MATRIKS

Pengertian

- **Matriks** merupakan kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang atau bujur sangkar.
- **Ordo** adalah ukuran dari suatu matriks yang dinyatakan dalam

  banyaknya baris x banyaknya kolom
- Nama matriks ditulis dengan huruf kapital: A,B,C,….
- Anggota dari matriks A pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan a_{ij} .
- Matriks A dengan ordo mxn ditulis: $A_{m\text{x}n}$.

Teladan 1

- Matriks A berordo 2x3:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- Misalkan didefinisikan

$$a_{ij} = i + j$$

maka diperoleh matriks A sebagai berikut

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Anak Matriks

- Anak matriks *A* adalah sembarang matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan beberapa baris atau kolom pada matriks *A*.

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Beberapa anak matriks *A*:

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ Kolom 1 dihilangkan

$A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ Baris 2 dan kolom 3 dihilangkan

Matriks Khusus

- **Matriks segi**: matriks yang mempunyai banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.
- **Matriks setangkup**: matriks yang jika unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j sama dengan unsur pada baris ke-j dan kolom ke-i.
- **Matriks diagonal** : matriks setangkup yang unsur-unsurnya bernilai nol kecuali mungkin pada diagonal utamanya.

Matriks Khusus

- **Matriks identitas**: matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya bernilai satu.
- **Matriks segitiga atas(*bawah*)**: matriks yang semua elemen di bawah(di *atas*) diagonal utamanya bernilai nol.
- **Matriks nol**: matriks yang semua elemennya bernilai nol.

Operasi Matriks

1. Penjumlahan matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan jika dan hanya jika kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

Jika $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ dan $B = \left(b_{ij}\right)_{mxn}$ maka $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{mxn}$

Teladan 1.2 »

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ maka diperoleh

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

Operasi Matriks

2. Perkalian dengan skalar

   Suatu matriks dapat dikalikan dengan skalar.

   Jika $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ dan k suatu skalar maka $kA = \left(ka_{ij}\right)_{mxn}$

   Teladan 1.3 »

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan k=3 maka diperoleh

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

Hukum-hukum pada penjumlahan dan perkalian skalar

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+(-A) = O$
3. $A+B= B+A$
4. $k_1(A+B) = k_1A+ k_1B$
5. $(k_1+k_2)\,A= k_1A+ k_2A$
6. $(k_1k_2)\,A= k_1(k_2A)$
7. $AO = O$

Operasi Matriks

3. Perkalian matriks

Dua matriks *A* dan *B* dapat dikalikan (AB) jika dan hanya jika matriks *A* memiliki banyaknya kolom yang sama dengan banyaknya baris pada matriks *B*.

Jika $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ dan $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p}$ maka $AB = \left(c_{ij}\right)_{m\times p}$

dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks

Teladan 1.4 »

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 5} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hukum-hukum pada perkalian matriks

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C)= AB+AC$
3. $(B+C)A= BA+ CA$
4. $k(AB) = (kA)B=A(kB)$

Transpos/Putaran Matriks

Sebuah matriks *A* ditransposkan (A^T, A’) yaitu dengan cara mengubah elemen a_{ij} menjadi a_{ji} . Dengan kata lain baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Jika $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ maka $A^T = \left(a_{ji}\right)_{n \times m}$.

Teladan 1.5 »

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat matriks transpos:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$ dengan k skalar
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Teras Matriks

- Teras suatu matriks segi adalah jumlah unsur-unsur diagonal utamanya.
- Jadi teras matriks A_{nxn} adalah

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Teladan 1.6 »

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Tentukan *tr(A)*.

Teras Matriks

Sifat-sifat teras matriks

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(cA) = c\ tr(\mathrm{A})$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Jenis-Jenis Operasi Baris Dasar

- Saling menukarkan baris ke-i dengan baris ke-j, diberi notasi E_{ij} dengan $i \neq j$.
- Mengalikan baris ke-i dengan suatu konstanta $k \neq 0$, diberi notasi $E_{i(k)}$.
- Menempatkan atau mengisikan baris ke-i dengan k kali baris ke-j ditambah baris ke-i, diberi notasi $E_{ij(k)}$ dengan $i \neq j$ dan $k \neq 0$.

Secara umum, serangkaian OBD yang dilakukan berturut-turut mulai dari E_1, lalu E_2 hingga E_p terhadap matriks A untuk mendapatkan matriks B dinotasikan

$$E_p E_{p\text{-}1} \ldots . E_2 \, E_1 A = B.$$

Teladan 2

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Tentukan

a. $E_{13}(A) = A_1$.

b. $E_{2(3)}(A) = A_2$.

c. $E_{23(-2)}(A) = A_3$.

d. $E_{12}\, E_{13(2)}\, E_{2(-1)}\, (A) = A_4$.

Teladan 3

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Gunakan OBD pada matriks di atas sehingga diperoleh matriks segitiga atas.

Determinan Matriks

Setiap matriks segi mempunyai nilai determinan.

<u>ORDO 2 X 2</u>

Determinan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

Teladan 3

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ maka tentukan $\det(A)$

Metode Minor Kofaktor

Misalkan matriks $A=(a_{ij})_{nxn}$ dan M_{ij} adalah minor elemen a_{ij} (determinan anak matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-*i* dan kolom ke-*j*), maka

a. jika memillih baris ke-i

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

b. jika memilih kolom ke-j

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$

Teladan 4

Hitunglah determinan matriks berikut dengan menggunakan metode minor kofaktor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Determinan

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(E_{ij}A) = -\det(A)$
3. $\det(E_{ij(k)}A) = \det(A)$
4. $\det(E_{i(k)}A) = k\det(A)$
5. $\det(kA) = k^n \det(A)$

   untuk matriks *A* dengan ordo *n* x *n*.
6. Jika matriks *A* memiliki suatu baris/kolom yang semua elemennya nol, maka

Sifat-Sifat Determinan

7. Jika ada satu baris/kolom matriks *A* merupakan kelipatan dari baris/kolom yang lain maka
8. Jika *A* merupakan matriks segitiga atas atau segitiga bawah, maka determinan matriks *A* adalah perkalian unsur diagonal utamanya
9. Jika matriks segi *A* dan *B* memiliki ukuran yang sama maka

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Teladan 5

Misalkan diberikan matiks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan matriks B diperoleh dengan

$$B = E_{21} E_{12(-4)} E_{2(3)}(A)$$

Tentukan determinan matriks B.

Pencarian Determinan Menggunakan Operasi Baris Dasar

- Matriks **taksingular** adalah matriks segi yang memiliki nilai determinan **taknol**.
- Setiap matriks taksingular A memiliki invers A^{-1} yang tunggal.
- Jika A dan B adalah dua matriks taksingular maka berlaku:
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teladan 6

Dengan operasi baris dasar, carilah determinan matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Pangkat/ *Rank* Matriks

Misalkan matriks *A* berukuran *mxn*, **pangkat/rank** matriks *A* diberi notasi *p*(*A*) didefinisikan ordo terbesar anak matriks *A* yang determinannya tidak nol.

Prosedur Pencarian Pangkat Matriks

Misalkan A matriks berukuran mxn.

Misalkan $r = min(m,n)$

1. Pilih anak matriks segi dari matriks A yang berordo r (sebut sebagai A_r)
2. Jika $\det(A_r) \neq 0$ maka $p(A) = r$. Proses selesai.
3. Jika $\det(A_r) = 0$ maka carilah anak matriks segi yang lain (jika ada) dari matriks A yang berordo r.
   – Jika anak matriks ini masih ada, maka ulangi langkah 2.
   – Jika anak matriks ini sudah tidak ada maka lanjutkan ke langkah 4.

Prosedur Pencarian Pangkat Matriks

4. Carilah anak matriks segi dari A yang berordo $r - 1$ (sebut $A_{r\text{-}1}$) sehingga $\det(A_{r\text{-}1}) \neq 0$.
   - Jika anak matriks ini ditemukan maka $p(A) = r - 1$.
   - Jika untuk semua kemungkinan anak matriks A yang berordo r-1 menghasilkan $\det(A) = 0$ maka ulangi langkah ini dengan memilih anak matriks A yang berordo $r - 2$.
   - Langkah ini diulangi terus menerus sampai menghasilkan anak matriks segi dari A sehingga nilai determinannya tidak nol. Misalkan diperoleh pada saat $r = r^*$ maka $p(A) = r^*$.

Teladan

Tentukan pangkat matriks berikut

1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pencarian Pangkat Matriks dengan OBD

Teladan 3.2

Tentukan pangkat matriks berikut

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks Balikan/ Invers

- Matriks **taksingular** adalah matriks segi yang memiliki nilai determinan **taknol**.
- Setiap matriks taksingular A memiliki invers A^{-1} yang tunggal.
- Jika A dan B adalah dua matriks taksingular maka berlaku:
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ordo 2 x 2

Invers matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Teladan 5.1 »

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ maka

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(4) - (3)(2)}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Metode Matriks Adjoint

Jika determinan matriks $A = (a_{ij})_{nxn}$ tidak nol, dan matriks $C = (\alpha_{ij})_{nxn}$ dengan $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ kofaktor elemen a_{ij}, maka balikan matriks *A* adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

Matriks C^T disebut matriks adjoint dari matriks A.

ORDO 3 x 3

Misal $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{|A|}C^T$

Dengan matriks *C* adalah

$$C = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$$

Teladan

Tentukan invers matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Metode Penghapusan

- Definisi matriks balikan memungkinkan kita untuk menentukan balikan suatu matriks dengan menggunakan operasi baris dasar.
- Cara ini disebut dengan metode penghapusan.
- Misalkan matriks *A* dikenakan serangkaian operasi baris dasar dan hasilnya adalah *I*, yaitu

$$E_p E_{p-1} \ldots E_2 E_1 (A) = I$$

- maka $PA=I$ dengan $P = E_p E_{p-1} \ldots E_2 E_1 (I)$ menurut definisi matriks balikan $P=A^{-1}$.

Teladan

Dengan menggunakan metode penghapusan, tentukan invers matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

TERIMA KASIH