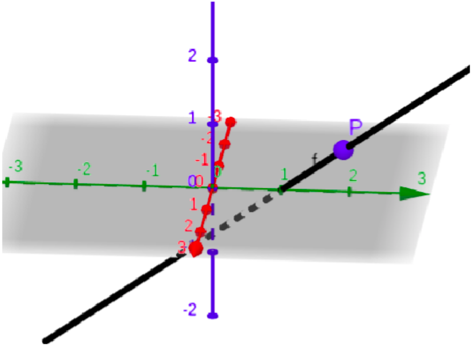
Algebra Lineal 2020

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Distancia entre punto y recta

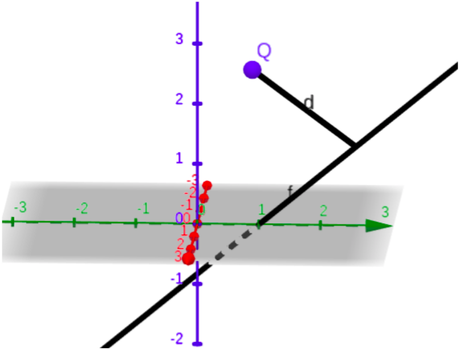
Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ una recta y sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto:

- Si $P \in L \rightsquigarrow d(P, L) = 0$.



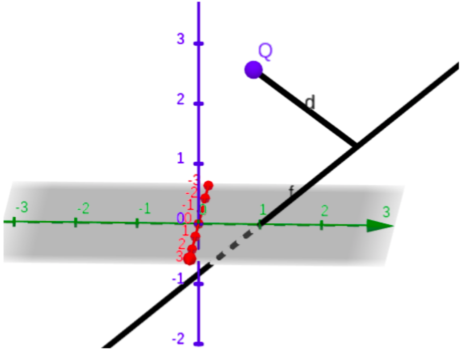
Distancia entre punto y recta

- Si $P \notin L \rightsquigarrow d(P, L) > 0$ Distancia siempre positiva



Distancia entre punto y recta

- Si $P \notin L \rightsquigarrow d(P, L) > 0$ Distancia siempre positiva



Link

Distancia entre punto y recta

Pasos para calcular la distancia de un punto a una recta:

1. Tomamos un punto arbitrario P de la recta y formamos el vector $\overrightarrow{PQ}$.
2. Calculamos el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y el vector director de la recta.
3. Utilizamos la relación

$$\sin\theta = \frac{d}{||\overrightarrow{PQ}||}$$

Distancia entre punto y recta

Pasos para calcular la distancia de un punto a una recta:

1. Tomamos un punto arbitrario P de la recta y formamos el vector $\overrightarrow{PQ}$.
2. Calculamos el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y el vector director de la recta.
3. Utilizamos la relación

$$\sin\theta = \frac{d}{||\overrightarrow{PQ}||} \Rightarrow d = \sin\theta ||\overrightarrow{PQ}||$$

Distancia entre punto y recta

Ejercicio

Calcular la distancia entre la recta $r:(x,y,z)=\lambda(1,1,1)+(0,1,0)$ *y el punto* $Q=(2,1,3)$

Solución

Buscamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo, $P=(0,1,0)$, $\lambda=0$.

Distancia entre punto y recta

Ejercicio

Calcular la distancia entre la recta $r : (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + (0, 1, 0)$ *y el punto* $Q = (2, 1, 3)$

Solución

Buscamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo, $P = (0, 1, 0)$, $\lambda = 0$. Armamos el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, 3) - (0, 1, 0) = (2, 0, 3)$.

Distancia entre punto y recta

Ejercicio

Calcular la distancia entre la recta $r: (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + (0, 1, 0)$ *y el punto* $Q = (2, 1, 3)$

Solución

Buscamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo, $P = (0, 1, 0)$, $\lambda = 0$. Armamos el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, 3) - (0, 1, 0) = (2, 0, 3)$.

Buscamos el angulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Distancia entre punto y recta

Recordemos que

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,3)}{||(1,1,1)|| * ||(2,0,3)||}$$

Distancia entre punto y recta

Recordemos que

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,3)}{||(1,1,1)|| * ||(2,0,3)||}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} * \sqrt{13}}$$

Distancia entre punto y recta

Recordemos que

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,3)}{||(1,1,1)|| * ||(2,0,3)||}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} * \sqrt{13}}$$

Nota: Nos interesa buscar $\sin\theta$, podemos usar $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Distancia entre punto y recta

Sabiendo que

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} * \sqrt{13}} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{39}$$

Distancia entre punto y recta

Sabiendo que

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} * \sqrt{13}} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{39}$$

Usando la identidad

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

Distancia entre punto y recta

Sabiendo que

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} * \sqrt{13}} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{39}$$

Usando la identidad

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{25}{39} = \frac{14}{39} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{14}{39}}$$

Distancia entre punto y recta

Por último,

$$d = \sin\theta ||\overrightarrow{PQ}||$$

Distancia entre punto y recta

Por último,

$$d = \sin\theta ||\overrightarrow{PQ}||$$

$$d = \sqrt{\frac{14}{39}} * \sqrt{13} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \approx 2{,}16$$

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.
2. Si $P \notin \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) > 0$

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.
2. Si $P \notin \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) > 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano, haremos uso de la intersección de rectas y planos, como vemos en ▸ Link

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.
2. Si $P \notin \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) > 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano, haremos uso de la intersección de rectas y planos, como vemos en ▸ Link

1. Buscamos la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto externo al plano.

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.
2. Si $P \notin \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) > 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano, haremos uso de la intersección de rectas y planos, como vemos en ▸ Link

1. Buscamos la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto externo al plano.
2. Buscamos el punto de intersección de la recta con el plano.

Distancia de un punto a un plano

Dados $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano y dado $P \in \mathbb{R}^3$ un punto

1. Si $P \in \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) = 0$.
2. Si $P \notin \pi \rightsquigarrow d(P, \pi) > 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano, haremos uso de la intersección de rectas y planos, como vemos en ▸ Link

1. Buscamos la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto externo al plano.
2. Buscamos el punto de intersección de la recta con el plano.
3. Buscamos la norma del vector que une los puntos P (externo al plano) y P' intersección de la recta y el plano.

Distancia de un punto a un plano

Ejercicio

Encontrar la distancia del punto $P = (-1, 2, 3)$ *al plano* $\pi : x + y - z = 0$.

Distancia de un punto a un plano

Ejercicio

Encontrar la distancia del punto $P = (-1, 2, 3)$ *al plano* $\pi : x + y - z = 0$.

Solución:

Notemos que $(-1, 2, 3) \notin \pi$ ya que $-1 + 2 - 3 = -2 \neq 0$.

Sabemos que el vector $\vec{N} = (1, 1, -1)$ es el vector normal al plano.

Distancia de un punto a un plano

Ejercicio

Encontrar la distancia del punto $P = (-1, 2, 3)$ *al plano* $\pi\colon x + y - z = 0$.

Solución:

Notemos que $(-1, 2, 3) \notin \pi$ ya que $-1 + 2 - 3 = -2 \neq 0$.

Sabemos que el vector $\vec{N} = (1, 1, -1)$ es el vector normal al plano.

$$r\colon (x, y, z) = \lambda(1, 1, -1) + (-1, 2, 3)$$

Es la recta normal al plano, y que pasa por $(-1, 2, 3)$.

En ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \lambda - 1 \\ y & = & \lambda + 2 \\ z & = & -\lambda + 3 \end{array}\right.$$

En ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= \lambda - 1 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= -\lambda + 3 \end{cases}$$

Si reemplazamos en la ecuación general del plano

$$(\lambda - 1) + (\lambda + 2) - (-\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

En ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= \lambda - 1 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= -\lambda + 3 \end{cases}$$

Si reemplazamos en la ecuación general del plano

$$(\lambda - 1) + (\lambda + 2) - (-\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$

En ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$$

Si reemplazamos en la ecuación general del plano

$$(\lambda - 1) + (\lambda + 2) - (-\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$
Buscamos la norma del vector

$$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (-1, 2, 3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

.

En ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \lambda - 1 \\ y & = & \lambda + 2 \\ z & = & -\lambda + 3 \end{array}\right.$$

Si reemplazamos en la ecuación general del plano

$$(\lambda - 1) + (\lambda + 2) - (-\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$
Buscamos la norma del vector

$$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (-1, 2, 3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

.

$$d = \left\|\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{12}}{3} \approx 1{,}15$$

Ejercicio

Ejercicio

Dado el plano $\pi: x - y + z = 2$ *y el punto* $P = (1, 1, 1)$*:*

a *Buscar* $d(P, \pi)$.

b *Determinar un plano* π'*, paralelo a* π *y tal que* $d(\pi', P) = d(\pi, P)$

Ejercicio

Ejercicio

Dado el plano $\pi : x - y + z = 2$ *y el punto* $P = (1, 1, 1)$*:*

a *Buscar* $d(P, \pi)$.

b *Determinar un plano* π'*, paralelo a* π *y tal que* $d(\pi', P) = d(\pi, P)$

Podemos observar la situación con cuidado en el siguiente link: link

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1, 1, 1)$ al plano π.

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1, 1, 1)$ al plano π. Trazamos la recta perpendicular al plano π que pasa por $(1, 1, 1)$.

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1, 1, 1)$ al plano π. Trazamos la recta perpendicular al plano π que pasa por $(1, 1, 1)$.

$$r\colon (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1) + (1, 1, 1)$$

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1,1,1)$ al plano π. Trazamos la recta perpendicular al plano π que pasa por $(1,1,1)$.

$$r\colon (x,y,z) = \lambda(1,-1,1) + (1,1,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & \lambda + 1 \\ y & = & -\lambda + 1 \\ z & = & \lambda + 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1, 1, 1)$ al plano π. Trazamos la recta perpendicular al plano π que pasa por $(1, 1, 1)$.

$$r: (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1) + (1, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x &= \lambda + 1 \\ y &= -\lambda + 1 \\ z &= \lambda + 1 \end{cases}$$

Reemplazamos en las ecuaciones del plano

$$(\lambda + 1) - (-\lambda + 1) + (\lambda + 1) = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Ejercicio

En primer lugar, buscamos la distancia de $P = (1, 1, 1)$ al plano π. Trazamos la recta perpendicular al plano π que pasa por $(1, 1, 1)$.

$$r: (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1) + (1, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x &= \lambda + 1 \\ y &= -\lambda + 1 \\ z &= \lambda + 1 \end{cases}$$

Reemplazamos en las ecuaciones del plano

$$(\lambda + 1) - (-\lambda + 1) + (\lambda + 1) = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto

$$r \cap \pi = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Ejercicio

Armamos el vector

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio

Armamos el vector

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Calculamos su norma

$$d(P, \pi) = \left\|\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio

Armamos el vector

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Calculamos su norma

$$d(P, \pi) = \left\| \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para el inciso (b), debemos buscar el punto $Z \in r$ por donde debe pasar el plano paralelo a π y tal que $d(Z, P) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda + 1, -\lambda + 1, \lambda + 1) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda + 1, -\lambda + 1, \lambda + 1) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda + 1, -\lambda + 1, \lambda + 1) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x,y,z)-(1,1,1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda+1, -\lambda+1, \lambda+1)-(1,1,1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ Ya conocíamos ese punto.

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda + 1, -\lambda + 1, \lambda + 1) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ Ya conocíamos ese punto.

Si $\lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio

Buscamos $(x, y, z) \in r$ tales que

$$||(x, y, z) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Usando las ecuaciones paramétricas, vemos que

$$||(\lambda + 1, -\lambda + 1, \lambda + 1) - (1, 1, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ Ya conocíamos ese punto.

Si $\lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow Z = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ Es el punto por donde debe pasar el plano π'.

Ejercicio

Por último, el plano π' es paralelo a π si tienen el mismo vector normal, por lo tanto

$$\pi' \rightsquigarrow (1,-1,1)\cdot(x,y,z) = (1,-1,1)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Ejercicio

Por último, el plano π' es paralelo a π si tienen el mismo vector normal, por lo tanto

$$\pi' \rightsquigarrow (1,-1,1)\cdot(x,y,z) = (1,-1,1)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Es decir

$$x - y + z = 0$$

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$*, dos rectas* r_1 *y* r_2 *se dicen:*

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$*, dos rectas* r_1 *y* r_2 *se dicen:*

- *alabeadas si no son paralelas y no tienen un punto en común (intersección vacía). Por lo tanto no existe un plano que las contenga.*

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, dos rectas r_1 y r_2 se dicen:

- *alabeadas si no son paralelas y no tienen un punto en común (intersección vacía). Por lo tanto no existe un plano que las contenga.*
- *coplanares si existe un plano π que las contiene. A su vez, estas rectas pueden ser:*

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, dos rectas r_1 y r_2 se dicen:

- *alabeadas si no son paralelas y no tienen un punto en común (intersección vacía). Por lo tanto no existe un plano que las contenga.*
- *coplanares si existe un plano π que las contiene. A su vez, estas rectas pueden ser:*
    1. *Concurrentes (tienen un punto en común).*

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, dos rectas r_1 y r_2 se dicen:

- *alabeadas si no son paralelas y no tienen un punto en común (intersección vacía). Por lo tanto no existe un plano que las contenga.*
- *coplanares si existe un plano π que las contiene. A su vez, estas rectas pueden ser:*
  1. *Concurrentes (tienen un punto en común).*
  2. *Paralelas.*

Rectas alabeadas y coplanares

Definicion

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, dos rectas r_1 y r_2 se dicen:

- *alabeadas si no son paralelas y no tienen un punto en común (intersección vacía). Por lo tanto no existe un plano que las contenga.*
- *coplanares si existe un plano π que las contiene. A su vez, estas rectas pueden ser:*
  1. *Concurrentes (tienen un punto en común).*
  2. *Paralelas.*

Graficamente: Link

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.
   Determinamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial entre los vectores directores de las rectas.

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.
   Determinamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial entre los vectores directores de las rectas. Luego tomamos cualquier punto de alguna de las rectas.

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.
   Determinamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial entre los vectores directores de las rectas. Luego tomamos cualquier punto de alguna de las rectas.

2. Si las rectas son paralelas.

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.
   Determinamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial entre los vectores directores de las rectas. Luego tomamos cualquier punto de alguna de las rectas.

2. Si las rectas son paralelas.
   Tomamos el vector director de una de las rectas y el otro lo construímos con un punto de cada recta.

Rectas coplanares

¿Cómo determinamos el plano π que las contiene?

1. Si las rectas son concurrentes.
   Determinamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial entre los vectores directores de las rectas. Luego tomamos cualquier punto de alguna de las rectas.

2. Si las rectas son paralelas.
   Tomamos el vector director de una de las rectas y el otro lo construímos con un punto de cada recta. Luego realizamos el producto vectorial.

Ejercicio 19

Las rectas $r_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$ y $r_2 : \lambda(1,2,3)$ son coplanares. Determine el plano que las contiene.

Ejercicio 19

Las rectas $r_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$ y $r_2 : \lambda(1, 2, 3)$ son coplanares. Determine el plano que las contiene.

La recta r_1 está dada por su ecuación simétrica, podemos identificar el vector director $\vec{u} = (-2, -2, 3)$

Ejercicio 19

Las rectas $r_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$ y $r_2 : \lambda(1,2,3)$ son coplanares. Determine el plano que las contiene.

La recta r_1 está dada por su ecuación simétrica, podemos identificar el vector director $\vec{u} = (-2,-2,3)$

La recta r_2 está dada por su ecuación vectorial, identificamos que el vector director es $\vec{v} = (1,2,3)$

Ejercicio 19

Las rectas $r_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$ y $r_2 : \lambda(1, 2, 3)$ son coplanares. Determine el plano que las contiene.

La recta r_1 está dada por su ecuación simétrica, podemos identificar el vector director $\vec{u} = (-2, -2, 3)$

La recta r_2 está dada por su ecuación vectorial, identificamos que el vector director es $\vec{v} = (1, 2, 3)$

Para hallar la ecuación del plano π que las contiene buscamos su vector normal $\vec{n}$.

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad = \quad \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$\begin{aligned}
\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-2 \cdot 3 - 3 \cdot 2, -(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 1), -2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1)
\end{aligned}$$

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-2 \cdot 3 - 3 \cdot 2, -(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 1), -2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) \\
&= (-12, 9, -2)
\end{aligned}
$$

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$\begin{aligned}\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-2 \cdot 3 - 3 \cdot 2, -(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 1), -2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) \\ &= (-12, 9, -2)\end{aligned}$$

Recordemos la ecuación general de un plano: $ax + by + cz + d = 0$

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-2 \cdot 3 - 3 \cdot 2, -(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 1), -2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) \\
&= (-12, 9, -2)
\end{aligned}
$$

Recordemos la ecuación general de un plano: $ax + by + cz + d = 0$
donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

Para ello realizamos el producto vectorial entre los vectores directores:

$$\begin{aligned}
\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-2 \cdot 3 - 3 \cdot 2, -(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 1), -2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) \\
&= (-12, 9, -2)
\end{aligned}$$

Recordemos la ecuación general de un plano: $ax + by + cz + d = 0$
donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$
En este caso la ecuación del plano es $\pi : -12x + 9y - 2z + d = 0$

Luego la ecuación del plano es $\pi : -12x + 9y - 2z + d = 0$

Luego la ecuación del plano es $\pi : -12x + 9y - 2z + d = 0$

Y sabemos que como contiene a las rectas r_1 y r_2 cualquier punto sobre ellas también estará en el plano. Por ejemplo, el $(0, 0, 0)$.

Luego la ecuación del plano es $\pi : -12x + 9y - 2z + d = 0$

Y sabemos que como contiene a las rectas r_1 y r_2 cualquier punto sobre ellas también estará en el plano. Por ejemplo, el $(0, 0, 0)$.

Por lo tanto, $d = 0$ y la ecuación del plano buscado es:

$$\pi : -12x + 9y - 2z = 0$$

Link

Ejercicio

Determinar el plano π *que contiene a las rectas*
$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(1, -3, 0)$ *y*
$r_2 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(-2, 6, 0)$

Ejercicio

Determinar el plano π *que contiene a las rectas*
$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(1, -3, 0)$ *y*
$r_2 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(-2, 6, 0)$

Como las rectas son paralelas podemos usar un sólo vector como generador del plano.

Ejercicio

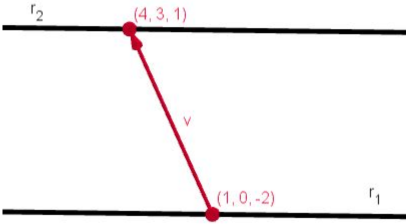
Determinar el plano π que contiene a las rectas
$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(1, -3, 0)$ *y*
$r_2 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(-2, 6, 0)$

Como las rectas son paralelas podemos usar un sólo vector como generador del plano. Luego construimos otro vector con los puntos de cada recta:
$\vec{v} = (4, 3, 1) - (1, 0, -2) = (3, 3, 3)$

Ejercicio

Determinar el plano π que contiene a las rectas
$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(1, -3, 0)$ *y*
$r_2 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(-2, 6, 0)$

Como las rectas son paralelas podemos usar un sólo vector como generador del plano. Luego construimos otro vector con los puntos de cada recta:
$\vec{v} = (4, 3, 1) - (1, 0, -2) = (3, 3, 3)$ Graficamente:



Ahora conseguimos el $\vec{n}$ con $(1, -3, 0) \times (3, 3, 3)$

Ahora conseguimos el $\vec{n}$ con $(1,-3,0)\times(3,3,3)$
$\vec{n}=(-9,-3,12)$

Ahora conseguimos el $\vec{n}$ con $(1, -3, 0) \times (3, 3, 3)$
$\vec{n} = (-9, -3, 12)$
Luego la ecuación del plano π será:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$-9x - 3y + 12z = -33$$

Ahora conseguimos el $\vec{n}$ con $(1,-3,0) \times (3,3,3)$
$\vec{n} = (-9,-3,12)$
Luego la ecuación del plano π será:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$-9x - 3y + 12z = -33$$

Donde P_0 es un punto de cualquier recta, por ejemplo:
$(1,0,-2) \cdot (-9,-3,12) = -33$

Ahora conseguimos el $\vec{n}$ con $(1, -3, 0) \times (3, 3, 3)$
$\vec{n} = (-9, -3, 12)$
Luego la ecuación del plano π será:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P_0$$

$$-9x - 3y + 12z = -33$$

Donde P_0 es un punto de cualquier recta, por ejemplo:
$(1, 0, -2) \cdot (-9, -3, 12) = -33$
Se puede escribir de forma equivalente al plano $\pi : 3x + y - 4z = 11$ dividiendo toda la expresión por -3.