Pangkat/ *Rank* Matriks

Misalkan matriks *A* berukuran *mxn*, **pangkat/rank** matriks *A* diberi notasi *p*(*A*) didefinisikan ordo terbesar anak matriks *A* yang determinannya tidak nol.

Prosedur Pencarian Pangkat Matriks

Misalkan A matriks berukuran mxn.

Misalkan $r = min(m,n)$

1. Pilih anak matriks segi dari matriks A yang berordo r (sebut sebagai A_r)
2. Jika $\det(A_r) \neq 0$ maka $p(A) = r$. Proses selesai.
3. Jika $\det(A_r) = 0$ maka carilah anak matriks segi yang lain (jika ada) dari matriks A yang berordo r.
   – Jika anak matriks ini masih ada, maka ulangi langkah 2.
   – Jika anak matriks ini sudah tidak ada maka lanjutkan ke langkah 4.

Prosedur Pencarian Pangkat Matriks

4. Carilah anak matriks segi dari A yang berordo $r - 1$ (sebut A_{r-1}) sehingga $\det(A_{r-1}) \neq 0$.
   - Jika anak matriks ini ditemukan maka $p(A) = r - 1$.
   - Jika untuk semua kemungkinan anak matriks A yang berordo r-1 menghasilkan $\det(A) = 0$ maka ulangi langkah ini dengan memilih anak matriks A yang berordo $r - 2$.
   - Langkah ini diulangi terus menerus sampai menghasilkan anak matriks segi dari A sehingga nilai determinannya tidak nol. Misalkan diperoleh pada saat $r = r^*$ maka $p(A) = r^*$.

Teladan

Tentukan pangkat matriks berikut

1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pencarian Pangkat Matriks dengan OBD

Teladan 3.2

Tentukan pangkat matriks berikut

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

DEFINISI PERSAMAAN LINEAR

Suatu persamaan dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dikatakan linear bila dapat dituliskan sebagai

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = k$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dan *k* suatu konstanta real.

LATIHAN

Manakah yang merupakan persamaan linear?

1. $x - 2y + 3z = -1$
2. $\frac{1}{2}x + 3y^2 = 6$
3. $2xy + 3y + z = 5$
4. $\frac{1}{x} - y + 3z = 0$
5. $2y - z = 3 - x$
6. $\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 1$
7. $\sqrt{x} + y + z = 3$

DEFINISI SPL

Sistem Persamaan Linear (SPL) yang terdiri dari *m* buah persamaan dan *n* buah variabel adalah satu sistem persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Dengan a_{ij} dan $b_i, i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots n$ berupa konstanta, sedangkan x_j dengan $j = 1, 2, \ldots, n$ merupakan variabel. Besaran a_{ij} disebut koefisien x_j pada persamaan ke *i* dan besaran b_i disebut nilai sisi kanan persamaan ke *i.*

CONTOH

$$
\begin{aligned}
x - y + 2z &= 6 \\
2x + 3y - z &= -3 \\
-2y - 3z &= -4
\end{aligned}
$$

- Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk catatan matriks sebagai berikut

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}
$$

Jika semua nilai sisi kanan SPL bernilai nol, maka SPL tersebut dinamakan **SPL Homogen.**

KEKONSISTENAN SPL

Suatu SPL *AX=B* dengan $A_{m\times n}$ dikatakan konsisten jika dan hanya jika pangkat matriks *A* sama dengan pangkat matriks diperbesarnya, yaitu $p(A) = p(A|B)$. Selanjutnya dalam hal SPL konsisten dan jika

1. $p(A) = n$ maka SPL mempunyai penyelesaian tunggal.
2. $p(A) < n$ maka SPL mempunyai banyak penyelesaian.

Teladan 1

Periksa apakah SPL berikut konsisten atau tidak konsisten

1.
$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 0 \\ 3x - 7y - 2z &= 20 \\ x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - 3y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x - 9y + 12z &= 15 \end{aligned}$$

1
$$4x + 2y + z = 0$$
$$3x - 7y - 2z = 20$$
$$x + y + 4z = 6$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 20 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \overset{E_{13}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -7 & -2 & 20 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{31(-4)}}{\overset{E_{21(-3)}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & -14 & 2 \\ 0 & -2 & -15 & -24 \end{array}\right)$$

$$\overset{E_{23}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -15 & -24 \\ 0 & -10 & -14 & 2 \end{array}\right) \overset{E_{32(-5))}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -15 & -24 \\ 0 & 0 & 61 & 122 \end{array}\right)$$

$p(A) = 3$
$p(A|B) = 3$
$n = 3$
$p(A) = p(A|B) = n$
SPL konsisten dengan penyelesaian tunggal

2

$$x - 3y + 4z = 5$$
$$2x - y + 3z = 7$$
$$3x - 9y + 12z = 15$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -9 & 12 & 15 \end{array}\right) \underset{E_{31(-3)}}{\overset{E_{21(-2)}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$p(A) = 2$
$p(A|B) =2$
$n = 3$
$p(A) = p(A|B) < n$
SPL konsisten dengan banyak penyelesaian

PENENTUAN SOLUSI SPL

1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Matriks Invers
3. Metode Cramer

Metode Eliminasi Gauss

Suatu SPL mempunyai solusi yang sama dengan SPL asal bila dikenai tiga operasi baris dasar, prosedur dalam metode eliminasi Gauss antara lain :

1. Buat matriks diperbesar $(A|B)$
2. Lakukan serangkaian OBD agar matriks A berubah menjadi matriks segitiga atas
3. Gunakan substitusi mundur untuk menentukan penyelesaiannya.

Teladan

Tentukan solusi SPL dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

$$x - y + 2z = 6$$
$$2x + 3y - z = -3$$
$$-2y - 3z = -4$$

$$x - y + 2z = 6$$
$$2x + 3y - z = -3$$
$$-2y - 3z = -4$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{E_{21(-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{E_{32(2/5)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$-5z = -10 \ \rightarrow z = 2$$
$$5y - 5z = -15 \ \rightarrow 5y - 5(2) = -15 \rightarrow 5y - 10 = -15 \ \rightarrow 5y = -5 \ \rightarrow y = -1$$
$$x - y + 2z = 6 \ \rightarrow x - (-1) + 2(2) = 6 \rightarrow \ x + 1 + 4 = 6 \ \rightarrow x = 1$$

Metode Matriks Invers

Metode matriks invers dapat digunakan untuk suatu SPL *AX=B* dengan *A* merupakan matriks taksingular atau $\det(A) \neq 0$.

Dengan menggunakan sifat invers matriks berlaku

$$\begin{aligned} AX &= B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Teladan

Tentukan solusi SPL dengan menggunakan metode matriks invers

$$x - y + 2z = 6$$
$$2x + 3y - z = -3$$
$$-2y - 3z = -4$$

$$x-y+2z=6$$
$$2x+3y-z=-3$$
$$-2y-3z=-4$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}+(-9-2) & -(-6-0) & +(-4-0)\\ -(3+4) & +(-3-0) & -(-2-0)\\ +(1-6) & -(-1-4) & +(3+2)\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-11 & 6 & -4\\ -7 & -3 & 2\\ -5 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

$$|A|=1(-11)+2(-7)+0(-5)=-25$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^T=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}-11 & -7 & -5\\ 6 & -3 & 5\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}-11 & -7 & -5\\ 6 & -3 & 5\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -4\end{pmatrix}=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}-66+21+20\\ 36+9-20\\ -24-6-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

Metode Cramer

Metode Cramer dapat digunakan untuk untuk suatu SPL *AX=B* dengan *A* merupakan matriks taksingular atau $\det(A) \neq 0$.

SPL tersebut mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

dengan A_j adalah matriks *A* kolom ke *j* diganti dengan matriks *B*.

Teladan

Tentukan solusi SPL dengan menggunakan metode Cramer

$$
\begin{aligned}
x - y + 2z &= 6 \\
2x + 3y - z &= -3 \\
-2y - 3z &= -4
\end{aligned}
$$

$$x - y + 2z = 6$$
$$2x + 3y - z = -3$$
$$-2y - 3z = -4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -25$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 6(-9-2) + 1(9-4) + 2(6+12) = -25$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 0$$
$$= 1(9-4) - 2(-18+8) = 25$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 0$$
$$= 1(-12-6) - 2(4+12) = -50$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_1|/|A| \\ |A_2|/|A| \\ |A_3|/|A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/-25 \\ 25/-25 \\ -25/-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LATIHAN

ATIHAN 2.1

bah SPL berikut dalam bentuk catatan matriks.

1. $$3x + 2y = 6$$
   $$2x + 4y = 8$$

2. $$x - 3y + 4z = 10$$
   $$-2x + 4y - z = 7$$
   $$4x - z = 16$$

3. $$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$
   $$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

4. $$-y_2 - 2y_3 = 2$$
   $$2y_1 - y_3 = 14$$
   $$2y_1 - 2y_2 - 3y_3 = 7$$

TERIMA KASIH