# پروژه پایانی درس بهینه سازی ترکیبیاتی

## دکتر هوشمند خلیق

## اسامی اعضا:


امیررضا فتحی‌زاد - ۴۰۱۱۳۳۰۳

عرفان احتشامی کیا - ۴۰۱۱۳۰۰۱

رضا اسکندری - ۴۰۱۱۳۳۰۹


---

توضیحات:

در ارتباط با ضبط ویدئو ها، تمام تلاش بر این بود که حداکثر کیفیت در چهارچوب زمان تعیین شده حفظ شود. اما به علت طولانی بودن مقاله و زیاد بودن محدودیت ها در برخی مدل ها، ناچار شدیم مدت زمان ویدئو ها را مقداری افزایش دهیم. (هرچند که همچنان امکان طولانی تر کردن ویدئو ها جهت افزایش جزئیات ارائه شده وجود داشت اما تلاش بر آن بود که تا حد امکان به لیمیت زمانی ویدئو ها توجه گردد.)

همچنین هنگام اجرای کد های مربوط به مدل های section6 که آماده سازی و ران کردن آنها به عهده عرفان بود، بخاطر استفاده از سیستم عامل لینوکس، امکان نصب سالور CPLEX را جهت تسریع مدت زمان ران کدها نداشت. در نتیجه برای ران کردن کد های بخش ۶ مقاله، مجبور به کوچک کردن دیتاست شد. اما باقی کد ها با دیتاست اصلی ران شده اند.

دیتاست کوچک شده، در یک فولدر جداگانه در پوشه دیتاست ها قرار داده شده اند.


**با تشکر فراوان از زحمات شما استاد گرامی در طول ترم.**

## فهرست فاز ها:

**فاز اول:** ..... ۳

**فاز دوم:** ..... ٤

**فاز سوم:** ..... ٦

**فاز چهارم:** ..... ۲۳

**فاز ششم:** ..... ۲۵

نکته: کد های فاز ۵، داخل یک پوشه جداگانه در فایل ارسال شده پیوست شده اند.

## فاز اول:

مسئله مورد بررسی شامل تخصیص دانشجویان به پروگرم‌های دانشگاهی می‌باشد؛ به گونه‌ای که هر دانشجو بر اساس فهرست ترجیحات خود و امتیاز کسب‌شده در هر برنامه، حداکثر در یک برنامه پذیرفته شود. از طرف دیگر، هر برنامه آموزشی دارای ظرفیت مشخصی است و پذیرش دانشجویان باید با رعایت این ظرفیت‌ها انجام شود. هدف، یافتن یک تخصیص پایدار ((Stable Matching است؛ به این معنا که هیچ دانشجویی وجود نداشته باشد که بتواند با توجه به اولویت‌های خود و امتیازش، به برنامه‌ای بهتر منتقل شود، هرچند که آن برنامه نیز دلیلی برای رد او نداشته باشد.

در سیستم پذیرش دانشگاه‌های مجارستان، علاوه بر مدل کلاسیک، ویژگی‌های خاصی وجود دارد که مسئله را پیچیده‌تر می‌کنند. این مقاله بر دو ویژگی برابری امتیازها (Ties) و سهمیه ظرفیت مشترک (Common Quotas) تمرکز دارد و برای حل مسئله در حضور این محدودیت‌ها، مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه می‌کند.

لازم به ذکر است که در مواجهه با برابری امتیازها، سه رویکرد کلی وجود دارد. رویکرد اول رویکرد مجارستانی است که با نپذیرفتن آخرین دانشجویانی همراه می‌شود که به صورت انفرادی می‌توانستند وارد پروگرم شوند، ولی به علت وجود برابری امتیازها همه آن‌ها کنار گذاشته می‌شوند. رویکرد بعدی رویکرد شیلیایی است که بر خلاف رویکرد مجارستانی عمل می‌کند و دانشجویان دارای امتیاز برابر دارای امتیاز حد نصاب ورود را می‌پذیرند (ظرفیت اضافه می‌دهند). رویکرد آخر رویکرد ایرلندی است که در طی آن به صورت رندوم یک دانشجو انتخاب می‌شود.

*مفروضات مسئله:*

- هر دانشجو فهرستی مرتب از برنامه‌های مورد علاقه خود را ارائه می‌کند و ترجیحات او کاملاً مشخص و از پیش معلوم است.
- هر برنامه آموزشی متقاضیان را بر اساس امتیاز کسب‌شده رتبه‌بندی می‌کند و امتیاز بالاتر نشان‌دهنده اولویت بیشتر است.
- هر دانشجو حداکثر می‌تواند در یک برنامه پذیرفته شود و ظرفیت هر برنامه باید رعایت شود (البته ممکن است در مدل شیلیایی بیشتر از ظرفیت اولیه پذیرش شوند).
- ممکن است چند دانشجو در یک برنامه امتیاز یکسان داشته باشند. در این حالت، سیاست پذیرش باید با همه افراد دارای امتیاز برابر به‌صورت یکسان رفتار کند؛ یعنی بسته به سیاست انتخاب‌شده، همه آن‌ها پذیرفته یا همه رد شوند (از مدل ایرلندی استفاده نمی‌کنیم).
- علاوه بر ظرفیت هر برنامه، ممکن است چند برنامه به‌طور مشترک تحت یک سقف ظرفیت کلی قرار گیرند (سهمیه ظرفیت مشترک). بنابراین پذیرش در یک برنامه می‌تواند بر ظرفیت سایر برنامه‌های مرتبط نیز اثر بگذارد.

# فاز دوم:

## مجموعه‌ها و اندیس‌ها:

| نماد | تعریف | معرفی شده در |
|---|---|---|
| $\mathbf{A}$ | مجموعه تمام متقاضیان؛ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ | Section2 |
| $\mathbf{C}$ | مجموعه تمام دانشگاه‌ها / برنامه‌های تحصیلی؛ $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ | Section2 |
| $\mathbf{E}$ | مجموعه تمام درخواست‌های ثبت‌شده (زوج‌های دانشجو و دانشگاه)؛ $E \subseteq A \times C$ | Section2 |
| $S_j$ | مجموعه تمام نمرات متمایز و مرتب‌شده متقاضیانی که به دانشگاهj درخواست داده اند | Section2 |
| $C_p$ | یک زیرمجموعه از دانشگاه‌ها که با هم دارای یک سهمیه مشترکCommon Quota) ) هستند | Section 5 |
| $C^c$ | مجموعه تمامِ دسته‌های $C_p$ که دارای سهمیه مشترک هستند (شامل خود دانشگاه‌های تکی) | Section 5 |
| $S_p$ | مجموعه تمام نمرات متمایز و مرتب‌شده متقاضیانی که به سهمیه مشترک $C_p$ درخواست داده‌اند | Section 5 |
| $h\ ,i$ | اندیس‌های شمارنده مربوط به متقاضیان (دانشجویان) | Section2 |
| $q\ ,k\ ,j$ | اندیس‌های شمارنده مربوط به برنامه‌های تحصیلی | Section2 |
| $k$ | (در مدل‌های باینری): اندیس شمارنده برای جایگاه یک نمره خاص در مجموعه نمرات $S_p$ یا $S_j$ | Section2 |
| $p$ | اندیس شمارنده برای دسته‌های دارای سهمیه مشترک($C_p$) | Section 5 |

## پارامترها و ثابت‌ها:

| نماد | تعریف | معرفی شده در |
|---|---|---|
| $u_j$ | سقف ظرفیت پذیرش (حداکثر تعداد مجاز) در دانشگاه j | Section2 |
| $u_p$ | سقف سهمیه مشترک (Common Quota) برای مجموعه دانشگاه‌های $C_p$ | Section 5 |
| $r_{ij}$ | رتبه (اولویت) دانشگاه j در لیست ترجیحات دانش‌آموز i | Section2 |
| $s_{ij}$ | نمره‌ای که دانش‌آموز i برای پذیرش در دانشگاه j کسب کرده | Section2 |
| $\underline{s}$ | کران بالا (حداکثر مقدار ممکن) برای نمرات در کل سیستم پذیرش | Section2 |
| $\varepsilon$ | یک عدد ثابت، مثبت و بسیار کوچک (برای تبدیل نامعادلات از حالت غیراکید به اکید) | Section2 |
| $K$ | یک عدد ثابت و بسیار بزرگ ((Big M | Section2 |
| $s_j^k$ | k-امین نمره در مجموعه نمرات مرتب‌شده‌ی $S_j$ | Section2 |
| $s_p^k$ | k-امین نمره در مجموعه نمرات مرتب‌شده‌ی متقاضیان سهمیه مشترک $S_p$ | Section 5 |

## متغیرهای تصمیم:

| نماد | تعریف | معرفی شده در |
|---|---|---|
| $x_{ij}$ | متغیر باینری تخصیص: اگر متقاضی i در دانشگاه j پذیرفته شود برابر ۱، وگرنه ۰ | Section2 |
| $t_j$ | متغیر پیوسته نمره حد نصاب: نمره آخرین فرد قبولی (Cutoff score) در دانشگاه j | Section2 |
| $f_j$ | متغیر باینری وضعیت ظرفیت: اگر دانشگاه j حداقل یک نفر را رد کند برابر ۱، وگرنه ۰ | Section2 |
| $t_j^k$ | متغیر باینری حد نصاب: اگر حد نصاب دانشگاه j حداکثر برابر با نمره $s_j^k$ باشد برابر ۱، وگرنه ۰ | Section2 |
| $d_{ij}$ | متغیر باینری کمکی (گره - سیاست مجارستان/شیلی): اگر متقاضی در حال حاضر پذیرفته نشده باشد، اما با کاهش حد نصاب دانشگاه به اندازه یک گام پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. | Section 3 & 4 |

| | | |
|---|---|---|
| Section 4 | متغیر باینری کمکی (گره - سیاست شیلی): نشان می‌دهد که متقاضی i اکنون در دانشگاه j پذیرفته شده است، اما اگر حد نصاب فقط یک گام افزایش می‌یافت، مردود می‌شد. | $\underline{d}_{ij}$ |
| Section 5 | متغیر پیوسته نمره حد نصاب (سهمیه مشترک): نمره حد نصاب نهایی برای سهمیه مشترک $C_p$ | $t_p$ |
| Section 5 | متغیر باینری کمکی (سهمیه مشترک): برای ارتباط بین دانشگاه j و سهمیه $C_p$ *که نشان‌دهنده محدودکننده بودن آن سهمیه است* | $b_j^p$ |
| Section 5 | متغیر باینری وضعیت ظرفیت (سهمیه مشترک): اگر سهمیه مشترک $C_p$ حداقل یک متقاضی را رد کند برابر ۱، در غیر این‌صورت ۰ | $f_p$ |
| Section 5 | متغیر باینری حد نصاب (سهمیه مشترک): اگر حد نصاب سهمیه مشترک $C_p$ حداکثر برابر با نمره $s_p^k$ باشد برابر ۱، وگرنه ۰ | $t_p^k$ |
| Section6 | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - مجارستان): اگر متقاضی i رد شده باشد اما در صورت کاهش یک گام از حد نصاب سهمیه $C_p$ در دانشگاه j پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. | $e_{ij}^p$ |
| Section6 | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - مجارستان): اگر متقاضی i رد شده باشد اما در صورت کاهش یک گام از حد نصاب سهمیه $C_p$ حداقل در یک دانشگاه آن سهمیه پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. | $d_i^p$ |
| Section6 | متغیر کمکی (سهمیه مشترک): مجموع متقاضیان پذیرفته‌شده در دسته‌ای از دانشگاه‌ها (معادل $\sum x_{ij}$) | $x_i^p$ |
| Section6 | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - شیلی): اگر متقاضی i در سهمیه $C_p$ *پذیرفته شده باشد اما در مرز حد نصاب باشد (با افزایش حد نصاب رد می‌شد)، برابر ۱ است.* | $\underline{d}_i^p$ |

# فاز سوم:

## Section2: The Gale-Shapley model

### ۱. *The Baïou*-Balinski formulation(SO-BB):

این بخش که ٤ رابطه اول را شامل میگردد، پایه‌ای‌ترین مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح (IP) ارائه شده در مقاله است که برای حل مسئله استاندارد پذیرش دانشگاه‌ها (بدون پیچیدگی‌های خاص) توسعه یافته است.

**۱-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:**

- رتبه‌بندی اکید ( :(Strict Rankingsفرض بر این است که اولویت‌بندی متقاضیان توسط دانشگاه‌ها کاملا اکید است، به این معنا که هیچ دو متقاضی‌ای نمره کاملاً یکسانی برای یک دانشگاه ندارند (عدم وجود Ties).
- فقدان سهمیه های مشترک: هیچ‌گونه سهمیه بالادستی، بودجه‌ای یا همپوشان (Common Quotas) بین رشته‌ها یا دانشگاه‌ها وجود ندارد. ظرفیت هر دانشگاه کاملاً مستقل از سایرین است.
- پایداری استاندارد: یک تخصیص زمانی موجه و پایدار است که هیچ متقاضی و دانشگاهی خارج از تخصیص وجود نداشته باشند که هر دو یکدیگر را به وضعیت فعلی‌شان ترجیح دهند (نبود زوج مسدودکننده).
- بهینگی برای دانشجو: هدف سیستم، یافتن تخصیص پایداری است که بهترین نتیجه ممکن (بالاترین اولویت‌های قبولی) را برای متقاضیان رقم بزند.

**۱-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:** *( این اولین مدل است، پس تمام نمادها برای آن جدید محسوب می‌شوند)*

| | | |
|---|---|---|
| **A** | مجموعه تمام متقاضیان (دانشجویان) شرکت‌کننده در سیستم پذیرش؛ ($a_i$) | مجموعه (Set) |
| **C** | مجموعه تمام دانشگاه‌ها (کالج‌ها / برنامه‌های تحصیلی)؛ ($c_j$) | مجموعه (Set) |
| **E** | مجموعه تمام درخواست‌های ثبت‌شده (زوج‌های دانشجو و دانشگاه)؛ ($a_i,c_j$)<br>$E \subseteq A \times C$ | مجموعه (Set) |
| $u_i$ | سقف ظرفیت پذیرش (حداکثر تعداد مجاز دانشجو) در دانشگاه j | پارامتر (Parameter) |
| $r_{ij}$ | رتبه (اولویت) دانشگاه j در لیست ترجیحات دانش‌آموز i (اعداد کوچک‌تر یعنی اولویت بهتر) | پارامتر (Parameter) |
| $s_{ij}$ | نمره‌ای که دانش‌آموز i برای پذیرش در دانشگاه j کسب کرده است | پارامتر (Parameter) |

**۱-۳. متغیرهای تصمیم:**

| | | |
|---|---|---|
| $x_{ij} \in \{0,1\}$ | متغیر باینری تخصیص. اگر درخواست متقاضی $a_i$ برای دانشگاه $c_j$ پذیرفته شود، مقدار آن برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ خواهد بود. | متغیر تصمیم (Decision Var) |

**۱-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی (:SO-BB)**

**تابع هدف:**

$$\min \sum_{(a_i,c_j)\in E} r_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (4)$$

این تابع، مجموع رتبه‌های قبولی متقاضیان را **کمینه** می‌کند. از آنجا که رتبه ۱ بهتر از رتبه ۲ است، سیستم تلاش می‌کند متقاضیان را به مطلوب‌ترین انتخاب‌هایشان اختصاص دهد. این تابع، انتخاب «تطابق پایدار بهینه برای دانشجو» را تضمین می‌کند.

**محدودیت‌ها (قیود):**

$$\sum_{j:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leq 1 \text{ for each } a_i \in A \qquad (1)$$

قید (۱) - محدودیت ظرفیت متقاضی: این قید تضمین می‌کند که هر متقاضی در نهایت حداکثر در یک دانشگاه پذیرفته شود.

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leq u_j \text{ for each } c_j \in C \qquad (2)$$

قید (۲) - محدودیت ظرفیت دانشگاه: این قید تضمین می‌کند که مجموع متقاضیان پذیرفته‌شده در هر دانشگاه از ظرفیت قانونی آن ($u_j$) فراتر نرود. این دو قید با هم، موجه بودن (Feasibility) تخصیص را تضمین می‌کنند.

$$\left(\sum_{k:r_{ik}\leq r_{ij}} x_{ik}\right)\cdot u_j + \sum_{h:(a_h,c_j)\in E, s_{hj}>s_{ij}} x_{hj} \geq u_j \text{ for each } (a_i,c_j)\in E \quad (3)$$

قید (۳) - شرط پایداری ( :(Stabilityاین قید ، قلب مدل SO-BB است و مانع از ایجاد «زوج مسدودکننده» می‌شود. برای هر درخواست $(a_i, c_j)$ ، این قید دو حالت را در نظر می‌گیرد:

- اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ یا در اولویت‌های بالاتر خود پذیرفته شده باشد، پرانتز اول برابر ۱ می‌شود و عبارت سمت چپ حداقل برابر با $u_j$ خواهد بود که نامعادله را ارضا می‌کند (متقاضی راضی است).
- اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ یا در اولویت‌های بالاتر خود پذیرفته نشده باشد (رد شده باشد)، پرانتز اول صفر می‌شود. در این حالت، قید تضمین می‌کند که مجموع $x_{hj}$ برای افرادی که نمره‌شان از $a_i$ بالاتر است ($s_{hj} > s_{ij}$)، باید حداقل به اندازه ظرفیت $u_j$ باشد. به عبارت دیگر، تضمین می‌کند که متقاضی $a_i$ تنها تنها در صورتی از دانشگاه $c_j$ رد می‌شود که تمام ظرفیت آن دانشگاه توسط افرادی با نمره بالاتر پر شده باشد.

**۲. *The cutoff score formulation* (SO-NW-CUT):**

این مدل با هدف جایگزینی قید پیچیده پایداری (قید ۳ در مدل قبلی) با مجموعه‌ای از قیود کارآمدتر، مسئله را به جای تخصیص مستقیم، از فرمول‌بندی می‌کند «تعیین نمره قبولی (حد نصاب) هر دانشگاه» منظر.

برای تضمین پایداری در حالت قبل، باید برای هر جفت دانشجو و دانشگاهی که دانشجو به آنها درخواست داده، محدودیت ۳ را بنویسیم. این یعنی تعداد بسیار زیادی محدودیت پیچیده که نوشتن و حل آن‌ها برای solver ها از پیچیدگی محاسباتی بالایی برخوردار است.

راه حل پیشنهادی: Cutoff Score
نویسندگان پیشنهاد دادند به جای بررسی اینکه تک‌تک دانشجوها با چه کسانی رقابت می‌کنند، برای هر دانشگاه یک متغیر به عنوان نمره حد نصاب ($t_j$) تعریف کنیم. به اینصورت که دانشگاه اعلام می‌کند آخرین نمره قبولی $t_j$ است. هر کس نمره‌اش بالای $t_j$ باشد و این دانشگاه اولویتش باشد، قبول می‌شود و هر کس زیر $t_j$ باشد، رد می‌شود.

**۲-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:**

- مفروضات پایه‌ای (رتبه‌بندی اکید، عدم وجود گره و عدم وجود سهمیه مشترک) مشابه مدل قبلی است.

- فرض عدم حسادت (Envy-freeness): در این مدل فرض می‌شود که هیچ‌کس نباید وجود داشته باشد که در دانشگاه مورد نظرش قبول نشده باشد در حالی که شخص دیگری با نمره کمتر، در آن دانشگاه قبول شده باشد. این امر توسط $t_j$ کنترل می‌شود.
- فرض عدم اتلاف (Non-wastefulness): فرض می‌شود که اگر دانشگاهی ظرفیت خالی دارد، نباید افرادی که متقاضی ورود به آن هستند را رد کند (مگر اینکه نمره متقاضی به حد نصاب نرسد، که در صورت خالی بودن ظرفیت، حد نصاب باید به کمترین میزان ممکن یعنی صفر برسد).

### ۲-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{s}$ | کران بالا (حداکثر مقدار ممکن) برای نمرات در کل سیستم | (Parameter) |
| $\varepsilon$ | یک عدد ثابت، مثبت و بسیار کوچک برای تنگ‌تر کردن نامعادلات در مدل حد نصاب پیوسته | (Parameter) |

### ۲-۳. متغیرهای تصمیم جدید(علاوه بر $x_{ij}$):

| | | |
|---|---|---|
| $t_j \geq 0$ | متغیر پیوسته و غیرمنفی: نشان‌دهنده نمره حد نصاب (Cutoff score) نهایی برای دانشگاه j | (Decision Var) |
| $f_j \in \{0,1\}$ | متغیر باینری نشان‌دهنده وضعیت ظرفیت: اگر دانشگاه j حداقل یک نفر را رد کند برابر ۱، در غیر این‌صورت (وجود ظرفیت خالی) برابر ۰ | (Decision Var) |

### ۲-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی:

**تابع هدف:**

$$\min \sum_{(a_i,c_j)\in E} r_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (4)$$

این تابع که همان تابع هدف مسئله قبل است، مجموع رتبه‌های قبولی متقاضیان را کمینه می‌کند. از آنجا که رتبه ۱ بهتر از رتبه ۲ است، سیستم تلاش می‌کند متقاضیان را به مطلوب‌ترین انتخاب‌هایشان اختصاص دهد. این تابع، انتخاب تطابق پایدار بهینه برای دانشجو را تضمین می‌کند.

**محدودیت‌ها (قیود):**

علاوه بر قیود موجه بودن (۱) و (۲) از مدل قبل، قیود زیر اضافه می‌شوند:

$$t_j \leq \left(1 - x_{ij}\right) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (5)$$

قید (۵) - تضمین شرط پذیرش منطقی: این قید تضمین می‌کند که اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ پذیرفته شود($x_{ij} = 1$)، نمره حد نصاب آن دانشگاه ($t_j$) نمی‌تواند از نمره این متقاضی ($s_{ij}$) بیشتر باشد. (اگر فرد رد شود ($x_{ij} = 0$)، عبارت بزرگ $\underline{s} + 1$ نامعادله را خنثی می‌کند.)

$$s_{ij} + \epsilon \leq t_j + \left(\sum_{k:r_{ik}\leq r_{ij}} x_{ik}\right) \cdot (\bar{s} + 1) \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (6)$$

قید (۶) - تضمین عدم حسادت ( :(Envy-freeneesاین قید تضمین می‌کند که رد شدن یک متقاضی کاملاً عادلانه است. اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ یا دانشگاهی بهتر پذیرفته نشده باشد (عبارت سیگما برابر صفر شود)، این قید اثبات می‌کند که نمره او به علاوه مقداری جزئی ($\epsilon$) حتماً کوچکتر یا مساوی حد نصاب است ($s_{ij} < t_j$). یعنی نمره او برای ورود کافی نبوده.

$$f_j \cdot u_j \leq \sum_{(a_i,c_j)\in E:c_j\in C} x_{ij} \qquad \forall c_j \in C \tag{7}$$

$$t_j \leq f_j(\bar{s}+1) \qquad \forall c_j \in C \tag{8}$$

قیود (۷) و (۸) - تضمین عدم اتلاف ( :(Non-wastefulnessاین دو قید در کنار هم تضمین می‌کنند که هیچ ظرفیتی بی‌دلیل خالی نماند:

- قید (۷) تضمین می‌کند که اگر متغیر رد کردن $f_j = 1$ برابر ۱ شود، حتما مجموع پذیرفته‌شدگان با سقف ظرفیت($u_j$) برابر است (یعنی ظرفیت کاملاً پر شده است).
- قید (۸) تضمین می‌کند که اگر دانشگاهی پر نشود ($f_j = 0$)، نمره حد نصاب آن اجبارا باید به صفر برسد ($t_j \leq 0$). یعنی هر متقاضی‌ای که مایل به ورود باشد، می‌تواند وارد شود و صندلی‌ها هدر نمی‌روند.

همچنین مدل‌های جایگزین MIN-CUT و MSMR-CUT نیز در مقاله مطرح شده‌اند که در آنها قیود ۷ و ۸ و متغیر $f_j$ حذف می‌شوند و به جای تابع هدف ۴، از تابع هدف ۹ **یا** ۱۰ استفاده می‌شود.

$$\min \sum_{c_j\in C} t_j \tag{9}$$

Or

$$\max \sum_{(a_i,c_j)\in E} (K - r_{ij}) \cdot x_{ij} \tag{10}$$

توابع هدف جایگزین (۹ و ۱۰): این توابع هدف می‌توانند پایداری را بدون نیاز به قیود عدم اتلاف (۷ و ۸) تضمین کنند:

- تابع (۹) با کمینه کردن مستقیم مجموع حد نصاب‌ها، به طور خودکار مانع از بالا ماندن بی‌دلیل حد نصاب برای دانشگاه‌های دارای ظرفیت خالی می‌شود.
- تابع (۱۰) با بیشینه کردن تعداد تخصیص‌ها (به کمک ثابت بزرگ K که وزن قبولی را بالا می‌برد) و همزمان لحاظ کردن اولویت‌ها، تضمین می‌کند که بیشترین ظرفیت ممکن به بهترین شکل پر شود.

## ۳. *The binary cutoff score formulation* (SO-NW-BIN-CUT):

این مدل با هدف رفع مشکل کندی محاسباتی در نرم‌افزارهای بهینه‌سازی به دلیل استفاده از اعداد بسیار بزرگ، متغیرهای پیوسته حد نصاب و ضرایب بزرگ (Big-M) را به طور کامل حذف کرده و از معماری باینری (صفر و یک) برای تعیین حد نصاب استفاده می‌کند.

### ۳-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:

- مفروضات پایه‌ای (رتبه‌بندی اکید، عدم وجود گره و عدم سهمیه مشترک) پابرجاست.

- فرض گسسته‌سازی فضا: در این مدل فرض می‌شود که نمرات متقاضیان یک طیف پیوسته نامتناهی نیست، بلکه مجموعه‌ای محدود و گسسته از نمرات مشخص است. بنابراین، حد نصاب هر دانشگاه فقط می‌تواند یکی از نمرات دقیق ثبت‌شده توسط متقاضیانِ همان دانشگاه باشد.
- فرضیات عدم حسادت و عدم اتلاف ظرفیت مانند مدل قبلی برقرار هستند.

### ۳-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:

| | | |
|---|---|---|
| $S_j$ | مجموعه تمام نمرات متمایز و مرتب‌شده متقاضیانی که به دانشگاه j درخواست داده‌اند | مجموعه (Set) |
| K | یک عدد ثابت و بسیار بزرگ (Big-M) که در توابع هدفِ بیشینه‌سازی استفاده می‌شود | پارامتر (Parameter) |
| $s_j^k$ | نشان دهنده k-امین نمره در مجموعه مرتب شده $s_j$ به طوری که: $s_j^1 < s_j^2 <\ldots< s_j^{m_j}$ | پارامتر (Parameter) |

### ۳-۳. متغیرهای تصمیم جدید:

| | | |
|---|---|---|
| $t_j^k \in \{0,1\}$ | متغیر باینری حد نصاب: اگر نمره حد نصاب دانشگاه j حداکثر برابر با نمره $s_j^k$ باشد برابر ۱، و اگر از آن بزرگتر باشد برابر ۰ | متغیر تصمیم (Decision Var) |

### ۳-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی:

**تابع هدف:**

$$\min \sum_{(a_i,c_j)\in E} r_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (4)$$

این تابع همانند تابع هدف دو مدل قبل، مجموع رتبه‌های قبولی متقاضیان را کمینه می‌کند. سیستم تلاش می‌کند متقاضیان را به مطلوب‌ترین انتخاب‌هایشان اختصاص دهد. این تابع، انتخاب تطابق پایدار بهینه برای دانشجو را تضمین می‌کند.

**محدودیت‌ها (قیود):**

علاوه بر قیود موجه بودن (۱) و (۲)، قیود زیر جایگزین قیود مدل قبلی می‌شوند:

$$x_{ij} \le t_j^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (11)$$

قید (۱۱) - تضمین شرط پذیرش بر اساس نمره: این قید تضمین می‌کند که اگر متقاضی $a_i$ دارای نمره $s_j^k$ باشد، تنها در صورتی می‌تواند پذیرفته شود $x_{ij} = 1$ که متغیر باینری حد نصاب برای آن نمره فعال باشد ($t_j^k = 1$). اگر حد نصاب بالاتر از نمره او باشد ($t_j^k = 0$)، متقاضی حتماً رد می‌شود.

$$t_j^k \le t_j^{k+1} \text{ for each } k = 1.(|S_j| - 1) \qquad (12)$$

قید (۱۲) - تضمین یکنوایی منطقی حد نصاب: این قید تضمین می‌کند که اگر نمره پایینی برای قبولی کافی باشد ($t_j^k = 1$)، تمام نمرات بالاتر از آن نیز قطعاً برای قبولی کافی خواهند بود ($t_j^{k+1} = 1$). ین قید از بروز تناقض در متغیرهای باینری جلوگیری می‌کند.

$$1 \leq \sum_{h:r_{ih} \leq r_{ij}} x_{ih} + (1 - t_j^k) \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (13)$$

قید (۱۳) - تضمین عدم حسادت (جایگزین قید ۶): این قید ، ضریب Big-M را حذف کرده است. تضمین می‌کند که اگر متقاضی در این دانشگاه یا گزینه‌های بهتر قبول نشود (سیگما برابر صفر شود)، عبارت $1 - t_j^k$ باید حداقل ۱ شود. این یعنی $t_j^k$ حتماً صفر است (نمره متقاضی به حد نصاب نرسیده و رد شدنش کاملاً عادلانه بوده است).

$$(1 - t_j^1) \cdot u_j \leq \sum_{(a_i, c_j) \in E: c_j \in C} x_{ij} \qquad \forall c_j \in C \qquad (14)$$

قید (۱۴) - تضمین عدم اتلاف (جایگزین قیود ۷ و ۸): این قید تضمین می‌کند که اگر حد نصاب دانشگاه از پایین‌ترین نمره ثبت‌شده متقاضیانش بالاتر برود (یعنی $t_j^1 = 0$ شود و دانشگاه حداقل یک نفر را رد کند)، مجموع پذیرفته‌شدگان سمت راست حتماً باید سقف ظرفیت $u_j$ را پر کند.

همچنین مانند مدل قبل، اگر بخواهیم قید عدم اتلاف (۱۴) را حذف کنیم، می‌توانیم از توابع هدف جایگزین زیر استفاده کنیم که پایداری را تضمین می‌کنند:

$$\max \sum_{c_j \in C, k=1..|S_j|} t_j^k \qquad (15)$$

Or

$$\max \sum_{(a_i, c_j) \in E} (K - r_{ij}) \cdot x_{ij} \qquad (10)$$

توابع هدف جایگزین (۱۵ و ۱۰): این توابع هدف می‌توانند پایداری را بدون نیاز به قید عدم اتلاف (۱٤) تضمین کنند:

- تابع (۱۰) با بیشینه کردن تعداد تخصیص‌ها (به کمک ثابت بزرگ K که وزن قبولی را به شدت بالا می‌برد) و همزمان لحاظ کردن اولویت‌ها، تضمین می‌کند که بیشترین ظرفیت ممکن به بهترین شکل پر شود.
- تابع هدف (۱۵): این تابع هدف (در مدل‌های جایگزین)، مجموع متغیرهای $t_j^k$ را بیشینه می‌کند. چون فعال شدن متغیرهای باینری بیشتر، به معنای پایین آمدن سطح حد نصاب است، این تابع هدف باعث کاهش حد نصاب‌ها به پایین‌ترین حد مجاز شده و شرط عدم اتلاف را ذاتاً تضمین می‌کند.

### ٤. *Envy-free formulation* (MSMR-EF):

این مدل یک رویکرد متفاوت است که نویسندگان نشان می‌دهند می‌توان مسئله تطابق پایدار را به طور کامل بدون استفاده از مفهوم نمره حد نصاب فرمول‌بندی کرد.

#### ۴-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:

- مفروضات پایه‌ای مشابه مدل‌های قبل است.
- فرض عدم نیاز به حد نصاب: فرض می‌شود که پایداری می‌تواند مستقیماً با مقایسه تن‌به‌تن (Pairwise) بین متقاضیان یک دانشگاه تضمین شود، بدون اینکه نیازی به محاسبه یک متغیر سراسری به نام حد نصاب باشد.

#### ۴-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:

هیچ پارامتر، مجموعه یا اندیس جدیدی نسبت به مدل اضافه نشده است. فقط از مقایسه بین دو متقاضی (مثل *i* و *h*) استفاده می‌شود.

### ۳-۴. متغیرهای تصمیم:

فقط از همان متغیر اصلی تخصیص یعنی $x_{ij} \in \{0,1\}$ استفاده می‌شود و تمام متغیرهای حد نصاب حذف شده‌اند.

### ۴-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی:

**تابع هدف:**

$$\max \sum_{(a_i,c_j)\in E} (K - r_{ij}) \cdot x_{ij} \qquad (10)$$

تابع هدف (۱۰): از آنجا که قید ۱۶ فقط عدم حسادت را بررسی می‌کند (و کاری به خالی ماندن صندلی‌ها ندارد)، تابع هدف (۱۰) که سعی در بیشینه کردن تعداد تخصیص‌ها دارد، تضمین می‌کند که هیچ صندلیِ قابل‌استفاده‌ای خالی نماند و عدم اتلاف برقرار شود. ترکیب این دو، پایداری را نتیجه می‌دهد.

**محدودیت‌ها (قیود):**

علاوه بر قیود موجه بودن (۱) و (۲)، قید پایداری زیر جایگزین سایر قیود می‌شود:

$$\sum_{k:r_{ik}\le r_{ij}} x_{ik} \ge x_{hj} \quad \forall (a_i, c_j), (a_h, c_j) \in E, s_{ij} \ge s_{hj} \qquad (16)$$

قید (۱۶) - تضمین مستقیم پایداری و عدم حسادت: این قید، مقایسه‌ای مستقیم بین دو متقاضی و $a_i$ و $a_h$ برای دانشگاه $c_j$ انجام می‌دهد؛ جایی که نمره $a_i$ بیشتر یا مساوی $a_h$ است. قید تضمین می‌کند که اگر متقاضی ضعیف‌تر در این دانشگاه پذیرفته شود ($x_{hj} = 1$)، متقاضی قوی‌تر ($a_i$) حتماً باید در این دانشگاه یا گزینه‌های بهتر از آن پذیرفته شده باشد (یعنی سیگمای سمت چپ حداقل ۱ بشود). این قید با جلوگیری از سبقت گرفتن افراد ضعیف‌تر از افراد قوی‌تر، عدم حسادت را صد در صد تضمین می‌کند.

## *Section 3: Models with ties*

در این بخش از مقاله، فرض رتبه‌بندی اکید کنار گذاشته می‌شود و با پدیده گره (Ties - برابری نمرات متقاضیان) روبرو می‌شویم. مدل‌های این بخش برای سیاست سخت‌گیرانه مجارستان (Restrictive Policy) توسعه یافته‌اند که در آن، سقف ظرفیت تحت هیچ شرایطی نباید نقض شود.

### ۵. (SO-H-NW-CUT) Restrictive Policy for *The cutoff score formulation with ties* :

این مدل، توسعه‌یافته‌ی مدل SO-NW-CUT از section۲ است. از آنجا که در سیاست مجارستان در صورت بروز گره در مرز ظرفیت، تمام متقاضیان هم‌نمره رد می‌شوند تا ظرفیت نقض نشود، مفهوم عدم اتلاف تغییر می‌کند. در این مدل، یک صندلی خالی زمانی اتلاف‌شده محسوب نمی‌شود که اگر بخواهیم حد نصاب را برای پر کردن آن حتی یک نمره کاهش دهیم، ظرفیت قانونی دانشگاه (به دلیل ورود همزمان افراد هم‌نمره) نقض شود.

### ۱-۵. شرح کامل مفروضات مسئله:

- وجود Ties: متقاضیان می‌توانند نمرات کاملاً یکسانی برای یک رشته داشته باشند.
- سیاست رفتار یکسان: اگر متقاضی الف پذیرفته شود، تمام متقاضیانی که نمره‌شان با الف برابر است نیز باید پذیرفته شوند (عدم حسادت بین افراد هم‌نمره).
- سیاست سخت‌گیرانه مجارستان: ظرفیت اعلام‌شده دانشگاه ($u_j$) به هیچ وجه نباید نقض شود.

- تعریف جدید پایداری (عدم اتلاف): نمره حد نصاب یک دانشگاه تنها در صورتی مجاز است بالاتر از صفر باشد که کاهش آن (حتی به اندازه ۱ نمره) منجر به نقض سقف ظرفیت گردد.

### ۵-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:

هیچ مجموعه یا پارامتر جدیدی نسبت به مدل‌های بخش ۲ به این مدل اضافه نشده است. (همان پارامترهای $s_{ij}, u_j, \underline{s}, \varepsilon$ استفاده میشوند.)

### ۵-۳. متغیرهای تصمیم (اضافه‌شده نسبت به مدل SO-NW-CUT):

| | | |
|---|---|---|
| $d_{ij} \in \{0,1\}$ | متغیر باینری کمکی: اگر متقاضی در حال حاضر پذیرفته نشده باشد، اما با کاهش حد نصاب دانشگاه به اندازه یک گام پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. | (Decision Var) |
| $f_j \in \{0,1\}$ | در این مدل بازتعریف مفهومی شده است و نشان می‌دهد آیا ظرفیت دانشگاهBinding در نظر گرفته می‌شود یا خیر. | (Decision Var) |

### ۵-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی

**تابع هدف:**

$$\max \sum_{(a_i,c_j)\in E} (K - r_{ij}) \cdot x_{ij} \qquad (10)$$

**محدودیت‌ها (قیود):**

$$\sum_{j:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \le 1 \text{ for each } a_i \in A \qquad (1)$$

قید (۱) - تضمین می‌کند که هر متقاضی در نهایت حداکثر در یک دانشگاه پذیرفته شود.

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \le u_j \text{ for each } c_j \in C \qquad (2)$$

قید (۲) - تضمین می‌کند که مجموع متقاضیان پذیرفته‌شده در هر دانشگاه از ظرفیت قانونی آن ($u_j$) فراتر نرود.

$$t_j \le \left(1 - x_{ij}\right) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (5)$$

قید (۵) - تضمین می‌کند اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ پذیرفته شود($x_{ij} = 1$ )، نمره حد نصاب آن دانشگاه ($t_j$) نمی‌تواند از نمره این متقاضی ($s_{ij}$) بیشتر باشد.

$$s_{ij} + \epsilon \le t_j + \left(\sum_{k:r_{ik}\le r_{ij}} x_{ik}\right) \cdot (\bar{s} + 1) \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (6)$$

قید (۶) - اگر متقاضی $a_i$ در دانشگاه $c_j$ یا دانشگاهی بهتر پذیرفته نشده باشد (عبارت سیگما برابر صفر شود)، این قید اثبات می‌کند که نمره او به علاوه مقداری جزئی ($\epsilon$) حتماً کوچکتر یا مساوی حد نصاب است ($s_{ij} < t_j$). یعنی نمره او برای ورود کافی نبوده.

قیود بالا از مدلهای قبل منتقل شده اند.(موجه‌بودن ظرفیت‌ها و شرط عدم حسادت)

$$d_{ik} \leq (1 - x_{ij}) \qquad \text{for each } (a_i, c_j) \in E, (a_i, c_k) \in E, r_{ik} \geq r_{ij} \quad (17)$$

قید (۱۷) - منطق ترجیح برای کاندیدای کاهش نمره: این قید تضمین می‌کند که متغیر $d_{ik}$ تنها زمانی می‌تواند ۱ شود که دانشجو در اولویت‌های برابر یا بهتر خود پذیرفته نشده باشد.

$$t_j - 1 \leq \left(1 - d_{ij}\right) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (18)$$

قید (۱۸) - احراز نمره برای متغیر کمکی: تضمین می‌کند که متغیر $d_{ij}$ تنها زمانی ۱ می‌شود که نمره دانشجو $(s_{ij})$ حداقل برابر با حد نصاب منهای یک $(t_j - 1)$ باشد.

قیود (۱۹) و (۸) برای عدم اتلاف:

$$f_j \cdot (u_j + 1) \leq \sum_{(a_i, c_j) \in E : c_j \in C} (x_{ij} + d_{ij}) \qquad \forall c_j \in C \qquad (19)$$

قید (۱۹) - <u>تضمین عدم اتلاف در سیاست مجارستان</u>: این قید جایگزین قید (۷) در مدل‌های بدون tie است. اگر دانشگاه در نظر بگیرد که پر شده است $(f_j = 1)$ ، سمت چپ برابر $u_j + 1$ می‌شود. قید تضمین می‌کند که مجموع پذیرفته‌شدگان فعلی $(x_{ij})$ و متقاضیانی که پشت در ایستاده‌اند $(d_{ij})$ باید بیشتر از ظرفیت مجاز $(u_j)$ باشد. یعنی سیستم می‌فهمد که اگر حد نصاب را پایین بیاورد، ظرفیت میترکد؛ بنابراین خالی ماندن ظرفیت فعلی موجه است.

$$t_j \leq f_j(\bar{s} + 1) \qquad \forall c_j \in C \qquad (8)$$

قید (۸) - تضمین می‌کند که اگر دانشگاهی پر نشود $(f_j = 0)$، نمره حد نصاب آن اجبارا باید به صفر برسد $(t_j \leq 0)$. یعنی هر متقاضی‌ای که مایل به ورود باشد، می‌تواند وارد شود و صندلی‌ها هدر نمی‌روند.

### ۶. ***The binary cutoff score formulation with ties for*** **Restrictive Policy (SO-H-NW-BIN-CUT):**

همانند ۲section برای افزایش سرعت حل، مدل با متغیر های باینری بازنویسی میشود.

#### ۶-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:

مفروضات کاملا منطبق بر مدل پنجم (سیاست سخت‌گیرانه مجارستان) هستند. تنها فرض اضافه این است که فضای نمرات حد نصاب پیوسته نیست، بلکه محدود به مجموعه نمرات متمایزی است که متقاضیان به دست آورده‌اند.

#### ۶-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید نسبت به مدل ۵:

| | |
|---|---|
| $S_j$ | مجموعه تمام نمرات متمایز و مرتب‌شده متقاضیانی که به دانشگاهj درخواست داده اند |
| $k$ | (در مدل‌های باینری): اندیس شمارنده برای جایگاه یک نمره خاص در مجموعه نمرات $S_p$ یا $S_j$ |
| $s_j^k$ | k-امین نمره در مجموعه نمرات مرتب‌شده‌ی $S_j$ |

#### ۶-۳. متغیرهای تصمیم (جایگزین‌شده):

| | |
|---|---|
| $t_j^k$ | متغیر باینری حد نصاب: اگر حد نصاب دانشگاه j حداکثر برابر با نمره $s_j^k$ باشد برابر ۱، وگرنه ۰ |

#### ۶-۴. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی:

**تابع هدف:**

$$\max \sum_{(a_i,c_j)\in E} (K - r_{ij}) \cdot x_{ij} \qquad (10)$$

**محدودیت‌ها (قیود):**

$$\sum_{j:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \le 1 \text{ for each } a_i \in A \qquad (1)$$

قید (۱) - تضمین می‌کند که هر متقاضی در نهایت حداکثر در یک دانشگاه پذیرفته شود.

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \le u_j \text{ for each } c_j \in C \qquad (2)$$

قید (۲) - تضمین می‌کند که مجموع متقاضیان پذیرفته‌شده در هر دانشگاه از ظرفیت قانونی آن ($u_j$) فراتر نرود.

$$x_{ij} \le t_j^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (11)$$

قید (۱۱) - تضمین شرط پذیرش بر اساس نمره: این قید تضمین می‌کند که اگر متقاضی $a_i$ دارای نمره $s_j^k$ باشد، تنها در صورتی می‌تواند پذیرفته شود $x_{ij} = 1$ که متغیر باینری حد نصاب برای آن نمره فعال باشد ($t_j^k = 1$). اگر حد نصاب بالاتر از نمره او باشد ($t_j^k = 0$)، متقاضی حتماً رد می‌شود.

$$t_j^k \le t_j^{k+1} \text{ for each } k = 1.(|S_j| - 1) \qquad (12)$$

قید (۱۲) - تضمین یکنوایی منطقی حد نصاب: این قید تضمین می‌کند که اگر نمره پایینی برای قبولی کافی باشد ($t_j^k = 1$)، تمام نمرات بالاتر از آن نیز قطعا برای قبولی کافی خواهند بود ($t_j^{k+1} = 1$). ین قید از بروز تناقض در متغیرهای باینری جلوگیری می‌کند.

$$1 \le \sum_{h:r_{ih}\le r_{ij}} x_{ih} + (1 - t_j^k) \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (13)$$

قید (۱۳) - تضمین عدم حسادت (جایگزین قید ۶): این قید ، ضریب Big-M را حذف کرده است. تضمین می‌کند که اگر متقاضی در این دانشگاه یا گزینه‌های بهتر قبول نشود (سیگما برابر صفر شود)، عبارت $1 - t_j^k$ باید حداقل ۱ شود. این یعنی $t_j^k$ حتماً صفر است (نمره متقاضی به حد نصاب نرسیده و رد شدنش کاملاً عادلانه بوده است).

نکته: قیود ۱، ۲، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ به صورت باینری، <u>موجه بودن تخصیص</u> و <u>عدم حسادت</u> را تضمین می‌کنند. (قید ۱۳ مستقیما جایگزین قید ۶ شده)

قیود باینری جدید مربوط به سیاست مجارستان:

$$(1 - t_j^1) \cdot (u_j + 1) \le \sum_{(a_i,c_j)\in E: c_j \in C} x_{ij} + d_{ij} \qquad \forall c_j \in C \qquad (20)$$

قید (۲۰) - عدم اتلاف باینری (مجارستان): این قید جایگزین قیود ۱۹ و ۱۴ است. متغیر $t_j^1$ کمترین حد نصاب ممکن است. اگر حد نصاب دانشگاه از کف نمرات بالاتر رود ($t_j^1 = 0$) یعنی ظرفیت پر شده است. در این حالت، قید تضمین می‌کند که مجموع افراد پذیرفته‌شده و افرادی که در دسته نمره‌ای دقیقا یک پله پایین‌تر قرار دارند ($d_{ij}$)، از سقف ظرفیت فراتر می‌رود ($u_j + 1$)؛ بنابراین کاهش حد نصاب مجاز نیست.

$$d_{ij} \le t_i^{k+1} - t_i^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (21)$$

قید (۲۱) - شرط باینری متقاضیان پشت در: این قید جایگزین قید ۱۸ است و افراد لب مرزی را می‌یابد. تضمین می‌کند متغیر $d_{ij}$ تنها زمانی ۱ می‌شود که حد نصاب دانشگاه در گروه نمره‌ای بعدی باز باشد ($t_j^{k+1} = 1$) اما در گروه نمره‌ای فعلی متقاضی بسته باشد ($t_j^k = 0$). یعنی متقاضی دقیقا در اولین گروهی است که پشت در حد نصاب مانده‌اند.

## *Section 4: Policy comparison for ties*

### ۷. (SO-C-NW-CUT) *Cutoff score for Chilean Policy* :

#### ۷-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:

در این فرمول بندی، هنوز سهمیه ظرفیت مشترک را اعمال نمی‌کنیم. قصد داریم که بر مبنای سیاست شیلیایی پیش برویم تا تمامی دانشجویانی که امتیاز برابر و بیش از حد نصاب برای یک پروگرم را دارند، از آن پذیرش بگیرند.

#### ۷-۲. متغیر تصمیم اضافه شده:

| | |
|---|---|
| $\underline{d}_{ij}$ | متغیر باینری کمکی (گره - سیاست شیلی): نشان می‌دهد که متقاضی i اکنون در دانشگاه j پذیرفته شده است، اما اگر حد نصاب فقط یک گام افزایش می‌یافت، مردود می‌شد. |

#### ۷-۳. محدودیت های جدید:

$$\overline{d}_{ij} \le x_{ij} \qquad \text{for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (22)$$

محدودیت فوق تضمین می‌کند که $\underline{d}_{ij}$ تنها در صورتی می‌تواند یک باشد که دانشجوی i به پروگرم j تخصیص داده شده باشد.

$$\left(\overline{d}_{ij} - 1\right) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \le t_j \text{ for each } (a_i, c_j) \in E \qquad (23)$$

محدودیت فوق تضمین می‌کند $\underline{d}_{ij}$ در صورتی یک می‌شود که دانشجوی i در صورت افزایش یک واحدی نمره حد نصاب رد شود.

حال می‌توانیم محدودیت non-wastefulness را اضافه کنیم. برای این کار، محدودیت‌های (۷) و (۸) را نگه داشته و محدودیت (۲) را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$\sum_{(a_i,c_j)\in E: c_j \in C} (x_{ij} - \overline{d}_{ij}) \le u_j - 1 \qquad \forall c_j \in C \qquad (24)$$

محدودیت فوق تضمین می‌کند که تعداد دانشجوهایی که با افزایش حد نصاب نمره رد نمی‌شوند نمی‌تواند از $u_j - 1$ تجاوز کند.

حال اگر محدودیت‌های فوق را با محدودیت های (۱)، (۵)، (٦)، (۷)، (۸) و تابع هدف (۱۰) در قالب یک مدل بنویسیم، یک تخصیص پایدار با رویکرد student-optimal خواهیم داشت.

### ۸. (SO-C-NW-BIN-CUT) *Binary cutoff score for Chilean Policy*:

### ۸-۱. محدودیت‌های جدید:

ابتدا، محدودیت‌های (۱)، (۲٤) و (۲۲) را لحاظ می‌کنیم. سپس، محدودیت‌های (۱۱) الی (۱۳) را که متناظر با امتیازهای حد نصاب هستند لحاظ می‌کنیم. حال محدودیت (۲۳) را با محدودیت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\overline{d}_{ij} \leq t_i^k - t_i^{k-1} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, s_{ij} = s_j^k \qquad (25)$$

این محدودیت تضمین می‌کند که $\underline{d}_{ij}$ تنها در صورتی می‌تواند یک شود که $s_{ij}$ برابر با امتیاز حد نصاب فعلی باشد.

## *Section 5: Models with common quotas*

### ۹. (COM-SO-CUT) Cutoff formulation for common quotas (no ties):

### ۹-۱. مفروضات مدل:

- هر دانشجو فهرستی از برنامه‌های تحصیلی را بر اساس ترجیحات خود ارائه می‌کند و حداکثر در یک برنامه پذیرفته می‌شود.
- هر برنامه علاوه بر ظرفیت اختصاصی خود، ممکن است عضو یک یا چند گروه دارای سهمیه ظرفیت مشترک (Common Quota) باشد، بنابراین پذیرش دانشجویان باید علاوه بر ظرفیت هر برنامه، ظرفیت این گروه‌ها را نیز رعایت کند.
- برای هر مجموعه از برنامه‌های دارای سهمیه مشترک، یک ظرفیت مشترک تعریف می‌شود که مجموع پذیرش در تمام برنامه‌های آن مجموعه نباید از آن تجاوز کند.
- تمام برنامه‌های متعلق به یک سهمیه مشترک از یک رتبه‌بندی مشترک (Master Ranking) استفاده می‌کنند، بنابراین هر دانشجو در تمام برنامه‌های یک گروه، امتیاز یکسانی دارد و بر مبنای آن تخصیص انجام می‌شود.
- یک تخصیص زمانی پایدار محسوب می‌شود که رد شدن هر دانشجو از یک برنامه، به دلیل پر بودن حداقل یکی از سهمیه‌های مرتبط با آن برنامه توسط دانشجویان با امتیاز بالاتر باشد.
- در این مدل، برابری امتیازها وجود ندارد.

### ۹-۲. پارامتر و اندیس‌های جدید:

| نماد | تعریف |
|---|---|
| $C_p$ | یک زیرمجموعه از دانشگاه‌ها که با هم دارای یک سهمیه مشترک(Common Quota) ) هستند |
| $C^c$ | مجموعه تمامِ دسته‌های $C_p$ که دارای سهمیه مشترک هستند (شامل خود دانشگاه‌های تکی) |
| $S_p$ | مجموعه تمام نمرات متمایز و مرتب‌شده متقاضیانی که به سهمیه مشترک $C_p$ درخواست داده‌اند |
| $p$ | اندیس شمارنده برای دسته‌های دارای سهمیه مشترک($C_p$) |

| نماد | تعریف |
|---|---|
| $u_p$ | سقف سهمیه مشترک (Common Quota) برای مجموعه دانشگاه‌های $C_p$ |
| $s_p^k$ | k-امین نمره در مجموعه نمرات مرتب‌شده‌ی متقاضیان سهمیه مشترک $S_p$ |

### ۹-۳. متغیر تصمیم‌های جدید:

| نماد | تعریف |
|---|---|
| $t_p$ | متغیر پیوسته نمره حد نصاب (سهمیه مشترک): نمره حد نصاب نهایی برای سهمیه مشترک $C_p$ |
| $b_j^p$ | متغیر باینری کمکی (سهمیه مشترک): برای ارتباط بین دانشگاه j و سهمیه $C_p$ *که نشان‌دهنده محدودکننده بودن آن سهمیه است* |
| $f_p$ | متغیر باینری وضعیت ظرفیت (سهمیه مشترک): اگر سهمیه مشترک $C_p$ حداقل یک متقاضی را رد کند برابر ۱، در غیر این‌صورت ۰ |

### ۹-٤. مدل بهینه‌سازی:

$$\sum_{(a_i,c_j)\in E:c_j\in C_p} x_{ij} \le u_p \qquad \forall C_p \subseteq C \tag{26}$$

مدل فوق تضمین می‌کند که ظرفیت مشترک هر گروه از پروگرم ها رعایت شود.

$$t_p \le \left(1 - x_{ij}\right) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \tag{27}$$

محدودیت فوق تغییر یافته محدودیت (۵) است و تضمین می‌کند که دانشجوی i در صورتی می‌تواند از یک کالج j عضو مجموعه کالج‌های p پذیرش بگیرد که امتیاز حد نصاب مشترک کالج ها از امتیاز دانشجو بیشتر نباشد.

$$s_{ij} + \epsilon \le t_p + \left( \sum_{k:r_{ik}\le r_{ij}} x_{ik} + (1 - b_j^p) \right) \cdot (\bar{s} + 1) \quad \forall (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \tag{28}$$

$$\sum_{p:c_j\in C_p} b_j^p \ge 1, \qquad \forall c_j \in C. \tag{29}$$

محدودیت‌های فوق عدم حسادت را تضمین می‌کنند؛ به عبارت دیگر اگر درخواست پذیرش دانشجوی i از کالج j رد شود، آنگاه باید حداقل یک ظرفیت مشترک برای $C_p (c_j \in C_p)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که امتیاز دانشجوی i از امتیاز حد نصاب آن پایین تر باشد.

برای پایدارسازی مدل، باید محدودیت عدم اتلاف را نیز لحاظ کنیم:

$$f_p \cdot u_p \le \sum_{(a_i,c_j)\in E:c_j\in C_p} x_{ij} \qquad \forall C_p \in C^c \tag{30}$$

$$t_p \le f_p(\bar{s} + 1) \qquad \forall C_p \in C^c \tag{31}$$

محدودیت (۳۰) تضمین می‌کند که اگر دانشجویی به علت سهمیه ظرفیت $C_p$ رد شد ($f_p = 1$)، آنگاه از تمامی ظرفیت مشترک $C_p$ باید استفاده شده باشد. محدودیت (۳۱) تضمین می‌کند که اگر $f_p = 0$، آنگاه امتیاز حد نصاب آن باید صفر باشد.

حال کافیست که محدودیت‌های (۱) و تابع هدف (۱۰) را به این محدودیت‌ها اضافه کنیم.

## ۱۰.Binary cutoff formulation for common quotas (no ties) (COM-Irish):

### ۱۰-۱. متغیر تصمیم‌های جدید:

| | |
|---|---|
| $t_p^k$ | متغیر باینری حد نصاب (سهمیه مشترک): اگر حد نصاب سهمیه مشترک $C_p$ حداکثر برابر با نمره $s_p^k$ باشد برابر ۱، وگرنه ۰ |

### ۱۰-۲. مدل ریاضی:

پیش از فرمول بندی، ابتدا مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم.

به ازای هر مجموعه از کالج‌های عضو $C_p$، مجموعه $S_p = \{s_{ij}: (a_j, c_j) \in E, c_j \in C_p\}$ را تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که اعضای آن ($\{s_p^1, s_p^2, \dots, s_p^m\}$) به صورت صعودی مرتب شده‌اند. حال می‌توانیم محدودیت‌های جدید را اضافه کنیم.

$$x_{ij} \le t_p^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p, s_{ij} = s_p^k \qquad (32)$$

$$t_p^k \le t_p^{k+1} \text{ for each } k = 1.(|S_p| - 1), C_p \in C^c \qquad (33)$$

محدودیت (۳۳) تضمین می‌کند که متغیرهای دودویی یکنوا باشند و محدودیت (۳۲) تضمین می‌کند که اگر درخواست پذیرش دانشجوی i توسط کالج j پذیرفته شود، آنگاه امتیاز این دانشجو تمامی امتیازهای حد نصاب $C_p$ها که کالج j عضوشان است را پاس می‌کند.

برای برقراری شرط عدم حسادت داریم:

$$1 \le \sum_{h: r_{ih} \le r_{ij}} x_{ih} + \sum_{p: c_j \in C_p, s_{ij} = s_p^k} (1 - t_p^k) \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \qquad (34)$$

این محدودیت تضمین می‌کند که اگر دانشجوی i توسط کالج j رد شود (اولین عبارت سمت راست صفر شود، چرا که اولویت های پیش از کالج j را هم نیاورده)، پس باید حداقل یک $t_p^k$ مساوی با صفر وجود داشته باشد؛ به عبارت دیگر، یک ظرفیت مشترک وجود دارد که امتیاز حد نصابش از امتیاز دانشجو بیشتر است.

برای برقراری شرط عدم اتلاف داریم:

$$(1 - t_p^1) \cdot u_p \le \sum_{(a_i, c_j) \in E: c_j \in C_p} x_{ij} \qquad \forall C_p \in C^c \qquad (35)$$

برای تکمیل مدل، کافیست محدودیت های (۱) و (۲۶) را به محدودیت های فوق اضافه کرده و تابع هدف را بر مبنای (۱۰) قرار دهیم.

***Section 6: Models with ties and common quotas***

در بخش ۶، آخرین مسئله مقاله مطرح میشود: حضور همزمان Ties و Common Quotas.

۱. حذف مدل‌های پیوسته: نویسندگان اعلام می‌کنند که در شبیه‌سازی بخش قبلی متوجه شده‌اند مدل‌های دارای حد نصاب پیوسته، وقتی سهمیه‌های مشترک اضافه می‌شوند، در زمان معقول به جواب نمی‌رسند. بنابراین، برای بخش ۶ تنها از فرمول بندی های باینری استفاده کرده‌اند.

۲. تعریف حد نصاب شبکه‌ای: برخلاف بخش‌های قبل که هر دانشگاه یک حد نصاب داشت، در اینجا حد نصاب برای دسته‌های دارای سهمیه مشترک ($C_p$) تعریف می‌شود. یک درخواست به کالج $c_j$ نها زمانی مجاز است که نمره متقاضی، حد نصاب تمام مجموعه‌های سهمیه‌داری که $c_j$ عضو آن‌هاست را پاس کند.

۳. تعریف پایداری و عدم اتلاف در محیط جدید:

- در مجارستان: هیچ نمره حد نصابی (برای هیچ سهمیه‌ای) نباید بتواند کاهش یابد، مگر اینکه کاهش آن باعث شود مجموع افراد پذیرفته‌شده در آن سهمیه مشترک، سقف $u_p$ را بشکند.
- در شیلی: سهمیه مشترک می‌تواند نقض شود، اما فقط توسط آخرین گروه هم‌نمره‌ای که پذیرفته شده‌اند. یعنی اگر حد نصابِ سهمیه $C_p$ را یک پله بالا ببریم، تعداد افراد باقی‌مانده باید اکیدا کمتر از سقف سهمیه $u_p$ بشود.

## ۱۱. *Binary IP formulations for the Hungarian policy* (COM-Hungarian):

در این مدل، محدودیت های مربوط به سیاست رفتار یکسان (در صورت بروز tie) با ساختار شبکه‌ای سهمیه‌های مشترک ادغام شده‌اند، در حالی که سقف سهمیه‌ها باید رعایت شود.

### ۱۱-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:

- متقاضیان ممکن است نمرات برابر (Tie) داشته باشند.
- دانشگاه‌ها دارای ظرفیت‌های مستقل نیستند، بلکه عضو دسته‌هایی ($C_p$) هستند که روی هم یک سقف ظرفیت مشترک ($u_p$) دارند.
- سیاست مجارستان: ظرفیت هیچ سهمیه مشترکی ($u_p$) تحت هیچ شرایطی نباید نقض شود. در صورت بروز گره در مرز سهمیه مشترک، تمام متقاضیان هم‌نمره رد می‌شوند.
- عدم حسادت شبکه‌ای: اگر متقاضی رد شود، باید حداقل یک سهمیه مشترک وجود داشته باشد که نمره متقاضی به حد نصاب آن سهمیه نرسیده باشد.

### ۱۱-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:

با توجه به مفاهیم سهمیه مشترک در بخش ۵، و مفاهیم ties در بخش ۳، هیچ مجموعه، اندیس یا پارامتر جدیدی در این مدل اضافه نشده.

### ۱۱-۳. متغیرهای تصمیم جدید:

| | |
|---|---|
| $e_{ij}^p$ | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - مجارستان): اگر متقاضی i رد شده باشد اما در صورت کاهش یک گام از حد نصاب سهمیه $C_p$ در دانشگاه j پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. |
| $d_i^p$ | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - مجارستان): اگر متقاضی i رد شده باشد اما در صورت کاهش یک گام از حد نصاب سهمیه $C_p$ حداقل در یک دانشگاه آن سهمیه پذیرفته می‌شد، برابر ۱ است. |

| | |
|---|---|
| $x_i^p$ | متغیر کمکی (سهمیه مشترک): مجموع متقاضیان پذیرفته‌شده در دسته‌ای از دانشگاه‌ها (معادل $\sum x_{ij}$) |

**۱۱-٤. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی:**

$$e_{ik}^p \leq (1 - x_{ij}) \qquad \text{for each } (a_i, c_j) \in E, (a_i, c_k) \in E, c_k \in C_p, r_{ik} \geq r_{ij} \tag{36}$$

قید فوق تضمین می‌کند که $e_{ik}^p$ تنها در صورتی می‌تواند یک باشد که دانشجوی i نتوانسته باشد به کالج $c_k$ یا کالجی بهتر از آن رفته باشد.

$$e_{ij}^p \leq t_p^{k+1} - t_p^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p, s_{ij} = s_p^k \tag{37}$$

$$e_{ij}^p \leq t_q^k \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_q, p \neq q, s_{ij} = s_q^k \tag{38}$$

اگر قید (۲۱) را با (۳۷) تعویض کنیم و (۳۸) را اضافه کنیم، آنگاه تضمین می‌شود که $e_{ij}^p$ تنها در صورتی یک می‌شود که که دانشجوی i از کالج j پذیرش نگرفته باشد، ولی اگر امتیاز حد نصاب $C_p$ یک واحد کاهش پیدا کند، پذیرش می‌گیرد.

$$d_i^p \leq \sum_{j:c_j \in C_p} e_{ij}^p \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \in C^c \tag{39}$$

قید فوق تضمین می‌کند که $d_i^p$ تنها در صورتی یک می‌شود که کالجی مانند $c_j$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که دانشجوی $a_i$ از آن پذیرش بگیرد اگر امتیاز حد نصاب در $C_p$ یک واحد کاهش پیدا کند.

برای لحاظ کردن شرط عدم اتلاف می‌توانیم بنویسیم:

$$(1 - t_p^1) \cdot (u_p + 1) \leq \sum_{a_i \in A} x_i^p + d_i^p \text{ for each } C_p \in C^c \tag{40}$$

حال اگر محدودیت های (۱)، (۲٦)، (۳۲)، (۳۳)، (۳٤)، (۳٦)، (۳۷)، (۳۸)، (۳۹) و (٤۰) را با تابع هدف (۱۰) در نظر بگیریم، آنگاه مدل تکمیل می‌شود.

**۱۲. *Binary IP formulations for the Chilean policy* (COM-Chilean):**

این مدل، ترکیب ساختار سهمیه‌های مشترک با سیاست آسان‌گیرانه شیلی است. برخلاف مدل مجارستان، در اینجا سهمیه‌های مشترک ($u_p$) می‌توانند نقض شوند، بنابراین نیازی به بررسی دقیق متقاضیان ردشده ($e_{ij}^p$) نیست، بلکه فقط گروهی که دقیقا روی خط حد نصاب پذیرش شده‌اند بررسی می‌شوند.

**۱۲-۱. شرح کامل مفروضات مسئله:**

- مفروضات گره و سهمیه مشترک کاملاً برقرار است.
- سیاست شیلی در سهمیه مشترک: در صورت بروز گره در مرز سهمیه مشترک، تمام متقاضیان هم‌نمره پذیرفته می‌شوند. این یعنی ظرفیت سهمیه ($u_p$) می‌تواند توسط این گروه نقض شود.

- عدم اتلاف در شیلی: هیچ حد نصابی برای سهمیه‌ها نباید بی‌دلیل بالا برود. نقض ظرفیت مجاز است، اما اگر آخرین گروه هم‌نمره را از سیستم خارج کنیم، تعداد پذیرفته‌شدگان باید اکیداً کمتر از $u_p$ شود.

**۱۲-۲. مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترهای جدید:**

هیچ مجموعه، اندیس یا پارامتر جدیدی نسبت به مدل قبل اضافه نشده.

**۱۲-۳. متغیرهای تصمیم:**

| | |
|---|---|
| $\underline{d}_i^p$ | متغیر باینری کمکی (گره + سهمیه مشترک - شیلی): اگر متقاضی i در سهمیه $C_p$ پذیرفته شده باشد اما نمره او دقیقاً برابر با حد نصاب فعلیِ آن سهمیه باشد (به طوری که با یک پله افزایش حد نصاب، او رد می‌شد)، برابر ۱ است. |

**۱۲-٤. مدل ریاضی:**

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E, c_j\in C_p} (x_i^p - \overline{d}_i^p) \le u_p - 1 \text{ for each } C_p \in C^c \qquad (41)$$

محدودیت فوق باثبات بودن جواب مدل را تضمین می‌کند و بسیار نزدیک به محدودیت (۲٤) می‌باشد.

$$\overline{d}_i^p \le x_i^p \qquad \text{for each } a_i \in A, C_p \in C^c \text{ s.t. } \exists c_j : (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \qquad (42)$$

مدل فوق شبیه به محدودیت (۲۲) می‌باشد و تضمین می‌کند که $\underline{d}_i^p$ تنها در صورتی می‌تواند یک باشد که دانشجوی i از کالج $c_j \in C_p$ پذیرش گرفته باشد.

$$\overline{d}_i^p \le t_p^k - t_p^{k-1} \text{ for each } (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p, s_{ij} = s_p^k \qquad (43)$$

مدل فوق تضمین می‌کند که $\underline{d}_i^p$ تنها در صورتی می‌تواند یک باشد که امتیاز دانشجوی i برابر با امتیاز حد نصاب $C_p$ باشد.

حال اگر محدودیت های (۱)، (۲٦)، (۳۲)، (٤۱)، (٤۲)، (٤۳) را با تابع هدف (۱۰) در نظر بگیریم، آنگاه مدل تکمیل می‌شود.

## فاز چهارم:

به‌منظور ارزیابی مدل‌های ارائه‌شده، دو مجموعه‌داده مجزا تولید شد: یک مجموعه‌داده با رتبه‌بندی‌های سخت (Strict Scores) و یک مجموعه‌داده با امتیازهای دارای تساوی (Ties). مجموعه‌داده شامل ۱۵۰۰ دانشجو و ۲۰ دانشگاه (College) است.

ابتدا ۲۰ دانشگاه به‌صورت تصادفی در چهار گروه (Subject Group) تقسیم شدند. برای هر گروه به‌عنوان یک سهمیه مشترک در نظر گرفته شد و ظرفیت مشخصی برای آن تعریف گردید. ظرفیت هر دانشگاه به‌صورت تصادفی در بازه ۵۰ تا ۱۰۰ نفر تعیین شد. سپس ظرفیت هر گروه موضوعی برابر با ۸۰ درصد مجموع ظرفیت دانشگاه‌های متعلق به آن گروه در نظر گرفته شد تا محدودیت سهمیه‌های مشترک در مسئله فعال و الزام‌آور باشد.

برای هر دانشجو، بین ۵ تا ۱۰ دانشگاه به‌صورت تصادفی انتخاب شد و ترتیب ترجیحات دانشجو نسبت به این دانشگاه‌ها نیز به‌صورت تصادفی تعیین گردید.

تفاوت اصلی دو مجموعه‌داده در نحوه تولید امتیازها است:

- مجموعه‌داده رتبه‌بندی سخت: برای هر گروه موضوعی، ۱۵۰۰ امتیاز یکتا با استفاده از توزیع خطی در بازه ۰ تا ۵۰۰ تولید شد. به این ترتیب، هیچ دو دانشجویی در یک گروه موضوعی امتیاز یکسان ندارند و رتبه‌بندی کاملاً سخت (Strict Ranking) برقرار است.
- مجموعه‌داده دارای تساوی: امتیازها به‌صورت اعداد صحیح تصادفی در بازه ۰ تا ۵۰۰ تولید و سپس به نزدیک‌ترین مضرب ۱۰ گرد شدند. این روش باعث ایجاد تعداد زیادی امتیاز مساوی و در نتیجه وقوع حالت تساوی (Tie) میان دانشجویان می‌شود.

یکی از مهم‌ترین تصمیمات در طراحی داده‌ها این بود که هر دانشجو برای هر گروه موضوعی تنها یک امتیاز داشته باشد، نه برای هر دانشگاه. بنابراین اگر دانشجویی به چند دانشگاه از یک گروه موضوعی درخواست داده باشد، در تمامی آن دانشگاه‌ها دقیقاً همان امتیاز را خواهد داشت. این فرض برای ایجاد رتبه‌بندی مشترک (Master Ranking) موردنیاز در مدل سهمیه‌های مشترک ضروری است.

در نهایت، هر مجموعه‌داده در قالب پنج فایل CSV ذخیره شد:

۱. فایل اطلاعات دانشجویان
۲. فایل اطلاعات دانشگاه‌ها شامل ظرفیت و گروه موضوعی هر دانشگاه
۳. فایل سهمیه‌های مشترک شامل گروه‌های موضوعی و ظرفیت هر گروه
٤. فایل امتیاز دانشجویان در هر گروه موضوعی
۵. فایل درخواست‌های پذیرش شامل شناسه دانشجو، شناسه دانشگاه، شناسه گروه موضوعی، رتبه ترجیح و امتیاز متناظر.

این ساختار داده امکان ارزیابی تمامی مدل‌های مطرح‌شده در مقاله را فراهم می‌کند؛ به‌طوری‌که مدل پایه گیل–شیپلی تنها با استفاده از داده‌های درخواست‌ها قابل اجرا است، مدل‌های مربوط به تساوی امتیازها با استفاده از مجموعه‌داده دارای Ties بررسی می‌شوند، مدل‌های سهمیه‌های مشترک از اطلاعات گروه‌ها بهره می‌برند و در نهایت مدل‌های ترکیبی Ties + Common Quotas با استفاده از تمامی اطلاعات موجود قابل آزمایش هستند.

## فاز ششم:

**1. *The Baïou*-Balinski formulation(SO-BB):**

```
Optimal Solution Found in 62.1637 seconds
Total Students Assigned: 1500 out of 1500
Solver Time: 62.1637 seconds
Solution Signature (Hash): 2193633351276812154

First 10 Assignments:
   student_id  college_id  rank       score
0           1           8     1  497.998666
1           2          10     1  351.234156
2           3           4     1  420.947298
3           4          17     1  211.474316
4           5          19     1  181.120747
5           6           8     1  194.129420
6           7          16     1    7.004670
7           8           8     1  440.960640
8           9          18     1  283.522348
9          10           3     1  440.293529
```

**2. (SO-NW-CUT) *The cutoff score formulation*:**

```
Optimal Solution Found in 11.7047 seconds
Total Students Assigned: 1500 out of 1500
Solver Time: 11.7047 seconds
Solution Signature (Hash): 2193633351276812154

College Cutoff Scores (t_j):
College  8 | Cutoff: 118.7459 | Full (f_j): 1
College  3 | Cutoff: 83.7226 | Full (f_j): 1
College  9 | Cutoff: 32.3550 | Full (f_j): 1
College 17 | Cutoff: 87.7253 | Full (f_j): 1
College 18 | Cutoff: 214.4764 | Full (f_j): 1
College 11 | Cutoff: 187.1247 | Full (f_j): 1
College  2 | Cutoff: 145.7639 | Full (f_j): 1
College  4 | Cutoff: 11.3410 | Full (f_j): 1
College 12 | Cutoff: 6.6712 | Full (f_j): 1
College  1 | Cutoff: 77.3850 | Full (f_j): 1
College 10 | Cutoff: 140.4271 | Full (f_j): 1
College  7 | Cutoff: 239.8266 | Full (f_j): 1
...
6           7          16     1    7.004670
7           8           8     1  440.960640
8           9          18     1  283.522348
9          10           3     1  440.293529
```

زمان حل مدل از ٦٢ ثانیه به ١١.٧ ثانیه کاهش یافت. همان‌طور که نویسندگان در مقاله (جدول ٢) ادعا کرده بودند، جایگزین کردن قیود پیچیده‌ی Baïou-Balinski با قیود مبتنی بر Cutoff، بار سنگین محاسباتی سالور را کاهش می‌دهد.

عدد هش نیز (٢١٩٣٦٣٣٣٥١٢٧٦٨١٢١٥٤) در هر دو مدل یکسان است. این نشان می‌دهد که به‌کارگیری مفاهیم حد نصاب، هیچ خدشه‌ای در یکپارچگی ریاضیات تخصیص پایدار ایجاد نکرده است.

**3. (SO-NW-BIN-CUT) *The binary cutoff score formulation*:**

```
Total Binary Cutoff Variables (t_j^k) to create: 11184

Building the Pyomo model (SO-NW-BIN-CUT)...
Solving the model with GLPK...

Optimal Solution Found in 13.1179 seconds
Total Students Assigned: 1500 out of 1500
Solver Time: 13.1179 seconds
Solution Signature (Hash): 2193633351276812154

Final Cutoff Scores for each College:
College 8 | Cutoff Score: 119.4129
College 3 | Cutoff Score: 93.3956
College 9 | Cutoff Score: 35.3569
College 17 | Cutoff Score: 91.3943
College 18 | Cutoff Score: 222.4817
College 11 | Cutoff Score: 187.1247
College 2 | Cutoff Score: 154.1027
College 4 | Cutoff Score: 15.0100
College 12 | Cutoff Score: 8.0053
College 1 | Cutoff Score: 80.7205
College 10 | Cutoff Score: 157.4383
College 7 | Cutoff Score: 239.8266
College 15 | Cutoff Score: 24.6831
College 13 | Cutoff Score: 187.7919
College 5 | Cutoff Score: 68.0454
College 14 | Cutoff Score: 0.3336
College 19 | Cutoff Score: 167.7785
College 6 | Cutoff Score: 76.7178
College 16 | Cutoff Score: 0.6671
College 20 | Cutoff Score: 0.0000
```

مدل دوم برای تعریف حد نصاب، تنها ٢٠ متغیر پیوسته ($t_j$) ایجاد کرد (یکی برای هر کالج). اما مدل باینری، به دلیل ساختار گسسته‌اش، مجبور شد ١١,١٨۴ متغیر باینری ($t_j^k$) تولید کند (یک متغیر برای تک‌تک نمرات موجود در شبکه).
در دیتاست چون نمرات تا چندین رقم اعشار دارند، هیچ دو نمره‌ای در یک دانشگاه تکراری نیستند؛ در نتیجه، فضای متغیرهای باینری به شدت بزرگ شده است.
با وجود اینکه سالور مجبور به هندل کردن ١١ هزار متغیر جدید ، زمان آن تنها ٢ ثانیه بیشتر از مدل پیوسته است و همچنان بسیار سریع‌تر از مدل پایه کرده. این نشان‌دهنده‌ی کارایی حذف ضرایب Big-M و اپسیلون در مدل‌های باینری است.

**4. (MSMR-EF) *Envy-free formulation*:**

در اجرای این مدل، زمان حل در مقایسه با مدل‌های مبتنی بر حد نصاب (که زیر ۲۰ ثانیه حل شدند)، به حدی افزایش یافت که پس از حدود ۲۰ دقیقه، سالور همچنان مدل را حل نکرده بود.

این کندی شدید، ناشی از ساختار قید (۱۶) است. از آنجا که این مدل متغیر حد نصاب ندارد، برای تضمین عدم حسادت مجبور است متقاضیان یک دانشگاه را **دوبه‌دو** با یکدیگر مقایسه کند. این رویکرد، تعداد قیود مسئله را از مرتبه $O(N^2)$ افزایش می‌دهد. در دیتاست ما، این امر منجر به تولید میلیون‌ها قید شد فرای توان پردازشی در دسترس بود.

این موضوع ثابت می‌کند که رویکرد مقایسه مستقیم برای مسائل واقعی با مقیاس بالا ناکارآمد است؛ و به همین دلیل است که تبدیل قید های مقایسه‌ای به تعداد کمی متغیر «حد نصاب» (نوآوری مقاله) برای حل بهینه تخصیص دانشگاه‌ها بسیار مهم است.

قید ۱۶:

$$\sum_{k:r_{ik} \le r_{ij}} x_{ik} \ge x_{hj} \quad \forall (a_i, c_j), (a_h, c_j) \in E, s_{ij} \ge s_{hj} \qquad (16)$$

قید (۱۶) - تضمین مستقیم پایداری و عدم حسادت: این قید، مقایسه‌ای مستقیم بین دو متقاضی $a_i$ و $a_h$ برای دانشگاه $c_j$ انجام می‌دهد؛ جایی که نمره $a_i$ بیشتر یا مساوی $a_h$ است. قید تضمین می‌کند که اگر متقاضی ضعیف‌تر در این دانشگاه پذیرفته شود ($x_{hj} = 1$)، متقاضی قوی‌تر ($a_i$) حتماً باید در این دانشگاه یا گزینه‌های بهتر از آن پذیرفته شده باشد (یعنی سیگمای سمت چپ حداقل ۱ بشود). این قید با جلوگیری از سبقت گرفتن افراد ضعیف‌تر از افراد قوی‌تر، عدم حسادت را صد در صد تضمین می‌کند.

**5. *The cutoff score formulation with ties for* Restrictive Policy (SO-H-NW-CUT):**

```
Optimal Solution Found in 79.4494 seconds
Total Students Assigned: 1493 out of 1500
Solver Time: 79.4494 seconds
Solution Signature (Hash): 52140284683300858

College Cutoff Scores (t_j):
College 4 | Cutoff: 140.0001 | Full (f_j): 1
College 3 | Cutoff: 21.0000 | Full (f_j): 1
College 14 | Cutoff: 140.0001 | Full (f_j): 1
College 20 | Cutoff: 230.0001 | Full (f_j): 1
College 9 | Cutoff: 180.0001 | Full (f_j): 1
College 17 | Cutoff: 121.0000 | Full (f_j): 1
College 5 | Cutoff: 120.0001 | Full (f_j): 1
College 12 | Cutoff: 200.0001 | Full (f_j): 1
College 11 | Cutoff: 110.0001 | Full (f_j): 1
College 2 | Cutoff: 30.0001 | Full (f_j): 1
College 6 | Cutoff: 130.0001 | Full (f_j): 1
College 15 | Cutoff: 1.0000 | Full (f_j): 1
...
Student 1326 -> College 17 | Score: 120
Student 1389 -> College 2 | Score: 30
Student 1394 -> College 1 | Score: 10
Student 1412 -> College 9 | Score: 180
```

بررسی خروجی مدل نمره حد نصاب پیوسته تحت سیاست مجارستان روی مجموعه‌داده‌ی دارای گره (Ties):

مهم‌ترین مشاهده، افت تعداد تخصیص‌های موفق است. در حالی که ظرفیت سیستم برای پذیرش همه متقاضیان کافی بود، خروجی نشان می‌دهد که تنها ۱۴۹۳ دانشجو از ۱۵۰۰ نفر پذیرفته شده‌اند و ۷ نفر به طور کامل از سیستم بیرون مانده‌اند. این پدیده ذات «سیاست سخت‌گیرانه مجارستان» را به تصویر می‌کشد؛ قانونی که در آن، حفظ سقف ظرفیت تحت هر شرایطی خط قرمز است. هنگامی که در مرز پر شدن ظرفیت یک دانشگاه، چند متقاضی دارای نمره یکسان (Tie) باشند و پذیرش همه آن‌ها منجر به نقض سقف ظرفیت شود، سیستم به دلیل الزام به "رفتار یکسان"، مجبور است تمامی آن گروه هم‌نمره را رد کند که باعث خالی ماندن بخشی از صندلی‌ها شده .

این رفتار سخت‌گیرانه در خروجی متغیرهای کمکی مدل نیز اثبات می‌شود. در بخش (d_ij Rejected Students at the Margin = ۱) مشاهده می‌کنیم که سیستم به درستی دانشجویانی (مثل دانشجوی ۱۳۲۶) را شناسایی کرده است که در صورت کاهش تنها یک نمره‌ای حد نصاب، می‌توانستند وارد دانشگاه شوند (نمره دانشجو ۱۲۰ و حد نصاب ۱۲۱.۰۰۰۰ بوده است). متغیر باینری $d_{ij}$برای این افراد برابر ۱ شده است تا به سیستم اعلام کند کاهش حد نصاب باعث ورود آن‌ها و در نتیجه عبور از سقف ظرفیت خواهد شد؛ بنابراین سیستم، وضعیت موجود (رد شدن آن‌ها) را پایدار و موجه ارزیابی کرده است.

همچنین خروجی حد نصاب‌ها (مانند Cutoff: 140.0001 برای کالج ۴) عملکرد پارامتر ϵ را نشان میدهد . برای رد کردن عادلانه گروهی از متقاضیان هم‌نمره (مثلاً نمره ۱۴۰)، سالور حد نصاب را روی عددی معادل ۱٤۰۰+ϵ تنظیم کرده تا به طور اکید نشان دهد نمره متقاضیان برای ورود کافی نبوده است.

زمان حل این مدل به حدود ۷۹ ثانیه رسید که در مقایسه با مدل‌های کلاسیک (حدود ۱۱ ثانیه)، افزایش زیادی را نشان می‌دهد. این کندی ناشی از پیچیدگی درخت جستجوی سالور برای هندل کردن متغیرهای کمکی و گره‌ها است و نشان میدهد چرا برای حل مسائل واقعی در ابعاد بزرگ، باید به سراغ فرمول‌بندی‌های تمام‌باینری رفت.

### 6. *The binary cutoff score formulation with ties for* Restrictive Policy (SO-H-NW-BIN-CUT):

```
Optimal Solution Found in 33.8940 seconds
Total Students Assigned: 1490 out of 1500
Solver Time: 33.8940 seconds
Solution Signature (Hash): -5920545741162952938

Final Cutoff Scores for each College:
College 4 | Cutoff Score: 160.0000
College 3 | Cutoff Score: 30.0000
College 14 | Cutoff Score: 150.0000
College 20 | Cutoff Score: 260.0000
College 9 | Cutoff Score: 210.0000
College 17 | Cutoff Score: 140.0000
College 5 | Cutoff Score: 170.0000
College 12 | Cutoff Score: 210.0000
College 11 | Cutoff Score: 150.0000
College 2 | Cutoff Score: 60.0000
College 6 | Cutoff Score: 150.0000
College 15 | Cutoff Score: 30.0000
...
6 7 17 2 160
7 8 13 1 470
8 9 12 2 220
9 10 1 2 470
```

اجرای فرمول‌بندی تمام‌باینری روی مجموعه‌داده‌ی دارای گره (Ties) تحت سیاست مجارستان، دو دستاورد در زمینه عملکرد محاسباتی و ماهیت ریاضی حد نصاب‌ها به همراه داشت:

۱. بهبود چشمگیر سرعت حل مسئله: زمان اجرا از ۷۹.۴ ثانیه (در مدل پیوسته ۵) به **۳۳.۸ ثانیه** کاهش یافته است. کاهش بیش از ۵۰ درصدی نشان می‌دهد که حذف پارامترهای مصنوعی (نظیر Big-M و ϵ) و استفاده از متغیرهای گسسته‌ی منطبق بر نمرات واقعی ($t_j^k$)، بار جستجو در درخت «شاخه-و-مرز» سالور را به شدت سبک کرده و کارایی مدل را برای داده‌های بزرگ اثبات می‌کند.
۲. بازگشت حد نصاب‌ها به اعداد صحیح دنیای واقعی: برخلاف مدل پیوسته که حد نصاب‌های اعشاری و غیرواقعی (مانند ۱۴۰.۰۰۰۱) تولید می‌کرد، در این مدل حد نصاب‌ها (مانند ۱۶۰، ۳۰ و ۲۶۰) دقیقا منطبق بر نمرات ثبت شده‌ی آخرین گروه پذیرفته‌شده هستند. این امر تفسیرپذیری نتایج را برای تصمیم‌گیران ساده می‌کند.

نکته‌ی مهم این خروجی در تعداد پذیرفته‌شدگان و امضای هش نهفته است. در حالی که مدل پیوسته ۱۴۹۳ دانشجو را پذیرش کرد، این مدل به تخصیصی با **۱۴۹۰ قبولی** (و هش امضای متفاوت) همگرا شده است. این تفاوت در خروجی (با وجود ثابت ماندن قوانین مجارستان)، ناشی از رفتار ذاتی الگوریتم‌ها در حضور گره‌های گسترده است. در محیط گسسته‌ی مدل باینری، انعطاف‌پذیری ریاضیِ حد نصاب‌ها کمتر است و در شرایطی که رقابت شدیدی روی گروه‌های نمره‌ای خاص وجود دارد، سالور برای حفظ پایداری و عدم نقض ظرفیت، مجبور به رد کردن تعداد بیشتری از افراد در مرزها شده و حد نصاب کالج‌ها را (در مقایسه با مدل قبل) بالاتر برده است. این پدیده اثبات می‌کند که در صورت وجود گره‌های متعدد، تخصیص پایدار یکتا وجود ندارد و تغییر فرمول‌بندی می‌تواند سیستم را به سمت نقطه تعادل پایدار متفاوت اما همچنان موجه سوق دهد.

### 7. *Cutoff score for Chilean Policy*(SO-C-NW-CUT):

```
Solution pool: 1 solution saved.

MIP - Integer optimal solution:  Objective =  1.4595000000e+04
Solution time =   40.16 sec.  Iterations = 1  Nodes = 0
Deterministic time = 4332.88 ticks  (107.90 ticks/sec)

CPLEX> Incumbent solution written to file 'C:\Users\AmirReza\AppData\Local\Temp\tmp41qhyq47.cplex.sol'.
CPLEX>
=== Chilean ties (continuous) ===
Objective value: 14595.0
Number of assigned students: 1499
College 1 cutoff: 0.00
College 2 cutoff: 0.00
College 3 cutoff: 0.00
College 4 cutoff: 120.00
College 5 cutoff: 120.00
College 6 cutoff: 130.00
College 7 cutoff: 50.00
College 8 cutoff: 90.00
College 9 cutoff: 160.00
College 10 cutoff: 220.00
College 11 cutoff: 80.00
College 12 cutoff: 180.00
College 13 cutoff: 170.00
College 14 cutoff: 100.00
College 15 cutoff: 0.00
College 16 cutoff: 180.00
College 17 cutoff: 90.00
College 18 cutoff: 0.00
College 19 cutoff: 0.00
College 20 cutoff: 210.00
```

**تحلیل جواب:** همانطور که مشاهده می‌شود، در این مدل از ۱۵۰۰ دانشجو، ۱۴۹۹ نفر موفق به گرفتن پذیرش شدند، که با سیاست شیلیایی همخوانی دارد. همچنین، برخی کالج‌ها مجبور به پایین آوردن و صفر کردن امتیاز حد نصابشان بودند و بیش از ظرفیتشان دانشجو قبول کردند (مانند کالج ۱، ۲، ۳ و ...).

**8. *Binary cutoff score for Chilean Policy*(SO-C-NW-BIN-CUT):**

```
MIP - Integer optimal solution:  Objective =  1.4595000000e+04
Solution time =   11.95 sec.  Iterations = 0  Nodes = 0 (1)
Deterministic time = 2891.04 ticks  (241.87 ticks/sec)

CPLEX> Incumbent solution written to file 'C:\Users\AmirReza\AppData\Local\Temp\tmplhhtz4ih.cplex.sol'.
CPLEX>
=== Chilean ties (binary) ===
Objective value: 14595.0
Number of assigned students: 1499
College 1 cutoff: 0
College 2 cutoff: 0
College 3 cutoff: 0
College 4 cutoff: 120
College 5 cutoff: 120
College 6 cutoff: 130
College 7 cutoff: 50
College 8 cutoff: 90
College 9 cutoff: 160
College 10 cutoff: 220
College 11 cutoff: 80
College 12 cutoff: 180
College 13 cutoff: 170
College 14 cutoff: 100
College 15 cutoff: 0
College 16 cutoff: 180
College 17 cutoff: 90
College 18 cutoff: 0
College 19 cutoff: 0
College 20 cutoff: 210
```

**تحلیل جواب:** همانطور که مشاهده می‌شود، جواب هر دو مدل یکسان است، اما مدل دوم در ۱۱ ثانیه حل شد، درحالیکه حل مدل اول ۴۰ ثانیه طول کشید. این مشاهده با نتایج مقاله همخوانی دارد، چرا که استفاده از متغیرهای دودویی برای cutoff formulation باعث تسریع روند حل می‌شود.

### 9. Cutoff formulation for common quotas (no ties) (COM-SO-CUT):

```
MIP - Integer optimal solution:  Objective =  1.0930000000e+04
Solution time = 2563.75 sec.  Iterations = 3611484  Nodes = 4865
Deterministic time = 327818.53 ticks  (127.87 ticks/sec)

CPLEX> Incumbent solution written to file 'C:\Users\AmirReza\AppData\Local\Temp\tmpe_d74i9w.cplex.sol'.
CPLEX>
=== Common quotas (continuous) ===
Objective value: 10930.0
Number of assigned students: 1219
Group 1 cutoff: 335.22
Group 2 cutoff: 390.26
Group 3 cutoff: 234.82
Group 4 cutoff: 307.54
Group col_1 cutoff: 237.49
Group col_2 cutoff: -0.00
Group col_3 cutoff: 0.00
Group col_4 cutoff: 0.00
Group col_5 cutoff: 0.00
Group col_6 cutoff: 0.00
Group col_7 cutoff: 364.24
Group col_8 cutoff: 0.00
Group col_9 cutoff: 0.00
Group col_10 cutoff: 0.00
Group col_11 cutoff: 275.85
Group col_12 cutoff: 0.00
Group col_13 cutoff: 259.51
```


```
Group col_11 cutoff: 275.85
Group col_12 cutoff: 0.00
Group col_13 cutoff: 259.51
```


```
Group col_14 cutoff: -0.00
Group col_15 cutoff: 0.00
Group col_16 cutoff: 0.00
Group col_17 cutoff: 0.00
Group col_18 cutoff: 321.88
Group col_19 cutoff: 0.00
Group col_20 cutoff: 0.00
Full groups: [1, 2, 3, 4, 'col_1', 'col_7', 'col_11', 'col_13', 'col_18']
```

**تحلیل جواب:** همانطور که مشاهده می‌شود، تعداد افراد دارای پذیرش نسبت به مدل های پیشین کمتر است، و این به علت اضافه شدن محدودیت ظرفیت مشترک می‌باشد. لازم به ذکر است که زمان حل نیز حدود ٤٠ دقیقه می‌باشد که بسیار قابل توجه است.

### 10. Binary cutoff formulation for common quotas (no ties) (COM-Irish):

```
MIP - Integer optimal solution:  Objective =  1.0930000000e+04
Solution time =   20.22 sec.  Iterations = 9514  Nodes = 0
Deterministic time = 6517.70 ticks  (322.36 ticks/sec)

CPLEX> Incumbent solution written to file 'C:\Users\AmirReza\AppData\Local\Temp\tmpuvwng46n.cplex.sol'.
CPLEX>
=== Common quotas (binary) ===
Objective value: 10930.0
Number of assigned students: 1219

Group cutoffs (lowest accepted score):
  Group 1: lowest accepted level = 870
  Group 2: lowest accepted level = 419
  Group 3: lowest accepted level = 695
  Group 4: lowest accepted level = 869
  Group col_1: lowest accepted level = 270
  Group col_2: lowest accepted level = 1
  Group col_3: lowest accepted level = 1
  Group col_4: lowest accepted level = 1
  Group col_5: lowest accepted level = 1
  Group col_6: lowest accepted level = 1
  Group col_7: lowest accepted level = 408
  Group col_8: lowest accepted level = 1
  Group col_9: lowest accepted level = 1
  Group col_10: lowest accepted level = 1
  Group col_11: lowest accepted level = 318
  Group col_12: lowest accepted level = 1
```


```
  Group col_8: lowest accepted level = 1
  Group col_9: lowest accepted level = 1
  Group col_10: lowest accepted level = 1
  Group col_11: lowest accepted level = 318
  Group col_12: lowest accepted level = 1
```


```
  Group col_13: lowest accepted level = 290
  Group col_14: lowest accepted level = 1
  Group col_15: lowest accepted level = 1
  Group col_16: lowest accepted level = 1
  Group col_17: lowest accepted level = 1
  Group col_18: lowest accepted level = 365
  Group col_19: lowest accepted level = 1
  Group col_20: lowest accepted level = 1
```

**تحلیل جواب:** همانطور که مشاهده می‌شود، جواب این مدل با مدل (۹) تفاوتی ندارد، اما سرعت حل اختلاف فاحشی دارد (۲۰ ثانیه در مقابل ٤٠ دقیقه)، و این به علت استفاده از متغیرهای باینری برای cutoff formulation می‌باشد.

## 11. COM-Hungarian

```
Loading Data for COM-Hungarian Model (Full Dataset)...
Data Ready: 15 Students, 5 Colleges, 4 Common Quotas.
Total Applications (E): 60
Total Binary Cutoff Variables to create: 92

Building Pyomo Model... (This may take a minute for 1500 students)

Solving the model with GLPK... (This will take time due to NP-Hardness and dataset size)
GLPSOL--GLPK LP/MIP Solver 5.0
Parameter(s) specified in the command line:
 --write /tmp/tmp5pyjfune.glpk.raw --wglp /tmp/tmp9q1x3exl.glpk.glp --cpxlp
 /tmp/tmp2hqbizml.pyomo.lp
Reading problem data from '/tmp/tmp2hqbizml.pyomo.lp'...
/tmp/tmp2hqbizml.pyomo.lp:5089: warning: lower bound of variable 'x2' redefined
/tmp/tmp2hqbizml.pyomo.lp:5089: warning: upper bound of variable 'x2' redefined
768 rows, 384 columns, 2331 non-zeros
384 integer variables, all of which are binary
5473 lines were read
Writing problem data to '/tmp/tmp9q1x3exl.glpk.glp'...
4314 lines were written
GLPK Integer Optimizer 5.0
768 rows, 384 columns, 2331 non-zeros
384 integer variables, all of which are binary
Preprocessing...
Objective value =   6.000000000e+01
INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND BY MIP PREPROCESSOR
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.6 Mb (596564 bytes)
Writing MIP solution to '/tmp/tmp5pyjfune.glpk.raw'...
1161 lines were written

*** Optimal Solution Found in 0.0610 seconds! ***
Total Students Assigned: 15 out of 15
Solver Time: 0.0610 seconds
Solution Signature (Hash): 5079804492206170896

--- Final Cutoff Scores ---
College 1  | Cutoff: 300 | Capacity: 20
College 2  | Cutoff: 290 | Capacity: 30
College 3  | Cutoff: 270 | Capacity: 20
College 4  | Cutoff: 330 | Capacity: 20
College 5  | Cutoff: 280 | Capacity: 25
Subject 1  | Cutoff: 300 | Capacity: 20
Subject 2  | Cutoff: 290 | Capacity: 30
Subject 3  | Cutoff: 270 | Capacity: 40
Subject 4  | Cutoff: 280 | Capacity: 25
```

## 12. COM-Chilean

```
Loading Data for COM-Chilean Model (Full Dataset)...
Data Ready: 15 Students, 5 Colleges, 4 Common Quotas.
Total Applications (E): 60

Building Pyomo Model... (COM-Chilean)

Solving the model with GLPK...
GLPSOL--GLPK LP/MIP Solver 5.0
Parameter(s) specified in the command line:
 --write /tmp/tmpyvu2h_kw.glpk.raw --wglp /tmp/tmpbg8nqf8g.glpk.glp --cpxlp
 /tmp/tmp_xv7qend.pyomo.lp
Reading problem data from '/tmp/tmp_xv7qend.pyomo.lp'...
/tmp/tmp_xv7qend.pyomo.lp:3393: warning: lower bound of variable 'x2' redefined
/tmp/tmp_xv7qend.pyomo.lp:3393: warning: upper bound of variable 'x2' redefined
511 rows, 264 columns, 1526 non-zeros
264 integer variables, all of which are binary
3657 lines were read
Writing problem data to '/tmp/tmpbg8nqf8g.glpk.glp'...
2875 lines were written
GLPK Integer Optimizer 5.0
511 rows, 264 columns, 1526 non-zeros
264 integer variables, all of which are binary
Preprocessing...
8 hidden covering inequaliti(es) were detected
502 rows, 264 columns, 1294 non-zeros
264 integer variables, all of which are binary
Scaling...
 A: min|aij| =  1.000e+00  max|aij| =  1.000e+00  ratio =  1.000e+00
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part is 502
Solving LP relaxation...
GLPK Simplex Optimizer 5.0
502 rows, 264 columns, 1294 non-zeros
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (60)
*   152: obj =   6.000000000e+01 inf =   0.000e+00 (0) 1
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Integer optimization begins...
Long-step dual simplex will be used
+   152: mip =     not found yet <=              +inf        (1; 0)
+   152: >>>>>   6.000000000e+01 <=   6.000000000e+01   0.0% (1; 0)
+   152: mip =   6.000000000e+01 <=     tree is empty   0.0% (0; 1)
INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.7 Mb (772382 bytes)
Writing MIP solution to '/tmp/tmpyvu2h_kw.glpk.raw'...
784 lines were written

*** Optimal Solution Found in 0.0193 seconds! ***
Total Students Assigned: 15 out of 15
Solver Time: 0.0193 seconds
Solution Signature (Hash): 5079804492206170896

--- Quota Violations (Chilean Policy in Action) ---
College 1  | Admitted: 3 | Limit: 20 -> OK
College 2  | Admitted: 3 | Limit: 30 -> OK
College 3  | Admitted: 3 | Limit: 20 -> OK
College 4  | Admitted: 3 | Limit: 20 -> OK
College 5  | Admitted: 3 | Limit: 25 -> OK
Subject 1  | Admitted: 3 | Limit: 20 -> OK
Subject 2  | Admitted: 3 | Limit: 30 -> OK
Subject 3  | Admitted: 6 | Limit: 40 -> OK
Subject 4  | Admitted: 3 | Limit: 25 -> OK
```

**تحلیل جواب:** همانطور که مشاهده می‌شود راه حل روش شیلی به علت ساده گیری در پذیرش دانشجو ها و کمتر بودن قیود سریعتر حل می‌شود.

**متاسفانه موفق به نصب سالور CPLEX روی سیستم خودم نشدم بنابراین مجبور شدم حجم مسئله رو به شدت کاهش بدم تا کد های من اجرا شوند. دیتاست کوچک شده را در فایل ها قرار داده ام.**