Vectores, rectas y planos

Álgebra Lineal – Facultad de Ciencias Exactas – UNICEN

26 de Agosto de 2020

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

- Ecuación vectorial del plano

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

- Ecuación vectorial del plano
- Ecuación general del plano

Planos en $\mathbb{R}^3$

- Ecuación vectorial del plano
- Ecuación general del plano
- Ecuación paramétrica del plano

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

- Ecuación vectorial del plano
- Ecuación general del plano
- Ecuación paramétrica del plano
- Ecuación segmentaria del plano

Planos en $\mathbb{R}^3$

- Ecuación vectorial del plano
- Ecuación general del plano
- Ecuación paramétrica del plano
- Ecuación segmentaria del plano

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

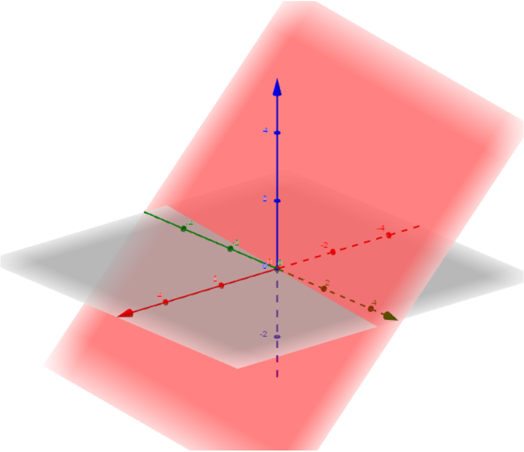
- Ecuación vectorial $\Rightarrow$ Ecuación paramétrica

$\boxed{\textbf{Planos en } \mathbb{R}^3}$

- Ecuación vectorial $\Rightarrow$ Ecuación paramétrica
- Ecuación general $\Rightarrow$ Ecuación segmentaria

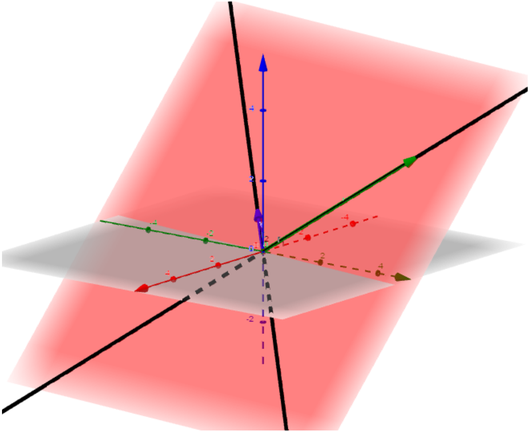
Geometricamente un plano es:

Geometricamente un plano es:



¿Cómo podemos generar un plano?

¿Cómo podemos generar un plano?



Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director.

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos dos vectores directores.

Entonces... **¿Cómo "rellenamos" o vamos "pintando" el plano para terminar de generarlo?**

Recordemos que a cada recta la generamos a partir del producto entre un escalar y un vector director. Por lo tanto, para el plano necesitaremos dos vectores directores.

Entonces... **¿Cómo "rellenamos" o vamos "pintando" el plano para terminar de generarlo?**

Algo que nos puede servir para responder esta pregunta es pensar cuál es el efecto geométrico de la combinación lineal de dos vectores:

https://www.geogebra.org/m/kmh2zx4j

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u$$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Llamaremos plano generado por u y v al subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v\}$$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Llamaremos plano generado por u y v al subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v\}$$

Notación: $(x, y, z) = \lambda u + \beta v$

$\boxed{\text{Ecuación vectorial del plano}}$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos.

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v \qquad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Llamaremos plano generado por u y v al subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v\}$$

Notación: $(x, y, z) = \underbrace{\lambda u + \beta v}_{\text{comb. lineal}}$

Ejemplo:

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\}$$

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1)$$

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1) = (-3, 9, 5)$$

Ejemplo:

Sean $u = (-2, 4, 3)$ y $v = (-1, -1, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
El plano generado por estos dos vectores será:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1)\} \quad (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$$

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -1$, entonces

$$2\,(-2, 4, 3) + (-1)\,(-1, -1, 1) = (-3, 9, 5)$$

Si $\lambda = 0$ y $\beta = 5$, entonces

$$0\,(-2, 4, 3) + 5\,(-1, -1, 1) = (-5, -5, 5)$$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Vectores, rectas y planos

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Observación: Notar que es simplemente desplazar el plano

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

hacia el punto P.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

El plano generado por u y v y que pasa por el punto P:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \lambda u + \beta v + P\}$$

Observación: Notar que es simplemente desplazar el plano

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v$$

hacia el punto P.
Ejemplo: si $P = (5, 6, 0)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$(x, y, z) = \lambda(-2, 4, 3) + \beta(-1, -1, 1) + (5, 6, 0)$$

$\boxed{\text{Ecuación general al plano}}$

$\boxed{\text{Ecuación general al plano}}$

Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v + P$$

$\boxed{\text{Ecuación general al plano}}$

Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v + P$$

Tomemos el producto vectorial de u y v:

$$n = u \times v$$

$\boxed{\text{Ecuación general al plano}}$

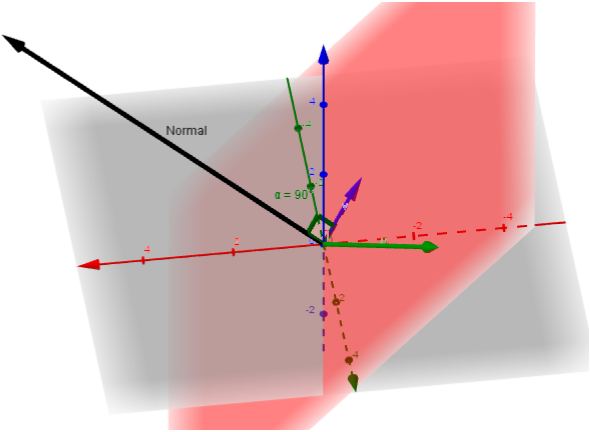
Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda u + \beta v + P$$

Tomemos el producto vectorial de u y v:

$$n = u \times v$$

Entonces n es el vector normal al plano π.


Normal
α = 90°

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Vectores, rectas y planos

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$.

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

Vectores, rectas y planos

Sea $n = (a, b, c)$ el vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Sea $n = (a, b, c)$ vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Sea $n = (a, b, c)$ vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sea $n = (a, b, c)$ vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

Sea $n = (a, b, c)$ vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

Vectores, rectas y planos

Sea $n = (a, b, c)$ vector normal a un plano π.

Supongmos que π pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Así, $P_0 \in \pi$. Tomemos $P = (x, y, z) \in \pi$ un punto genérico.

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

(1) Pasa por el punto $P = (2, 2, -1)$ y su es

$$n = (-1, 2 - 3)$$

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

(1) Pasa por el punto $P = (2, 2, -1)$ y su es

$$n = (-1, 2 - 3)$$

Sea $Q = (x, y, z)$ un punto genérico de plano.

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

(1) Pasa por el punto $P = (2, 2, -1)$ y su es

$$n = (-1, 2 - 3)$$

Sea $Q = (x, y, z)$ un punto genérico de plano. Entonces

$$\overrightarrow{PQ}$$

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

(1) Pasa por el punto $P = (2, 2, -1)$ y su es

$$n = (-1, 2 - 3)$$

Sea $Q = (x, y, z)$ un punto genérico de plano. Entonces

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Ejercicio 11: Determinar la ecuación vectorial, paramétrica, segmentaria y general del plano que cumple cada una de las siguientes condiciones:

(1) Pasa por el punto $P = (2, 2, -1)$ y su es

$$n = (-1, 2 - 3)$$

Sea $Q = (x, y, z)$ un punto genérico de plano. Entonces

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, y, z) - (2, 2, -1) = (x - 2, y - 2, z + 1)$$

es un vector del plano.

Por otro lado, como $n = (-1, 2, -3)$ es normal al plano,

$$(x-2, y-2, z+1) \cdot (-1, 2, -3) = 0$$

Por otro lado, como $n = (-1, 2, -3)$ es normal al plano,

$$(x-2, y-2, z+1) \cdot (-1, 2, -3) = 0$$

Calculamos el producto punto

$$-(x-2) + 2(y-2) - 3(z+1) = 0$$

Por otro lado, como $n = (-1, 2, -3)$ es normal al plano,

$$(x - 2, y - 2, z + 1) \cdot (-1, 2, -3) = 0$$

Calculamos el producto punto

$$-(x - 2) + 2(y - 2) - 3(z + 1) = 0$$

Entonces

$$-x + 2 + 2y - 4 - 3z - 3 = 0$$

Por otro lado, como $n = (-1, 2, -3)$ es normal al plano,

$$(x-2, y-2, z+1) \cdot (-1, 2, -3) = 0$$

Calculamos el producto punto

$$-(x-2) + 2(y-2) - 3(z+1) = 0$$

Entonces

$$-x + 2y - 3z - 5 = 0$$

Por otro lado, como $n = (-1, 2, -3)$ es normal al plano,

$$(x-2, y-2, z+1) \cdot (-1, 2, -3) = 0$$

Calculamos el producto punto

$$-(x-2) + 2(y-2) - 3(z+1) = 0$$

Entonces

$$\boxed{-x + 2y - 3z = 5}$$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

(x, y, z)

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

$(x, y, z) = (2y - 3z - 5, y, z)$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

$$(x, y, z) = (2y - 3z - 5, y, z) = y(2, 1, 0)$$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

$$(x, y, z) = (2y - 3z - 5, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

$$(x, y, z) = (2y - 3z - 5, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) + (-5, 0, 0)$$

Calculemos la ecuación vectorial del plano $-x + 2y - 3z = 5$.

$$x = 2y - 3z - 5$$

$$(x, y, z) = (2y - 3z - 5, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) + (-5, 0, 0)$$

Luego, la forma vectorial del plano es

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(2, 1, 0)}_{u} + \beta \underbrace{(-3, 0, 1)}_{v} + \underbrace{(-5, 0, 0)}_{P}$$

$\boxed{\text{Ecuación paramétrica del plano}}$

$\boxed{\text{Ecuación paramétrica del plano}}$

Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Ecuación paramétrica del plano

Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Entonces

$$(x, y, z) = (\lambda u_1 + \beta v_1 + x_0, \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0, \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0)$$

$$\boxed{\text{Ecuación paramétrica del plano}}$$

Supongamos que tenemos la ecuación vectorial de un plano π:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{u} + \beta \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{v} + \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{P}$$

Entonces

$$(x, y, z) = (\lambda u_1 + \beta v_1 + x_0, \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0, \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda u_1 + \beta v_1 + x_0 \\ y = \lambda u_2 + \beta v_2 + y_0 \\ x = \lambda u_3 + \beta v_3 + z_0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ecuación segmentaria del plano}}$

$$\boxed{\text{Ecuación segmentaria del plano}}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\boxed{\text{Ecuación segmentaria del plano}}$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax + by + cz = -d$$

$\boxed{\text{Ecuación segmentaria del plano}}$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax + by + cz = -d$$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

$$\boxed{\text{Ecuación segmentaria del plano}}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax + by + cz = -d$$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{\left(\frac{-d}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-d}{b}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{-d}{c}\right)} = 1}$$