

Algebra Lineal 2020

Facultad de Ciencias Exactas, U.N.C.P.B.A.

Intersección de Rectas y Planos

¿Qué objeto geométrico podemos obtener al intersecar una recta con un plano?

Intersección de Rectas y Planos

¿Qué objeto geométrico podemos obtener al intersecar una recta con un plano?

Estudiemos que pasa geométricamente: [▶ Link](#)

Intersección de Rectas y Planos

¿Qué objeto geométrico podemos obtener al intersecar una recta con un plano?

Estudiemos que pasa geométricamente: [▶ Link](#)

- 1 Una recta ↗ La recta está contenida en el plano.

Intersección de Rectas y Planos

¿Qué objeto geométrico podemos obtener al intersecar una recta con un plano?

Estudiemos que pasa geométricamente: [▶ Link](#)

- 1 Una recta ↪ La recta está contenida en el plano.
- 2 Un punto ↪ La recta corta al plano.

Intersección de Rectas y Planos

¿Qué objeto geométrico podemos obtener al intersecar una recta con un plano?

Estudiemos que pasa geométricamente: [▶ Link](#)

- 1 Una recta ↪ La recta está contenida en el plano.
- 2 Un punto ↪ La recta corta al plano.
- 3 No hay intersección ↪ La recta es paralela al plano.

Intersección de rectas y planos

Ejemplo

Estudiar la intersección del plano $\pi: 3x + y - 2z = -4$ y la recta $r: (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$.

Un punto $(x, y, z) \in r \cap \pi$ si y solo si verifica:

Intersección de rectas y planos

Ejemplo

Estudiar la intersección del plano $\pi: 3x + y - 2z = -4$ y la recta $r: (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$.

Un punto $(x, y, z) \in r \cap \pi$ si y solo si verifica:

$$\begin{cases} (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1) + (-1, 2, 1) \\ 3x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

Luego, reemplazamos estos datos en la ecuación del plano

$$3(\lambda - 1) + (-\lambda + 2) - 2(\lambda + 1) = -4$$

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

Luego, reemplazamos estos datos en la ecuación del plano

$$3(\lambda - 1) + (-\lambda + 2) - 2(\lambda + 1) = -4$$

$$3\lambda - 3 - \lambda + 2 - 2\lambda - 2 = -4$$

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

Luego, reemplazamos estos datos en la ecuación del plano

$$3(\lambda - 1) + (-\lambda + 2) - 2(\lambda + 1) = -4$$

$$3\lambda - 3 - \lambda + 2 - 2\lambda - 2 = -4$$

Vemos que $-3 = -4$

Intersección de rectas y planos

Utilizando las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

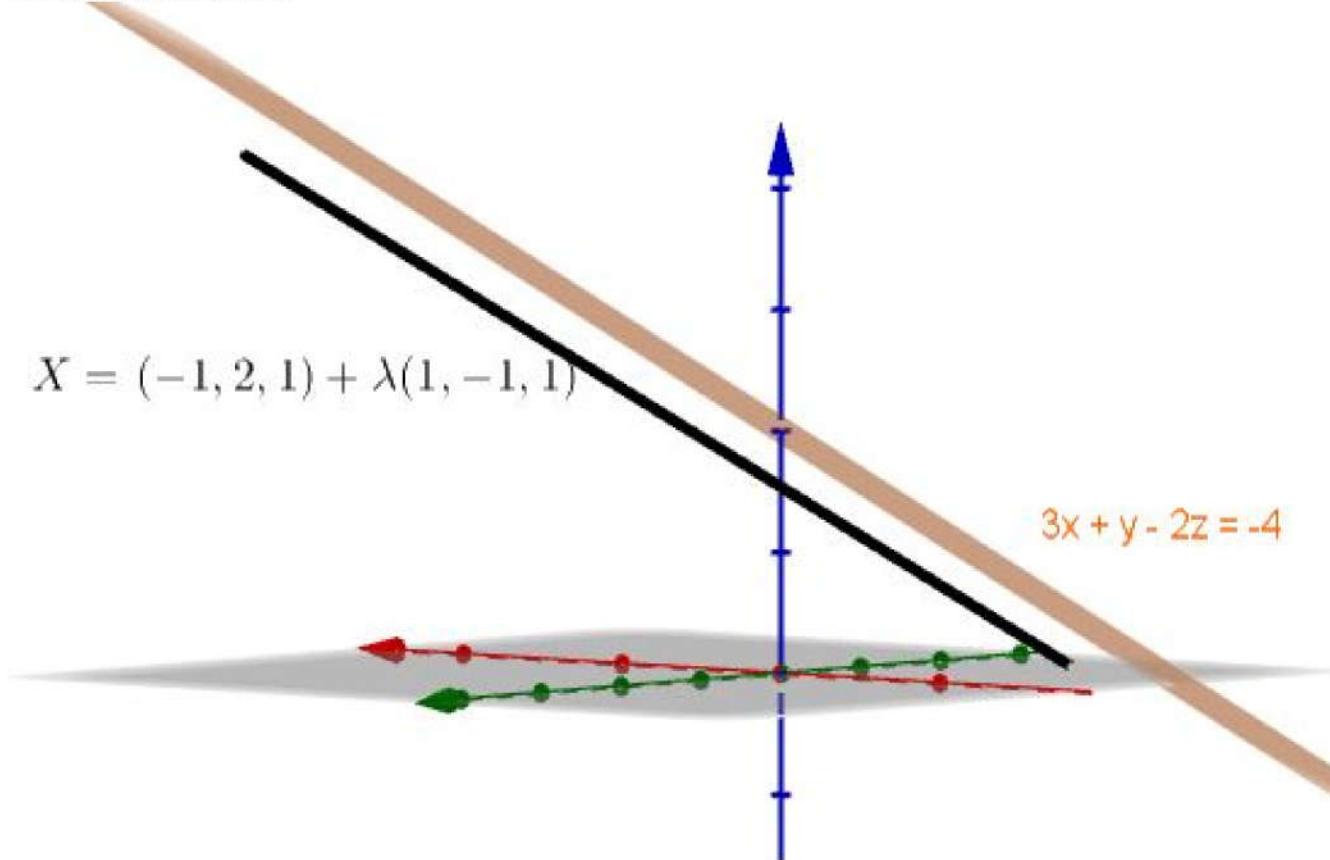
Luego, reemplazamos estos datos en la ecuación del plano

$$3(\lambda - 1) + (-\lambda + 2) - 2(\lambda + 1) = -4$$

$$3\lambda - 3 - \lambda + 2 - 2\lambda - 2 = -4$$

Vemos que $-3 = -4$ Absurdo, por lo tanto, no hay intersección de la recta con el plano, es decir $r \cap \pi = \emptyset$.

Gráficamente:



Intersección de rectas y planos

Ejemplo

Determinar la intersección del plano $\pi: x + 2z = 1$ y la recta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Intersección de rectas y planos

Ejemplo

Determinar la intersección del plano $\pi: x + 2z = 1$ y la recta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

Sustituímos en la primera ecuación las expresiones obtenidas para x e y

$$1 - 2z + 2.(3 - 3z) + z = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

Sustituímos en la primera ecuación las expresiones obtenidas para x e y

$$1 - 2z + 2.(3 - 3z) + z = 0 \rightarrow 1 - 2z + 6 - 6z + z = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

Sustituímos en la primera ecuación las expresiones obtenidas para x e y

$$1 - 2z + 2.(3 - 3z) + z = 0 \rightarrow 1 - 2z + 6 - 6z + z = 0 \rightarrow 7 = 7z \rightarrow z = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

Sustituímos en la primera ecuación las expresiones obtenidas para x e y

$$1 - 2z + 2.(3 - 3z) + z = 0 \rightarrow 1 - 2z + 6 - 6z + z = 0 \rightarrow 7 = 7z \rightarrow z = 1$$

Como $z = 1$ determinamos que $x = -1$, $y = 0$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Despejamos x de la última ecuación: $x = 1 - 2z$

Reemplazamos en la segunda:

$$-(1 - 2z) + y + z = 2 \rightarrow -1 + 2z + y + z = 2 \rightarrow y = 3 - 3z$$

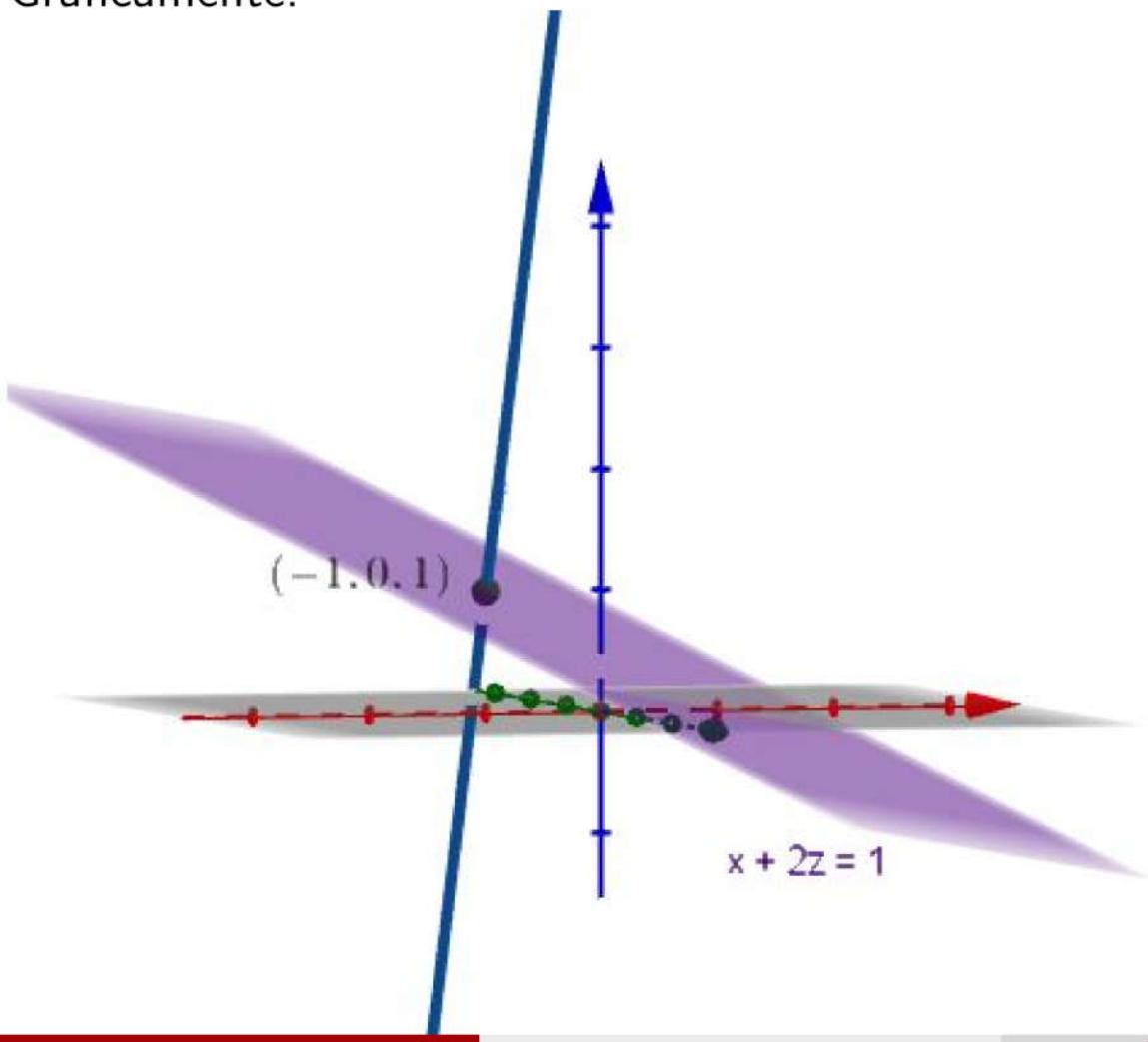
Sustituímos en la primera ecuación las expresiones obtenidas para x e y

$$1 - 2z + 2.(3 - 3z) + z = 0 \rightarrow 1 - 2z + 6 - 6z + z = 0 \rightarrow 7 = 7z \rightarrow z = 1$$

Como $z = 1$ determinamos que $x = -1$, $y = 0$

Luego la intersección es un punto: $r \cap \pi = \{(-1, 0, 1)\}$.

Gráficamente:



Intersección de rectas y planos

Ejemplo

Estudiar la intersección del plano

$$\pi: (x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3) \text{ y la recta}$$
$$r: (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1).$$

Un punto $(x, y, z) \in r \cap \pi$ si y solo si verifica:

$$\begin{cases} (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1) + (-1, 2, 1) \\ (x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3) \end{cases}$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1)$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$x + 2y + z = 4$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$x + 2y + z = 4$$

Dada la recta, r : $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$, reemplazamos las ec. paramétricas en el plano.

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$x + 2y + z = 4$$

Dada la recta, r : $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$, reemplazamos las ec. paramétricas en el plano.

$$-1 + \lambda + 2.(2 - \lambda) + 1 + \lambda = 4$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$x + 2y + z = 4$$

Dada la recta, r : $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$, reemplazamos las ec. paramétricas en el plano.

$$-1 + \lambda + 2.(2 - \lambda) + 1 + \lambda = 4$$

$$-1 + \lambda + 4 - 2\lambda + 1 + \lambda = 4$$

Dado el plano π : $(x, y, z) = (1, 0, -1)\beta + (0, -1, 2)\gamma + (1, 0, 3)$

Podemos buscar su ecuación general:

$$\vec{n} = (0, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

Luego la Ec. general es

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$x + 2y + z = 4$$

Dada la recta, r : $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1)$, reemplazamos las ec. paramétricas en el plano.

$$-1 + \lambda + 2.(2 - \lambda) + 1 + \lambda = 4$$

$$-1 + \lambda + 4 - 2\lambda + 1 + \lambda = 4$$

$$4 = 4$$

Es una igualdad que siempre se cumple, por lo que la recta tiene infinitos puntos de intersección con el plano. La recta está contenida en el plano, es decir, $r \cap \pi = r$.

Gráficamente

