Algebra Lineal 2020

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Ecuaciones lineales

- Ecuación en una variable

$$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3.$$

- Ecuación de dos variables

$$2x + y = 1 \Rightarrow y = -2x + 1 \text{ representa una recta en el plano.}$$

- Ecuación de tres variables

$$x + 2y - z = 1 \text{ representa un plano en } \mathbb{R}^3.$$

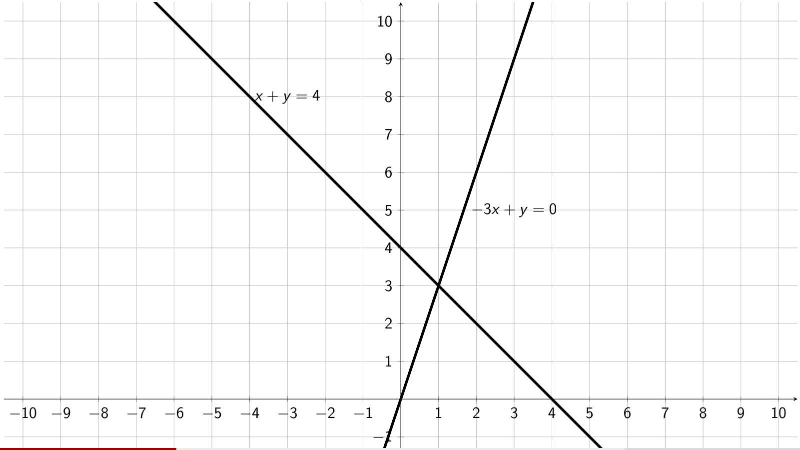
- Ecuación de *n*-variables

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Sistemas de Ecuaciones lineales

- Sistemas de dos ecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} x + y & = 4 \\ -3x + y & = 0 \end{cases} \text{ dos rectas en } \mathbb{R}^2$$



Solución.

$$\begin{aligned} x &= 4 - y \\ -3x + y &= -\;3\,(4 - y) + y \;= -12 + 3y + y \;=\; -12 + 4y \;= 0 \;\Rightarrow\; y = 3 \end{aligned}$$

$$x = 1$$

$$P = (1, 3) \;\text{ solución del sistema }\; \begin{cases} x + y & = 4 \\ -3x + y & = 0 \end{cases}$$

- Sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ -2x + y + 3z & = 2 \\ 3x - y + z & = -1 \end{cases} \quad \text{tres planos}$$

- Otros

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ -4x + y + 3z & = -2 \end{cases} \text{dos planos} \qquad \begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ -2x + y + 3z & = 2 \\ -3x + 5y - z & = -5 \\ 3x - y + z & = -3 \end{cases} \text{4 planos}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + w & = 1 \\ 2x - 2y + 3z - 3w & = 2 \\ -5x + 4y - z + 2w & = -5 \\ 3x - y + z - w & = -3 \end{cases}$$

Definición general de un sistema de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de Sistema de n-ecuaciones y m incognitas es un sistema de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Diremos que el sistema es **homogéneo** cuando $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Consideremos los siguientes tres sistemas

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ -2x + y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = 2 \\ 3x + 3y & = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y & = 3 \\ x - y & = 1 \end{cases}.$$

- El primer sistema corresponde a dos rectas que se cortan en el punto $P = (1, 2)$. Por lo tanto el sistema tiene una **única solución.**
- El segundo sistema son dos rectas coincidentes. Por lo tanto hay infinitos puntos que satisfacen las dos ecuaciones. Entonces el sistema tiene **infinitas soluciones.**
- Por último, el tercer sistema representa dos rectas paralelas y por lo tanto no hay puntos en común. Por lo tanto el sistema **no tiene solución.**

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Por el ejemplo anterior tenemos tres posibles casos sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

1. Sistema con exactamente una solución. Sistema **compatible determinado.**
2. Sistema tiene un número infinito de soluciones. Sistema **compatible indeterminado**.
3. Sistema sin ninguna solución. Sistema **incompatible**.

Forma matricial de un sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 4 \\ -x + 5y & = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x - y + 2z & = & 1 \\ 2x + 3y + z & = & 4 \\ -x + 4y - z & = & 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\boldsymbol{A.\vec{x} = \vec{b}} \, .$$

Forma matricial de un sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases}$$

Matriz ampliada de un sistema

La matriz ampliada o aumentada de un sistema se construye añadiendo a la matriz de los coeficientes una columna con los términos constantes.

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right)}_{\left(A|\vec{b}\right)}.$$

Matriz ampliada de un sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right).$$

Forma vectorial de un sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 4z & = 2 \\ x + 3y - 2z & = -1 \\ -x + 2y - 3z & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= x c_1 \vec{+} y \vec{c_2} + z \vec{c_3} &&= \vec{b} \end{aligned}$$

Forma vectorial de un sistema

- El vector columna $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores columna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Si miramos a las columnas de A como vectores, entonces

- resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es equivalente a preguntarnos si el vector b es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

Resolución de Sistemas de ecuaciones lineales.

¿Cómo podemos resolver en forma algorítmica un sistema de ecuaciones lineales?

La idea es tratar de construir un sistema en otro de forma tal que las soluciones sean las mismas pero que el sistema resultante sea más sencillo de resolver.
Para ello vamos a aplicar determinadas operaciones entre las filas de la matriz ampliada asociada que permitirán simplificar el sistema original

$$Ax = b \longrightarrow Ex = \vec{d}$$

Cuando trabajamos con sistemas podemos trabajar directamente con las matrices asociadas

$$(A \mid b) \longrightarrow (E \mid d)$$

Operaciones elementales entre filas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{n2}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}\right. \iff (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

1. Intercambiar dos ecuaciones — Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una ecuación por $c \neq 0$ — Multiplicar una fila por $c \neq 0$
3. Sumar el múltiplo de una ecuación a otra — Sumar un múltiplo de una fila a otra fila

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambio la fila f_1 con la fila f_2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$f_2 - 2f_1 \to f_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & -1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \color{blue}{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\color{blue}{f_1 + f_3 \to f_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -5y & +3 & z & = & 1 \\ & & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\color{blue}{f_2 + f_3 \to f_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\quad 5y - 3z = 1 \\ \quad\quad\quad\quad 4z = 2 \end{cases}$$

Conjunto solución del sistema

$$S = \left\{ \left(\frac{13}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

La matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right)$ es una **forma escalonada** de la matriz $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$.

Escalonamiento de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Un **pivote** de una fila de A es el elemento **distinto de** 0 que se encuentra más a la izquierda en la fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 & -7 & 1 \\ 8 & -2 & 6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Escalonamiento de una matriz

Diremos que una matriz A está **escalonada** si:

- Toda fila de ceros está en la parte inferior.
- Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- En una columna, todos los elementos debajo del pivote son 0.
- A está en la forma **escalonada reducida** si todos los pivotes son 1 y todos los elementos por encima del pivote son 0.

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{9} & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo llevamos una matriz A a su forma escalonada?

Realizando Operaciones Elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

¿Para que sirve escalonar escalonar una matriz?

La respuesta la obtenemos en el siguiente teorema

Teorema

Sea $Ax = b$ y $(A|b)$ su matriz ampliada. Sea $(E|d)$ una forma escalonada de la matriz ampliada $(A|b)$. Entonces los sistemas $Ax = b$ y $Ex = d$ tienen las mismas soluciones.

Método o algorítmo de eliminación de Gauss

Vamos a formalizar el método descripto anteriormente para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. Entonces:

1. Construimos la matriz ampliada $(A|b)$.
2. Haciendo operaciones elementales entre filas llegamos a una matriz ampliada escalonada $(E|d)$.
3. Si $(E|d)$ tiene una fila $(00\ldots0|s)$ donde $s \neq 0$ entonces el sistema $Ax = b$ **no** tiene solución.
4. En caso contrario, hacemos sustitución hacia atrás y buscamos la soluciones del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + z & = -1 \\ -x + 2y - z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_3} \underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)}_{(E|d)}$$

$$E\vec{x} = \vec{d} : \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ -4y + 3z & = -3 \\ z & = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -2 \right) \right\}.$$

Rango de una matriz

$$\mathrm{rg}(A) = \text{ número de filas no nulas en una forma escalonada de } A.$$

.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 - f_2]{f_1 - 2f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(A) = 3.$$

Rouché-Frobenius

El siguiente teorema permite analizar la existencia o no de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de comparando los rangos de las matrices A y $(A|b)$.

Teorema (Roché-Frobenius)

Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ y su matriz ampliada $(A|b)$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El sistema $Ax = b$ es compatible*
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.
3. *b es combinación lineal de las columnas de A.*

Rouché-Frobenius

Resumimos en el siguiente diagrama la compatibilidad de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de acuerdo a la comparación entre el rango de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $(A \mid b)$.

$$A\vec{x} = \vec{b} : \begin{cases} \textbf{Compatible } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) & \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = n \ \text{ única solución} \\ \\ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) < n \text{ infinitas soluciones} \end{cases} \\ \\ \\ \textbf{Incompatible } \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A \mid b) \end{cases}$$

Ejemplo 1

Resolver el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 4 \\ x+2z & = & 1 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+2F_3]{F_1-2F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{7F_2-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -30 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{10}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 3,$$

Entonces el SEL es **compatible determinado** (tiene una única solución).

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

Ejemplo 2

Estudiar las posibles soluciones del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 2 \\ 6x - 3y + 3z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[3f_2-f_3]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rg}(A \mid b)$$

Por lo tanto el sistema es **incompatible**, es decir no tiene solución

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{lcr} w-x-y+2z & = & 1\\ 2w-2x-y+3z & = & 3\\ -w+x+-y & = & -3\end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3\end{array}\right) \xrightarrow[f_3+f_1\to f_3]{f_2-2f_1\to f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f\to f_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} \color{blue}{1} & -2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & \color{blue}{1} & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 2 < 4 \Rightarrow$ compatible indeterminado.

$$\begin{cases} w-x-y+2z & =1\\ y-z & =1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w & =1+x+y-2z=2+x-z\\ y & =z+1\end{cases}$$

Ejemplo 3

Tomamos como variables pivote a w y y, por lo tanto las variables que serán los parámetros son $x = s$ y $z = t$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s-t \\ s \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También podemos escribirlo como vectores fila

$$(w, x, y, z) = (2+s-t, s, 1+t, t) = (2, 0, 1, 0) + s\,(1, 1, 0, 0) + t\,(-1, 0, 1, 1)\,.$$

Ejemplo 4

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales. Recordemos que el Teorema de Rouché-Frobenius afirma que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) \text{ sii } \vec{b} \text{ es combinación lineal de los vectores columna de } A.$$

Problema. Determinar si el vector $v = (1, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 3, -1)$.

Ejemplo 4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 1 \\ -x + 3z & = -1 \\ x + y - z & = 2 \end{cases}$$

donde las columnas de A son los vectores v_1, v_2 y v_3.
Entonces

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$$

Ejemplo 4

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 - f_3 \to f_3]{f_1 + f_2 \to f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2 - f_3 \to f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid v) = 3 \Rightarrow$ el sistema $A\vec{x} = \vec{v}$ tiene única solución $x = 7, y = -3$ y $z = 2$

Por lo tanto v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3

$$v = 7\,v_1 + (-3)\,v_2 + 2\,v_3.$$

$$(1, -1, 2) = 7\,(1, -1, 1) + (-3)\,(2, 0, 1) + 2\,(0, 3, -1)\,.$$