \{(1,3),(2,1)\}$, entonces obtendremos

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En este caso nos movemos primero en la dirección de w y después en la dirección de u.
2. Consideremos un vector genérico $v = (x,y)$. Realizamos el mismo procedimiento que en apartado anterior.

$$(x,y) = \alpha(2,1) + \beta(1,3)$$

En notación matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M_B} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{[v]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v}$$

Entonces para resolver este sistema debemos escalonar la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -5 & x-2y \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \frac{6}{5}x-\frac{2}{5}y \\ 0 & -1 & \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y \end{array}\right)$$

Entonces $2\alpha = \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}y$ y $-\beta = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y$. Por lo tanto las coordenadas de cualquier vector genérico $v = (x, y)$ en la base B son

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10}x - \frac{2}{10}y \\ \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}x \end{pmatrix}$$

Notemos que la fórmula anterior nos sirve para hallar las coordenadas del vector $v = (8, 9)$ calculadas en el apartado anterior, pues

$$\alpha = \frac{6}{10}8 - \frac{2}{10}9 = \frac{48}{10} - \frac{18}{10} = \frac{30}{10} = 3$$
$$\beta = \frac{2}{5}9 - \frac{1}{5}8 = \frac{18}{5} - \frac{8}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

3. Sea $[w]_B = (2, -1)^t$. Ahora nos dan las coordenadas del vector $w = (x, y)$ en la base B. Entonces

$$\begin{aligned}(x,y) &= \alpha(2,1) + \beta(1,3) = 2.(2,1) + (-1)(1,3) \\ &= (4,2) + (-1,-3) = (3,-1).\end{aligned}$$

Entonces el vector w es

$$w = (3, -1).$$

De los anteriores ejemplos deducimos que si tenemos un espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces podemos escribir

$$v = [v]_E = M_B\,[v]_B\,,$$

donde M_B es laa matriz cuyas columnas son los vectores de la base B y se llama matriz cambio de base de la base B a la base canónica E.
Como las columas de la matriz M_B son vectores linealmente independientes, entonces la matriz $M_B$tiene inversa M_B^{-1}. Entonces

$$[v]_B = M_B^{-1}\,[v]_E\,.$$

Entonces podms decir que la matriz M_B^{-1} es la matriz cambio de coordenadas de la base canónica E a la base B.

Sabemos que las coordenadas de los elementos de la base son justamente la base canónica de $\mathbb{R}^n$ pues asociada a la base

$$\begin{aligned}
v_1 = v_1 &= 1\,v_1 + 0\,v_2 + \cdots + 0v_n & \Rightarrow [v_1]_B & = (1, 0, \ldots, 0) \\
v_2 = v_2 &= 0\,v_1 + 1\,v_2 + \cdots + 0v_n & \Rightarrow [v_2]_B & = (0, 1, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
v_n = v_n &= 0\,v_1 + 0\,v_2 + \cdots + 1v_n & \Rightarrow [v_n]_B & = (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto nos surge la siguiente pregunta: Dada la base B, y $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente,

¿que ocurre con los vectores coordenadas $[w_1]_B, [w_2]_B, \ldots, [w_n]_B$?

Ahora daremos la respuesta, pero antes debemos dar un resultado técnico.

Lema 4.1 Sea V un espacio de dimensión finita y sea B una base. Entonces para cada par de vectores $v, u \in W$ y cada par de escalares α, β, tenemos que

$$[\alpha u + \beta v]_B = \alpha [u]_B + \beta [v]_B .$$

Teorema 4.13

Sea V un espacio de dimensión n y sea B una base. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. El conjunto $\{w_1, \ldots, w_k\}$ es linealmente indpendiente.
2. El conjunto de vectores $\{[w_1]_B, \ldots, [w_k]_B\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.

Es Teorema anterior es interesante en el sentido que nos permite estudiar conjunto linealmente independientes de vectores de un espacio V de dimensión n con conjuntos de vectores linealmente independientes en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.1

Si V es un espacio de dimensión 3 y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base, estudiar que condiciones debe satisfacer la constante $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que el conjunto de vectores

$$L = \{av_1 - v_2 + v_3, v_1 + av_2 - 3v_3, 3v_1 - 4v_2 + 5v_3\}$$

sea linealmente independiente.

Solución

De acuerdo al Teorema 4.10 podemos analizar las coordenadas de los vectores de L. Luego

$$\begin{aligned} [av_1 - v_2 + v_3]_B &= (a, -1, 1)^t \\ [v_1 + av_2 - 3v_3]_B &= (1, a, -3)^t \\ [3v_1 - 4v_2 + 5v_3]_B &= (3, -4, 5)^t . \end{aligned}$$

Para saber si este conjunto es linealmente independiente podemos determinar los casos donde el siguiente determinante es distinto de cero

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ -1 & a & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} &= 5a^2 + 9 - 4 - 3a - 12a + 5 = 5a^2 - 15a + 10 \\ &= 5\left(a^2 - 3a + 2\right) = 5(a-1)(a-2) . \end{aligned}$$

Entonces $|A| \neq 0$ si y sólo si $a \neq 1$ y $a \neq 2$. Por lo tanto para $a = 2$ o $a = 1$ el conjunto no es linealmente independiente.

En el siguiente ejemplo tenemos los vectores y sus coordenadas en cierta base B. Se nos pide determinar dicha base.

Ejemplo 4.2 Determinación de una base conociendo los vectores y sus coordenadas

Sea $B=\{w_1,w_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Dados los vectores $v=(2,3)$ y $u=(1,-2)$ y sus coordenadas $[v]_B=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ y $[u]_B=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$,determinar los vectores de la base B.

Solución
Como B es una base, para vector (x,y) del espacio $\mathbb{R}^2$ existen escalares α y β tales que

$$(x,y)=\alpha w_1+\beta w_2.$$

Lo que nos están dando como datos son dos vectores junto con sus coordenadas en la base B. Entonces expresamos cada vector como combinación lineal de los vectores de la base. Por lo tanto formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases}(2,3) & = & \alpha_1 w_1+\beta_1 w_2 & = & \frac{8}{3}w_1+\frac{1}{3}w_2\\ (1,-2) & = & \alpha_2 w_1+\beta_2 w_2 & = & (-1)w_1+(-1)w_2\end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3

$$(6,9)=8w_1+w_2.$$

Entonces

$$w_2=(6,9)-8w_1.$$

Sustituimo en la segunda ecuación

$$(1,-2)=-w_1-((6,9)-8w_1)=7w_1-(6,9)$$

Luego

$$w_1=(1,1)$$

.
Con este valos podemos determinar w_2

$$w_2=(6,9)-8w_1=(6,9)-(8,8)=(-2,1).$$

Por lo tanto la base es

$$B=\{(1,1),(-2,1)\}.$$

4.11. Matriz cambio de base

De acuerdo al ejemplo 4.10 vimos que un mismo vector tiene coordenadas distintas respecto de diferentes bases. Ahora estudiaremos como se relacionan las coordenadas de un vector cuando usamos bases distintas.

Consideremos dos bases

$$B_1=\{v_1,\ldots,v_n\} \text{ y } B_2=\{u_1,\ldots,u_n\}$$

de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Supongamos $w\in V$ y que conocemos su expresión como combinación lineal de los vectores de la base B_1:

$$w=c_1v_1+\ldots+c_nv_n.$$

Nuestro propósito es conocer como se escribe el vector w como combinación lineal de los vectores de la otra base, es decir, queremos saber cuales son las coordenadas de w en la base B_2.

Esquemáticamente tenemos las siguiente situación

$$\text{conocemos } [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ y queremos conocer } [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

El propósito es determinar un procedimiento que nos permita conocer las coordenadas en la base B_2 de un vector w cuando conocemos las coordenadas de dicho vector en la base B_1.

Definición 4.1

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_2\}$ dos bases de V. La matriz

$$\boxed{P_{B_1B_2} = \left([v_1]_{B_2} \ldots [v_n]_{B_2}\right),}$$

cuyas columnas son las vectores coordenadas $[v_1]_{B_2}, \ldots, [v_n]_{B_2}$ escritos como columnas, se llama matriz cambio de base de la base B_1 a la base B_2.

El siguiente teorema nos dice como calcular las coordenadas de un vector en una base B_2 cuando conocemos las coordenadas del vector en una base B_1.

Teorema 4.14

Sea V un espacio vectorial. Sean

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } B_2 = \{u_1, \ldots, u_2\}$$

dos bases de V. Para cada vector $v \in V$

$$\boxed{[v]_{B_2} = P_{B_1B_2}\,[v]_{B_1},}$$

Los vectores columna de $P_{B_1B_2}$ son linealmente independientes (pues son las coordenadas de un conjunto de vectores linealmente independientes). Entonces existe la inversa $(P_{B_1B_2})^{-1}$. Luego podemos multiplicar a ambos lados la ecuación

$$[v]_{B_2} = P_{B_1B_2}\,[v]_{B_1},$$

y obtenemos

$$(P_{B_1B_2})^{-1}\,[v]_{B_2} = (P_{B_1B_2})^{-1}P_{B_1B_2}\,[v]_{B_1} = [v]_{B_1}.$$

Es decir,

$$[v]_{B_1} = (P_{B_1B_2})^{-1}\,[v]_{B_2}.$$

Entonces la matriz cambio de base de B_2 a B_1 es la matriz $(P_{B_1B_2})^{-1}$. Es decir,

$$\boxed{P_{B_2B_1} = ([u_1]_{B_1} \ldots [u_n]_{B_1}).}$$

El siguiente diagrama resume la situación:

$$\begin{tikzcd} {[w]_{B_1}} \arrow[rr, bend left, "P_{B_1B_2}"] & & {[w]_{B_2}} \arrow[ll, bend left, "P_{B_2B_1}"] \end{tikzcd}$$

Ahora vamos a especificar un procedimiento general que podemos realizar cuando queremos cambiar de una base vieja B_1 a una base nueva B_2.

Procedimiento para calcular la matriz $P_{B_1B_2}$.

1. Formamos la matriz $(B_2 \mid B_1)$, donde las columnas corresponden a los vectores de las bases B_2 y B_1, repectivamente.

2. Por medio de operaciones elementales entre filas reducimos la matriz $(B_2 \mid B_1)$ a la matriz en la forma reducida. Entonces obtenemos una matriz de la forma
$$(I \mid P_{B_1B_2}).$$

3. La matriz $P_{B_1B_2}$ es la matriz de cambio de la base B_1 a la base B_2.

$$(\text{base nueva} \mid \text{base vieja}) \xrightarrow{\text{operaciones elementales entre filas}} (I \mid \text{matriz de transición } P_{B_1B_2})$$

N Si tenemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y E es la base canónica, entonces las matrices de cambios en este caso son más sencillas de calcular.
La matriz P_{BE} de cambio de base de la base B a la base canónica E es directamente la matriz asociada a la base M_B, que se determina colocando los vectores de la base B como columnas de la matriz B. Es decir:
$$P_{BE} = ([v]_E \ldots [v_n]_E) = (v_1 \ldots v_n) = M_B,$$
donde recordemos que cualquier vector v en la base canónica coinciden con las componentes del vector, es decir, $v = [v]_E$.
Por lo tanto, la matriz de cambio de la base E a la base B es
$$P_{EB} = (P_{BE})^{-1} = M_B^{-1}.$$
Luego
$$v = [v]_E = P_{BE}[v]_B = M_B [v]_B,$$
y
$$[v]_B = P_{EB}[v]_B,$$
para cualquier vector $v \in V$.

$$\begin{tikzcd}
{[w]_B} \arrow[r, bend left, "M_B"] & w = [w]_E \arrow[l, bend left, "M_B^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.1

Dada la base canónica E de $\mathbb{R}^3$, encuentre las coordenadas del vector
$$v = 2e_1 - e_2 + 3e_3$$
respecto a la base
$$B = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (0,-1,1)\}.$$

Solución
Como $v = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, entonces
$$[v]_E = (2,-1,3)^t.$$

Para calcular $[v]_B$ aplicamos la identidad

$$[v]_B = P_{EB}\,[v]_E = M_B^{-1}\,[v]_E\,.$$

Recordemos que $P_{EB} = M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que $P_{BE} = P_{EB}^{-1} = M_B^{-1}$. Entonces calculamos la inversa de la matriz M_B obtenemos

$$M_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el vector v se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base B como sigue

$$(2,-1,3) = 4\,(1,1,-1) + (-2)\,(1,-1,0) + 7\,(0,-1,1)\,.$$

Ejemplo 4.2

Hay un caso particularmente sencillo de cálculo de la matriz de cambio de base y es cuando los vectores de una de las bases están directamente escritos como combinación lineal de los elementos de la otra base. Por ejemplo, supongamos que V es un espacio de dimensión 2 y consideremos dos bases

$$B_1 = \{v_1, v_2\} \text{ y } B_2 = \{u_1 = 2v_1 + 3v_2, u_2 = -v_1 + 2v_2\}\,.$$

En este caso los vectores de la base B_2 están dados como combinación lineal de los vectores de la base B_1. Por lo tanto como

$$[u_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } [u_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$P_{B_2B_1} = \left([u_1]_{B_1}\,[u_2]_{B_1}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3

Consideremos las bases

$$B_1 = \{(1,-3),(2,1)\}\,,$$
$$B_2 = \{(1,-2),(1,1)\}\,,$$

y la base canónica

$$E = \{(1,0),(0,1)\}\,.$$

1. Determinar las matrices de cambio de base $P_{B_1B_2}$, $P_{B_2B_1}$,
2. Determinar las matrices P_{B_1E}, P_{EB_1}, P_{EB}, y P_{B_2E}.
3. Comprobar que $P_{B_1B_2} = P_{EB_2}P_{B_1E} = M_{B_2}^{-1}M_{B_1}$ (producto de matrices). Hacer un diagrama de esta situación.

Solución

1. Primero vamos a determinar la matriz cambio de base

$$P_{B_1B_2} = ([(1,-3)]_{B_2} \mid [(2,1)]_{B_2}).$$

Entonces determinemos las coordenadas de los vectores $(1,-3)$ y $(2,1)$ en la base B_2.

$$\begin{aligned}(1,-3) &= c_1(1,-2)+c_2(1,1)\\ (2,1) &= d_1(1,-2)+d_2(1,1)\end{aligned}$$

Igualando componente a componente obtenemos dos sistemas y sus matrices ampliadas

$$\left\{\begin{array}{rcr} c_1+c_2 &=& 1\\ -2c_1+c_2 &=& -3\end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{array}\right)$$

y

$$\left\{\begin{array}{rcr} d_1+d_2 &=& 2\\ -2d_1+d_2 &=& 1\end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Resolvemos el primer sistema. Utilizamos Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Por lo tanto obtenemos

$$c_1 = -\frac{4}{3} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Entonces

$$[(1,-3)]_{B_2} = \left(\begin{array}{r} \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{array}\right).$$

Ahora debemos resolver el segundo sistema:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{5}{3}\end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{5}{3}\end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$[(2,1)]_{B_2} = \left(\begin{array}{r} \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz cambio de base es

$$P_{B_1B_2} = \left(\begin{array}{rr} \frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{array}\right)$$

Otra forma. Como los coeficientes de los sistemas son los mismo podemos hacer los cálculos en una sola matriz ampliada como se muestra a continuación

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)}_{(M_{B_2}|M_{B_1})}$$

Observemos que la primer matriz se forma con los vectores de la base B_1 y la segunda matriz se forma con los vectores de la segunda base B_2. Escalonamos para llevar la matriz M_{B_2} a la matriz identidad, o lo que es lo mismo, escalonamos para obtener una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{array}\right) = (I \mid P_{B_1B_2})$$

Teniendo la matriz $P_{B_1B_2}$ podemos determinar la matriz de cambio de base de B_2 a B_1 calculando la inversa de la matriz $P_{B_1B_2}$

$$P_{B_2B_1} = P_{B_1B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

2. Determinemos la matriz P_{B_1E}. Este caso es mucho más sencillo pues recordemos que las coordenadas y las componentes de un vector en la base canónica coinciden. Entonces

$$[(1,-3)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ y } [(2,1)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y en consecuencia

$$P_{B_1C} = ([(1,-3)]_E \mid [(2,1)]_E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_1}$$

Si calculamos la inversa de esta matriz obtenemos la matriz de paso P_{EB_1}:

$$P_{EB_1} = M_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Razonando de igual forma obtenemos

$$P_{B_2E} = M_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P_{EB_2} = M_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Finalmente queda como ejercicio comprobar que $P_{B_1B_2} = P_{EB_2}P_{B_1E} = M_{B_2}^{-1}M_{B_1}$.

N Otra forma equivalente para hallar la matriz cambio de base

En el ejemplo anterior surge otra forma de calcular la matriz cambio de base, utilizando las matrices asociadas a las bases.

En general, si tenemos un vector w y dos bases B_1 y B_2 de $\mathbb{R}^n$, entonces teniendo en cuenta la ecuación matricial el vector w se escribe como

$$w = M_{B_1}\,[w]_{B_1} \text{ y } w = M_{B_2}\,[w]_{B_2}.$$

Entonces

$$M_{B_1}\,[v]_{B_1} = M_{B_2}\,[v]_{B_2}.$$

Como las matrices M_{B_1} y M_{B_2} están formadas por vectores columnas linealmente independientes, entonces son no singulares, es decir, existen las matrices inversas $M_{B_1}^{-1}$ y $M_{B_2}^{-1}$. Luego de la anterior igualdad podemos obtener dos identidades

$$\boxed{[w]_{B_1} = M_{B_1}^{-1}M_{B_2}\,[w]_{B_2}}$$

y

$$\boxed{[w]_{B_2} = M_{B_2}^{-1}M_{B_1}\,[w]_{B_1}.}$$

Estas expresiones permiten cambiar las coordenadas de un vector desde una base a otra. La primera identidad sirve para conocer las coordenadas de v en la base B_1 conociendo las coordenadas de v en la base B_2. Lo mismo para la segunda identidad.

Por lo tanto hemos obtenido otra forma de calcular las matrices de cambio de base:

$$\boxed{P_{B_2B_1} = M_{B_1}^{-1}M_{B_2}}$$

y

$$\boxed{P_{B_1B_2} = M_{B_2}^{-1} M_{B_1}\,.}$$

Por otra parte, es sencillo ver que

$$P_{B_1E} = M_{B_1} \text{ y } P_{EB_2} = M_{B_2}^{-1}\,.$$

Teniendo en cuenta las anteriores identidades podemos hacer un diagrama para recordar como calcular las matrices cambio de base.

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[rr, "P_{B_1B_2}"] \arrow[dr, "P_{B_1E}=M_{B_1}"'] & & B_2 \\
& E \arrow[ur, "P_{CB_2}=M_{B_2}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.4

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ las bases

$$B_1 = \{u_1, u_2, u_3\} \text{ y } B_2 = \{v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3, v_2 = u_1 + 2u_3, v_3 = -u_1 + u_2 + 3u_3\}\,.$$

Determinar la matrices de cambio de base $P_{B_1B_2}$ y $P_{B_2B_1}$. Determinar el vector $v = (x, y, z)$sabiendo que $[v]_{B_1} = (2, -1, 3)^t$.

Solución

Dado que

$$\begin{array}{lcll}
v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3 & \Rightarrow & [v_1]_{B_1} & = (2, -1, 1)^t \\
v_2 = u_1 + 2u_3 & \Rightarrow & [v_2]_{B_1} & = (1, 0, 2)^t \\
v_3 = -u_1 + u_2 + 3u_3 & \Rightarrow & [v_3]_{B_1} & = (-1, 1, 3)^t
\end{array}$$

Por lo tanto tenemos la siguiente matriz

$$P_{B_2B_1} = \left([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1}\ [v_3]_{B_1}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz dará la otra matriz de cambio

$$P_{B_1B_2} = (P_{B_2B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Luego tenemos la ecuación matricial

$$[v]_{B_1} = P_{B_2B_1}\,[v]_{B_2}\,.$$

Por lo tanto si v tiene como coordenadas en B_1 al vector $[v]_{B_1} = (2, -1, 3)^t$, entonces sus coordenadas respecto a la base B_2 se obtienen resolviendo el sistema

$$[v]_{B_2} = P_{B_1B_2}\,[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sea V un espacio vectorial de dimensión. Como toda matriz de cambio de base es una matriz inversible, entonces cualquier matriz A de tamaño $n \times n$, se puede ver como la matriz de cambio de una base de V. Es decir, si A es inversible y

$$A = (u_1\, u_2 \ldots u_n),$$

donde u_i son las columnas de la matriz A, entonces el conjunto de vectores columna de A son linealmente independientes. Por lo tanto el conjunto de vectores $B = \{v_1^t, \ldots, v_n^t\}$ se puede considerar como una base y en consecuencia

$$A = P_{BE}.$$

Por ejemplo, se puede comprobar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

es inversible, pues $\det A \neq 0$. Por lo tanto A es la matriz de cambio de base de la base

$$\{(1,2,1), (-2,2,4), (3,0,5)\}$$

a la base canónica $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$, es decir, $A = P_{BE} = M_B$.

4.12. Algunos ejercicios resueltos

Ejemplo 4.5

Demostrar que
$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,1), (-2,0,1), (1,0,1) \rangle .$$

Solución

Primera forma

Debemos probar que para cualquier vector $v = (x,y,z)$ existen escalares $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que
$$(x,y,z) = a(1,2,1) + b(-2,0,1) + c(1,0,1).$$

De esta ecuación obtenemos un sistema
$$\begin{cases} x &= a - 2b + c \\ y &= 2a \\ z &= a + b + c \end{cases}$$

Podemos escalonar la matriz aumentada
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{x-z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3y+2x+4z}{6} \end{array}\right)$$

Luego
$$\begin{cases} a &= \frac{y}{2} \\ b &= \frac{z-x}{3} \\ c &= -\frac{y}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{x}{3} \end{cases}$$

De esta forma hemos demostrado que para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ existen valores $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que
$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,2,1) + b(-2,0,1) + c(1,0,1). \\ &= \left(\frac{y}{2}\right)(1,2,1) + \left(\frac{z-x}{3}\right)(-2,0,1) + \left(-\frac{y}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{x}{3}\right)(1,0,1) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el vector $(2,-3,1)$ los valores adecuados para a,b y c son:
$$\begin{cases} a &= \frac{-3}{2} \\ b &= \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{2} \\ c &= -\frac{-3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

Segunda forma (más corta)

Otra forma de saber si el conjunto de vectores $(1,2,1), (-2,0,1)$, $(1,0,1)$ genera a $\mathbb{R}^3$ es analizar la matriz.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que esta matriz es cuadrada y que las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier matriz cuadrada de orden n:

1. A es inversible
2. $\mathrm{rg}(A) = n$

3. $\det A \neq 0$
4. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una *única* solución para todo vector columna $\vec{b}$.
5. El sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

Luego, como queremos saber si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución entonces estudiar el determinante de la matriz A. Si es no nulo entonces el sistema tendrá solución. Teniendo en cuenta las anteriores equivalencias y como

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+4 = 6 \neq 0,$$

entonces, para cada $\vec{b}$, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una única solución. Que es lo mismo decir que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores del conjunto dado. Por lo tanto este conjunto genera a $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.6 Base y dimensión del espacio nulo asociado a un sistema homogéneo

Determinar una base y la dimensión del espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + 4z &= 0 \\ -2x + 3y + z &= 0 \end{cases}$$

Solución

Recordemos que el espacio nulo asociado a un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es el conjunto de soluciones del sistema. La matriz que debemos considerar es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A es una matriz 2×3, entonces el subsespacio solución $\mathrm{N}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Reduciendo por filas obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overrightarrow{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \overrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

Luego obtenemos el sistema equivalente al anterior

$$\begin{cases} x + 13z &= 0 \\ y + 9z &= 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones implíctas o cartesianas del subespacio $\mathrm{N}(A)$. Es decir,

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 13z = 0 \text{ y } y + 9z = 0\right\}.$$

Hallemos ahora la ecuación vectorial y las paramétricas. Del sistema anterior obtenemos:

$$\begin{cases} x &= -13z \\ y &= -9z \end{cases}$$

$$(x,y,z) = (-13z, -9z, z) = z(-13, -9, 1).$$

Por lo tanto podemos escribir al conjunto solución como el conjunto de vectores

$$\mathrm{N}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(-13,-9,1), t \in \mathbb{R}\right\}$$

La base del subespacio $\mathrm{N}(A)$ es $B = \{(-13,-9,1)\}$ y la dimensión es 1. Notemos que el conjunto $\mathrm{N}(A)$ es el conjunto de vectores que se encuentran en la recta

$$\begin{cases} x = -13t \\ y = -9t \\ z = t \end{cases}.$$

Las ecuaciones anteriores se llaman también las ecuaciones *paramétricas* del subespacio $\mathrm{N}(A)$.

Ejemplo 4.7

Describir el espacio columna y el espacio nulo de la siguiente matriz. Interpretar geométricamente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Claramente como tenemos solo dos vectores columnas, estos no pueden generar todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Pero generan un subespacio que deberá ser o un plano que pasa por el origen o una recta que pasa por el origen.

El espacio columna es

$$\mathrm{Co}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Vamos a describir este espacio en términos de ecuaciones implícitas o cartesianas. Para ellos debemos plantear el sistema de ecuaciones correspondiente a esta matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

y escalonar la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 - (b_3 - 3b_1) \end{array}\right)$$

Por lo tanto tenemos una ecuación

$$b + b_1 - b_3 = 0.$$

Si escribimos en términos de variables x, y y z obtenemos una ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$. Es decir, el espacio columna de la matriz A corresponde al siguiente plano

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\right\}.$$

Ahora analizamos el espacio nulo $\mathrm{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : A\vec{x} = \vec{0}\right\}$. En este caso tenemos el sistema homogéneo asociado

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz A

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el rango de la matriz es 2. Por lo tanto tenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ 4y &= 0 \end{cases}$$

de donde $x=y=0$ y obtenemos

$$\mathrm{N}(A)=\{(0,0)\}.$$

Ejemplo 4.8

Consideremos el subespacio

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(3\alpha-\beta,\alpha+2\beta,-\alpha+2\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. Determinar matrices A, B y C tales que $\mathrm{Fi}(A)=\mathrm{Co}(B)=\mathrm{N}(C)=S$. Hallar las ecuaciones cartesianas que definen a S
2. Determinar el espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ de la matriz A encontrada en el punto anterior.

Solución

1. Las ecuaciones paramétricas del subespacio S se hallan directamente de la ecuación vectorial igualando componente a componente:

$$\begin{cases} x &= 3\alpha-\beta \\ y &= \alpha+2\beta \\ z &= -\alpha+2\beta \end{cases}$$

Determinamos los vectores que generan el subespacio S

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(3\alpha-\beta,\alpha+2\beta,-\alpha+2\beta)\\ &=\alpha(3,1,-1)+\beta(-1,2,2).\end{aligned}$$

Es claro que los vectores $(3,1,-1)$ y $(-1,2,2)$ son linealmente independientes y generan al subespacio S. Formamos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S=\mathrm{Fi}(A)=\langle(3,1,-1),(-1,2,2)\rangle.$$

Si tomamos la traspuesta de A tenemos que

$$S=\mathrm{Co}(A^t).$$

Por lo tanto la matriz $B=A^t$ es la matriz que genera el espacio columna buscado.
Para hallar la matriz C tal que $S=\mathrm{N}(C)$ debemos hallar las ecuaciones cartesianas que definen al espacio S y de ahí podremos determinar la matriz C:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & x \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & x \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{3y-x}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4x-5y+7z}{7} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la ecuación cartesiana que define al plano S es

$$4x-5y+7z=0.$$

Reescribiendo la ecuación hallamos la matriz C

$$4x-5y+7z=\underbrace{(4,-5,7)}_{C}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0.$$

Entonces

$$S=\mathrm{N}(C).$$

2. Para encontrar el espacio nulo $\mathrm{N}(A)$ debemos escalonar la matriz A para hallar las soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x}=\vec{0}$. En efecto

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+3F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego nos quedan las ecuaciones

$$3x+y-z=0 \text{ y } 7y+5z=0.$$

Entonces de la segunda ecuación obtenemos $y=-\frac{5}{7}z$. Sustituímos en la segunda obtenemos $3x-\frac{12}{5}z=0$. Entonces $x=\frac{4}{5}z$ y $y=-\frac{5}{7}z$. Por lo tanto

$$(x,y,z)=(\frac{4}{5}z,-\frac{5}{7}z,z)=z(\frac{4}{5},-\frac{5}{7},1).$$

Entonces

$$\mathrm{N}(A)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=t\,(\frac{4}{5},-\frac{5}{7},1)\right\}.$$

4.13. Ejercicios

Subespacios. Combinaciones lineales

Ejercicio 4.1. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios. Justificar la respuesta.

1. $S_7 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\right\}$
2. $S_3 = \{(x,y) : x = 0\}$.
3. $S_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 3y + 4z = 0\right\}$.
4. $S_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = s\,(1,0,-2) + t\,(3,2,1)\right\}$.
5. $S_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y,\, z = 3y\right\}$
6. $S_9 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y + z = 2\right\}$

Ejercicio 4.2. Interpretar geométricamente el subespacio S generado por el conjunto F, es decir $S = \langle F \rangle$. Indique en cada caso si el vector v pertenece al subespacio. Determinar que condiciones debe cumplirse para que un vector genérico $v \in S$.

1. $F = \{(1,2),(1,1)\}$, $v = (3,4)$.
2. $F = \{(1,2,3),(0,1,1)\}$, $v = (-2,-1,-3)$.
3. $F = \{(1,-1,-2),(-2,2,4)\}$, $v = (3,-3,6)$.
4. $F = \{(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-2,1,0)\}$, $v = (1,1,0,-1)$.

Independencia lineal. Bases

Ejercicio 4.3. Determinar en cada caso si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes. Hallar un sistema de ecuaciones paramétricas y cartesianas para cada subespacio generado.

1. $\{(1,-3),(-2,6)\}$, $\{(2,3),(1,0)\}$,
2. $\{(1,2,-1)\}$, $\{(2,-1,1),(-1,2,3)\}$.,
3. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$.
4. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 4.4. Determinar el valor de k para que cumpla las condiciones pedidas:

1. El vector $(1,2,0)$ sea combinación lineal del conjunto de vectores $\{(2,1,-1),(2,1+k,k),(2,2,1)\}$.
2. El vector $(1,-2,k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $u = (1,-1,4)$ y $v = (-2,3,1)$.
3. El conjunto de vectores $L = \{(0,k,k,k),(3,1,1,k),(k,0,0,2),(k,k,3,k)\}$ sea linealmente independiente.
4. El conjunto $S = \{(1,1,k),(k,1,1),(k,k,4)\}$ contiene a lo sumo dos vectores linealmente independientes.

Ejercicio 4.5. Supongamos que $L = \{u,v,w\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

1. $L_1 = \{3u, -4v, 5w\}$
2. $L_2 = \{2u, u-3v, u+v+w\}$
3. $L_3 = \{2u, u+3v, u-v-w, u-v\}$.
4. Para el conjunto $L_4 = \{u-2w, u+v, kw-u+v\}$, determinar si existen valores de k de tal forma que L_4 sea linealmente independiente.

Ejercicio 4.6. Encontrar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

1. $S = \langle(2,-1),(1,-2),(1,1)\rangle$.
2. $S = \langle(1,-1,3),(2,1,1),(0,-3,5)\rangle$
3. $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y = 0\right\}$.
4. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+3z = 0\right\}$.
5. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\, z-3y = 0\right\}$.
6. $S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+3w = 0,\, z = 4y\right\}$.

Ejercicio 4.7. Extensión de un conjunto LI a una base. Consideremos el conjunto de vectores linealmente independiente $\{(1,0,2),(2,-1,0)\}$. Extender este conjunto para obtener una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar una condición general que permita asegurar como deben ser los vectores $v = (x,y,z)$ tal que $\{(1,0,2),(2,-1,0),v\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

Subespacios fundamentales. Ecuaciones implícitas y paramétricas de subespacios

Ejercicio 4.8. Determinar los cuatro espacios fundamentales asociados a cada matriz. Determinar las ecuaciones cartesianas y las ecuaciones paramétricas los casos

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.9. Para cada subespacio S hallar matrices A, B y C tal que

$$S = \mathrm{Co}(A) = \mathrm{N}(B) = \mathrm{Fi}(C).$$

Determinar además las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas.

1. $S = \langle(-2,1,1),(3,-1,0)\rangle$.
2. $S = \langle(1,1,1),(-1,0,1),(0,1,2)\rangle$.
3. $S = \langle(-1,2,1),(0,1,2),(2,-1,3)\rangle$.
4. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-3z = 0\right\}$.
5. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t,\, y = -t,\, z = 3t,\, t \in \mathbb{R}\right\}$.
6. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+3z = 0,\, -x+y-z = 0,\, x-2y = 0\right\}$.
7. $S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 ; x-y+3z+w = 0,\, x+2y-z-3w = 0\right\}$
8. $S = \{(\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma, 0)\}$.

Intersección y suma de subespacios

Ejercicio 4.10. Hallar la intersección y la suma de los subespacios en cada caso. Determinar una base para la intersección y una base para la suma. Comprobar si es suma directa. Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

1. $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}, \quad S_2 = \langle(1,1,1)\rangle.$
2. $S_1 = \begin{cases} x+y+z & =0 \\ x-y-z+t & =0 \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} x+y-z-t & =0 \\ x-y+z-t & =0 \end{cases}.$
3. $S_1 = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1+x_2+\ldots+x_n=0\}$, $S_2 = \langle(1,1,0,\ldots,0), (1,-1,0,\ldots,0)\rangle.$
4. $S_1 = \langle(1,2,2),(0,1,1)\rangle$ y $S_2 = \langle(2,1,2),(1,0,-1)\rangle.$
5. $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y,\, z=2x\right\}$ y $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z=0\right\}.$

Ejercicio 4.11. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\, y=2z\right\}$$

y

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y,\, z=0\right\},$$

hallar un subespacio W cumpliendo las condiciones $T \subseteq W$ y $W \oplus S = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.12. Dados los siguientes subespacios

$$S_1 = \langle(0,1,-2),(1,1,0)\rangle, S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+hy-z=0\right\}$$

y

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{h^2-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\right\},$$

hallar $h \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $S_1 \cap S_2 = S$.

Ejercicio 4.13. Sean los subespacios

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x-y+az=0 \text{ y } 2x+y=0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3ay-z=0\right\}.$$

1. Determinar los posibles valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que $S_1 \subset S_2$.
2. Hallar los posibles valores de a tal que $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.14. Dados los subespacios

$$S_1 = \langle(1,2,1),(0,2,0)\rangle \text{ y } S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=y-kz=0\right\}.$$

1. Determinar los valores de k para los cuales $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.
2. Para $k=0$, comprobar que el vector $(3,2,1)$ puede expresarse de forma única como suma de un vector $v_1 \in S_1$ con un vector $v_2 \in S_2$.

Complemento ortogonal

Ejercicio 4.15. Dado el subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by+cz = 0\}$ determinar la ecuación vectorial de su complemento ortogonal.

Dado el subespacio $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(d,e,f)\}$, determinar la ecuación cartesiana de su complemento ortogonal.

Ejercicio 4.16. Para cada uno de los subespacios siguientes, determinar una base, hallar su complemento ortogonal, una base del complemento e indique su dimensión.

1. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-3z = 0\}$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-4z = 0,\ y-4z = 0\}$.
3. $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+2z-t = 0,\ x+y-z = 0\}$.
4. S está definido por el conjunto de ecuaciones $\begin{cases} x-y-z+t &= 0 \\ x+y+z+t &= 0 \\ x-y-z+t &= 0 \end{cases}$

Ejercicio 4.17. Dados los subespacios S y T de $\mathbb{R}^3$ determinar el subespacio W que cumpla las condiciones indicadas

1. $S = \langle(1,1,-1,2)\rangle$, $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-t = 0 \text{ y } z+t = 0\}$, $S^\perp \cap T = W$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+3z = 0\}$, $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ y } z = 0\}$,$T \subseteq W$ y $W \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.18. Dada la matriz A, hallar un subespacio S tal que el vector v se exprese como suma de un vector $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (2,1,-1)$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1,-1,0)$.

Ejercicio 4.19. Para cada matriz dada, determinar los espacios $\mathrm{Fi}(A)$, $\mathrm{Co}(A)$,$\mathrm{N}(A)$, y $\mathrm{N}(A^t)$. Determinar para cada espacio un conjunto generador y un sistema de ecuaciones que determine cada subespacio. Chequear luego dimensiones y comprobar que $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Fi}(A)^\perp = \mathrm{Co}(A^t)$ y $\mathrm{N}(A^t) = \mathrm{Co}(A)^\perp$.

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$(c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.20. Determinar el subespacio generado por los vectores indicados. Utilizando la igualdad $\mathrm{Co}(A)^\perp = \mathrm{N}(A^t)$, para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hallar una base y las ecuaciones implícitas de $S^\perp$.

1. $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.21. Consideremos el subespacio S_1 definido implicitamente por la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y el subespacio S_2 definido paramétricamente por la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinar $S_1 \cap S_2$.

Ejercicio 4.22. Utilizando la igualdad $\mathrm{N}(A)^{\perp}=\mathrm{Fi}(A)$, determine un sistema de ecuaciones $A\vec{x}=\vec{b}$ tal que su conjunto solución sea el siguiente subconjunto

$$\pi=\langle(-1,0,0,1),(1,1-1,0)\rangle+(1,2,0,2).$$

Coordenadas de un vector. Cambio de base

Ejercicio 4.23. Consideremos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$B_1=\{(1,1,1),(0,1,1),(2,0,1)\}.$$

1. Determinar las coordenadas del vector $v=(2,-3,2)$ en dicha base.
2. Conociendo que las coordenadas de un vector u son $[u]_B=(-1,3,2)^t$, encontrar el vector u.
3. Hallar las coordenadas de un vector genérico $v=(x,y,z)$

   en la base B.

Ejercicio 4.24. Dado el vector $v=(2,-1)$, determinar una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que las coordenadas de v en dicha base seas $[v]_B=(2,-3)^t$.

Ejercicio 4.25. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores, $u_1=(1,-2,1,3)$, $u_2=(2,-4,0,2)$, $u_3=(3,-6,1,5)$ y $u_4=(2,-4,-4,-6)$. Se pide

1. Determinar las ecuaciones implicitas o cartesianas que definen al subespacio $S=\langle u_1,u_2,u_3,u_3\rangle$. La dimensión y una base de S.
2. Coordenadas de un vector genérico en la base hallada.
3. Ampliar la base de S para encontrar una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4.26. Consideremos las bases de $\mathbb{R}^2$

$$S=\{(1,2),(0,1)\} \text{ y } T=\{(1,1),(2,3)\}.$$

Sea los vectores $v=(1,5)$ y $w=(5,4)$.

1. Determinar $[v]_T$ y $[w]_S$.
2. Hallar la matrices de cambio de base P_{TS} y P_{ST}, utilizando el esquema $[B_2 \mid B_1] \to [I \mid P_{B_1B_2}]$.
3. Hallar los vectores de coordenadas $[v]_T$ y $[w]_S$ utilizando las matrices P_{TS} y P_{ST}. Compare las respuestas con las del apartado (1).

Ejercicio 4.27. Sea $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ una base del espacio vectorial V. Sean $v_1=2u_1-u_2+u_3$, $v_2=u_1+u_3$ y $v_3=3u_1-u_2+3u_3$.

1. Probar que $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ es una base de V.
2. Determinar $P_{B_1B_2}$ y $P_{B_2B_1}$.
3. Hallar las coordenadas respecto de la base B_1 del vector $v=-2v_1+3v_2+v_3$.

Ejercicio 4.28. Consideremos la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

1. ¿Se puede considerar la matriz A como una matriz de cambio de base de una base B a la base canónica? Si la respuesta es afirmativa determinar B.

2. ¿Se puede considerar la matriz A como una matriz de cambio de base de la base canónica a una base B ? Si la respuesta es afirmativa determinar B.

3. Si A es la matriz de transición de una base B_1 a la base $B_2=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, determinar la base B_1.

Ejercicio 4.29. Dados los vectores $v=(2,3,1)$, $u=(-1,1,1)$ y $w=(2,1,-1)$ y sus coordenadas en una base $B=\{v_1,v_2,v_3\}$
$$[v]_B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ [u]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\ \text{y}\ [w]_B=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},$$
determinar la base B.

Ejercicio 4.30. Sean $B_1=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B_2=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Sea v un vector cuyas coordenadas en B_1 son $[v]_{B_1}=(1,a,b)^t$ y sus coordenadas en B_2 son $[v]_{B_2}=(c,c,c)^t$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$. Hallar v.

Ejercicio 4.31. Consideremos un vector $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y dos bases
$$B_1=\{(1,0,1),(-1,1,0),v\}\ \text{y}\ B_2=\{(1,1,1),(1,1,0),v\}.$$
Supongamos que las coordenadas del vector $w=(2,-1,-1)$ en la base B_1 son $[w]_{B_1}=(-2,a,1)^t$ y las coordenadas del vector $u=(3,1,1)$ en la base B_2 son $[u]_{B_2}=(-a,2,-2)^t$. Hallar el valor de $a\in\mathbb{R}$ y el vector v.

Ejercicio 4.32. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran dos bases
$$B_1=\{v_1,v_2,v_3\}\ \text{y}\ B_2=\{u_1=(1,0,1),u_2=(1,1,0),u_3=(0,0,1)\}.$$
Si $P_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base B_1 a B_2. Determinar los vectores de la base B_1.

Ejercicio 4.33. Consideremos dos bases B_1 y B_2 del espacio $\mathbb{R}^2$ y sea $P_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$ la matriz cambio de base de la base B_1 a la base B_2 .

1. Si $[w]_{B_1}=(2,-3)^t$,calcular $[w]_{B_2}$.

2. Si $[w]_{B_2}=(-1,1)^t$,calcular $[w]_{B_1}$. ¿Es posible determinar el vector w?

3. Si $B_1=\{(1,-1),(0,1)\}$, calcular B_2.