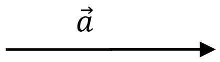
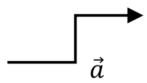
III. VEKTOR

3.1. Pengertian

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah. Suatu vektor dapat digambarkan dengan memberi tanda panah pada titik ujung suatu potongan garis. Notasi dari vektor dapat dituliskan dengan memberi tanda panah di atas suatu huruf atau dengan huruf tebal yang diberi garis bawah, misalnya $\vec{A}, \vec{a}, \bar{A}, \bar{a}, \underline{A}, \underline{a}$. Vektor yang mempunyai titik awal *O* dan titik ujung *B* ditulis $\overrightarrow{OB}, \overline{OB}, \underline{OB}$.

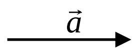
Contoh : 

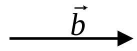


3.2. Panjang Vektor

Notasi : $\left|\vec{A}\right|, \left|\bar{A}\right|, \left|\overrightarrow{OB}\right|, \left|\overline{OB}\right|$

Vektor tergantung pada panjang dan arahnya. Dua vektor dikatakan sama jika mempunyai panjang dan arah yang sama.

Contoh : 



$\vec{a}$ sama dengan $\vec{b}$.

3.3. Operasi Vektor

Suatu vektor di dalam $\mathbb{R}^n$ dinyatakan sebagai rangkap-*n* bilangan real. Sebagai contoh :

$$\vec{u} = \left[u_1, u_2, u_3, ..., u_n\right]$$

dengan $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ adalah komponen vektor. Untuk membedakan kurung ( ) yang digunakan dalam koordinat, maka dalam vektor digunakan kurung [ ].

1. Vektor posisi dari titik $A\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ adalah $\overrightarrow{OA} = \left[a_1, a_2, ..., a_n\right]$
2. Vektor yang bertitik awal di $A\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ dan bertitik akhir di $B\left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$ adalah $\overrightarrow{AB} = \left[b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n\right]$.
3. Panjang vektor $\vec{a} = \left[a_1, a_2, ..., a_n\right]$ adalah $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ... + a_n^{\,2}}$.
4. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah jarak dua titik $A\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ dan $B\left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$, yaitu $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2 + \ldots + \left(b_n - a_n\right)^2}$.
5. Penjumlahan vektor $\vec{a} = \left[a_1, a_2, ..., a_n\right]$ dan $\vec{b} = \left[b_1, b_2, ..., b_n\right]$ adalah
   $\vec{a} + \vec{b} = \left[a_1, a_2, ..., a_n\right] + \left[b_1, b_2, ..., b_n\right] = \left[a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n\right]$

Metode penjumlahan vektor ada 2, yaitu metode jajaran genjang dan metode segitiga.

3.3.1. Perkalian Titik

Misalkan diketahui $\vec{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ dan $\vec{b} = [b_1, b_2, ..., b_n]$, maka didefinisikan perkalian titik antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, dinotasikan $\vec{a} \bullet \vec{b}$, sebagai:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}$$

Sedangkan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah sudut θ yang memenuhi:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Sudut antara kedua vektor ini memenuhi $0 \le \theta \le \pi$.

3.3.2. Beberapa Sifat Operasi Vektor

Jika $\vec{u}, \vec{v}$ dan $\vec{w}$ adalah vektor-vektor di bidang atau ruang dan *k* serta *l* adalah skalar maka sifat-sifat yang dipenuhi adalah sebagai berikut:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (sifat komutatif)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ (sifat assosiatif)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
6. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$

Semua sifat tersebut dapat dibuktikan kebenarannya. Misalnya untuk sifat pertama:

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor dalam dua dimensi. Jika $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, maka

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= [u_1, u_2] + [v_1, v_2] \\
&= [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \\
&= [v_1 + u_1, v_1 + u_2] \\
&= [v_1, v_2] + [u_1, u_2] \\
&= \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1}
\end{aligned}$$

LATIHAN 3

1. Koordinat titik $P(4,1)$ dan titik $Q(5,-2)$. Tentukan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{QP}$.
   Jawab:

2. Titik $A(0,-5)$, $B(4,-2)$, dan $C(1,3)$. Tentukan vektor

a. $\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AC}$ d. $\overrightarrow{CB}$

Jawab:

3. $\overrightarrow{LN} = [1, -2, 0]$ dan $\overrightarrow{NM} = [4, -3, -2]$. Tentukan $\overrightarrow{LM}$.

   Jawab:

4. $\overrightarrow{AB} = [1, y, -2], \overrightarrow{BC} = [2x, -3, z]$, dan $\overrightarrow{AC} = [1, 4, x + y]$. Tentukan konstanta $x, y,$ dan z.

   Jawab:

5. Diketahui titik $P(2,3,-3), Q(5,1,5)$, dan $R(8,-1,13)$. Tunjukkan ketiga titik berada dalam satu garis.

   Jawab:

6. Misalkan $\vec{u} = [-2,0,-3], \vec{v} = [2,-1,4]$, dan $\vec{w} = [7,3,-2]$, tentukan

   a. $2\vec{u} - 3\vec{v}$ b. $\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w}$

   Jawab:

   a. $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2[-2,0,-3] - 3[2,-1,4] = [-4,0,-6] - [6,-3,12] = [-10,3,-18]$

7. Tentukan bilangan *x* dan *y* yang memenuhi $[8,2y] = x[4,-10]$.

   Jawab:

8. Tentukan perkalian titik $\vec{u} \bullet \vec{v}$ dengan:

   a. $\vec{u} = \langle 2, 2, -2 \rangle$, $\vec{v} = \langle -1, 4, -3 \rangle$

b. $\vec{u} = \langle -2, 1, -2, 0 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1, 3, -1, 4 \rangle$

c. $\vec{u} = \langle -3, 5, 2, -1 \rangle$, $\vec{v} = \langle -4, -1, 2, 5 \rangle$

Jawab:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) = -2 + 8 + 6 = 12$

b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = 3$

9. Tentukan nilai k sehingga $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, jika

a. $\vec{u} = \langle 2, k, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1, -5, 2 \rangle$

b. $\vec{u} = \langle 4, -2k, 1, 0, -2 \rangle$, $\vec{v} = \langle k, -2, 2, 6, 2k \rangle$

Jawab:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + k \cdot (-5) + (-3) \cdot 2 = 2 - 5k - 6 = -5k - 4$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \; -5k - 4 = 0 \rightarrow k = -\frac{4}{5}$

b.

10. Tentukan nilai k agar $\vec{a} = \langle 2, k, -1, 5 \rangle$ mempunyai panjang $\sqrt{46}$.

Jawab:

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + k^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + k^2 + 1 + 25} = \sqrt{30 + k^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\mathbf{46}} \rightarrow \; \sqrt{30 + k^2} = \sqrt{46} \rightarrow 30 + k^2 = 46 \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = -4 \; atau \; k = 4$

11. Tentukan besar sudut antara vektor $\vec{a} = \langle 1, 2, 0, -4 \rangle$ dengan vektor $\vec{b} = \langle 0, 0, -1, -1 \rangle$.

Jawab:

$\theta =$ sudut antara vektor a dan b

$$cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{0 + 0 + 0 + 4}{\sqrt{1 + 4 + 0 + 16}\sqrt{0 + 0 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{21}\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{42}}$$

$$cos(\theta) = \frac{4}{\sqrt{42}} \rightarrow \theta = arccos\left(\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$$

12. Tentukan nilai k agar vektor $\vec{a} = \langle 1, k, -3 \rangle$ tegak lurus dengan vektor $\vec{b} = \langle 4, -k, 1 \rangle$.

 Jawab:

 Dua buah vektor tegak lurus saat terbentuk sudut 90^0

 Ingat $\cos(90^0) = 0$

$$\cos(90^0) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4 - k^2 - 3}{\sqrt{1 + k^2 + 9}\sqrt{16 + k^2 + 1}} = \frac{1 - k^2}{\sqrt{10 + k^2}\sqrt{17 + k^2}} = 0$$

$$\rightarrow 1 - k^2 = 0 \rightarrow k = -1 \; atau \; k = 1$$

13. Titik sebuah segitiga didefinisikan oleh vektor posisi $\overrightarrow{OP} = [4, -3, 1], \overrightarrow{OQ} = [3, -1, 2]$, dan $\overrightarrow{OR} = [6, -1, 5]$.

 a. Tentukan $\overrightarrow{PQ}$

 b. Tentukan $\overrightarrow{PR}$

 c. Hitung $\cos RPQ$

 d. Hitung $\sin RPQ$

 e. Hitung luas segitiga PQR. $\left(\text{Luas segitiga } PQR = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PR}\right| \cdot \sin RPQ\right)$

 Jawab: