موضوعات منتخب در فیزیک آماری

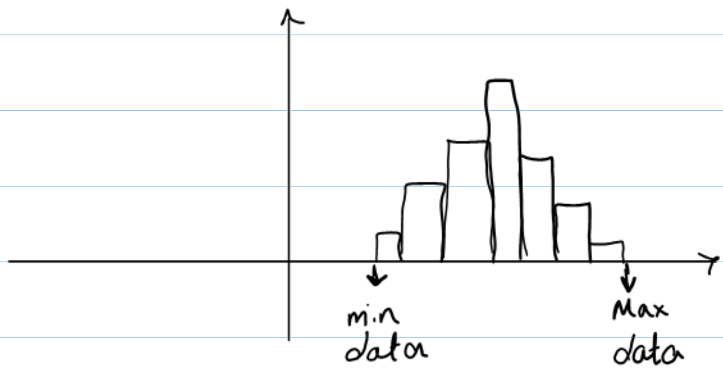
Session 1:

1403, 11, 28

Errors :
- systematic
- statistical ⟶ important to us.

ارور هم در زمان گزارش مهم است هم آنکه چون data زیاد نداریم با ارور می‌توانیم به مقدار واقعی نزدیک شویم.

Histogram :



typical of bin is odd.

مشکل اول در data کم این است که دقیقا روی خط bin را داخل کدام bin بشماریم!

باید گزارش کرد که دقیقا چه کرده‌ایم.

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$ ⟶ Sample average

$$\bar{x} = \mu$$ ⟶ از بینهایت (تکرار) داده شده
Population mean

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \longrightarrow$$ Standard deviation for population
S.d. - Pop

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \longrightarrow$$ s.t - sample

Bessel's finding for data

نادقیق می‌توان گفت چون $\bar{x}$ از خود data بدست آمده $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ درجه آزادی از بین رفته

زمانی که با بی‌دقتی در چیزی از خودش استفاده می‌کنیم $\Rightarrow$ Bias شده

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \text{Unbiased} \qquad \sigma_s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \text{Biased}$$

Example: given $x_1, x_2, x_3 \sim N(m, \sigma^2)$ estimate m, σ^2 4

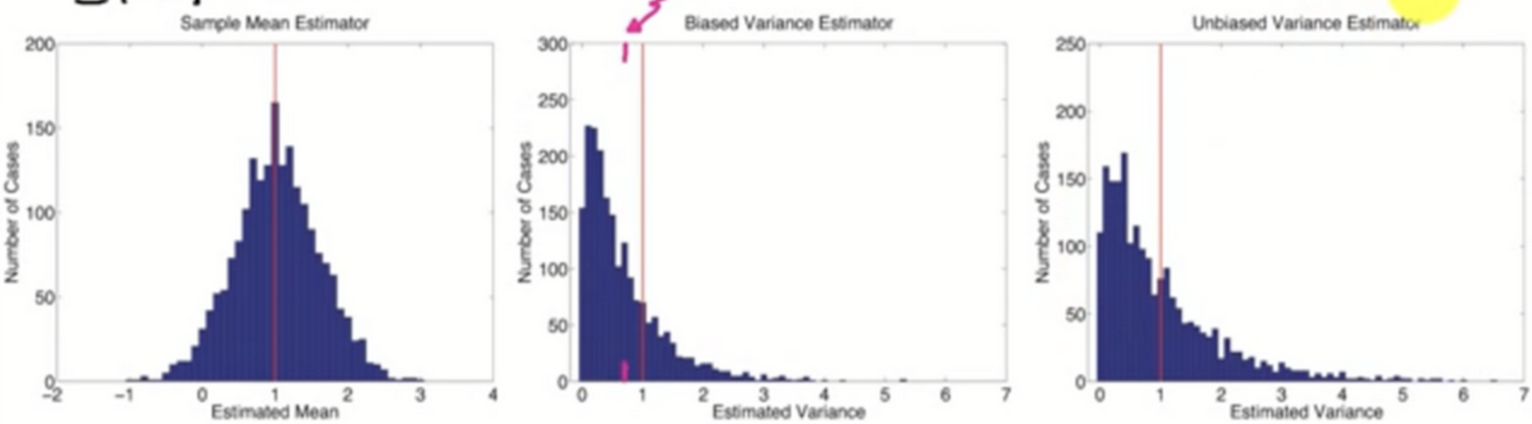
$$\hat{m} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\hat{\sigma}^2_{bias} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \hat{m})^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{unbias} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \hat{m})^2$$

$m = 1$
$\sigma^2 = 1$: 2000 times

$E\{\hat{m}\} \approx 1.02$ $\qquad$ $E\{\hat{\sigma}^2_{bias}\} \approx 0.67$ $\qquad$ $E\{\sigma^2_{unbias}\} \approx 1.01$

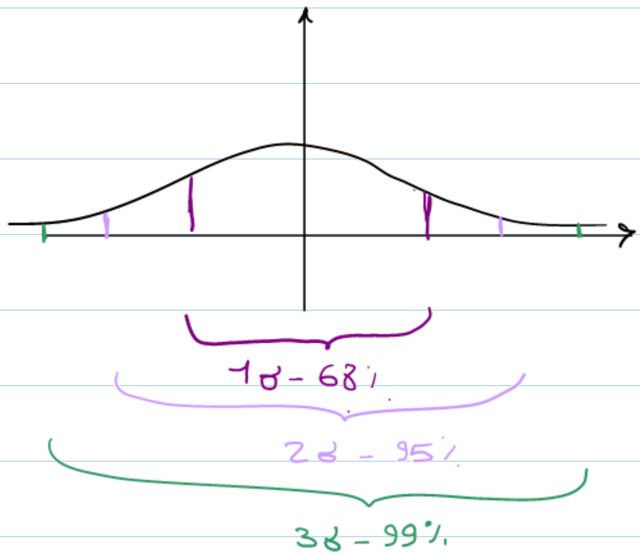


Standard error of mean (SEM):

$$SEM = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

$$x = \bar{x} \pm t^* \times SEM$$

ساده‌ترین حالت نرمال است چون از یک معلوم متقارن باشد؟



3 روش با confidence 90%، 95% و 99% داریم. به درجه آزادی $df = n-1$

با چک کردن جدول t-student می‌توانیم t^* را پیدا کنیم

t-Stud	df
confidence level	t^*

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

=> هر مسئله فیزیکی را می‌توان به مسئله optimization تبدیل کرد.

اولین optimization که دیدیم Langrangian بود. یا همان action.

تمام پارامترهای function ای که می‌خواهیم optimum شود را در x می‌چینیم.

$$\vec{X} = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Norm x $:= \|x\|$

$$\begin{cases} \|\vec{x}\| \geq 0 \quad \text{if } x=0 \quad \|x\| = 0 \\ \|c\vec{x}\| = c\|\vec{x}\| \quad c \in \mathbb{R} \\ \|x + Y\| = \|x\| + \|Y\| \quad \text{for all } x, Y \end{cases}$$

مثال Norm ها

L_1 - norm $\Rightarrow \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

L_2 - norm $\Rightarrow \|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ => typical in physics.
Euclidion norm

L_∞ - norm $\Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty = \max |x_i|$

همه را باید خوب بفهمید تا بتوان norm مناسب تعریف کرد.

حل نرم Matrix

$$A_{m\times n}\ \begin{cases} \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} & \text{Frobenius norm} \\ \|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ \|A\| = \sigma_{max} \Rightarrow \text{biggest singular value of } A \end{cases}$$

$$A_{n\times n} \Rightarrow \|A\| = |\mathrm{Trace}(A)|$$

$$= |\det(A)|$$

$$= \mathrm{Max}(|\lambda|)$$

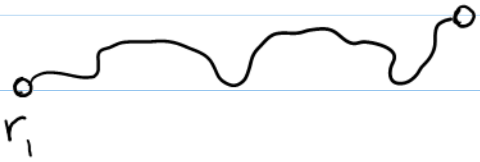
امید هست که در شبکه‌ی تیکر که از سایت‌های نزدیک بدست می‌آید به این جزئیات نیازی نداشته باشیم.

$\vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ می‌خواهیم از بردار $\vec{x}$، اسکالر درست کنیم.

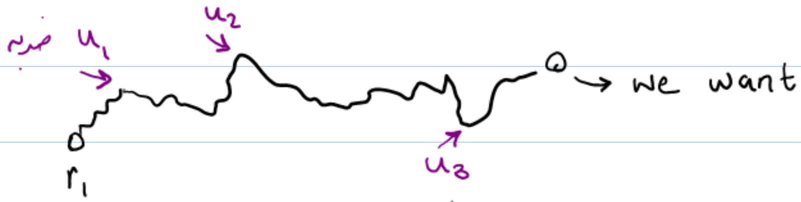
$$h(\vec{x}) = \text{اسکالر}$$

Optimization $:=$ $\vec{x} = ?$ $\Rightarrow \min h(\vec{x})$ $\Rightarrow$ Cost function

مثال: brownian



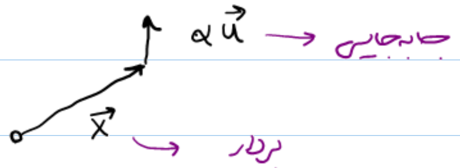
در ۱ و ۲ بعد رندوم واک فضا را جارو می‌کند. (در 3 بعد لزومی ندارد)



$$\int_{t_1}^{t_2} |u_t|^2 \, dt \Rightarrow \text{تابع هزینه}$$

می‌خواهیم کمترین ضربه را بزنیم. (t_1, t_2) زمان کنترل است.

پس $\vec{x}$ در فضای n بعدی است می‌خواهیم پارامترها را عوض کنیم تا C.F کاهش یابد.



$$\Rightarrow \vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \alpha\vec{u}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{h(\vec{x} + \alpha\vec{u}) - h(\vec{x})}{\alpha} = \hat{u}^T \cdot \nabla h(\vec{x})$$

$$u^T \cdot \nabla_x h(\vec{x}) = \|\hat{u}\| \, \|\nabla_x h(x)\| \cos\theta$$

Putting $\theta = \pi \Rightarrow \vec{u} = \nabla \vec{h}$

↳ fixed

$$\Rightarrow \vec{x}_{new} \rightarrow \vec{x}_0 - \alpha \nabla_x \vec{h}$$

در کد باید یک tolerance I در حدود 10^{-6} در نظر بگیریم که اگر فاصله x_{new} از قبلی کمتر از آن شد دیگر که stop شود. <= تعداد iteration II نیز باید مشخص شود.

همه optimization III ها شرط اولیه می‌گیرند.

همچنین learning rate V نیز باید بدهیم.