هندسه دیفرانسیل

جلد اول

هندسه دیفرانسیل موضعی

تصنیف: بهروز بیدآباد

دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

نوروز ۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱

نظریه منحنی ها

مقدمه نظریه منحنی ها در حل مسایل هندسه و یا به طور کلی دراثبات قضایای اساسی در ریاضییات نقش کلیدی دارد. درک مفاهیم مربوط به منحنی ها ابتدایی ترین روش برای حل مسایل هندسه است. در این فصل ابتدا به یادآوری برخی از تعاریف و گزاره های مربوط به منحنی ها و خواص آنهامی پردازیم. اگر چه با بعضی از این مفاهیم در ریاضی عمومی آشنا شده ایم ولی تکرار و بیان مفاهیم دقیق آنهاخالی از لطف نبوده بلکه در بعضی موارد ضرورت نیز دارد.

از جمله این مفاهیم مفهوم ''طول'' یا فاصله دو نقطه است. به عنوان مثال در فضای

اقلیدسی سه بعدی فاصله دو نقطه برابر طول خط راستی است که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می کند که از اصول موضوعه هندسه اقلیدسی است. اما در روی کره دیگر چنین خاصیتی برقرار نیست یعنی فاصله دو نقطه در روی کره دیگر برابر طول خط راستی که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می کند نیست. بلکه فاصله دو نقطه روی کره طول کوتاهترین منحنی روی کره است که این دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند. این موضوع تفاوت بین تعریف فاصله در هندسه اقلیدسی و هندسه کروی را روشن می کند. در این فصل قصد نداریم که به جزییات این مطلب بپردازیم بلکه تنها به آنچه که از طول یک منحنی در $\mathbb{R}^3$ می دانیم اکتفا می کنیم. در مورد نقش طول قوس در تعریف هندسه فضا، خواننده علاقه مند می تواند به کتب پیشرفته هندسه از جمله فصل دوم کتاب [۲] مراجعه نماید.

مطالبی که برای مطالعه این بخش لازم است توابع برداری یک متغییره و ضرب داخلی و خارجی آنها است که در دروس ریاضی عمومی با آن آشنا شده‌ایم. ضمنا به خوانندگان علاقه‌مند پیشنهاد می شود که از وجود کامپیوتر و امکان جستجو در اینترنت که ابزاری جدید و یکی از ملزومات مطالعه ریاضی در دوران اخیر است نیز بهره کافی ببرند. به عنوان مثال اشکالی که نام لاتین آنها در پاورقی ذکر شده است را می توانند در اینترنت بهتر ببینند و یا با استفاده از برنامه میپل [۱] اشکال آنها را رسم نمایند. از طرف دیگر نظر به اینکه رسم این نمودارها به صورت نقطه یابی وبا جایگذاری مقادیر مختلف پارامتر t انجام می شود و اگر کمی معادله آن منحنی پیچیده باشد محاسبات آن بسیار سنگین می شود توصیه می گردد که از برنامه میپل برای رسم نمودارها استفاده شود. به همین دلیل برنامه رسم برخی از این اشکال در پایان مثال ها آورده شده است تا دانشجویان به سادگی استفاده از میپل واقف گردیده در استفاده از آن کوتاهی نکنند.

[۱] Maple

۱.۱ یادآوری مطالبی از نظریه منحنی ها در $I\!R^3$

تابع برداری ۱-متغییره $\alpha : t \in I \subset I\!R \longrightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \subset I\!R^3$ را **موضعا یک‌به‌یک** [2] گوییم اگر به ازای هر $t \in I$ یک همسایگی از t در I موجود باشد که هرگاه $t_1 \neq t_2$ باشد، آنگاه

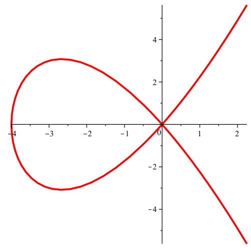
$$\alpha(t_1) = (x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) \neq \alpha(t_2) = (x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2)),$$

α را **یک‌به‌یک** گوییم اگر در کل حوزه تعریف خود یک به یک باشد. α را در یک نقطه **پیوسته** گوییم اگر تک تک مولفه های آن یعنی توابع $x_i(t)$ در آن نقطه، به عنوان توابع حقیقی یک متغییره پیوسته باشند. α را در یک نقطه **مشتق‌پذیر یا دیفرانسیل‌پذیر** گوییم اگر تک تک مولفه های آن یعنی توابع $x_i(t)$ در آن نقطه، به عنوان توابع حقیقی یک متغیره مشتق‌پذیر باشند. می‌گوییم تابع α دیفرانسیل‌پذیر از **کلاس** C^k است اگر مولفه های آن k بار مشتق پذیر بوده مشتق های k ام آن پیوسته باشند.

مثال ۱.۱.۱. نگاشت $\alpha : I\!R \longrightarrow I\!R^2$ که توسط $\alpha(t) = (t^2 - 4, t^3 - 4t)$ تعریف می شود یک تابع برداری ۱-متغییره دیفرانسیل پذیر است. توجه داشته باشید که $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ بنابراین α یک به یک نیست ولی موضعا یک به یک است. شکل (۱.۱) را ببینید. برنامه ساده نرم افزار میپل برای رسم این شکل دستور زیر است. $plot([t^2 - 4, t^3 - 4*t, t = -3..3])$ که در آن عبارت $t = -3..3$ در برنامه مشخص کننده دامنه تغییرات t بوده و منظور از $*$ علامت ضرب است.

با توجه به اهداف مختلف در اثبات قضایای ریاضی و یا کاربرد منحنی‌ها در فیزیک، مهندسی و غیره، تعاریف متفاوتی از مفهوم یک منحنی در کتب مختلف بیان گردیده است که کم وبیش بایکدیگر تفاوت‌هایی دارند. تعریفی که در زیر می آید به منظور سهولت در اثبات

[2] one to one (locally)



شکل ۱.۱: یک تابع برداری دیفرانسیل پذیر که یک به یک نیست ولی موضعا یک به یک است.

قضایای اساسی و همچنین شباهت بین تعریف منحنی و تعمیم آن به رویه‌ها بیان گردیده است.

تعریف ۲.۱.۱. C تصویر بازه دلخواه $I \subset \mathbb{R}$ تحت یک تابع پیوسته و موضعا یک به یک $\alpha(t)$ را یک **منحنی**[۳] در $\mathbb{R}^۳$ می‌نامیم.

$$\begin{aligned} \alpha : & I \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^۳, \\ & t \mapsto \alpha(t) = (x_۱(t), x_۲(t), x_۳(t)). \end{aligned}$$

$\alpha(t)$ رایک **نمایش پارامتری** منحنی C می‌نامند. یک منحنی را ممکن است با نمایش‌های مختلف پارامتری نمود مانند، نمایش‌های دکارتی، قطبی وغیره. اگر در بین این نمایش‌های پارامتری نمایشی مانند $\alpha(t)$ موجود باشد به طوری که $\forall t \in I = (a, b)$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx_۱}{dt}, \frac{dx_۲}{dt}, \frac{dx_۳}{dt} \right) \neq (۰, ۰, ۰),$$

آنگاه منحنی $\alpha(t)$ را **منتظم** [۴] می‌نامیم. اگر همه مولفه‌های α ازکلاس C^k باشند، α را از کلاس C^k می‌نامیم. اگر در نقطه‌ای از منحنی C ، $\alpha' = ۰$ باشد به آن نقطه، **نقطه منفرد**[۵]

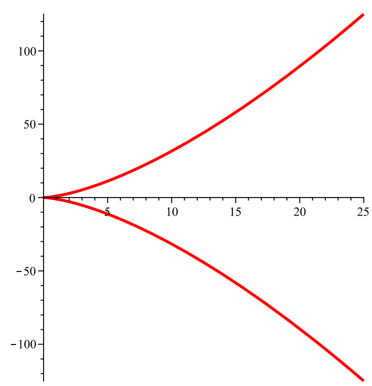
[۳] curve

[۴] regular

[۵] singular

می‌گویند. گاهی اوقات منحنی منتظم را **هموار** [۶]نیز می گوییم. باید توجه داشت که مفهوم هموار بودن در توابع حقیقی ۱-متغییره $y = f(x)$ با مفهوم هموار بودن در توابع برداری $\alpha(t)$ متفاوت است. به عنوان مثال اگر دایره را با تابع دکارتی $f(x) = \pm\sqrt{۱ - x^۲}$ معرفی کنیم، بنابر تعریف توابع حقیقی ۱-متغییره هموار تابع در نقاط ۱ و ۱− هموار نیست اما اگر دایره را با تابع برداری ۱-متغییره $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ معرفی کنیم، بنا بر تعریف همه جا هموار است.

مثال ۳.۱.۱. نگاشت $\alpha : I\!R \longrightarrow I\!R^۲$ که توسط $t \in I\!R$ و $\alpha(t) = (t^۲, t^۳)$ نشان داده می‌شود، یک منحنی پارامتری دیفرانسیل پذیر است. توجه داشته باشید که $\alpha'(۰) = (۰, ۰)$؛ یعنی نقطه $t = ۰$ نقطه منفرد است و بردار سرعت در نقطه $t = ۰$ برابر صفر است و لذا α منتظم نیست. از اینجا همچنین نتیجه می شود که دیفرانسیل پذیر بودن حتی از کلاس C^k بودن برای منتظم بودن کافی نیست. شکل (۲.۱) را ببینید.



شکل ۲.۱: یک منحنی دیفرانسیل پذیر که منتظم نیست.

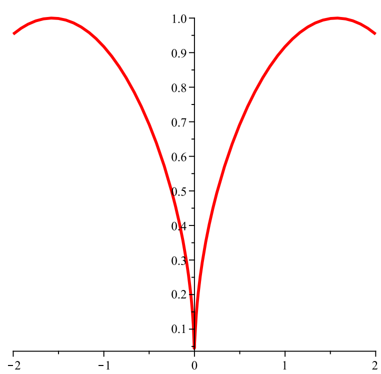
مثال ۴.۱.۱. نگاشت $\alpha : I\!R \longrightarrow I\!R^۲$ که توسط $\alpha(t) = (t, \sin\sqrt{|t|}), t \in I\!R$ تعریف می‌شود، یک منحنی پارامتری دیفرانسیل پذیر نیست، چون $|t|$ در نقطه $t = ۰$

[۶] smooth

دیفرانسیل پذیر نیست. شکل (۳.۱) را ببینید. نظر به اینکه رسم این نمودارها به صورت نقطه یابی وبا جایگذاری مقادیر مختلف t انجام می شود و اگر کمی منحنی پیچیده باشد محاسبات آن بسیار سنگین می شود از برنامه میپل استفاده می کنیم. برنامه میپل مربوط به رسم این نمودار نیز به صورت زیر است.

$$plot([t, sin(abs(t))^{۰/۵}, t = -۲..۲], thickness = ۳);$$

که در آن از سه دستور جدید استفاده کرده‌ایم یکی برای نمایش قدر مطلق، دیگری توان ۰/۵ به عنوان ریشه دوم و دستوری برای نمایش خطوط با ضخامت بیشتر .



شکل ۳.۱: یک منحنی که در نقطه $t = ۰$ دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۵.۱.۱. دو منحنی پارامتری مجزای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \alpha_۱(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \alpha_۲(t) &= (\cos at, \sin at) \end{aligned}$$

به طوری که $t \in (۰ - \varepsilon, ۲\pi + \varepsilon)$، $\varepsilon > ۰$، این دو منحنی پارامتری دارای یک تصویر هستند که دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ است. ولی توجه داشته باشید که اندازه بردار سرعت دومی

a برابر اندازه بردار سرعت اولی است.

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= (-\sin t, \cos t), & |\alpha_1'(t)| = 1 \\ \alpha_2'(t) &= (-a\sin at, a\cos at), & |\alpha_2'(t)| = a, \end{aligned}$$

گزاره ۶.۱.۱. *طول قوس هر منحنی پارامتری منتظم $\alpha(t) : I \longrightarrow I\!R^3$ از کلاس C^1 روی بازه $I = [a,b]$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.*

$$L = \int_a^b |\alpha'(t)| \; dt. \tag{۱.۱}$$

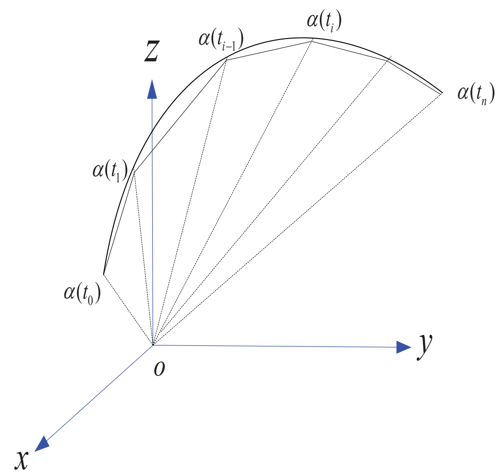
چنانچه منحنی به طور پاره‌ای منتظم باشد طول قوس آن برابر مجموع طول‌های قطعات منتظم آن منحنی است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t) : I \longrightarrow I\!R^3$ یک منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^1 باشد. برای سادگی و کوتاهی اثبات، فرمول فوق را در $I\!R^2$ اثبات می‌کنیم. اثبات در ابعاد بالاتر تعمیم ساده همین روش است. ابتدا یک افراز روی بازه $I = [a,b]$ در نظر می‌گیریم به طوری که $t_0 = a, ..., t_n = b$ و $|\Delta|$ طول بزرگترین این بازه ها باشد. نمودار (۲۳.۱) را ببینید. نقاط مربوط به این افراز روی منحنی را به یکدیگر وصل نموده می دانیم که مجموع طول این خطوط راست تقریبی از طول منحنی است که با استفاده از تعریف انتگرال معین به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sqrt{\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big)^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2}$$

از آنجا با جمع این روابط و تقسیم آن بر مربع $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ می توان طول قوس منحنی را به صورت زیر نوشت.

$$L = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=0}^{i=n} \sqrt{\Big(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t}\Big)^2 + \Big(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}\Big)^2} \; \Delta t.$$



شکل ۴.۱: طول قوس یک منحنی برابر است با حد مجموع طول اضلاع یک چند وجهی وقتی که طول بزرگترین این اضلاع به صفر میل می‌کند.

چون توابع حقیقی $x(t_i)$ و $y(t_i)$ در فاصله $[t_{i-۱}, t_i]$ مشتق پذیر هستند، وقتی که $|\Delta|$ به صفر میل می کند $t_i \mapsto t_{i-۱}$ و

$$\lim_{|\Delta|\to ۰} \frac{x(t_i) - x(t_{i-۱})}{\Delta t} = x'(t_i), \quad \lim_{|\Delta|\to ۰} \frac{y(t_i) - y(t_{i-۱})}{\Delta t} = y'(t_i)$$

از آنجا با توجه به تعریف انتگرال معین می توان دید که رابطه حکم نتیجه می‌شود. خواننده علاقه‌مند می تواند برای توضیحات بیشتر در ابعاد بالاتر به کتاب [۳۴] مراجعه کند. □

اگر در معادله منحنی α به جای‌پارامتر t از پارامتر طول قوس $s = L$ استفاده کنیم، آنگاه می‌گوئیم α بر حسب *پارامتر طبیعی طول قوس* پارامتری شده است. در این صورت برای پارامتری نمودن یک منحنی برحسب طول قوس مقدار پارامتر t را از رابطه $s = \int_۰^t |\alpha'(t)|\, dt$ محاسبه نموده در معادله منحنی جایگزین می کنیم. بردار $\alpha'(t)$ را **بردار سرعت** و $|\alpha'(t)|$ را **سرعت یا تندی** منحنی می نامیم. بردار $\alpha''(t)$ را **بردار شتاب** و $|\alpha''(t)|$ را **شتاب** منحنی می‌گوییم.

مثال ۷.۱.۱. معادله دایره‌ای به شعاع r، $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ را به صورت نمایش طبیعی بر حسب s می نویسیم.

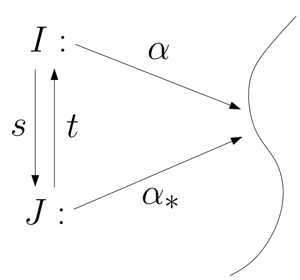
$$s = \int_0^t |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt{r^2}\, dt = r\int_0^t dt = rt, \qquad t = \frac{s}{r}.$$

بنابراین نمایش طبیعی دایره به صورت زیر نوشته می شود.

$$\alpha(s) = (rcos\frac{s}{r}, rsin\frac{s}{r}).$$

فرض کنید $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری منتظم باشد، می خواهیم ببینیم آیا یک منحنی پارامتری دیگری مانند$\alpha_*(s) : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ بر حسب طول قوس s می‌توان پیدا نمود، به طوری که نقش یا تصویر آن با α یکی باشد. در اینجا I و J فاصله های بسته ای روی $\mathbb{R}$ هستند. شکل ۵.۱ را ببینید.

گزاره ۸.۱.۱. *هر منحنی پارامتری منتظم $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ از کلاس C^1 را می‌توان بر حسب طول قوس s پارامتری نمود.*



شکل ۵.۱: هر منحنی پارامتری منتظم را می توان بر حسب طول قوس پارامتری کرد.

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^1برحسب پارامتر دلخواه t باشد، می خواهیم یک تابع پارامتری مانند $\alpha_*(s)$ طوری معرفی کنیم که در آن s پارامتر

طول قوس بوده و نمودار هر دو تابع بر هم منطبق باشد. با مشتق گیری از رابطه

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\ dt$$

داریم، $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| \neq 0$ از آنجا بنابر قضیه تابع معکوس در ریاضی عمومی تابع $s(t)$ دارای یک تابع معکوس دیفرانسیل پذیر است که آن را با $t(s)$ نمایش می‌دهیم. نمودار (۵.۱) را ببینید. حال تابع α_* را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\alpha_* := \alpha \circ t : J \longrightarrow I\!R^3, \quad \alpha_*(s) = \alpha \circ t(s) = \alpha(t(s)).$$

که در آن J فاصله ای بسته روی $I\!R$ بوده و $\alpha_*(J) = \alpha(I)$. بنابراین، این دو منحنی بر یکدیگر منطبق اند. از طرف دیگر بنابر قاعده زنجیره ای

$$\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d(\alpha \circ t)}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{|\alpha'(t)|},$$

این نشان می دهد که $\frac{d\alpha_*}{ds}$ برداری یکه است. لذا $|\alpha_*'(s)| = 1$, و بنا بر تعریف $\alpha_*(s)$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است. این موضوع اثبات گزاره را کامل می کند. $\square$

مثال ۹.۱.۱. نشان دهید معادله زیر یک نمایش پارامتری طبیعی است.

$$\alpha(s) = \frac{1}{2}((s + \sqrt{s^2+1}), (s+\sqrt{s^2+1})^{-1}, \sqrt{2}(\log(s+\sqrt{s^2+1})).$$

کافی است نشان دهیم $|\frac{d\alpha}{ds}| = 1$. فرض کنید $u = s + \sqrt{s^2+1}$ داریم

$$\alpha = \frac{1}{2}ue_1 + \frac{1}{2}u^{-1}e_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log u)e_3$$

که در آن e_i به ازای $i = 1, 2, 3$ پایه های استاندارد $I\!R^3$ هستند. با مشتق‌گیری و استفاده از قاعده زنجیره ای داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds} &= \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds} = (\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}u^{-2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}u^{-1}e_3)\left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right),\\
\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| &= \left|\frac{d\alpha}{du}\right|\left|\frac{du}{ds}\right| = \frac{1}{2}(1 + u^{-4} + 2u^{-2})^{\frac{1}{2}}\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}} = 1.
\end{aligned}$$

۲.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۲.۱. نشان دهید که معادله مارپیچ $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ دارای نمایش پارامتری طبیعی زیر است.

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, \frac{bs}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right).$$

تمرین ۲.۲.۱. نشان دهید که معادله $\alpha(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ و $-\infty < t < +\infty$ دارای نمایش پارامتری طبیعی زیر است.

$$\alpha(s) = (\frac{s}{\sqrt{۳}}+۱)(\cos\log(\frac{s}{\sqrt{۳}}+۱)e_۱ + \sin\log(\frac{s}{\sqrt{۳}}+۱)e_۲ + e_۳).$$

در اینجا e_i، به ازای $i = ۱,۲,۳$ پایه های استاندارد $I\!R^۳$ هستند.

۳.۱ مطالبی در مورد طبیعت ذاتی در منحنی‌ها

تعریف منحنی و مثال‌های ارائه شده در بخش قبل ممکن است به توضیحات زیر نیاز داشته باشد:

- یک منحنی در صفحه $I\!R^۲$ ممکن است با حذف پارامتر t به صورت یک معادله دکارتی $F(x,y) = ۰$ نشان داده شود؛ مثلاً در مورد $\alpha(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t, ۰)$ داریم $x^۲ + y^۲ = \rho^۲$. در مورد سهمی $\alpha(t) = (t, t^۲, ۰), ۰ < t < ۱$ نیز داریم $y = x^۲$.

- اما یک منحنی در فضای $I\!R^۳$ را نمی توان تنها توسط یک معادله دکارتی به صورت $F(x,y,z) = ۰$ نشان داد. زیرا همانطور که در ریاضی عمومی دیدیم یک چنین معادله تنها می‌تواند یک سطح [۷] را نشان دهد و برای نشان دادن یک منحنی در $I\!R^۳$

[۷] surface

احتیاج به دو معادله از این نوع داریم. به عنوان مثال منحنی $\alpha(t)=(t,t^{۲},t^{۳})$ به ازای $-\infty<t<+\infty$ فصل مشترک دو سطح به معادلات $y=x^{۲}$ و $xz=y^{۲}$ است.

- یک منحنی را ممکن است به چند صورت مختلف پارامتری کرد.

اگر در $\alpha(t)=(t,t^{۳},۰)$ به ازای $۰<t<۱$ عبارت $t=-\frac{۱}{۲}t_*$ را جایگزین کنیم یک نمایش جدید از منحنی را پیدا می‌کنیم که به ازای $-۲<t_*<۰$ توسط $\alpha(t_*)=(-\frac{۱}{۲}t_*,-\frac{۱}{۸}t_*^{۳},۰)$ بیان می‌گردد.

مطلب اخیر سؤالات زیر را مطرح می کند:

- آیا اگر یک منحنی به چند صورت پارامتری بیان شود به عبارت دیگر اگر مثلاً $(t,t^{۳},۰)$ نمایانگر منحنی $\alpha_{۱}:I_{۱}\longrightarrow I\!R^{۳}$ و $(-\frac{۱}{۲}t_*,-\frac{۱}{۸}t_*^{۳},۰)$ نمایانگر منحنی $\alpha_{۲}:I_{۲}\longrightarrow I\!R^{۳}$ باشد، آیا آنها متفاوتند؟ اگر متفاوتند آیا خواص مشترکی دارند؟

جواب این سؤالها ما را در این بخش به تعریف تغییر پارامتر مجاز و خواص ذاتی یک منحنی رهنمون می سازد.

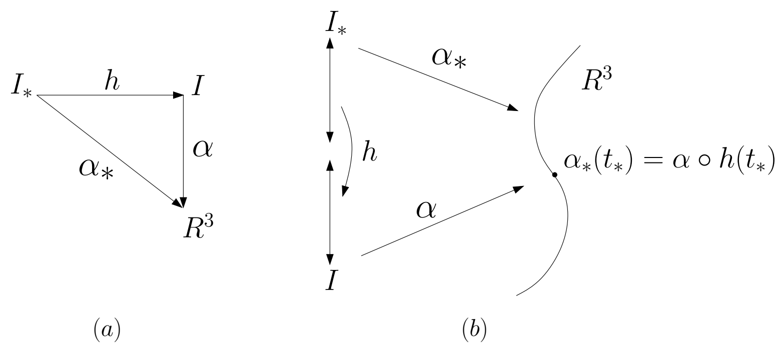
فرض کنیم تابع α مسیر حرکت یک متحرک باشد، می‌توانیم توابع یا منحنی‌های زیادی ارائه دهیم که همین مسیر را طی کنند ولی با α متفاوت باشند. این تفاوت در معادلات به نوعی در زمان رسیدن به آن نقاط است. به عنوان مثال مسیر دو منحنی با معادلات زیر

$$\begin{aligned}\alpha_{۱}(t)&=(\cos t,\sin t)\\ \alpha_{۲}(t)&=(\cos at,\sin at)\end{aligned}$$

دایره ای به شعاع یک است که هر دو دارای مسیرهای یکسان و سرعت های متفاوت هستند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم I و I_* فاصله‌های بازی در $I\!R$ بوده و $\alpha : I \longrightarrow I\!R^۳$ یک منحنی و $h : I_* \longrightarrow I$ یک تابع دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت ترکیب $\alpha \circ h = \alpha_* : I_* \longrightarrow I\!R^۳$ یک منحنی است که **نمایش پارامتری مجدد**[۸] منحنی α توسط h نامیده می‌شود.

به شکل های (۶.۱) توجه فرمائید. شکل های (a) و (b) تابع مرکب α_* را که از α و h تشکیل شده است نشان می دهند.



شکل ۶.۱: یک منحنی که با توابع پارامتری متفاوت نشان داده شده است.

باید توجه داشت که نقطه $\alpha_*(t_*)$ که توسط α_* در زمان $t_* \in I_*$ به دست آمده است همان نقطه‌ای است که توسط α در زمان $h(t_*) = t \in I$ به دست می‌آید. چون در حالت کلی $t_* \neq t$، زمان‌های رسیدن به یک نقطه مشخص متفاوت است، اگر چه مسیر(منحنی) α و α_* یکی می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱. یک تابع دیفرانسیل پذیر $h : I_* \longrightarrow I$ را یک **تغییر متغیر مجاز یا تبدیل پارامتری مجاز** [۹] از کلاس C^r می‌گوییم اگر h در فاصله I_* از کلاس C^r بوده و در

[۸]reparametrisation

[۹]allowable parametric transformation

تمام نقاط I_* داشته باشیم

$$\frac{dh}{dt_*} \neq ۰.$$

فرض کنیم $\alpha_* = \alpha \circ h$ یک تغییر پارامتر مجاز باشد. بنابر قاعده زنجیره ای داریم $\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}$ از انجا پس از یک تغییر متغییر مجاز، نقاط منفرد جدیدی در روی منحنی ظاهر نمی شود. این موضوع ما را به تعریف یک کلاس هم ارزی از منحنی ها به صورت زیر رهنمون می سازد.

تعریف ۱.۳.۳. دو تابع منتظم α و α_* از کلاس C^r را **هم ارز** گوییم، اگر یک تبدیل پارامتر مجاز h از کلاس C^r وجود داشته باشد به طوری که

$$\alpha_* = \alpha \circ h$$

با توجه به تعریف فوق می‌توان یک منحنی را به عنوان یک کلاس هم ارزی از توابع برداری $\alpha : I \longrightarrow I\!R^۳$ در نظر گرفت که توسط تبدیلات پارامتری مجاز به هم مربوط می‌شوند. وقتی ما در مورد خصوصیات یک منحنی صحبت می‌کنیم، منظور ما خواص این کلاس هم ارزی از توابع منتظم است. این خواص مستقل از نوع پارامتری کردن بوده و به آن خصوصیات **ذاتی**[۱۰] یک منحنی می گویند. برای مجزا نمودن مفهوم ذاتی منحنی (یعنی کلاس هم ارزی توابع منتظم) از مفهوم منحنی به عنوان یک تابع برداری α که در تعریف ۱.۱.۲ آورده شد، گاهی اوقات $\alpha : I \longrightarrow I\!R^۳$ را **مسیر** [۱۱] می‌نامیم.
ممکن است یک تبدیل پارامتر مجاز جهت حرکت ذر روی منحنی را حفظ کرده یا آن را تعویض نماید به عنوان مثال تغییر پارامترهای $h_۱(t) = t$ و $h_۲(t) = -t$ تبدیل پارامترهای مجاز هستند که اولی جهت حرکت را حفظ می کند ولی دومی جهت حرکت را

[۱۰] intrinsic

[۱۱] path

معکوس می نماید. تبدیل پارامتر مجاز h را **جهت نگهدار**[۱۲] می گوییم اگر $\frac{dh}{dt} > 0$ باشد. و آن را **جهت برگردان**[۱۳] می گوییم اگر $\frac{dh}{dt} < 0$ باشد.

تعریف ۱.۳.۴. مسیر $\alpha : I \longrightarrow I\!\!R^3$ را **متناوب** [۱۴] گوییم، هرگاه عدد ثابتی مانند $p > 0$ موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$\forall t \in I \quad \alpha(p+t) = \alpha(t).$$

کوچکترین عدد p (درصورت وجود) را که در رابطه بالا صدق کند، **دوره تناوب** [۱۵] α می‌نامیم. به عنوان مثال در دایره $\alpha(t) = (r\cos bt, r\sin bt)$ به شعاع r دوره تناوب را به صورت زیر محاسبه می کنیم. از رابطه $\alpha(p+t) = \alpha(t)$ نتیجه می شود $\cos b(p+t) = \cos b(t)$ از آنجا $p = \frac{2\pi}{b}$. یک منحنی را که بسته نباشد، **کمان یا قوس** [۱۶] نیز می‌نامیم. هر پارامتری کردن چنین منحنی‌ای یک به یک است.
به عنوان مثال منحنی $\alpha : t \mapsto (r\cosh t, r\sinh t, 0)$ در صفحه x_1x_2 برای $x_1 > 0$ همان نیم-هذلولی [۱۷] است.

ممکن است یک تبدیل پارامتر مجاز جهت حرکت در روی منحنی را حفظ کند یا آن را تعویض نماید. به عنوان مثال تغییر پارامترهای $h_1(t) = t$ و $h_2(t) = -t$ تبدیل پارامترهای مجاز هستند که اولی جهت حرکت را حفظ می کند ولی دومی جهت حرکت را معکوس می کند. تبدیل پارامتری مجاز h را **جهت نگهدار**[۱۸] گوییم اگر $\frac{dh}{dt} > 0$ باشد و

---

[۱۲] orientation preserving

[۱۳] orientation reversing

[۱۴] periodic

[۱۵] period

[۱۶] arc

[۱۷] hyperbola

[۱۸] orientation preserving

آن را **جهت برگردان**[۱۹] گوییم اگر $\frac{dh}{dt} < ۰$ باشد.

۴.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۴.۱. نشان دهید $t = \frac{s^۲}{s^۲+۱}$ یک تبدیل پارامتر مجاز روی حوزه $۰ < s < +\infty$ بوده و بازه $(۰, +\infty)$ را به روی بازه $(۰, ۱)$ می‌برد. آیا این تبدیل پارامتری جهت نگهدار است.

تمرین ۲.۴.۱. نشان دهید $\alpha(t) = ti + (t^۲ + ۱)j + (t - ۱)^۳k$ یک نمایش پارامتری منتظم به ازای هر $t \in I\!R$ است و تصویر آن را برای صفحات $x_۱x_۲$ و $x_۱x_۳$ پیدا کنید.

تمرین ۳.۴.۱. الف. نشان دهید نمایش $x_۱ = (۱ + \cos\theta)$ و $x_۲ = \sin\theta$ و $x_۳ = ۲\sin\frac{\theta}{۲}$ به ازای $-۲\pi \leq \theta \leq ۲\pi$ یک نمایش پارامتری منتظم است و منحنی مربوط به آن روی کره‌ای به شعاع ۲ در مرکز و استوانهٔ $(x_۱ - ۱)^۲ + x_۲^۲ = ۱$ منطبق می‌شود. شکل ۱۵.۱ در صفحه ۳۰ را ببینید.

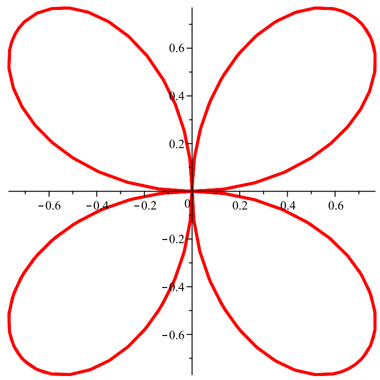
ب. آیا این تبدیل پارامتری جهت نگهدار است.

تمرین ۴.۴.۱. یک منحنی پارامتری $\alpha(t)$ پیدا کنید، به طوری که نقش آن دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع یک باشد و داشته باشیم $\alpha(۰) = (۰, ۱)$.

تمرین ۵.۴.۱. نمایش قطبی یک منحنی به صورت $r = \sin ۲\theta$ به ازای $-۲\pi \leq \theta \leq ۲\pi$ داده شده است. الف. یک نمایش پارامتری از این منحنی نوشته تعیین کنید که آیا منتظم و یک به یک است یا خیر.

ب. برنامه میپل برای رسم این نمودار را بنویسید. شکل ۷.۱ را ببینید.

[۱۹] orientation reversing



شکل ۷.۱: یک گل چهار پر.

تمرین ۶.۴.۱. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی پارامتری باشد که از مرکز عبور نمی‌کند. اگر در حوالی مبدا به ازای $t_۱ < t < t_۲$ فاصله $\alpha(t)$ از مبدا ثابت باشد به طوری که $\alpha'(t) \neq ۰$، نشان دهید که در حوالی مبدا بردار موضع $\alpha(t)$ بر $\alpha'(t)$ عمود است.

تمرین ۷.۴.۱. منحنی پارامتری $\alpha(t)$ دارای این ویژگی است که ضرب داخلی بردار مماس و بردار شتاب صفر است یعنی $\alpha'(t) \centerdot \alpha''(t) = ۰$، در مورد $\alpha(t)$ چه می‌توان گفت؟

تمرین ۸.۴.۱. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow I\!R^۳$ یک منحنی پارامتری بوده و $v \in I\!R^۳$ یک بردار ثابت [۲۰] باشد. اگر $\alpha'(t)$ به ازای هر $t \in I$ بر v عمود باشد و $\alpha(۰)$ نیز بر v عمود باشد، ثابت کنید به ازای هر $t \in I$، $\alpha(t)$ بر v عمود است.

راهنمایی: با استفاده از خواص ضرب داخلی دو بردار چون v بردار ثابت است داریم

$$۰ = \alpha'(t) \centerdot v = \frac{d\alpha(t)}{dt} \centerdot v = \frac{d}{dt}(\alpha(t) \centerdot v)$$

از اینجا نتیجه می شود $\alpha(t) \centerdot v = c$ به طوری که c عددی ثابت است، اما چون داریم $\alpha(۰) \centerdot v = ۰$ بنابراین $c = ۰$.

[۲۰] fixed vector

تمرین ۹.۴.۱. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow I\!R^{3}$ یک منحنی پارامتری باشد به طوری که $\forall t \in I\ \alpha'(t) \neq 0$، نشان دهید $|\alpha(t)|$ غیر صفر و ثابت است اگر و تنها اگر برای هر $t \in I$، $\alpha(t)$ بر $\alpha'(t)$ عمود باشد.

تمرین ۱۰.۴.۱. منحنی پیچ $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$ را در نظر گرفته نشان دهید:

الف. به ازای $a > 0$، $b < 0$ و $-\infty < t < +\infty$ با افزایش t منحنی به مبدا نزدیک تر و با کاهش t از مبدا دور می شود.

ب. وقتی که $t \to +\infty$ آنگاه $\alpha'(t)$ به مبدا مختصات میل می کند. به عبارت دیگر

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0, 0).$$

ج. منحنی پیچ دارای طول متناهی است. به عبارت دیگر حد زیر موجود است.

$$\lim_{t\to+\infty} L = \lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|.$$

۵.۱ انحنا و تاب

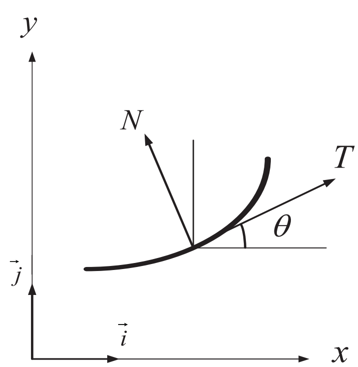
انحنای [21] یک منحنی کمیتی است که برای تشخیص انحراف منحنی از روی خط راست و تاب [22] یک منحنی کمیتی است که برای تشخیص انحراف منحنی از روی صفحه به کار می رود. قضیه اساسی نظریه منحنی ها در $I\!R^{3}$ بر تعریف انحنا و تاب استوار شده است. در این بخش فرمول های محاسبه تاب و انحنا را به دست می آوریم. اگر بردار یکه مماس بر منحنی $\alpha(t)$ در هر نقطه را با $T(t)$ نمایش دهیم، تغییرات این بردار مشخص کننده انحراف منحنی از خط راست است.

[21] curvature, (courbure)

[22] torsion

تعریف ۱.۵.۱. بردار $\frac{dT}{ds}$ را **بردار انحنا** و طول آن $\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right|$ را در هر نقطه، **انحنای** منحنی در آن نقطه می‌نامیم.

در ریاضی عمومی دیدیم که اگر منحنی مسطح باشد می‌توان انحنا را برحسب میزان تغییرات زاویه ای که بردار مماس با افق می سازد نیز به صورت زیر تعریف نمود. فرض



شکل ۸.۱: به دست آوردن انحنای یک منحنی از روی تغییرات بردار یکه مماس آن.

کنیم بردار یکه مماس T بر منحنی مسطح C در نقطه P با افق زاویه θ بسازد، داریم: $T = cos\theta i + sin\theta j$ تغییرات T نسبت به s برابر است با

$$\frac{dT}{ds} = -sin\theta\frac{d\theta}{ds}i + cos\theta\frac{d\theta}{ds}j,$$

از آنجا انحنای منحنی مسطح را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{(sin^۲\theta + cos^۲\theta)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^۲} = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

اگر $\frac{d\theta}{ds} > ۰$ آنگاه با حذف قدرمطلق و انتگرالگیری زاویه انحراف بردار یکه مماس به دست می‌آید. $\theta(s) = \theta(۰) + \int_۰^t \kappa(s)\, ds$

۱.۵.۱ کنج متحرک و فرمول‌های فرنه

کنج متحرک یا دستگاه مختصات متحرک[۲۳] در هندسه ابزار جالبی است که برای اثبات قضایای پیچیده به کار می رود. دستگاه مختصات متحرک ابتدا در روی منحنی ها توسط فرنه [۲۴] بیان و سپس توسط داربو [۲۵] برای سطوح تعریف گردید. در حقیقت به جای سه تایی i،jوk که آن را در ریاضی عمومی کنج ثابت می‌نامیم، از سه تایی دیگری استفاده می کنیم که در طول منحنی C حرکت می کند.

فرض کنیم C یک منحنی باشد که بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد. چون بردار T یکه است حاصلضرب داخلی آن برابر است با $T \cdot T = 1$ از آنجا با مشتق گیری نسبت به s از این رابطه داریم $T' \cdot T + T \cdot T' = 0$ لذا $T' \cdot T = 0$ از آنجا T' بر T عمود است. بنابر این **بردار یکه عمود** [۲۶] N را در راستای T' توسط

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{|\frac{dT}{ds}|}. \tag{۲.۱}$$

تعریف می‌کنیم . از رابطه ۲.۱ و تعریف انحنا رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\frac{dT}{ds} = |\frac{dT}{ds}|N = \kappa N. \tag{۳.۱}$$

به این عبارت، **فرمول اول فرنه** [۲۷] می‌گویند. بردار یکه B را به صورت حاصلضرب خارجی دو بردار $B = T \wedge N$ تعریف نموده آن را **بردار قائم دوم**[۲۸] می‌نامیم. با مشتق گیری از این رابطه برحسب s و با توجه به فرمول اول فرنه داریم

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \wedge N + T \wedge \frac{dN}{ds} = \kappa N \wedge N + T \wedge \frac{dN}{ds} = T \wedge \frac{dN}{ds}. \tag{۴.۱}$$

[۲۳] moving frame

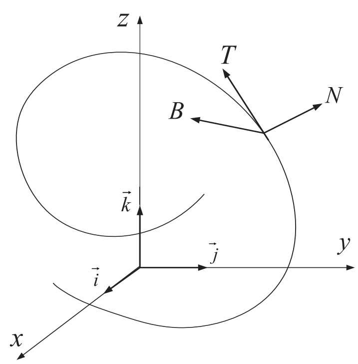
[۲۴] Frenet

[۲۵] Darbeaux

[۲۶] Normal

[۲۷] First Frenet Formula

[۲۸] Binormal



شکل ۹.۱: دستگاه مختصات متحرک روی یک منحنی.

می دانیم $B' = \frac{dB}{ds}$ بر B عمود است چون یکه است . با توجه به رابطه بالا، B' بر T نیز عمود است، لذا در جهت N قرار دارد و می‌توان آن را بر حسب مضربی از بردار N نوشت.

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N. \tag{۵.۱}$$

که در آن $\left|\frac{dB}{ds}\right| = \tau$ تابعی است حقیقی و علامت منفی یک علامت قراردادی است. به این عبارت، **فرمول سوم فرنه** می‌گویند.

تعریف ۲.۵.۱. سه تایی مرتب (T, N, B) را **کنج متحرک** در طول منحنی[۲۹] می‌نامیم . عبارت $\tau = \left|\frac{dB}{ds}\right|$ را **تاب** منحنی[۳۰] می‌نامیم .

برای به دست آوردن مشتق بردار عمود N از رابطه $N = B \wedge T$ مشتق می گیریم و از فرمول های اول و سوم فرنه استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= \frac{dB}{ds} \wedge T + B \wedge \frac{dT}{ds} = -\tau N \wedge T + \kappa B \wedge N,\\ \frac{dN}{ds} &= \tau B - \kappa T.\end{aligned} \tag{۶.۱}$$

[۲۹] moving frame

[۳۰] torsion

به این عبارت، **فرمول دوم فرنه** می‌گویند. لذا فرمول های فرنه به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{dT}}{\mathbf{ds}} &= \kappa\mathbf{N},\\ \frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{ds}} &= -\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B},\\ \frac{\mathbf{dB}}{\mathbf{ds}} &= -\tau\mathbf{N}.\end{aligned} \qquad (۷.۱)$$

برای آنکه بتوان فرمول های فرنه را به صورتی نوشت که به راحتی در خاطر مانده و بعلاوه قابل تعمیم به فضا های با ابعاد بالاتر باشد از شکل ماتریسی آن استفاده می‌کنیم.

$$(\mathbf{T}',\mathbf{N}',\mathbf{B}') = \begin{pmatrix} ۰ & \kappa & ۰ \\ -\kappa & ۰ & \tau \\ ۰ & -\tau & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

توجه داشته باشید که در فرمول‌های فرنه مشتقات سه بردار یکه برحسب پارامتر طول قوس است.

محاسبه انحنا و تاب

لم ۳.۵.۱. *اگر $\alpha(t)$ یک منحنی منتظم باشد که بر حسب پارامتر دلخواه t نمایش داده شده است، آنگاه انحنا و تاب آن از روابط زیر محاسبه می شود.*

$$\kappa = \frac{|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^{۳}} \quad , \quad \tau = \frac{(\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)).\alpha'''(t)}{|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)|^{۲}}. \qquad (۸.۱)$$

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی منتظم باشد که بر حسب پارامتر دلخواه t پارامتری شده است. بنا بر قاعده زنجیره ای داریم

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = \alpha'(s)s',\\ \alpha''(t) &= \frac{d}{dt}(\alpha's') = \frac{d\alpha'}{ds}\frac{ds}{dt}s' + \alpha'\frac{ds'}{dt} = \alpha''(s)s's' + \alpha'(s)s'',\end{aligned}$$

با ضرب خارجی این دو عبارت داریم

$$\begin{aligned}\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) &= \alpha'(s)s'\wedge(\alpha''(s)s's'+\alpha'(s)s'') \\ &= (s')^{3}\alpha'(s)\wedge\alpha''(s) \qquad (9.1)\end{aligned}$$

اندازه این ضرب داخلی با توجه به رابطه $\frac{ds}{dt}=s'=|\alpha'(t)|$ برابر است با

$$|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)| = |s'|^{3}|\alpha'(s)\wedge\alpha''(s)| = |\alpha'(t)|^{3}|\alpha'(s)|.|\alpha''(s)|sin\theta.$$

در اینجا θ زاویهٔ بین α' و α'' است که بر یکدیگر عمودند. بنابراین $sin\theta=1$ ، همچنین s پارامتر طول قوس است، لذا $|\alpha'(s)|=1$ ، $|\alpha''(s)|=\kappa$ که از اینجا رابطه اول حکم نتیجه می‌شود.

روش دوم. روش دیگری نیز برای اثبات رابطه اول حکم وجود دارد که از جایگذاری فرمول‌های فرنه در رابطه ۹.۱ نتیجه می‌شود. در این روش کافی است عبارات $\alpha'(s)=T$ و $\alpha''(s)=\kappa N$ را در رابطه ۹.۱ جایگزین نمود. رابطه دوم نیز به طور مشابه بررسی می‌گردد. □

مثال ۴.۵.۱. چنانچه α بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد، فرمول تاب ۸.۱ به صورت زیر ساده می شود. ثابت کنید تاب τ در منحنی $\alpha(s)$ را می‌توان توسط رابطه زیر پیدا نمود.

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s)\wedge\alpha''(s).\alpha'''(s)}{\kappa(s)^{2}}$$

حل: در اینجا از منحنی نسبت به پارامتر طول قوس مشتقات اول و دوم و سوم می‌گیریم و از فرمول‌های فرنه جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\alpha'(s)=T\\ &\alpha''(s)=T'=\kappa N\\ &\alpha'''(s)=\kappa'N+\kappa N'=\kappa'N+\kappa(-\kappa T+\tau B)=-\kappa^{2}T+\kappa'N+\kappa\tau B\end{aligned}$$

از ضرب مختلط این سه بردار داریم

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s) = -T \wedge \kappa N \cdot \kappa\tau B = -\tau\kappa^{۲}.$$

جملات دیگر با استفاده از خواص ضرب خارجی بردارها صفر می شود.

تعریف ۱.۵.۵. **شعاع انحنا** [۳۱] و **شعاع تاب** [۳۲] یک منحنی در هر نقطه به ترتیب برابر عکس انحنا و عکس تاب منحنی در آن نقطه تعریف می شود.

تعریف ۱.۵.۶. **دایرهٔ بوسان** [۳۳] دایره‌ای است که در هر نقطه بر منحنی مماس بوده و شعاع آن برابر عکس انحنای منحنی یا شعاع انحنای منحنی در آن نقطه باشد.

واضح است که شعاع انحنا هر دایره برابر شعاع دایره است. زیرا اگر $\alpha(s)$ یک دایره به شعاع r باشد، می توان نشان داد که $\kappa = \frac{۱}{r}$.

تعریف ۱.۵.۷. **صفحهٔ بوسان**[۳۴]: صفحه‌ای است که از دو بردار T و N می گذرد. **صفحهٔ قائم اول** [۳۵] صفحه‌ای است که از دو بردارN وB می‌گذرد. **صفحهٔ اصلاحی یا قائم دوم** صفحه‌ای است که از دو بردار T و B می‌گذرد. شکل ۱.۰۱ را ببینید.

برای به دست آوردن معادله صفحه بوسان در هر نقطه از منحنی $\alpha(t)$ کافی است بردار قائم دوم B بر منحنی در آن نقطه را به دست آورده با اطلاعات ریاضی عمومی معادله صفحه ای را بنویسیم که از نقطه $\alpha(t.)$ گذشته بر بردار $B = (a, b, c)$ عمود باشد. لذا معادله صفحه بوسان در نقطه $\alpha(t.) = (x., y., z.)$ عبارت است از

$$a(x - x.) + b(y - y.) + c(z - z.) = ۰.$$

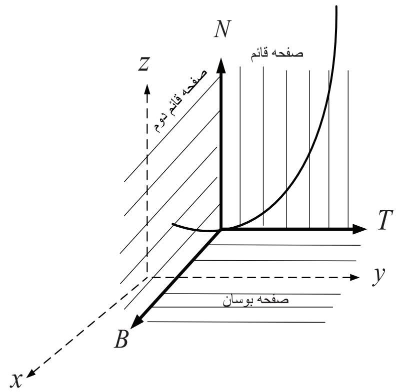
[۳۱] curvature radius

[۳۲] torsion radius

[۳۳] osculating circle

[۳۴] osculating plane

[۳۵] normal plane



شکل ۱.۱۰: صفحه بوسان، صفحه قائم اول و صفحه قائم دوم.

لم ۸.۵.۱. *یک منحنی پارامتری منتظم یک خط راست است اگر و تنها اگر* $\kappa = 0$.

اثبات. فرض کنیم $\kappa = 0$ از آنجا داریم $T' = \kappa N = 0$ در نتیجه $T = a \neq 0$، که a عدد ثابتی است، آنگاه داریم $T = \frac{d\alpha(s)}{ds} = a$ اگر انتگرال بگیریم، $\alpha(s) = as + c_1$ معادلهٔ خط راستی است که از نقطهٔ c_1 گذشته و در جهت بردار a است. برعکس اگر خط راست $\alpha(s) = as + c_1$ را داشته باشیم، آنگاه $\kappa = |\alpha''(s)| = 0$. □

لم ۹.۵.۱. *یک منحنی منتظم با انحنای* $\kappa \neq 0$ *یک منحنی مسطح است، اگر و تنها اگر تاب* τ *برابر صفر باشد.*

اثبات. اگر $\alpha(s)$ یک منحنی مسطح باشد، همواره بردار بی‌نرمال ثابت است و بنابراین $B' = 0$ و از آنجا

$$0 = B'(s) = \tau(s)N(s).$$

چون $N(s)$ مخالف صفر است، از این رابطه نتیجه می شود $\tau = 0$. بر عکس فرض کنید $\tau = 0$ باشد. در این صورت $B'(s) = 0$ و از آنجا B ثابت است: $B = cte = b_o$ و داریم:

$$(\alpha(s) \cdot b_o)' = \alpha'(s) \cdot b_o.$$

چون $\alpha'(s) = T$ و b_o بر هم عمودند، $(\alpha(s) \cdot b_o)' = 0$ بنابراین $\alpha(s) \cdot b_o = cte$ از آنجا $\alpha(s)$ منحنی مسطحی است که در صفحهٔ $\alpha(s) \cdot b_o = cte$ قرار دارد. در این حالت خاص $\alpha(s)$ در صفحهٔ بوسان قرار دارد. □

۶.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۶.۱. نشان دهید هر منحنی $\alpha(s)$ را می توان برحسب کنج متحرک فرنه به صورت زیر نوشت.

$$\alpha(s) = (\alpha(s) \cdot T)T + (\alpha(s) \cdot N)N + (\alpha(s) \cdot B)B.$$

راهنمایی. فرض کنید $\alpha(s) = aT + bN + cB$ سپس با استفاده از ضرب داخلی مقادیر a, b, c را محاسبه کنید.

تمرین ۲.۶.۱. الف. نشان دهید فرمول محاسبه انحنای منحنی‌های مسطح پارامتری به معادله $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ برابر است با

$$\kappa(t) = \frac{\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right|}{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

ب. فرمولی برای محاسبه انحنای منحنی‌های مسطح در دستگاه دکارتی به معادله $y = f(x)$ به دست آورید.

ج. انحنای سهمی $y = x^2 + 1$ را محاسبه کنید.

تمرین ۳.۶.۱. نشان دهید که دایرهٔ بوسان هر دایره بر خود دایره منطبق است.

تمرین ۴.۶.۱. منحنی پارامتری مارپیچ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

الف. تاب و انحنای آن را به دست آورید.

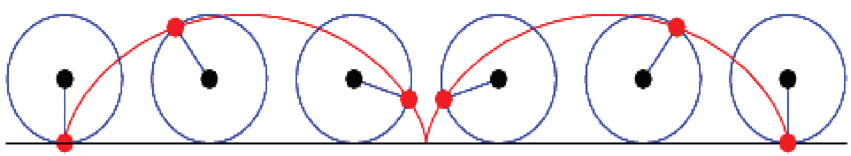
ب. معادله صفحه بوسان α را به دست آورید.

ج. نشان دهید خطی که شامل $N(s)$ می‌باشد از $\alpha(s)$ می‌گذرد (خط قائم) با محور z ها زاویه $\frac{\pi}{2}$ می‌سازد.

د. نشان دهید که خط مماس بر α با محور z ها زاویه ثابتی دارد.

۷.۱ منحنی‌های جالب

مثال ۱.۷.۱. گچی را بر روی یک چرخ متحرک نصب نموده آن را بر روی مسیر مستقیمی می چرخانیم. شکل ۱۱.۱ را ببینید. این منحنی را **چرخزاد یا سیکلوئید**[۳۶] می‌نامند. برای



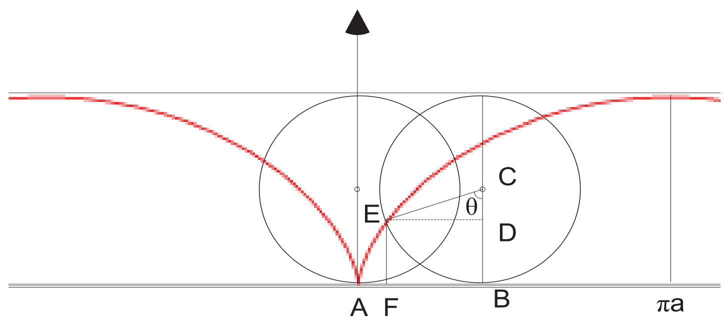
شکل ۱۱.۱: حرکت چرخ روی مسیر مستقیم.

به دست آوردن معادله پارامتری چرخ زاد به شرح زیر عمل می کنیم. شکل ۱۲.۱ را ببینید. فرض کنیم شعاع چرخ برابر a و زاویه دوران برابر θ باشد. باید مقادیر $x = \overline{AF}$ و $y = \overline{EF}$ منحنی را به دست آوریم. با توجه به شکل طول مسیر $\overline{AB}$ برابر طول کمان BE روی دایره است. از آنجا $AB = a\theta$ بدیهی است در هنگام شروع $\theta = ۰$ بعد از آن که چرخ به اندازه θ دوران می کند، داریم

$$x = \overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB} = a\theta - a\sin\theta,$$

$$y = \overline{EF} = \overline{BC} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

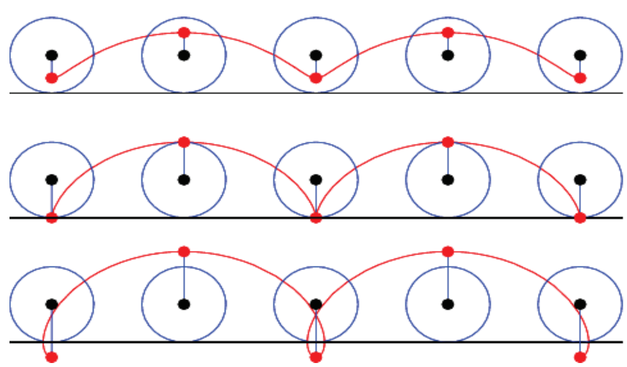
[۳۶] cycloid



شکل ۱.۱۲: چرخزاد یا سیکلوئید.

بنابراین معادله پارامتری چرخزاد عبارت است از $\alpha(t) = (a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$.

اگر مسیر حرکت چرخ بر روی یک خط راست باشد ولی گچ بر روی پره چرخ نصب شده باشد به آن منحنی **چرخک**[۳۷] می گویند. از این تعریف معلوم می شود که چرخزاد یک حالت خاص از چرخک است. شکل ۱.۱۳ را ببینید. اگر مسیر حرکت چرخ بر روی یک

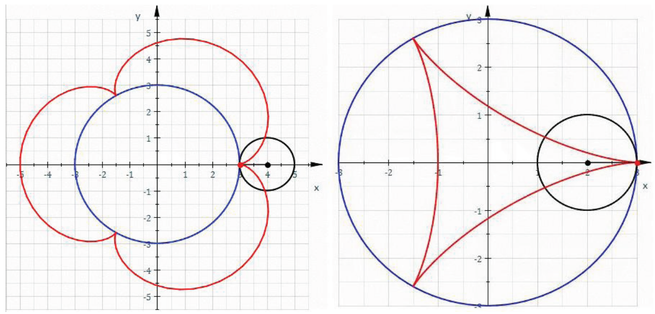


شکل ۱.۱۳: چرخزاد یا سیکلوئید حالت خاصی از منحنی چرخک است.

دایره باشد به آن منحنی **بروچرخزاد**[۳۸] و اگر مسیر حرکت چرخ در توی یک دایره باشد به

[۳۷] Trochoid

[۳۸] hyper-cycloid



شکل ۱.۱۴: بروچرخزاد و بتوچرخزاد تعمیمی از منحنی چرخزاد روی دایره است.

آن منحنی **بتوچرخزاد** [۳۹] می گویند. اگر کمی در اینترنت با اسامی لاتین این منحنی‌ها را جستجو کنید می‌توانید تصاویر متحرک[۴۰] و زیبایی از آن‌ها بیابید. شکل ۱.۱۴ را ببینید.

مثال ۲.۷.۱. از تقاطع کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a با استوانه‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲=ax$ یک منحنی حاصل می‌گردد که به آن منحنی وی‌ویانی [۴۱] می‌گویند. میخواهیم یک معادلهٔ پارامتری برای منحنی وی‌ویانی به دست آوریم. معادله استوانه را به صورت زیر می نویسیم. $(x-\frac{a}{۲})^۲+y^۲=\frac{a^۲}{۴}$ از آنجا داریم $x-\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲}\cos\theta\ ,\ y=\frac{a}{۲}\sin\theta$ لذا

$$z=\pm\sqrt{a^۲-(x^۲+y^۲)}=\pm\sqrt{a^۲-\left(\frac{a^۲}{۴}(\cos\theta+۱)^۲+\frac{a^۲}{۴}\sin^۲\theta\right)}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{a^۲}{۲}(۱-cos\theta)}=\pm a\sin\frac{\theta}{۲}.$$

از آنجا داریم

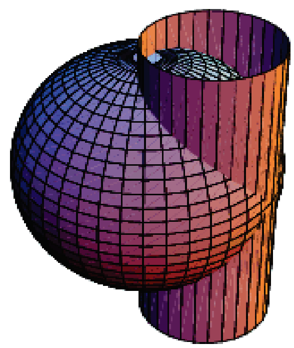
$$x=\frac{a}{۲}(\cos\theta+۱)\quad y=\frac{a}{۲}sin\theta,\quad z=\pm a\sin\frac{\theta}{۲}. \qquad (۱۰.۱)$$

---

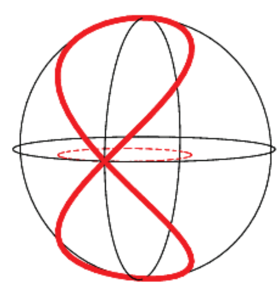
[۳۹] hypocycloid

[۴۰] animated pictures

[۴۱] Vivianis Curve



شکل ۱.۱۵: فصل مشترک کره و استوانه را منحنی وی ویانی میگویند.



شکل ۱.۱۶: منحنی وی ویانی شبیه یک هشت لاتین روی کره است.

چون $\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta}\right) \neq 0$ این نمایش پارامتری منتظم است. شکل ۱.۱۵ در صفحه ۳۰ را ببینید.

مارپیچ تعمیم یافته

مارپیچ تعمیم یافته [۴۲] تعمیمی از مارپیچ ساده است. مارپیچ ساده در یک نمایش پارامتری طبیعی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right),$$

که در آن $c = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ است. برداریکه مماس عبارت است از

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s) = \left(\frac{-a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

اگر θ زاویه بین بردار یکه مماس T و بردار یکه k در راستای محور zها باشد، می توان این زاویه را به شرح زیر حساب کرد.

$$\cos\theta = \frac{T.k}{۱} = T.(۰, ۰, ۱) = \frac{b}{c} = cte.$$

بنابراین θ ثابت است. از آنجا نتیجه می شود که در مارپیچ ساده همواره بردار مماس با بردار k در راستای محور z زاویه ثابتی دارد. از آنجا این تعریف را می توان به شرح زیر تعمیم داد.

تعریف ۳.۷.۱. منحنی $\alpha(s)$ را **مارپیچ تعمیم یافته**[۴۳] گوییم، اگر بردار ثابت و یکه‌ای مانند u موجود باشد به طوری که u با بردار یکه مماس T زاویهٔ ثابتی داشته باشد. u را محور مارپیچ می نامیم.

مثال ۴.۷.۱. یک مارپیچ تعمیم یافته که در سال ۱۸۶۴ میلادی توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام اولری ترکم [۴۴] مورد مطالعه قرار گرفت. معادله پارامتری آن عبارت است از

$$x = ae^{bt}\cos t, \quad y = ae^{bt}\sin t, \quad z = ae^{bt}\cot\alpha, \qquad (۱۱.۱)$$

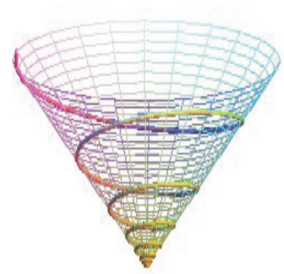
---

[۴۲] Cylinrical Helix

[۴۳] general helix

[۴۴] Olry Terquem

این منحنی که به آن مارپیچ مخروطی [۴۵] نیز می گویند در روی یک مخروط قرار دارد.



شکل ۱۷.۱: منحنی مارپیچ مخروطی تعمیم یافته .

معادله دکارتی مخروط در حالت کلی عبارت است از $z=\pm\sqrt{x^۲+y^۲}$ که با جایگذاری از رابطه ۱۱.۱ معادله مخروط مورد نظر به صورت $z=\cot\alpha\sqrt{x^۲+y^۲}$ به دست می آید. برای محاسبه زاویه بین یال مخروط و محور z که همان زاویه بین بردار موضع $\alpha(t)$ و بردار k است، از $\alpha(t)\centerdot k=|\alpha|\cos\theta$ استفاده می کنیم. از آنجا $\theta=\alpha$. برای محاسبه زاویه بین $\alpha(t)$ و محور z از $\alpha'(t)\centerdot k=|\alpha'|\cos\phi$ استفاده می کنیم. تمرین ۶.۸.۱ درصفحه ۳۴را ببینید.

گزاره ۵.۷.۱. *فرض کنیم منحنی α دارای انحنای مخالف صفر κ باشد، α یک مارپیچ تعمیم یافته است، اگر و تنها اگر $\frac{\tau}{\kappa}=cte$.*

اثبات. فرض کنیم مارپیچ تعمیم یافته بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد، در این صورت بنا به تعریف داریم: $T\centerdot u=cos\theta$ که در آن u بردار یکه ثابت و θ نیز ثابت است.

$$۰=(T\centerdot u)'=T'\centerdot u+T\centerdot u'=\kappa N\centerdot u$$

چون $\kappa\neq ۰$ داریم $N\centerdot u=۰$ لذا N بر u عمود است، لذا u در صفحهٔ B و T قرار دارد و می‌توان نوشت: $u=\lambda T+\gamma B$ با ضرب داخلی T و B در این عبارت به ترتیب

[۴۵] Conical spiral

مقادیر $\lambda = u \centerdot T$ و $\gamma = u \centerdot B$ به دست می‌آید:

$$u = (u \centerdot T)T + (u \centerdot B)B.$$

با جایگذاری $u \centerdot T = \cos\theta$، چون u یکه است، می توان نوشت

$$u = \cos\theta\ T + \sin\theta\ B$$

با مشتق گیری نسبت به s و با استفاده از فرمول‌های اول و سوم فرنه داریم:

$$\begin{aligned}
&۰ = \cos\theta\ T' + \sin\theta\ B' = \cos\theta(\kappa N) - \sin\theta(\tau N),\\
&(\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta)N = ۰,\\
&\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta = ۰,\ \frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta = cte.
\end{aligned}$$

برعکس چون روابط فوق برگشت پذیر است، بردار یکه‌ای مانند $u = \cos\theta T + \sin\theta B$ موجود است به طوری که در شرایط تعریف مارپیچ تعمیم یافته صدق کند. □

۸.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۸.۱. از تقاطع کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a با استوانه‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ax$ یک منحنی حاصل می‌گردد که به آن منحنی وی‌ویانی [۴۶] می‌گویند. شکل های ۱۵.۱ و ۱۶.۱ در صفحه ۳۰ را ببینید. اگر معادلهٔ پارامتری این منحنی توسط رابطه ۱۰.۱ داده شده باشد، انحنا و تاب آن را در هر نقطه محاسبه کنید.

تمرین ۲.۸.۱. معادلهٔ منحنی حاصل از تقاطع دو استوانهٔ عمود بر هم با شعاع a را به دست آورده، انحنا و تاب آن را حساب کنید. آیا می‌توانید نمودار این منحنی را در یکهشتم اول

[۴۶] Viviani Curve

(یعنی جایی که در دستگاه مختصات $x > \cdot, y > \cdot, z > \cdot$ باشد.) رسم کنید.
راهنمایی. معادله دو استوانه عمود بر هم به ترتیب در راستای محور z و محور y عبارت است از

$$x^۲ + y^۲ = a^۲, \quad x^۲ + z^۲ = a^۲.$$

می‌توانید از تغییر متغییرهای مثلثاتی نیز استفاده نمایید.

تمرین ۳.۸.۱. معادلهٔ صفحهٔ قائم یا صفحهٔ اصلاحی منحنی $\alpha(s)$ را در نقطهٔ s. بنویسید.

تمرین ۴.۸.۱. برای مارپیچ ساده ثابت کنید $\frac{\kappa}{\tau} = cte$.

تمرین ۵.۸.۱. آیا سه‌تایی T و N و B (مختصات متحرک) در هر نقطه یکتاست؟ چرا؟

تمرین ۶.۸.۱. یک منحنی به معادله پارامتری زیر را در نظر می گیریم.

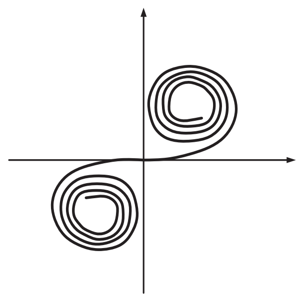
$$x = at\cos t, \quad y = at\sin t, \quad z = bt\cot\alpha, \qquad (۱۲.۱)$$

که در آن α زاویه ثابت است. تصویر مربوط به مثال ۴.۷.۱ در صفحه ۳۱ را ببینید.
الف. ثابت کنید این منحنی مارپیچ تعمیم یافته است.
ب. تصویر این منحنی روی صفحه $x \circ y$ چیست و معادله پارامتری آن کدام است.
ج. b را طوری تعیین کنید که زاویه α زاویه بین محور z و مارپیچ باشد.
د. b را طوری تعیین کنید که زاویه α زاویه بین محور z و یال مخروط باشد.
د. آیا ممکن است که در بخش‌های ج و د، زاویه α مساوی باشد.

تمرین ۷.۸.۱. معادلهٔ دایرهٔ بوسان را برای سهمی $y = x^۲ + ۱$ بنویسید.

تمرین ۸.۸.۱. گچی را بر روی یک چرخ متحرک به شعاع a نصب نموده آن را بر روی یک خط راست می چرخانیم. اولاً طول قوس منحنی را پس از یک دوران کامل حساب کنید. ثانیاً انحنای این منحنی را محاسبه کنید. مثال ۱.۷.۱ در صفحه ۲۷ را ببینید.

تمرین ۹.۸.۱. گچی را بر روی یک چرخ متحرک به شعاع a نصب نموده آن را بر روی دایره ای به شعاع b می چرخانیم. اولاً نمودار منحنی حاصل را رسم کنید. ثانیاً معادله آن را بنویسید. شکل ۱۴.۱ در صفحه ۲۹ را ببینید.



شکل ۱۸.۱: منحنی پیچ کورنو.

تمرین ۱۰.۸.۱. منحنی پیچ کورنو [۴۷] یا پیچ اولر[۴۸] به صورت زیر تعریف می شود. این منحنی در محاسبات مربوط به الگوی شکست نور مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$x = a\sqrt{\pi}\int_{۰}^{t} cos\frac{\pi t^{۲}}{۲}\,dt,$$
$$y = a\sqrt{\pi}\int_{۰}^{t} sin\frac{\pi t^{۲}}{۲}\,dt.$$

این منحنی را بر حسب طول قوس پارامتری کنید، سپس نشان دهید انحنای آن مضربی از طول قوس است.

[۴۷] Cornu spiral

[۴۸] Euler spiral

۱.۸.۱ حرکت پرتابی در صفحه و فضا

در پایان این فصل منحنی های حرکت پرتابی[۴۹] را با ذکر چند مثال مورد مطالعه قرار می دهیم. حرکت پرتابی در صفحه و فضا بخش مهمی از فیزیک را تشکیل داده و در هندسه و کاربرد آن نیز بسیار مورد توجه است.

مثال ۱۱.۸.۱. فرض کنیم یک پرتاب کننده گلوله‌ای را با سرعت اولیهٔ $V.$ و با زاویهٔ پرتاب α از نقطه‌ای به مختصات $(x., y.)$ پرتاب می‌کند. شکل ۱۹.۱ را ببینید. اگر تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن باشد، مطلوب است محاسبه

الف. منحنی مسیر حرکت گلوله،

ب. انحنای منحنی در هر نقطه،

ج. مقدار اوج گلوله،

د. مقدار برد گلوله،

ه. زاویه پرتاب را طوری تعیین کنید که برد گلوله بیشترین مقدار خود را داشته باشد،

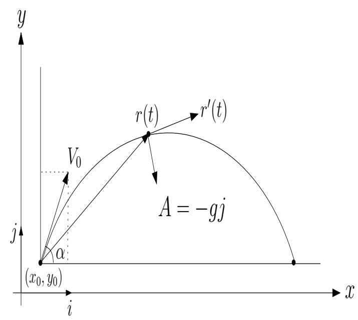
و. آیا وزن گلوله تاثیری در موارد فوق دارد؟

حل: الف. فرض کنیم تابع برداری مسیر حرکت گلوله توسط $V(t)$ داده شده باشد. اگر بردار موضع مسیر حرکت را با $r(t) = x(t)i + y(t)j$ و نقطه شروع را با بردار $r. = x.i + y.j$ نمایش دهیم آنگاه بردار سرعت اولیه برابر است با

$$V. = |V.|(\cos\alpha i + \sin\alpha j).$$

بردار $V(t) = \frac{dr}{dt}$ بردار سرعت و $A(t) = \frac{dV}{dt}$ بردار شتاب مسیر است. اگر تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن باشد، داریم $F = -mgj$ که در آن $g = ۹/۸ m/s^۲$. از طرف دیگر بنا بر قانون دوم نیوتن نیروی F برابر است با جرم m ضربدر شتاب $F = mA$،

[۴۹] Motion of Projectile



شکل ۱.۱۹: مسیر حرکت گلوله در حرکت پرتابی.

بنابراین داریم $A=-gj$. حال با استفاده از بردار شتاب، بردار سرعت و سپس مسیر منحنی را با دوبار انتگرال گیری و استفاده از شرایط اولیه به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=-gj, \quad V(t)=-gtj+c_\circ\ ,\ t=\circ, \quad c_\circ=V_\circ,\\
&V(t)=-gtj+V_\circ, \quad r(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}j+tV_\circ+c_۱\ ,\ t=\circ \quad c_۱=r_\circ,\\
&r(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}j+t|V_\circ|(\cos\alpha i+\sin\alpha j)+r_\circ.
\end{aligned}$$

با جایگذاری شرایط اولیه تابع برداری مسیر حرکت به دست می آید.

$$r(t)=(|V_\circ|t\cos\alpha+x_\circ)i+(-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+|V_\circ|t\sin\alpha+y_\circ)j.$$

ب. برای محاسبه انحنا کافی است از فرمول مناسب استفاده کنیم.

$$\kappa(t)=\frac{\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\frac{dy}{dt}\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}\right|}{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^{۲}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{||V_\circ|\cos\alpha|\,g}{(|V_\circ|^{۲}+g^{۲}t^{۲}-۲|V_\circ|gt\sin\alpha)^{\frac{۳}{۲}}}.$$

ج. برای محاسبه حداکثر ارتفاع گلوله باید بیشترین مقدار $y(t)$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
&y(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+|V_\circ|t\sin\alpha+y_\circ,\\
&y'(t)=-gt+|V_\circ|\sin\alpha=\circ, \quad t=\frac{|V_\circ|\sin\alpha}{g}.
\end{aligned}$$

لذا حداکثر مقدار $y(t)$ عبارت است از

$$y_{max} = \frac{۱}{۲}\frac{|V_.|^۲ \sin^۲ \alpha}{g} + y_.$$

د. برای محاسبه برد گلوله باید مقدار $x(t)$ را به دست آوریم. چون $x(t) = t|V_.| \cos \alpha + x_.$، تابعی خطی از t است، بیشترین مقدار آن وقتی است که $y = y_.$. از آنجا

$$y(t) = t\left(-\frac{۱}{۲}gt + |V_.|sin\alpha\right) = ۰, \quad t = \frac{۲|V_.|\sin\alpha}{g}.$$

لذا

$$x_{max} = \frac{|V_.|^۲ sin۲\alpha}{g} + x_..$$

ه. برای آن که x_{max} حداکثر مقدار خود را بگیرد، باید $\sin ۲\alpha = ۱$ لذا اگر زاویه پرتاب گلوله برابر $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ باشد، گلوله حداکثر برد خود را خواهد داشت.

و. چون در هیچ یک از روابط فوق متغیرجرم m وجود ندارد، لذا جرم گلوله تاثیری در نتایج فوق ندارد.

مثال ۱.۸.۱۲. فرض کنیم گلوله ای به جرم m را از مبدا مختصات با بردار سرعت اولیه $V_. = aj + bk$ به فضاپرتاب می‌نماییم. اگر جریان باد نیرویی به اندازه$F_۱ = cmi$ علاوه بر شتاب حاصل از نیروی جاذبه به گلوله وارد کند،

الف. منحنی مسیر این گلوله را به دست آورده، محل برخورد آن به زمین را تعیین کنید.

ب. در این شرایط جهت پرتاب گلوله را طوری تعیین کنید که به نقطه $(۲, ۲, ۰)$ برخورد کند.

حل: اگر نیروی وزن وارد بر گلوله برابر $F = -mgk$ باشد، با توجه به قانون دوم نیوتن، شتاب حاصل از جاذبه برابر $-gk$ است، که در آن $g = ۹/۸ \ m/s^۲$. اگر جریان باد نیرویی به اندازه$F_۱ = cmi$ وارد نماید، شتاب حاصل از آن به مقدار ci به گلوله وارد می

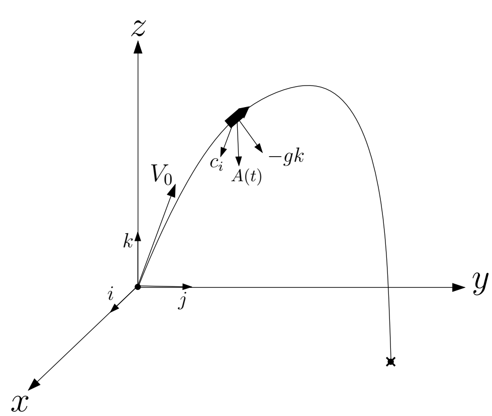
شود. بردار شتاب از جمع شتاب‌های موجود به دست می‌آید. لذا داریم $A(t) = ci - gk$.
از آنجا با انتگرال‌گیری و استفاده از شرایط اولیه داریم

$$V(t) = cti - gtk + c_1, t = 0,$$
$$c_1 = V(0) = aj + bk, \quad V(t) = cti + aj + (b - gt)k.$$

با انتگرال‌گیری مجدد و جایگذاری شرایط اولیه، تابع برداری مسیرحرکت به دست می آید.

$$r(t) = \frac{1}{2}ct^2 i + atj + (bt - \frac{1}{2}gt^2)k + c_2,$$
$$r(0) = (0, 0, 0) \Rightarrow c_2 = 0,$$
$$r(t) = \frac{1}{2}ct^2 i + atj + (bt - \frac{1}{2}gt^2)k.$$

برای تعیین محل اصابت گلوله به زمین، فرض می‌کنیم $z = 0$ پس $t(b - \frac{1}{2}gt) = 0$ از



شکل ۲۰.۱: مسیر حرکت گلوله در حرکت پرتابی در فضا با تاثیر جریان باد.

آنجا $t = \frac{2b}{g}$ با جایگذاری در $r(t)$ مختصات محل فرود مشخص می‌شود. $(2c\frac{b^2}{g^2}, 2\frac{ab}{g}, 0)$

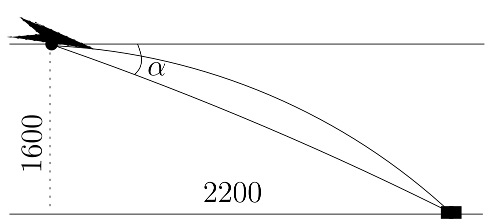
برای آن که گلوله به هدف $(۲, ۲, ۰)$ اصابت کند، باید

$$۲c\frac{b^{۲}}{g^{۲}} = ۲\ ,\ ۲\frac{ab}{g} = ۲, \quad b = \frac{g}{a},$$
$$c\frac{\frac{g^{۲}}{a^{۲}}}{g^{۲}} = ۱, \quad a = \sqrt{c},\ ,\ b = \frac{۹/۸}{\sqrt{c}}.$$

از آنجا بردار سرعت اولیه $V.$ یا جهت شلیک گلوله به منظور اصابت به نقطه $(۲, ۲, ۰)$، عبارت است از $V. = \sqrt{c}j + \frac{۹/۸}{\sqrt{c}}K$

۹.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۹.۱. فرض کنیم هواپیمایی که به طور افقی و در ارتفاع $۱۶۰۰\ m$ در حال پرواز است قصد دارد محموله‌ای را رها نماید تا به هدف مشخصی در سطح زمین برخورد کند. اگر سرعت هواپیما $۲۲۰\ m/s$ باشد، با چه زاویه دیدی (بین افق و خط هدف) محموله را رها نماید، تا به هدف اصابت کند؟ راهنمایی: از قسمت (الف. مثال ۱۱.۸.۱ استفاده کنید.



شکل ۲۱.۱: مسیر حرکت محموله رها شده از هواپیما.

تمرین ۲.۹.۱. فرض کنیم می خواهیم یک توپ فوتبال را به بالای سر بازیکنی در ارتفاع ۲ متری که در مختصات $(x., y.)$ از زمین فوتبال قرار دارد، بفرستیم تا او بتواند با ضربه سر خود توپ را وارد دروازه کند. اگر جریان باد شتابی به اندازهٔ $ci + dj$ علاوه بر شتاب حاصل از نیروی جاذبه به توپ وارد کند، جهت پرتاب توپ را تعیین کنید.

تمرین ۳.۹.۱. فرض کنیم موشکی را از مبدا $(\cdot, \cdot)$ با سرعت اولیه $V. = aj + bk$ به فضا پرتاب می نماییم. اگر نیروی موتور این موشک در هر لحظه شتابی برابر $aj + tk$ به آن وارد نماید، منحنی مسیر حرکت موشک را به دست آورید.

۱۰.۱ قضیه اساسی نظریه منحنی‌ها و معادلات ذاتی

همانطور که دیدیم فرمول‌های فرنه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برداری درجه اول نسبت به مشتقات سه بردار یکه T، N و B تشکیل می‌دهند. از این دستگاه معادلات دیفرانسیل می توان انحنا و تاب منحنی را به دست آورد. حال این سوال را مطرح می کنیم که اگر توابع پیوسته‌ای مانند κ و τ داشته باشیم، آیا جواب‌هایی مانند T، N و B برای دستگاه معادلات دیفرانسیل فرنه وجود دارد؟ آیا این جواب یکتا است؟ اگر $T = \alpha'(s)$، آیا با انتگرال گیری از این رابطه یک منحنی مانند $\alpha = \int T\, ds + c$ با انحنا و تاب κ و τ وجود دارد؟ جواب مثبت برای این سئوالات را در قضیه زیر ثابت می کنیم. در این بخش و بلکه در ادامه این فصل همه منحنی ها را از کلاس C^k، $k{\geq}۳$ فرض می کنیم مگر عکس آن تصریح گردد.

قضیه ۱.۱۰.۱. *قضیه اساسی وجود و یکتایی منحنی‌ها*
فرض کنیم $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ توابع دلخواه پیوسته‌ای در فاصلهٔ $s \in [a, b]$ باشند، آنگاه یک و تنها یک منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s)$ وجود دارد که $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب انحنا و تاب آن بوده و s پارامتر طبیعی (طول قوس) باشد.

اثبات. *یکتایی:* فرض کنیم C و C^* دو منحنی از کلاس C^k، $k{\geq}۳$ با نمایش پارامتری طبیعی $\alpha(s)$ و $\alpha^*(s)$ باشند به طوری که انحنا و تاب آنها به ازای تمام مقادیر s برابر باشند. یعنی $\forall s \in [a, b]$, $\kappa^*(s) = \kappa(s)$ و $\tau^*(s) = \tau(s)$. ثابت می کنیم که C و C^* بر یکدیگر منطبق هستند. برای این کار منحنی C^* را طوری انتقال می‌دهیم که در نقطهٔ $s = s.$ منحنی C را قطع کند. در این نقطه داریم $\alpha^*(s.) = \alpha(s.) = q.$. سپس C^* را حول نقطهٔ $s.$ طوری دوران می‌دهیم که سه‌تایی $(T^*_., N^*_., B^*_.)$ روی سه‌تایی $(T_., N_., B_.)$ قرار گیرد. با مشتق‌گیری از حاصلضرب داخلی بردارهای یکه و استفاده از

فرمول‌های فرنه به شرح زیر داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(T\,.\,T^*) =& T'\,.\,T^* + T\,.\,T'^* = \kappa N\,.\,T^* + T\,.\,\kappa^* N^* \\
=& \kappa(N\,.\,T^* + T\,.\,N^*), \\
\frac{d}{ds}(N\,.\,N^*) =& N'\,.\,N^* + N\,.\,N'^* \\
=& (\tau B - \kappa T)\,.\,N^* + N\,.\,(\tau^* B^* - \kappa^* T^*), \\
=& \tau(B\,.\,N^* + N\,.\,B^*) - \kappa(T\,.\,N^* + N\,.\,T^*), \\
\frac{d}{ds}(B\,.\,B^*) =& B'\,.\,B^* + B\,.\,B'^* = -\tau N\,.\,B^* - B\,.\,\tau^* N^* \\
=& -\tau(N\,.\,B^* + B\,.\,N^*).
\end{aligned}$$

اگر طرفین سه رابطه بالا را با هم جمع کنیم، داریم: $\frac{d}{ds}(T\,.\,T^* + N\,.\,N^* + B\,.\,B^*) = ۰$ با انتگرال گیری، داریم:

$$T\,.\,T^* + N\,.\,N^* + B\,.\,B^* = cte.$$

اما در نقطهٔ $s_۰$ داریم، $T_۰ = T^*_۰\ ,\ N_۰ = N^*_۰\ ,\ B_۰ = B^*_۰$ از آنجا

$$T_۰\,.\,T^*_۰ = ۱\ ,\ N_۰\,.\,N^*_۰ = ۱\ ,\ B_۰\,.\,B^*_۰ = ۱.$$

بنابراین در نقطهٔ $s_۰$ و همچنین برای تمام نقاط s داریم:

$$T\,.\,T^* + N\,.\,N^* + B\,.\,B^* = ۳ \tag{۱۳.۱}$$

حال نشان می دهیم که هر یک از این سه ضرب دارای مقدار واحد هستند. حاصلضرب داخلی دو بردار یکهٔ T و T^* را در نظر می‌گیریم، اگر θ زاویهٔ بین آنها باشد، $-۱ \leq T\,.\,T^* = \cos\theta \leq ۱$ بنابراین اگر رابطه (۱۳.۱) برقرار باشد، لازم است که: $T\,.\,T^* = ۱\ ,\ N\,.\,N^* = ۱\ ,\ B\,.\,B^* = ۱$ در نتیجه زاویه بین هر زوج از این سه بردار برابر

صفر است و برای هر $s \in [a,b]$ داریم: $T = T^*$, $N = N^*$, $B = B^*$ و چون $T = \frac{d\alpha}{ds} = T^* = \frac{d\alpha^*}{ds}$ داریم: $\alpha(s) = \alpha^*(s) + c$ اما چون در نقطه $s.$، $\alpha(s.) = \alpha^*(s.)$، داریم $c = ۰$، بنابراین به ازای هر $s \in [a,b]$، $\alpha(s) = \alpha^*(s)$ در نتیجه دو منحنی C و C^* بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

اثبات وجود: فرض کنیم $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ دو تابع پیوسته در بازه $s \in [a,b]$ باشند. نشان می‌دهیم یک منحنی پارامتری شده برحسب طول قوس مانند $\alpha(s)$ وجود دارد که $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب انحنا و تاب آن باشد. بنا بر تعریف فرمول‌های فرنه ۷.۱ در صفحه ۲۲ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ هستند که جواب‌های آن سه بردار متعامد یکه $B(s), N(s), T(s)$ هستند. بنا بر قضیه وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل برداری، دستگاه معادلات فرنه یک جواب یکتای $B(s), N(s), T(s)$ دارد. حال با استفاده از تابع برداری یکتای $T(s)$ می‌توان تابع برداری منحنی $\alpha(s)$ را به شرح زیر ارائه نمود

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s), \quad \alpha(s) = \int_{.}^{s} T(s)\, ds + c. \qquad (۱۴.۱)$$

با جایگزینی $s = ۰$ بردار ثابت $c. = \alpha(۰)$ به دست می آید. از آنجا داریم $\alpha(s) = \int_{.}^{s} T(s)\, ds + \alpha(۰)$ که همان منحنی مورد نظر است. برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که s در منحنی $\alpha(s)$ پارامتر طول قوس بوده و انحنا و تاب آن به ترتیب توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ هستند. در حقیقت از رابطه ۱۴.۱ داریم

$$|\alpha'(s)| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = |T(s)| = ۱, \qquad (۱۵.۱)$$

لذا s پارامتر طول قوس است. با استفاده از فرمول اول فرنه مقدار انحنا ی منحنی تعریف شده توسط رابطه ۱۴.۱ را حساب می کنیم.

$$|\alpha''(s)| = |T'(s)| = |\kappa(s)N| = \kappa(s).$$

با ضرب بردار یکه قائم در فرمول سوم فرنه مقدار تاب را به دست می آوریم.

$$-B' \centerdot N = -(-\tau(s)N) \centerdot N = \tau(s).$$

لذا توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب انحنا و تاب منحنی $\alpha(s)$ هستند. این موضوع اثبات قضیه را کامل می کند. □

مثال ۲.۱۰.۱. فرض کنیم که κ تابع انحنای یک منحنی مسطح باشد. تابع پارامتری آن منحنی را به دست می آوریم. در منحنی مسطح $\tau = ۰$ و انتگرال‌گیری از فرمول‌های فرنه به راحتی ممکن می‌شود.

فرض کنیم θ زاویه‌ای باشد که بردار یکه مماس T با محور x ها می‌سازد. داریم

$$T = \cos\theta i + \sin\theta j. \qquad (۱۶.۱)$$

همچنین چون N بر T عمود است، داریم

$$N = -\sin\theta i + \cos\theta j. \qquad (۱۷.۱)$$

شکل ۸.۱ را ببینید. اگر از این دو معادله اگر از این دو معادله نسبت به پارامتر s مشتق بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} T' = \theta'(-\sin\theta i + \cos\theta j) &= \theta' N. \\ N' = -\theta'(\cos\theta i + \sin\theta j) &= -\theta' T. \end{aligned}$$

اما وقتی که $\tau = ۰$، معادلات فرنه به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N. \\ N' &= -\tau B - \kappa T = -\kappa T. \end{aligned}$$

اگر $\kappa = \theta'$، T و N تعریف شده در روابط (۱۶.۱) و (۱۷.۱) جواب معادلات دیفرانسیل فرنه خواهد بود. اگر قرار دهیم $\frac{d\theta}{ds} = \theta' = \kappa$ آنگاه

$$\theta = \int \kappa\, ds + c_1. \qquad (18.1)$$

با معین بودن θ، از رابطه (۱۶.۱) داریم

$$\alpha(s) = \int T\, ds + c_2 = \int [\cos\theta(s) i + \sin\theta(s) j]\, ds + c_2. \qquad (19.1)$$

که $\alpha(s)$ منحنی مورد نظر است. توجه نمایید که تغییر عدد ثابت c_1 در رابطه (۱۸.۱) موجب تغییر در θ می‌شود و در نتیجه دورانی در منحنی α پدید می‌آورد و تغییرات مقدار ثابت c_2 در رابطه (۱۹.۱) موجب انتقال منحنی α می‌شود.

۱.۱۰.۱ معادلات ذاتی یک منحنی

ثابت کردیم که هر منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^k، $k \geq 3$ با انحنا و تاب $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ را فقط به یک صورت می‌توان نوشت که در آن $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ توابعی از پارامتر طول قوس s هستند. چون توابع κ و τ به طور کامل یک منحنی را مشخص می‌کنند، هر رابطه بین آنها را **معادله ذاتی** یا معادله [50] طبیعی [51] می‌گویند.

مثال ۳.۱۰.۱. معادلهٔ ذاتی یک خط راست $\kappa = 0$ می‌باشد. برای نشان دادن این موضوع، کافی است توجه کنیم که یک منحنی پارامتری منتظم یک خط راست است اگر و تنها اگر $\kappa = 0$. لم ۸.۵.۱ در صفحه ۲۵ را ببینید.

مثال ۴.۱۰.۱. معادلهٔ ذاتی دایره‌ای به شعاع $r = \frac{1}{|\kappa|}$ عبارتست از. $\kappa = cte \neq 0, \tau =$

[50] intrinsic

[51] natural

• زیرا برای دایره‌ای به شعاع r داریم:

$$\alpha(t) = (r\cos t)i + (r\sin t)j, \quad T = \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}.$$

از طرفی چون $|\alpha'(t)| \neq ۰$ از فرمول طول قوس داریم $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$ از آنجا نتیجه می‌شود:

$$T = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{-r\sin ti + r\cos tj}{r} = -\sin ti + \cos tj,$$
$$\alpha''(s) = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-\cos ti - \sin tj}{r} = -\frac{۱}{r}\cos ti - \frac{۱}{r}\sin tj.$$

از آنجا $\kappa = |\alpha''(s)| = \frac{۱}{r}$ بنابراین معادلهٔ دایره به صورت ذاتی $\kappa = \frac{۱}{r} = cte$ در می‌آید. از طرفی دایره منحنی مسطح است، ثابت کردیم $\tau = ۰$. حال بر عکس اگر κ ثابت باشد، با استفاده از رابطه ۱.۱۸ داریم:

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa = cte, \quad \theta = \int \kappa\, ds = \kappa \int ds = \kappa s,$$

از طرف دیگر

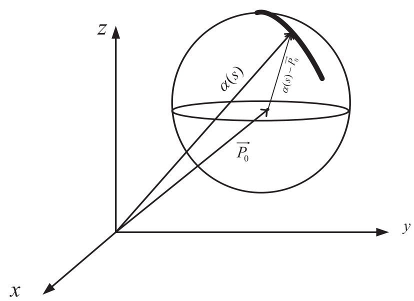
$$\frac{d\alpha}{ds} = T, \quad \alpha = \int T ds = \int (\cos\theta i + \sin\theta j)\, ds,$$
$$\alpha(s) = \int (\cos\kappa s i + \sin\kappa s j)\, ds = (\int \cos\kappa s\ ds)i + (\int \sin\kappa s\ ds)j.$$

لذا با محاسبه انتگرال داریم، $\alpha(s) = \left(\frac{۱}{\kappa}\sin\kappa s, \frac{-۱}{\kappa}\cos\kappa s\right)$ که معادله یک دایره است.

فرض کنیم منحنی $\alpha(s)$ روی کره قرار داشته باشد، می خواهیم معادله ذاتی آن را به دست آوریم.

لم ۵.۱۰.۱. *منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s)$ از کلاس C^k، $k \geq ۳$ با انحنا و تاب ناصفر روی کره‌ای به مرکز P. و شعاع a قرار دارد، اگر و تنها اگر معادله ذاتی آن به صورت زیر باشد.*

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2. \qquad (۲۰.۱)$$



شکل ۲۲.۱: کره‌ای به مرکز P_0 و به شعاع a وخانواده منحنی های روی آن .

اثبات. فرض کنیم منحنی $\alpha(s)$ روی کره‌ای به مرکز P_0 و به شعاع a قرار داشته باشد. اگر $\alpha(s)$ را به عنوان بردار موضع این منحنی در نظر بگیریم و P_0 بردار ثابت مرکز کره باشد، با توجه به شکل ۲۲.۱ مشاهده می کنیم که بردار شعاعی $(\alpha(s) - P_0)$ دارای طول ثابت است و داریم

$$(\alpha(s) - P_0) \cdot (\alpha(s) - P_0) = a^2, \qquad (۲۱.۱)$$

با دو بار مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به s و استفاده از فرمول های فرنه داریم

$$\alpha'(s) \cdot (\alpha(s) - P_0) = 0, \qquad (۲۲.۱)$$

$$\alpha''(s) \cdot (\alpha(s) - P_0) + \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 0, \quad \kappa N \cdot (\alpha(s) - P_0) + 1 = 0$$

$$N \cdot (\alpha(s) - P_0) = -\frac{1}{\kappa}, \qquad \kappa \neq 0, \qquad (۲۳.۱)$$

$$\kappa' N \cdot (\alpha(s) - P_0) + \kappa N' \cdot (\alpha(s) - P_0) + \kappa N \cdot \alpha'(s) = 0,$$

$$\kappa' N \cdot (\alpha(s) - P_0) + \kappa(\tau B - \kappa T) \cdot (\alpha(s) - P_0) = 0.$$

با جایگذاری روابط (۲۲.۱) و (۲۳.۱) در رابطه اخیر داریم

$$\kappa'\left(-\frac{1}{\kappa}\right)+\kappa\tau B\centerdot(\alpha(s)-P_0)=0,$$
$$B\centerdot(\alpha(s)-P_0)=\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}.$$

حال بردار $(\alpha(s)-P_0)$ را روی سه بردار T، N و B به صورت زیر تصویر می کنیم. تمرین ۱.۶.۱ در صفحه ۲۶ را ببینید.

$$\begin{aligned}(\alpha(s)-P_0)=&((\alpha-P_0)\centerdot T)T+((\alpha-P_0)\centerdot N)N+(\alpha-P_0)\centerdot B\big)B\\ =&-\frac{1}{\kappa}N+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B.\end{aligned}$$

از آنجا با استفاده از (۲۱.۱) رابطه (۲۰.۱) نتیجه می شود. برای اثبات عکس این لم فرض کنیم رابطه (۲۰.۱) برقرار باشد، تابع $\beta(s)$ را با توجه به رابطه اخیر به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\beta(s)=\alpha(s)-\frac{1}{\kappa}N+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B,$$

که در آن $\alpha(s)$ یک تابع برداری دلخواه است. نشان می دهیم $\alpha(s)$ در روی یک کره به مرکز p_0 قرار دارد. $\beta'(s)$ را به دست می‌آوریم. از طرف دیگر با مشتق‌گیری از رابطه (۲۰.۱) و مقایسه آن با $\beta'(s)$ نتیجه می‌شود $\beta'(s)=0$ و $\beta(s)=P_0$ در نتیجه $\beta(s)$ ثابت است و

$$|\alpha(s)-P_0|^2=\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2=a^2.$$

در نتیجه $\alpha(s)$ در روی کره‌ای به شعاع a و به مرکز P_0 قرار دارد. این موضوع اثبات لم را کامل می کند. □

۱۱.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۱.۱. معادلهٔ ذاتی منحنی مارپیچ $\alpha(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ را بنویسید.

تمرین ۲.۱۱.۱. الف. در منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s)$ انحنا و تاب را محاسبه کنید.

ب. نشان دهید انحنا و تاب این منحنی در لم ۵.۱۰.۱ در صفحه ۴۷ صدق می کند.

ج. بدون استفاده از لم ۵.۱۰.۱ نشان دهید که این منحنی روی کره قرار دارد.

تمرین ۳.۱۱.۱. انحنای یک منحنی مسطح توسط تابع $\kappa(s) = 2s$ داده شده است. اگر نقطه شروع این منحنی در $(0, 0)$ باشد معادله پارامتری آن را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. این منحنی را پیچ اولر می نامند.

۱۲.۱ منحنی در فضای اقلیدسی n-بعدی

مقدمه. در این بخش تعریف منحنی در $\mathbb{R}^n$ یا فضای اقلیدسی n-بعدی را بیان نموده، فرمول های فرنه در $\mathbb{R}^n$ را به دست می آوریم. خواهیم دید که این خاصیت جالب از فرمول های فرنه آن است که انحنای هر منحنی را می توان با استفاده از ضرب داخلی نوشت. این موضوع چند نتیجه جالب دارد. اول اینکه می توان با استفاده از تعریف ضرب داخلی روی رویه کلیه نتایج بدست آمده در $\mathbb{R}^3$ را عینا برای آن رویه تکرار نمود.

در این بخش تعمیم تعریف برخی از منحنی های خاص مانند خط راست و دایره را برای فضای اقلیدسی n-بعدی بیان می کنیم. جالب است که بدانیم دقیقا مشابه این تعاریف برای فضاهای پیچیده تری مانند سطوح یا رویه ها نیز برقرار است. برای فرمول های فرنه روی یک منیفلد ریمانی n-بعدی می توانید کتاب [۲] را ببینید.

تعریف ۱.۱۲.۱. C تصویر بازه دلخواه $I \subset \mathbb{R}$ تحت یک تابع برداری ۱-متغییره پیوسته

و موضعا یک به یک $\alpha(t)$ را یک **منحنی** در $I\!\!R^n$ می‌نامیم.

$$\alpha : I \subset I\!\!R \longrightarrow C \subset I\!\!R^n,$$
$$t \mapsto \alpha(t) = (x^1(t), ..., x^n(t)).$$

مثال ۲.۱۲.۱. فرض کنیم C یک خط راست در $I\!\!R^n$ باشد که از نقطه‌ای به مختصات $(b_1, ..., b_n)$ گذشته و در راستای بردار $(a_1, ..., a_n)$ قرار دارد. معادله پارامتری آن عبارت است از

$$\alpha : I \subset I\!\!R \longrightarrow C \subset I\!\!R^n,$$
$$t \mapsto \alpha(t) = (a_1 t + b_1, ..., a_n t + b_n).$$

نمادگذاری: در این بخش و در ادامه این فصل ضرب داخلی دو بردار V و W در $I\!\!R^n$ را با نماد $< , >$ نمایش می دهیم.

$$< V, W > = v_1 w_1 + ... + v_n w_n = \sigma_{i=1}^n v_i w_i.$$

۱.۱۲.۱ فرمول های فرنه در $I\!\!R^n$

در این بخش فرمول های فرنه را بر اساس تعریف ضرب داخلی اقلیدسی $I\!\!R^n$ تعریف می‌کنیم. با این روش تعمیم فرمول‌های فرنه به فضاهای دیگر ساده می‌گردد. فرض کنیم C یک منحنی منتظم در $I\!\!R^n$ از کلاس C^k, $k \geq n$ پارامتری شده بر حسب طول قوس s و V_1 بردار یکه مماس بر منحنی باشد. چون بردار V_1 یکه است بر مشتق خود یعنی $V_1' = dV_1/ds$ عمود است. تعریف می کنیم

$$\kappa_1 = |V_1'|.$$

در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_1 \neq 0$ باشد بردار یکه عمود V_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$V_1' = \kappa_1 V_2. \qquad (24.1)$$

رابطه (۲۴.۱) را **فرمول اول فرنه** و κ_1 را **انحنای اول فرنه** می گوییم. سپس در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_1 \neq 0$ باشد انحناهای دوم وسوم فرنه را به روش زیر تعریف می کنیم. فرض کنیم V_3 بردار یکه ای در $\mathbb{R}^n$ باشد که بر دو بردار $\{V_1, V_2\}$ عمود باشد. چون V_2 یکه است، V_2' بر V_2 عمود است. پس می توان V_2' را بر حسب ترکیب خطی از دو بردار V_1 و V_3 به صورت زیر نوشت. تمرین ۱.۶.۱ در صفحه ۲۶ را ببینید.

$$V_2' =< V_2', V_1 > V_1 + < V_2', V_3 > V_3. \qquad (25.1)$$

برای محاسبه ضریب V_1 در رابطه فوق از رابطه $< V_2, V_1 >= 0$ نسبت به s مشتق می گیریم.

$$< V_2', V_1 > + < V_2, V_1' >= 0.$$

با جایگذاری فرمول اول فرنه یا رابطه ۲۴.۱ در این عبارت داریم $< V_2', V_1 >= -\kappa_1$.
از طرف دیگر ضریب جمله دوم در رابطه ۲۵.۱ را تعریف می‌کنیم

$$\kappa_2 =< V_2', V_3 > .$$

با جایگذاری این دو عبارت در رابطه (۲۴.۱) داریم

$$V_2' = -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3. \qquad (26.1)$$

رابطه (۲۶.۱) را **فرمول دوم فرنه** و κ_1 را **انحنای دوم فرنه** می‌گوییم. به این روش ادامه داده در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_2 \neq 0$ باشد، فرض می‌کنیم V_4 بردار یکه

ای در $I\!R^n$ باشد که بر سه بردار $\{V_1, V_2, V_3\}$ عمود باشد. چون V_3 یکه است، V_3' بر V_3 عمود است. پس می توان V_3' را بر حسب ترکیب خطی از دو بردار V_2 و V_4 نوشت.

$$V_3' =< V_3', V_2 > V_2+ < V_3', V_4 > V_4. \qquad (۲۷.۱)$$

مشابه روش بالا ضریب عبارت اول را محاسبه نموده ضریب عبارت دوم را تعریف می کنیم

$$\kappa_3 =< V_3', V_4 > .$$

با جایگذاری این دو عبارت در رابطه (۲۴.۱) داریم

$$V_3' = -\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4. \qquad (۲۸.۱)$$

رابطه (۲۸.۱) را **فرمول سوم فرنه** و κ_3 را **انحنای سوم فرنه** می گوییم. به این روش ادامه داده فرمول های دیگر فرنه در $I\!R^n$ را به روش مشابه به دست می آوریم.

$$\begin{cases} V_1' = \kappa_1 V_2, \\ V_2' = -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, \\ V_3' = -\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4, \\ \dots \\ V_i' = -\kappa_{i-1} V_{i-1} + \kappa_i V_{i+1}, \\ \dots \\ V_n' = -\kappa_{n-1} V_{n-1}. \end{cases}$$

در این فرمول ها قرارداد می کنیم که اگر $\kappa_i = 0$ آنگاه $\kappa_{i+1} = 0$ بعلاوه در $I\!R^n$ $\kappa_0 = \kappa_n = 0$. همانطوری که مشاهده می‌شود انحناهای فرنه را می توان توسط رابطه زیر تعریف کرد.

$$\kappa_i :=< V_i', V_{i+1} > .$$

این رابطه تعریف انحنا را بر حسب ضرب داخلی در $I\!R^n$ بیان می‌کند. همچنین بردارهای یکه دوبدو عمود برهم V_i را می توان توسط $< V_i, V_j >= \delta_{ij}$ تعریف نمود. تمرین

۲.۱۳.۱ را ببینید. شکل ماتریسی فرمولهای فرنه در $I\!\!R^n$ را می توان به صورت زیر بیان نمود.

$$(\mathbf{V}'_۱, \mathbf{V}'_۲, \dots, \mathbf{V}'_\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} ۰ & \kappa_۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ -\kappa_۱ & ۰ & \kappa_۲ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & -\kappa_۲ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ & \kappa_{n-۱} \\ ۰ & \dots & \dots & ۰ & -\kappa_{n-۱} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}.$$

با استفاده از فرمول های فرنه در $I\!\!R^n$ به صورت مشابه با فضای $I\!\!R^۳$ می توان قضیه اساسی نظریه منحنی ها را برای منحنی های فضای $I\!\!R^n$ نیز ثابت نمود که از حوصله این کتاب خارج است. خواننده علاقه مند می تواند به کتاب [۲۹] مراجعه کند.

۲.۱۲.۱ خط راست و دایره در $I\!\!R^n$ و خواص اساسی آن‌ها

مقدمه. تعریف خط راست و دایره در هندسه اعم از اقلیدسی یا نااقلیدسی یک مفهوم اساسی در تعریف آن هندسه است. به عنوان مثال در هندسه اقلیدسی اصول موضوعه چندگانه آن بر اساس تعاریف اقلیدس از خط راست و دایره استوار گردیده است. این موضوع ما را بر آن می دارد که به تعمیم تعریف خط راست و دایره طوری بپردازیم که قابل استفاده برای بیان این تعاریف در هندسه های پیشرفته امروزی باشد. برای این کار باید ببینیم چگونه دایره بر اساس ضرب داخلی در $I\!\!R^n$ تعریف می‌شود. در فصل رویه ها خواهیم دید که چگونه ضرب داخلی با استفاده از معادله پارامتری آن تعریف می گردد. با این روش می توان بسیاری از قضایای هندسه و آنالیز را روی رویه ها ثابت نمود. برای توضیح بیشتر می توان به مقاله [۳۶] و یا کتاب [۲] مراجعه کرد.

در این بخش ابتدا به بیان و اثبات یک قضیه اساسی در هندسه اقلیدسی می‌پردازیم. این قضیه جالب مسئله کوتاه‌ترین مسیر بودن را برای خط راست در فضای اقلیدسی n-بعدی ثابت می‌کند.

قضیه ۳.۱۲.۱. *خطوط راست در فضای اقلیدسی n-بعدی کوتاهترین منحنی‌هایی هستند که دو نقطه را به هم مرتبط می‌سازند.*

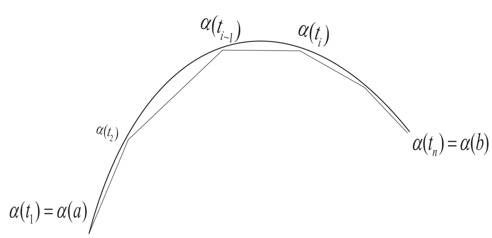
اثبات. فرض کنیم $\alpha(t) : I \longrightarrow I\!R^n$ یک منحنی پارامتری پاره‌ای منتظم از کلاس $C^۱$ باشدکه احتمالا در تعدادی نقاط روی بازه $I = [a, b]$ منتظم نباشد. یک افراز روی بازه $I = [a, b]$ مانند $t_۱, ..., t_k$ طوری در نظر می‌گیریم که شامل این نقاط منفرد باشد. برای سادگی، ازگزاره ۶.۱.۱ در صفحه ۷ در مورد طول قوس یک منحنی در $I\!R^۳$ استفاده می‌کنیم. اگر چه این گزاره برای فضای ۳-بعدی است ولی اثبات آن در ابعاد بالاتر نیز تعمیم همان اثبات است. قرار می‌دهیم

$$L = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = \sum_{i=۲}^{k} \int_{t_{i-۱}}^{t_i} |\alpha'(t)|dt.$$

باید ثابت کنیم که

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq L. \tag{۲۹.۱}$$

نمودار (۲۳.۱) را ببینید. اگر طول قطعات منتظم از منحنی را که روی هر یک ازاین



شکل ۲۳.۱: خط راست کوتاه‌ترین مسیر در فضای اقلیدسی n-بعدی است.

زیربازه‌ها تعریف می‌شوند را با $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-۱})|$ نمایش دهیم، با استفاده از قضیه اساسی نظریه انتگرال‌ها برای توابع برداری یک متغییره در $I\!R^n$ داریم

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-۱}) = \int_{t_{i-۱}}^{t_i} \alpha'(t)dt.$$

بنابراین با فرض $a = t_۱$ و $b = t_k$ و با استفاده از نامساوی مثلث می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |\alpha(b) - \alpha(a)| &= |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-۱}) + \alpha(t_{k-۱}) ... - \alpha(t_۱)| \\ &\leq \sum_{i=۲}^{i=k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-۱})| \\ &= \sum_{i=۲}^{i=k} |\int_{t_{i-۱}}^{t_i} \alpha'(t)dt|. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز یعنی $| \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ و قرار دادن $f = |\alpha'(t)|$ داریم

$$\sum_{i=۲}^{i=k} | \int_{t_{i-۱}}^{t_i} \alpha'(t)dt| \leq \sum_{i=۲}^{i=k} \int_{t_{i-۱}}^{t_i} |\alpha'(t)|dt = \int_a^b |\alpha'(t)|dt.$$

از آنجا رابطه ۲۹.۱ به دست می‌آید. این موضوع اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

تعریف ۴.۱۲.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس $C^k, k \geq ۳$ در $I\!R^n$ باشد. می گوییم C یک **خط راست** یا **ژئودزیک**[۵۲] $I\!R^n$ است اگر انحنای اول آن در تمام نقاط $\kappa_۱ = ۰$ صفر باشد.

C را یک **دایره ژئودزیکی**[۵۳] می گوییم اگر انحنای آن در تمام نقاط ثابت $\kappa_۱ = cte$ و تاب آن $\kappa_۲ = ۰$ صفر باشد.

دایره ژئودزیکی را یک **دایره** $I\!R^n$ می نامیم اگر انحنای آن یک ثابت ناصفر باشد، یعنی $\kappa_۱ = cte \neq ۰$.

گزاره ۵.۱۲.۱. *فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس $C^k, k \geq ۳$ با نمایش پارامتری طبیعی در $I\!R^n$ باشد. آنگاه C یک دایره با انحنای $\kappa_۱ \neq ۰$ است اگر و تنها اگر بردار های*

[۵۲] geodesic

[۵۳] geodesic circle

متعامد یکه ای مانند V_1 و V_2 در طول C و یک عدد ثابت $\kappa_1 \neq 0$ موجود باشد به طوری که

$$\frac{d}{ds}V_1 = \kappa_1 V_2, \tag{۳۰.۱}$$

$$\frac{d}{ds}V_2 = -\kappa_1 V_1. \tag{۳۱.۱}$$

اثبات. فرض کنیم C یک دایره با انحنای $\kappa_1 \neq 0$ با نمایش پارامتری طبیعی در $\mathbb{R}^n$ باشد. بنابر تعریف ۴.۱۲.۱ دایره و فرمول اول فرنه در $\mathbb{R}^n$ رابطه (۳۰.۱) برقرار است. همچنین رابطه (۳۱.۱) فرمول دوم فرنه است که به ازای $\kappa_2 = 0$ برای دایره حاصل شده است.

برعکس فرض کنیم که C یک منحنی منتظم از کلاس $C^k, k \geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی در $\mathbb{R}^n$ بوده و برای آن روابط (۳۰.۱) و (۳۱.۱) برقرار باشند. با مقایسه رابطه (۳۱.۱) و فرمول دوم فرنه یا رابطه (۲۶.۱) نتیجه می شود که $\kappa_2 = 0$. لذا بنابر تعریف C یک دایره با انحنای ثابت $\kappa_1 = cte > 0$ است. □

در گزاره بعد خواهیم دید که چگونه دایره را می توان با استفاده از ضرب داخلی تعریف کرد.

گزاره ۶.۱۲.۱. *فرض کنیم C یک منحنی منتظم با انحنای ثابت $\kappa_1 \neq 0$ از کلاس $C^k, k \geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی در $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه C یک دایره به شعاع $\frac{1}{\kappa_1}$ است اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند.*

$$\frac{d^2V_1}{ds^2} + < \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} > V_1 = 0. \tag{۳۲.۱}$$

اثبات. فرض کنیم C یک دایره با انحنای $\kappa_1 \neq 0$ با نمایش پارامتری طبیعی در $\mathbb{R}^n$ باشد. با مشتق گیری از رابطه (۳۰.۱) و جایگذاری رابطه (۳۱.۱) داریم،

$$\frac{d^2}{ds^2}V_1 = \kappa_1 \frac{dV_2}{ds} = -\kappa_1^2 V_1,$$

از آنجا معادله دیفرانسیل زیر ظاهر می شود.[۵۴]

$$\frac{d^2}{ds^2}V_1+\kappa_1^2V_1=0. \qquad (۳۳.۱)$$

با استفاده از فرمول اول فرنه داریم

$$<\frac{dV_1}{ds},\frac{dV_1}{ds}>=<\kappa_1V_2,\kappa_1V_2>=\kappa_1^2<V_2,V_2>=\kappa_1^2, \qquad (۳۴.۱)$$

که از آن رابطه (۳۲.۱) نتیجه می شود.

برعکس فرض کنیم که C یک منحنی منتظم از کلاس $C^k, k\geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی در $I\!R^n$ بوده و برای آن رابطه (۳۲.۱) برقرار باشد. از آنجا با توجه به $<V_1,\frac{dV_1}{ds}>=0$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}<\frac{dV_1}{ds},\frac{dV_1}{ds}>&=2<\frac{d^2V_1}{ds^2},\frac{dV_1}{ds}>\\&=-2<\frac{dV_1}{ds},\frac{dV_1}{ds}><V_1,\frac{dV_1}{ds}>=0.\end{aligned}$$

بنابر این $<\frac{dV_1}{ds},\frac{dV_1}{ds}>$ در طول این منحنی ثابت است. چون $k_1=cte\neq 0$ با مشتق‌گیری از رابطه (۳۱.۱) و جایگذاری فرمول دوم فرنه یا رابطه (۲۶.۱) در آن داریم

$$\frac{d^2}{ds^2}V_1=\kappa_1\frac{d}{ds}V_2=\kappa_1(-\kappa_1V_1+\kappa_2V_3)=-\kappa_1^2V_1+\kappa_1\kappa_2V_3.$$

از رابطه (۳۲.۱) نتیجه می شود $\kappa_1\kappa_2=0$ و چون $\kappa_1\neq 0$ از آن نتیجه می شود $\kappa_2=0$ لذا بنابر تعریف C یک دایره با انحنای ثابت $k_1=cte\neq 0$ و به شعاع $\frac{1}{\kappa_1}$ است. □

۱۳.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۳.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس $C^k, k\geq 1$ با نمایش پارامتری طبیعی در $I\!R^n$ باشد. نشان دهید که اگر انحنای اول آن صفر باشد آنگاه معادله پارامتری

[۵۴] مشابه این گزاره برای منحنی‌های روی رویه ها و منیفلدها نیز برقرار است. رجوع شود به مقاله [۲۱].

C به صورت زیر نوشته می شود.

$$\alpha(s) = (a_1 t + b_1, ..., a_n t + b_n).$$

تمرین ۲.۱۳.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس C^k $k \geq n,$ با نمایش پارامتری طبیعی در $\mathbb{R}^n$ باشد. با استفاده از فرمول های فرنه

الف. نشان دهید که انحناهای فرنه برای منحنی C در فضای $\mathbb{R}^3$ را می توان به ازای هر i از رابطه $\kappa_i := < V_i', V_{i+1} >$ محاسبه کرد.

ب. نشان دهید بردارهای یکه دوبدو عمود برهم V_i را می توان توسط $< V_i, V_j >= \delta_{ij}$ تعریف نمود.

تمرین ۳.۱۳.۱. الف. انحناهای اول، دوم و سوم فرنه را برای منحنی

$$\alpha(s) = (a \cos s, b \sin s, cs, ds),$$

با نمایش پارامتری طبیعی در فضای چهار بعدی $\mathbb{R}^4$ را محاسبه کنید.

ب. ضرایب a, b, c, d را طوری تعیین کنید که منحنی فوق یک ژئو دزیک شود.

ج. ضرایب a, b, c, d را طوری تعیین کنید که منحنی فوق یک دایره ژئو دزیکی شود.

۱۴.۱ راهنمای حل تمرین‌های فصل ۱

حل تمرین ۱.۲.۱ در صفحه ۱۱

با استفاده از فرمول طول قوس (۱.۱) در صفحه ۷ داریم

$$s = \int_{۰}^{t} \sqrt{a^۲ + b^۲}\, dt = \sqrt{a^۲ + b^۲}\, t,\ t = \frac{s}{\sqrt{a^۲ + b^۲}},$$

از آنجا با جایگذاری در فرمول اصلی داریم

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}, \frac{bs}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}\right).$$

حل تمرین ۲.۲.۱ در صفحه ۱۱

با استفاده از فرمول (۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} s &= \int_{۰}^{t} \left|(e^t \cos t - e^t \sin t)e_۱ + (e^t \sin t + e^t \cos t)e_۲ + e^t e_۳\right|\ dt \\ &= \int_{۰}^{t} \left(e^{۲t}(-۲ \cos t \sin t + ۱) + e^{۲t}(۲ \cos t \sin t + ۱) + e^{۲t}\right)^{\frac{۱}{۲}}\ dt, \end{aligned}$$

از آنجا مقدار پارامتر t را به دست آورده در معادله جایگزین می کنیم.

$t = \log(\frac{s}{\sqrt{۳}} + ۱),\ s = \sqrt{۳}(e^t - ۱),$ که در آن $-\sqrt{۳} < s < +\infty$.

$$\alpha(s) = (\frac{s}{\sqrt{۳}} + ۱)(\cos \log(\frac{s}{\sqrt{۳}} + ۱)e_۱ + \sin \log(\frac{s}{\sqrt{۳}} + ۱)e_۲ + e_۳).$$

۲

رویه‌ها

۱.۲ مقدمه و یادآوری نکاتی در مورد مختصات و نمایش پارامتری رویه

در دروس ریاضی عمومی با مفهومی به نام رویه [۱] آشنا شده‌ایم. در آنجا رویه را به عنوان مجموعه ای از نقاط فضای ۳ـ بعدی $I\!R^۳$ تعریف می کنیم که در تابع حقیقی سه متغیره

[۱] surface

$F(x,y,z)=\cdot$ صدق کنند. این تعریف از رویه اگر چه ساده به نظر می‌رسد، ولی برای تعاریف مهم مانند مشتق پذیری توابع روی رویه ها و بردار مماس روی رویه هاکافی نیست. در اینجا این مفهوم را به طور وسیعتری مورد مطالعه قرار می‌دهیم، به عنوان مثال رویه را طوری تعریف می کنیم که بتوان تابع مشتق‌پذیر حقیقی روی آن را تعریف کرد. این نگاه اساس کاربرد هندسه یا به طور کلی کاربرد ریاضی در علوم مختلف است. این روش پایه‌ای برای مطالعه آنالیز روی فضاهای پیچده هندسی است.

اگرچه روش تعریف رویه در این بخش کمی پیچیده به نظر می رسد ولی خواننده را برای درک بهتر مفاهیم اولیه فضاهای پیچیده تر مانند منیفلدها آماده می سازد.

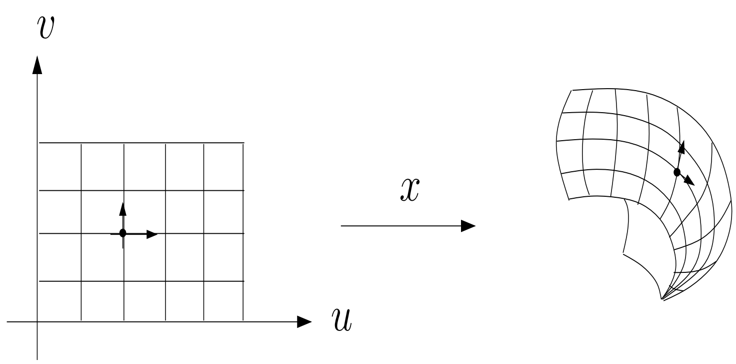
۱.۱.۲ چگونه مختصات روی یک مجموعه تعریف می شود

ابتدا باید ببینیم منظور از مختصات برای یک زیرمجموعه $I\!R^{3}$ چیست؟ فرض کنیم می خواهیم به هر نقطه از یک سطح با یک مختصات در فضای ۳ـ بعدی $I\!R^{3}$ وابسته نماییم. برای این کار یک ورقه لاستیکی مستطیل شکل را به عنوان زیرمجموعه ای از صفحه $I\!R^{2}$ در نظر گرفته سعی می کنیم سطح مورد نظر را با آن بپوشانیم بدون آنکه ورقه لاستیکی را قیچی کنیم یا دو سر آن را به هم بچسبانیم. برای برخی از سطوح خمیده مانند سهمیگون و استوانه این کار به آسانی انجام می شود. به عنوان مثال برای پوشاندن استوانه دو ورقه لاستیکی کافی است. این عمل را نسبت دادن مختصات به استوانه می گوییم. این موضوع به ما می‌آموزد که چگونه می‌توانیم مفاهیمی مانند مختصات و بعد، برای یک سطح خمیده و یا به طور کلی برای یک مجموعه تعریف کنیم.

پس از تعریف مختصات برای یک مجموعه دلخواه، تعریف مفاهیمی مانند بعد، تابع دیفرانسیل پذیر، مشتقات جزئی، بردار مماس، فضای مماس و دیگر مفاهیم اساسی ریاضی امکان‌پذیر می‌گردد.

برای نسبت دادن مختصات به هر نقطه از یک سطح خمیده دیدیم که باید آن سطح

خمیده را توسط تعدادی ورقه لاستیکی مستطیل شکل بپوشانیم. این عمل را می‌توان توسط یک یا چند نگاشت انجام دادکه به آن **نقشه** یا **کارت مختصات موضعی** می گوییم.



شکل ۱.۲: کارتهای مختصاتی به نقاط یک مجموعه مختصات وابسته می کنند.

این نگاشتها را می‌توان به صفحات لاستیکی که قابلیت کش آمدن داشته و غیر قابل پاره کردن یا چسباندن باشند، تشبیه نمود. شکل ۱.۲ را ببینید. ممکن است یک نگاشت برای پوشاندن کل یک سطح کافی نباشد، در این صورت باید از نگاشت‌های دیگری که با آن مرتبط اند استفاده نمود. به عنوان مثال کل کره را نمی‌توان با یک صفحه لاستیکی یا یک کارت مختصاتی پوشاند و لااقل دو صفحه لاستیکی برای پوشاندن آن لازم است. حال ببینیم برای تعریف مختصات در روی یک سطح می توانیم از چه نگاشتهایی استفاده کنیم. این نگاشت ها باید دارای چند خاصیت باشند.

- اول اینکه این نگاشت باید پیوسته و یک به یک باشد تا معکوس آن نیز قابل تعریف بوده و بتوان به طور پیوسته یک ارتباط مستقیم بین نواحی باز $I\!R^2$ و نواحی سطح مورد نظر تعریف نمود. این خاصیت ممکن است به طور سرتاسری برای سطوحی که یک به یک نیستند مشکل ایجاد کند. به عبارت دیگر به طور «سرتاسری»[۲] سطوحی

[۲] In the large(globally)

که خود را قطع می‌کنند، شامل این تعریف نمی‌شوند. اما در نگاه «موضعی»[۳] یعنی در همسایگی‌های به اندازه کافی کوچک می‌توان مشکل یک به یک بودن را حل کرد.

- خاصیت خوب دوم این است که مشتقات جزیی این نگاشت موجود بوده هم‌راستا نباشند. در این صورت ضرب خارجی آنها یا دترمینان ماتریس ژاکوبین مخالف صفر است . اگر این تابع را با x و مشتقات جزئی آن را با x_u و x_v نمایش دهیم، آنگاه این شرط معادل آن است که $x_u \times x_v \neq ۰$ در این صورت خواهیم دید که این نگاشت بعد حوزه تعریف را حفظ کرده بعلاوه اگر نمایش پارامتری رویه را تغییر دهیم در تعداد نقاط تکین رویه تغییری پیدا نمی شود. گزاره ۴.۱.۲ در صفحه ۶۶ راببینید. همچنین با استفاده از این شرط می توان از قضیه تابع معکوس نیز استفاده نمود. گزاره ۸.۲.۲ در صفحه ۷۲ راببینید.

- خاصیت خوب سوم این است که بتوان نگاشت دیفرانسیل پذیر C^k روی این سطح تعریف کرد. در این صورت این را منیفلد دو بعدی دیفرانسیل پذیر C^k می گوییم.

با کمی تغییر در روش تعیین مختصات برای یک سطح خمیده می توان روش تعیین مختصات برای یک مجموعه دلخواه را نیز به دست آورد. این کار را در بخش تعریف منیفلدها انجام خواهیم داد.

۲.۱.۲ نقاط تکین و نمایش پارامتری

در اینجا بانقاط جدیدی به شرح زیر آشنا می شویم.

تعریف ۱.۱.۲. **نقطهٔ تکین** پارامتری [۴] نقطه‌ای است که در آن $x_u \times x_v$ تعریف نشده یا صفر باشد. نقاط دیگر رویه را **نقاط منتظم** می نامیم.

[۳] In the small(locally)

[۴] parametric singular point

مثال ۲.۱.۲. فرض کنیم رویه ما صفحهٔ $z = \cdot$ باشد، در این صورت هر نقطه روی آن را می‌توان در دستگاه اقلیدسی با پارامترهای $x = u \ , \ y = v, z = \cdot$ مشخص نمود. لذا اگر کارت مختصاتی آن را با $x(u,v) = (u,v,\cdot)$ نمایش دهیم داریم

$$\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ & \cdot \end{pmatrix} = k \neq \cdot.$$

از اینجا نتیجه می شود که روی صفحه در این مختصات نقطه تکین نداریم و در نمایش پارامتری اقلیدسی مبدأ یک نقطهٔ منتظم است. اما اگر دستگاه مختصات قطبی را در نظر بگیریم داریم. $x = rcos\theta \ \ , y = rsin\theta \ \ , z = \cdot$

$$x_r \times x_\theta = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \cdot \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & \cdot \end{pmatrix} = rk.$$

که در مبدأ $r = \theta = \cdot$، بنابراین در نمایش پارامتری قطبی، مبدأ یک نقطهٔ تکین پارامتری است. لذا در نمایش پارامتری اقلیدسی صفحه یک رویه منتظم است در حالی که در نمایش پارامتری قطبی، صفحه یک رویه منتظم نیست.

از مثال بالا این طور استنباط می‌گردد که وجود نقطهٔ تکین یا منتظم یک سطح بستگی به دستگاه مختصات (نمایش پارامتری) آن سطح دارد و این موضوع، یعنی تعریف یک دستگاه مختصات، نقش اساسی در معرفی سطح دارد. گزاره ۴.۱.۲ به نوعی مشکل ظاهر شدن نقاط تکین جدید پس از یک تغییر مختصات را حل می کند.

با فرض معلوم بودن نمایش پارامتری $x = x(u^۱, u^۲)$، مقادیر پارامترهای $u^۱$ و $u^۲$ موضع یک نقطه روی رویه را معین می‌کند. این پارامترها را **مختصات گاوسی یا مختصات منحنی‌الخط** [۵] نیز می‌نامند. اگر $u^۱$ ثابت باشد و $u^۲$ تغییر کند، نقاط نظیر روی سطح، بر

[5] Gaussian or Curvelinear coordinates

یک منحنی به معادلهٔ $u^1 = cte$ قرار می‌گیرند. در شکل ۱.۲ اگر یکی از پارامترها مثلا $u = u.$ ثابت فرض شود، نگاشت $x = x(u., v)$ یک منحنی در روی رویه است.

یک رویه را می‌توان با نمایش های مختلف به صورت پارامتری نوشت. اگر مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) را با مختصات جدید (u'^1, u'^2)، که توسط رابطهٔ زیر به هم مربوطند، عوض کنیم

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(u'^1, u'^2) \\ u^2 &= u^2(u'^1, u'^2). \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

رویه $x = x(u^1, u^2)$ دارای شکل پارامتری جدیدی به صورت زیر خواهد بود.

$$x = x_*(u^1, u^2) = x\left(u^1(u'^1, u'^2), u^2(u'^1, u'^2)\right)$$

تعریف ۳.۱.۲. یک نمایش پارامتری را نمایش پارامتری مجاز از کلاس C^k گویند اگر:

۱) x در حوزهٔ تعریف خود یک به یک باشد.

۲) x در حوزهٔ تعریف از کلاس C^k که $k > 1$ باشد.

۳) در تمام حوزهٔ تعریف x، حاصلضرب برداری $\frac{\partial x}{\partial u^1} \times \frac{\partial x}{\partial u^2} \neq 0$.

گزاره ۴.۱.۲. *اگر ژاکوبین تغییر مختصات (۱.۲) در حوزه تعریف مخالف صفر باشد، برای نمایش پارامتری جدید در این حوزه تعریف نقاط تکین جدیدی ظاهر نمی‌شود.*

اثبات. با توجه به شرط مشتق‌پذیری کارت ها و قاعده زنجیره ای داریم:

$$\begin{aligned} x'_u &:= \frac{\partial x}{\partial u'^1} = \frac{\partial x}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial u'^1} + \frac{\partial x}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial u'^1} = \frac{\partial u^1}{\partial u'^1}x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^1}x_v, \\ x'_v &:= \frac{\partial x}{\partial u'^2} = \frac{\partial x}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial u'^2} + \frac{\partial x}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial u'^2} = \frac{\partial u^1}{\partial u'^2}x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^2}x_v. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x'_u \times x'_v &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial u'^1}x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^1}x_v\right) \times \left(\frac{\partial u^1}{\partial u'^2}x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^2}x_v\right), \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial u'^1}\frac{\partial u^2}{\partial u'^2}x_u \times x_v + \frac{\partial u^2}{\partial u'^1}\frac{\partial u^1}{\partial u'^2}x_v \times x_u, \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} & \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} & \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} \end{vmatrix} x_u \times x_v = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} x_u \times x_v. \end{aligned}$$

که در آن $J = \frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u'^1,u'^2)}$ ژاکوبین تغییر مختصات نام دارد. چون طبق فرض در حوزهٔ تعریف ژاکوبین تغییر مختصات مخالف صفر است ($J \neq 0$) ، یک نقطه در پارامتری سازی جدید می‌تواند تکین باشد، اگر و فقط اگر در پارامتری سازی قدیم تکین باشد.

$$x'_u \times x'_v = 0 \Longleftrightarrow x_u \times x_v = 0.$$

بنابراین نقاط تکین جدیدی نمی‌تواند ظاهر شود. □

به همین دلیل بهتر است که در هندسهٔ دیفرانسیل، رویه‌ها با استفاده از کارت‌هایی تعریف شوند که در شرایط فوق صدق کنند. تعمیم این موضوع در ابعاد بالاتر منجر به تعریف منیفلدها می‌گردد.

۲.۲ رویه های معمولی، منتظم و دیفرانسیل پذیر

فرض کنیم D مجموعه بازی از صفحه $\mathbb{R}^2$ باشد. منظور ما از مجموعه باز در اینجا یک مستطیل باز، یک قرص باز یا مجموعه‌های مشابه [۶] آنها است. نگاشت پیوسته و یک به

[۶] به جای کلمهٔ «مشابه» در اینجا می‌توان از کلمهٔ دقیقتر «دیفئومورف» که در ادامه تعریف خواهد شد، استفاده کرد.

یک

$$
\begin{aligned}
x : & D \longrightarrow U = x(D) \subset I\!R^3, \\
& (u,v) \mapsto \left(x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v)\right).
\end{aligned}
$$

را در نظر گرفته مشتقات آن نسبت به u و v را به ترتیب با سه تایی $x_u = (\frac{\partial x^i}{\partial u})$ و $x_v = (\frac{\partial x^i}{\partial v})$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم نگاشت x **منتظم**[۷] است، اگر در تمام نقاط مجموعه D مشتقات جزئی آن موجود و پیوسته بوده و ضرب خارجی آنها مخالف صفر باشد. [۸]

$$
x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^2}{\partial u} & \frac{\partial x^3}{\partial u} \\ \frac{\partial x^1}{\partial v} & \frac{\partial x^2}{\partial v} & \frac{\partial x^3}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.
$$

تعریف ۱.۲.۲. یک **نقشه** [۹] یا **کارت مختصاتی معمولی** [۱۰] ۲ـ بعدی، نگاشتی پیوسته و یک به یک است که از زیرمجموعه باز $D \subseteq I\!R^2$ به $I\!R^3$ تعریف می شود. بعلاوه اگر این نگاشت منتظم و از کلاس C^k باشد، به آن **کارت منتظم** از کلاس C^k گفته می شود. یک کارت مختصاتی را با دوتایی (x, U) نیز نمایش می دهند که در آن $U = x(D)$.

در کتب هندسه دیفرانسیل گاهی از واژه قدیمی **پارامتری‌سازی** [۱۱] به جای کلمه کارت یا نقشه استفاده می شود. شکل ۱.۲ را ببینید. تصویر $U = x(D)$ یک زیرمجموعه باز M است، زیرا تصویر یک باز توسط تابعی پیوسته است.

---

[۷] regular

[۸] این موضوع معادل آن است که دو بردار x_u و x_v مستقل خطی بوده و در یک راستا نباشند. در این صورت نگاشت x یک همئومورفیسم موضعی بین رویه و $I\!R^2$ برقرار نموده مفهوم بعد برای رویه معنی پیدا می کند. پیوستگی مشتقات جزیی هنگام استفاده از قضیه تابع معکوس کاربرد دارد. گزاره ۸.۲.۲ را ببینید.

[۹] chart

[۱۰] coordinate patch

[۱۱] parametrization

تعریف ۲.۲.۲. زیرمجموعه M از $I\!R^۳$ را یک **رویه معمولی** [۱۲] ۲ـ بعدی در $I\!R^۳$ گوییم، اگر کلیه نقاط آن توسط کارت های مختصاتی ۲ـ بعدی معمولی پوشیده شده باشد.

تعریف ۳.۲.۲. زیرمجموعه M از $I\!R^۳$ را یک [۱۳]**رویه منتظم** ۲ـ بعدی در $I\!R^۳$ از کلاس C^k گوییم، اگر کلیه نقاط آن به ترتیب توسط کارت های مختصاتی ۲ـ بعدی منتظم از کلاس C^k پوشیده شده باشد.

گاهی اوقات برای سادگی، اگر احتمال اشتباه نرود ، از لفظ منتظم در کنار رویه صرف نظر می‌نمایند.

نظر به اینکه بیشترین کاربرد رویه‌ها در تعریف توابع دیفرانسیل‌پذیر روی آن ها است، باید شرایطی به مفهوم رویه اضافه نماییم تا بتوان تابع دیفرانسیل پذیر روی آن رویه را تعریف کرد. در این صورت رویه را رویه دیفرانسیل پذیر خواهیم نامید.

ممکن است کلیهٔ نقاط مجموعهٔ M در یک کارت مختصاتی قرار نگیرد، در این صورت از چند کارت مختصاتی برای پوشاندن همهٔ نقاط M استفاده می‌کنیم. شکل ۲.۲ را ببینید.

اگر نقطه $p \in U \cap V \subset M$ در داخل دو همسایگی $x(D_۱) = U$ و $y(D_۲) = V$ در دو کارت مختصاتی (x, U) و (y, V) با فرض $U \cap V \neq \phi$ قرار داشته باشد، دو کارت مختصاتی

$$x : D_۱ \longrightarrow U \subseteq M \ , \ y : D_۲ \longrightarrow V \subseteq M,$$

را در نظر می گیریم. نگاشت $y^{-۱} \circ x$ یا معکوس آن $x^{-۱} \circ y$

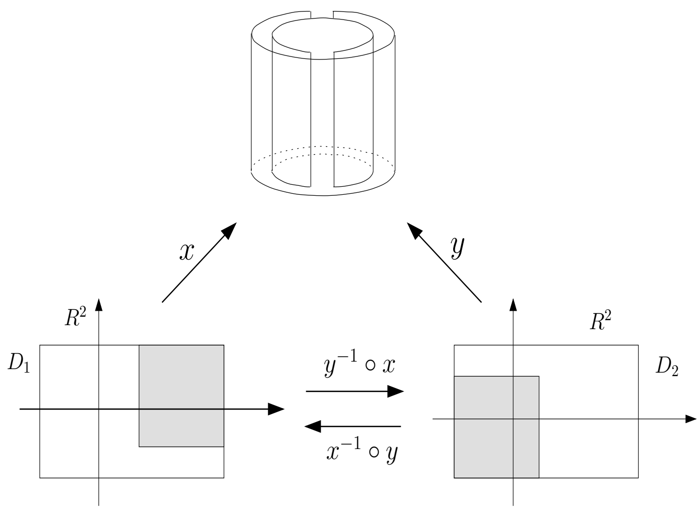
$$y^{-۱} \circ x : D_۱ \subseteq I\!R^۲ \longrightarrow D_۲ \subseteq I\!R^۲$$

را **نگاشت تغییر کارت یا تغییر مختصات** می نامیم. دو کارت (x, U) و (y, V) را

---

[۱۲] ordinary surface

[۱۳] regular surface



شکل ۲.۲: نگاشت تغییر کارت روی استوانه.

همارز از کلاس C^k [۱۴] گوییم، اگر با فرض $x(D_1) \cap y(D_2) \neq \phi$ نگاشت $y^{-1} \circ x$ و معکوس آن $x^{-1} \circ y$ در حوزه تعریف خود از کلاس C^k باشند.

در اینجا منظور از C^k بودن یک نگاشت آن است که مشتقات جزئی مرتبه k ام آن موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۴.۲.۲. رویهٔ منتظم M را **دیفرانسیل پذیر از کلاس** C^k[۱۵] گوییم، اگر کارتهای آن هم ارز از کلاس C^k باشند.

از این تعریف معلوم می شود که همه رویه های منتظم که فقط با یک کارت سرتاسری پوشیده می شوند یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ هستند چون نگاشت تغییر کارت آن همانی بوده و از کلاس C^∞ است.

[۱۴] C^k-equivalent

[۱۵] C^k-differentiable

مثال ۵.۲.۲. سهمی‌گون $z = x^۲+y^۲$ یک رویه معمولی است چون تصویر نگاشت پیوسته و یک به یک $x : (u,v) \longrightarrow (u,v,u^۲+v^۲)$ است. سهمی گون رویه منتظم نیز هست چون با کارت منتظم زیر پوشانده می‌شود.

$$x : (u,v) \longrightarrow (u,v,u^۲+v^۲)$$
$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & ۲u \\ ۰ & ۱ & ۲v \end{pmatrix} \neq ۰$$

سهمی‌گون رویه دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k نیز هست چون این کارت کل سهمی‌گون را می‌پوشاند، بنابراین نیاز به تعریف کارت دیگری نیست. در حقیقت می توان کارت مشابه دیگری مانند y تعریف نمود، که سهمی‌گون را بپوشاند و نگاشت تغییر کارت $y^{-۱} \circ x$ نگاشت همانی باشد، که بینهایت بار مشتق‌پذیر است.

مثال ۶.۲.۲. استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع ۱ و ارتفاع باز ۱ را با C نمایش می‌دهیم. می دانیم که استوانه C را می توان توسط دو تابع پیوسته و یک به یک x و y با حوزه‌های تعریف $D_۱ =]۰,۲\pi[\times]۰,۱[$ و $D_۲ =]-\pi,\pi[\times]۰,۱[$ که دو مستطیل باز هستند، به شرح زیر پوشانید. شکل ۲.۲ را ببینید.

$$\begin{array}{rcccl} x & : & D_۱ \subseteq I\!R^۲ & \longrightarrow & C_x \subseteq I\!R^۳, \\ & & (u,v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v), \\ y & : & D_۲ \subseteq I\!R^۲ & \longrightarrow & C_y \subseteq I\!R^۳, \\ & & (s,t) & \mapsto & (\cos s, \sin s, t). \end{array}$$

به راحتی بررسی می‌شود که x و y یک به یک هستند. لذا استوانه یک رویه معمولی است. از طرف دیگر مشابه مثال قبل به راحتی مشاهده می‌شود که $x_u \times x_v \neq ۰$. در نتیجه استوانه یک رویه منتظم نیز هست . برای آنکه استوانه رویه دیفرانسیل پذیر باشد باید نشان

دهیم که نگاشت تغییر کارت $y^{-1} \circ x$ دیفرانسیل پذیر است.

$$\begin{array}{rcccc} y^{-1} \circ x & : & D_1 \subseteq I\!R^2 & \longrightarrow & D_2 \subseteq I\!R^2 \\ & & (u,v) & \mapsto & (u-\pi, v) \end{array}$$

این نگاشت که از $I\!R^2$ در $I\!R^2$ تعریف می شود دیفرانسیل‌پذیر بوده و ژاکوبین آن ماتریس واحد 2×2 است. چون $\det J \neq 0$، تابع معکوس $x^{-1} \circ y$ نیز بنا بر قضیهٔ تابع معکوس دیفرانسیل‌پذیر است، لذا استوانه یک رویه دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k است.

تعریف ۷.۲.۲. یک تابع دوسویی پیوسته که عکس آن نیز پیوسته باشد را یک **همئومورفیسم** [۱۶] می نامیم. اگر یک همئومورفیسم بین دو رویه برقرار باشد آن دو رویه را **همئومورف** [۱۷] می نامیم.

اگر تابعی در یک همسایگی از هر نقطه همئومورفیسم باشد آن را **همئومورفیسم موضعی** [۱۸] می گوییم. در مثال۵.۲.۲ سهمیگون با صفحه همئومورف است. در مثال۶.۲.۲ استوانه با صفحه همئومورف نیست اما استوانه با صفحه به طور موضعی همئومورف است. درگزاره بعد ثابت می کنیم که رویه منتظم M *موضعا همئومورف* با صفحه است، یعنی هر نقطه $p \in M$ در یک همسایگی U قرار دارد که با بازی از صفحه ۲-بعدی همئومورف است.

گزاره ۸.۲.۲. *فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد. نگاشت x از کارت (x,U) یک همئومورفیسم موضعی روی برد x است.*

---

[۱۶] homeomorphism

[۱۷] homeomorph

[۱۸] locally homeomorphism

اثبات. فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد.از شرط $x_u \times x_v \neq ۰$ نتیجه می شود که

$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x^۱}{\partial u} & \frac{\partial x^۲}{\partial u} & \frac{\partial x^۳}{\partial u} \\ \frac{\partial x^۱}{\partial v} & \frac{\partial x^۲}{\partial v} & \frac{\partial x^۳}{\partial v} \end{pmatrix} \neq ۰.$$

لذا دو سطر دوم و سوم مستقل خطی بوده و رتبه این ماتریس برابر ۲ است. به عبارت دیگر یک زیرماتریس ۲ $\times$ ۲ با دترمینان غیر صفر در آن وجود دارد. فرض کنیم

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^۱}{\partial u} & \frac{\partial x^۲}{\partial u} \\ \frac{\partial x^۱}{\partial v} & \frac{\partial x^۲}{\partial v} \end{pmatrix} \neq ۰. \qquad (۲.۲)$$

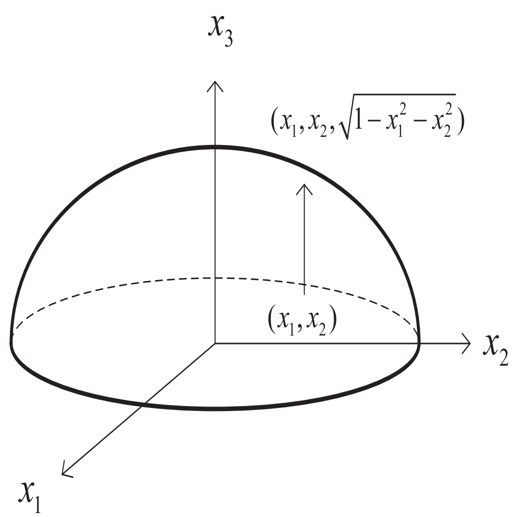
رویه M را روی سایه اش در صفحه $(x^۱, x^۲)$ توسط نگاشت پیوسته تصویر

$$Proj : (x^۱, x^۲, x^۳) \to (x^۱, x^۲),$$

تصویر می کنیم. عبارت (۲.۲) دترمینان ژاکوبین نگاشتی است مانند $h : I\!R^۲ \to I\!R^۲$ بین تصویر رویه M روی صفحه $(x^۱, x^۲)$ توسط نگاشت پیوسته تصویر $Proj$ و بخشی از صفحه (u, v). چون ژاکوبین این نگاشت مخالف صفر است، بنابر قضیه تابع معکوس، h همئومورفیسم موضعی از بازی از صفحه $(x^۱, x^۲)$ به بازی از صفحه (u, v) است. لذا نگاشت معکوس $x^{-۱} = h \circ Proj$ پیوسته است، چون ترکیب دو تابع پیوسته است. بنابراین x یک همئومورفیسم موضعی روی برد x است. □

۱.۲.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۲.۲. نشان دهید که کارت $x : (u, v) \longrightarrow (u, v, f(u, v))$ منتظم است اگر تابع f دیفرانسیل‌پذیر باشد.



شکل ۳.۲: یک کارت مختصاتی روی نیمکره بالایی

تمرین ۲.۲.۲. الف. نشان دهید که نمودار کارت

$$x : (u, v) \longrightarrow (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u),$$

که در آن $\cdot < u < \pi$, $-\infty < v < +\infty$, $a, b, c > \cdot$ یک بیضی گون است.

ب. شرایطی ارایه کنید که x منتظم باشد.

ج. آیا x کل بیضی گون را می پوشاند.

د. شرایطی ارایه کنید که x کل بیضی گون را بپوشاند.

تمرین ۳.۲.۲. نیم- کره یکه باز $S^{۲}_{+}$ بالای صفحه $x \circ y$ را در نظر گرفته نشان دهید:

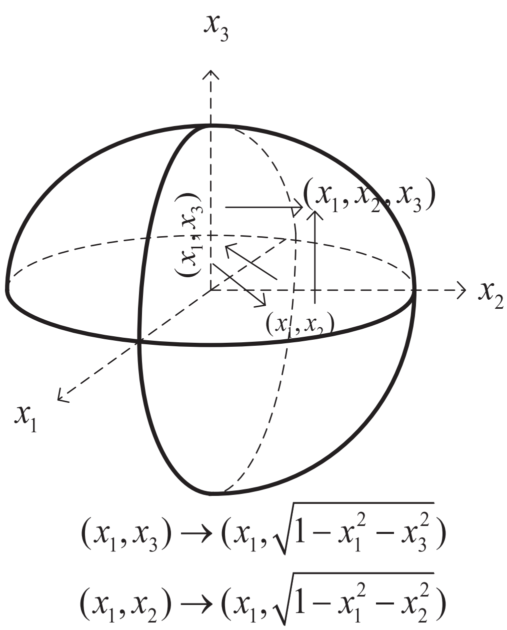
الف) یک رویه معمولی است.

ب. یک رویه منتظم است.

ج) یک رویه دیفرانسیل پذیر است.

ه) بعد نیمکره چند است.

راهنمایی: کارت های نیمکره را به صورت $x : (x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2})$ انتخاب کنید. شکل ۳.۲ را ببینید.



شکل ۴.۲: نگاشت تغییر کارت دو کارت مختصاتی هم ارز روی کره

تمرین ۴.۲.۲. کره یکه S^2 را در نظر می گیریم. تعیین کنید که با چند نیم- کره باز می توان آن را پوشانید. سپس نشان دهید که کره S^2:

الف. یک رویه معمولی است.

ب. یک رویه منتظم است.

ج. یک رویه دیفرانسیل پذیر است.

ه. آیا بعد کره با بعد نیمکره متفاوت است.

راهنمایی: تعداد کارت های لازم برای پوشاندن کره، که دامنه آنها از نیمکره باز تشکیل شده و روی

صفحه تصویر قائم می شوند، عدد ۶ است. علت این موضوع را بیان کنید. کارت دیگر کره را به صورت $y:(x_1,x_3)\longrightarrow(x_1,\sqrt{1-x_1^2+x_3^2},x_3)$ انتخاب کنید. سپس هم ارز بودن این دو کارت را تحقیق کنید. شکل ۴.۲ را ببینید.

۳.۲ رویه های جالب

در این بخش با رویه های جالبی که می تواند کاربردهایی در علوم مختلف داشته باشد مانند رویه دوار، استوانه، آشنا شده و روش بدست آوردن معادلات آن را فرا می گیریم.

۱.۳.۲ رویه‌های دوار

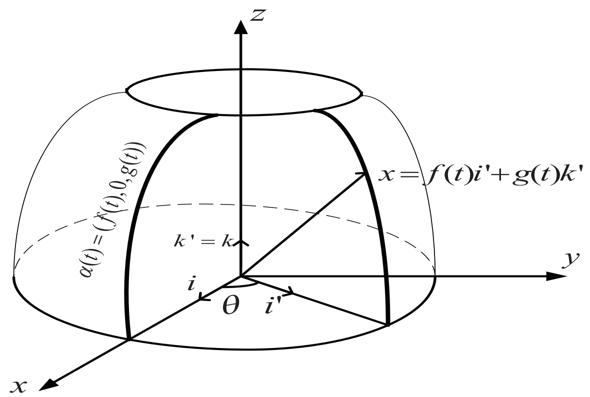
رویه دوار[۱۹] سطحی است که از دوران یک منحنی مسطح C حول یک خط L که در صفحه منحنی قرار دارد پدید می آید. منحنی C را مقطع عرضی [۲۰] و خط L را محور[۲۱] رویه دوار می نامیم. منحنی C را در موقعیت‌های متفاوت منحنی‌های نصف‌النهار [۲۲] نیز می نامند. اگر منحنی C در صفحه $x\circ z$ باشد آنگاه می توان معادله پارامتری آن را به صورت $\alpha(t)=(f(t),\cdot,g(t))$ که در آن $a<t<b$ نوشت. در اینجا فرض می‌کنیم که تابع $f>\cdot$ مثبت و α منحنی منتظم و از کلاس C^k باشد. برای به دست آوردن معادله سطح دوار فرض کنیم سه بردار پایه (i,j,k) به اندازه θ طوری در صفحه $x\circ y$ دوران کند که همواره بردار k در راستای محور z باقی بماند $k=k'$. شکل ۵.۲ را ببینید. این سه بردار پایه جدید را با (i',j',k') نمایش می دهیم. در این صورت بردار موضع هر نقطه از سطح دوار که در روی صفحه $x\circ y$ قرار دارد را می توان به صورت زیر نوشت.

[۱۹] surface of revolutio)n

[۲۰] profile

[۲۱] axis

[۲۲] meridian



شکل ۵.۲: رویه دوار از دوران یک منحنی مسطح حول یک محور در صفحه منحنی پدید می آید.

اما می دانیم $x(t) = f(t)i' + \cdot j' + g(t)k'$ و $i' = \cos\theta i + \sin\theta j$ و $k = k'$ با جایگذاری داریم

$$x(t,\theta) = f(t)\cos\theta i + f(t)\sin\theta j + g(t)k$$

لذا با استفاده از پارامترهایی (u,v) معادله پارامتری سطح دوار حاصل از دوران منحنی C در صفحه $x \circ z$ حول محور z به صورت زیر نوشته می شود.

$$x(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)). \tag{۳.۲}$$

سطح دوار یک رویه منتظم است، زیرا مولفه های منحنی منتظم و از کلاس C^k هستند، از آنجا چون $f > \cdot$

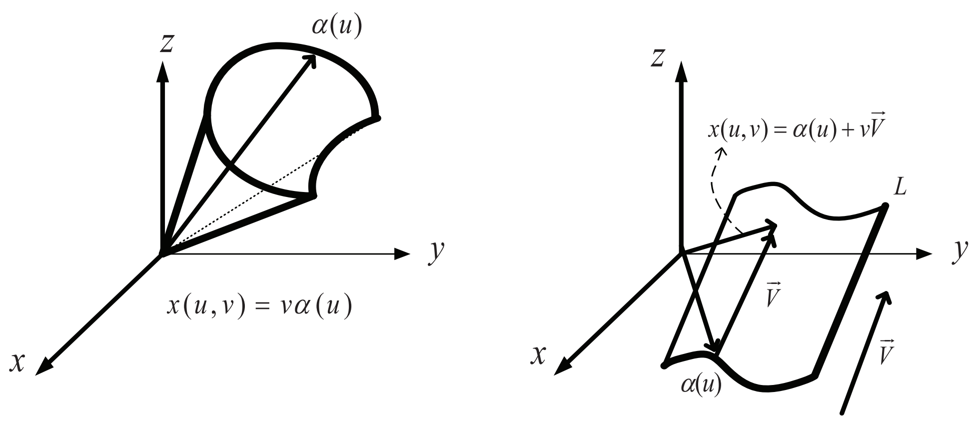
$$|x_u \times x_v| = -g'f\cos vi - g'f\sin vj + f'fk = f\sqrt{(g')^{۲} + (f')^{۲}} \neq \cdot.$$

لذا رویه دوار یک رویه منتظم است.

۲.۳.۲ رویه استوانه‌ای

[۲۳]**رویه استوانه‌ای** سطحی است که از حرکت یک خط راست L به موازات خودش و در امتداد یک منحنی مسطح C پدید می آید. اگر خط L بر صفحه منحنی C عمود باشد استوانه را قائم و اگر منحنی C یک دایره باشد استوانه را مستدیر قائم می نامیم. اگر معادله منحنی C را با $\alpha(u)$ نمایش دهیم و راستای خط L بردار V باشد، آنگاه می توان بردار موضع هر نقطه از استوانه را با جمع بردار منحنی C و مضربی از V به صورت زیر نوشت. شکل ۶.۲ (الف) را ببینید.

$$x(u, v) = \alpha(u) + vV.$$



ب. رویه مخروطی

الف. استوانه مایل

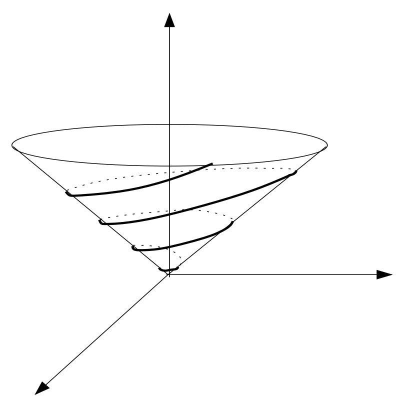
شکل ۶.۲: به دست آوردن معادله پارامتری استوانه و مخروط

[۲۳]cylinder surface

۳.۳.۲ رویه مخروطی

فرض کنیم که C یک منحنی ساده [۲۴] و نه الزاما بسته مسطح در فضا و O یک نقطه خارج از صفحه منحنی C باشد. [۲۵]**رویه مخروطی** سطحی است که از خطوط گذرنده از منحنی C و نقطه O پدید می آید. اگر معادله منحنی C را با $\alpha(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ نمایش دهیم، آنگاه می توان بردار موضع هر نقطه از رویه مخروطی را به صورت مضربی از بردار موضع منحنی C یعنی $x(u, v) = v\alpha(u)$ نوشت. از آنجا نمایش پارامتری این رویه به صورت زیر نوشته می شود. شکل ۶.۲ (ب. را ببینید.

$$x(u, v) = (v\alpha_1(u), v\alpha_2(u), v\alpha_3(u)).$$



شکل ۷.۲: یک منحنی مارپیچ روی مخروط

مثال ۱.۳.۲. در درس ریاضی عمومی رویه را در دستگاه دکارتی با $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ نشان می دادیم. در دستگاه مختصات استوانه‌ای مخروط را با $z = ar$ نمایش می دادیم. می دانیم دو رویه به معادلات $z = \theta$ و $z = ar$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب

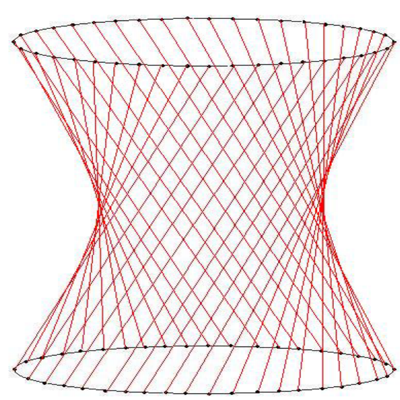
[۲۴] منظور آن است که C یک منحنی در صفحه باشد که خودش را قطع نکند.

[۲۵] conic surface

یک سطح موسوم به سطح پلکانی و یک نیم-مخروط هستند. منحنی حاصل از تقاطع دو رویه فوق یک منحنی مارپیچ مخروطی است. از تقاطع $z=\theta$ و $z=ar$ داریم $r=\frac{\theta}{a}$ لذا $r(\theta)=\left(\frac{\theta}{a}cos\theta,\frac{\theta}{a}\sin\theta,\theta\right)$ که یک معادله پارامتری برای مارپیچ روی مخروط است. شکل ۷.۲ را ببینید.

۴.۳.۲ رویه های خط دار

رویه خط دار سطحی است که از حرکت یک خط L در فضا پدید می آید. به عبارت دیگر رویه خط دار سطحی است که توسط یک خانواده یک پارامتری از خطوط راست پدید می آید. شکل ۸.۲ رویه ای خط دار به نام رویه خط دار هذلولوی[۲۶] را نمایش می دهد. فرض

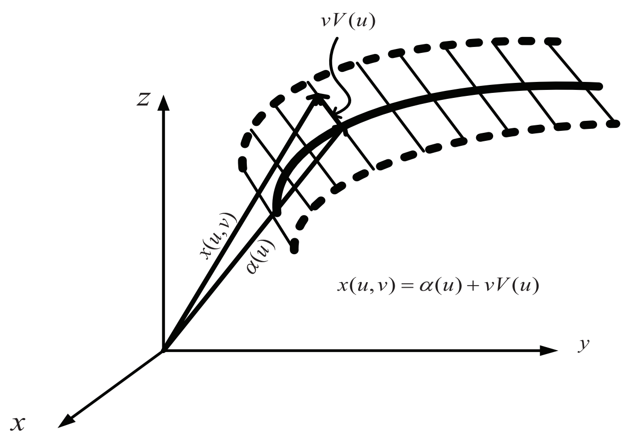


شکل ۸.۲: رویه های خط دار هذلولوی از حرکت یک خط راست پدید می آیند.

کنیم $\alpha(u)$ یک منحنی از کلاس C^k در فضا و $V(u)$ یک بردار غیر صفر از کلاس C^k باشدکه در طول منحنی α حرکت می کند. منحنی $\alpha(u)$ را **منحنی پایه** [۲۷] و بردار V را

[۲۶] Ruled-hyperboloid

[۲۷] base



شکل ۹.۲: هرنقطه از رویه خط دار را می توان به صورت جمع دو بردار نوشت.

بردار هادی [۲۸] رویه خط دار می نامیم. برای به دست آوردن معادله رویه خط دار می گوییم هر نقطه از این سطح را می توان با بردار موضع x که از جمع دو بردار $\alpha(u)$ و $V(u)$ تشکیل شده است به صورت

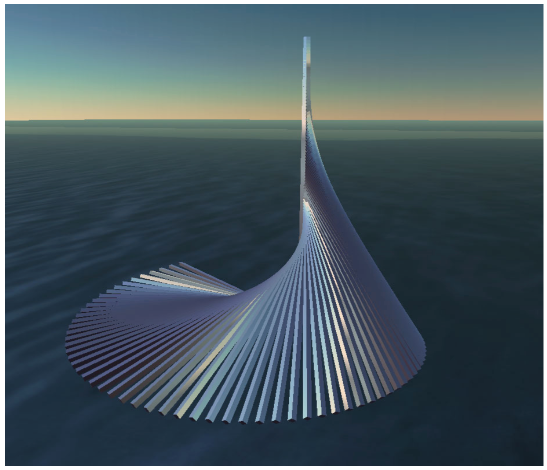
$$x(u,v)=\alpha(u)+vV(u).$$

نشان داد که در آن v یک پارامتر دلخواه است. شکل ۹.۲ را ببینید.

مثال ۲.۳.۲. بسیاری از رویه هایی که با آن سروکار داریم مانند استوانه رویه های خط دار هستند. زنجیر گون و مارپیچ گون نیز رویه های خط دار هستند. شکلهای ؟؟ و ؟؟ در صفحه های ؟؟ و ؟؟ راببینید.

رویه های خط دار به خاطر آسانی استفاده از میلگرد ها یا لوله های راست در عمل کاربرد زیادی در معماری دارند. از خواص دیگر رویه های خط دار مینیمم بودن مساحت سطوحی است که به وسیله خط راست پدید می آیند. این موضوع در کاهش هزینه ها و

[۲۸] ruling of the surface



شکل ۱۰.۲: رویه خط دار پیچ ارشمیدسی

افزایش سطوح باطری های خورشیدی برای استفاده در ساختمان های جدید به طور قابل ملاحظه ای اهمیت دارد. از جمله می توان به رویه خط دار پیچ ارشمیدسی[۲۹] اشاره کرد. شکلهای ۱۰.۲ و ۱۱.۲ را ببینید.

۵.۳.۲ تمرین‌های بخش

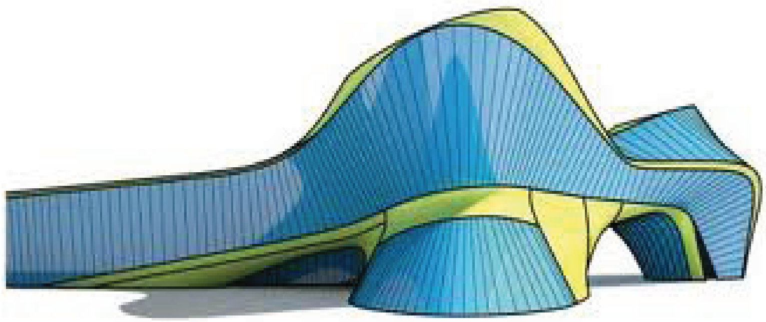
تمرین ۱.۳.۲. الف. نشان دهید که رویه استوانه‌ای یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

ب. معادله دکارتی رویه استوانه‌ای قائمی را بنویسید که موازی محور z بوده و قاعده آن یک بیضی باشد.

ج. معادله پارامتری رویه استوانه‌ای قائمی را بنویسید که موازی یکی از محورها است.

د. نشان دهید که در معادله دکارتی رویه استوانه‌ای قائم موازی با یکی از محورها متغییری که مربوط به آن محور است در معادله نیست.

[۲۹] Archimedean spiral ruled surface



شکل ۱۱.۲: رویه های خط دار در معماری

تمرین ۲.۳.۲. الف. نشان دهید که رویه دوار یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.
ب. نشان دهید که در هر نقطه از سطح دوار منحنی های نصف النهار بر دایره های سطح مقطع عمودند.

تمرین ۳.۳.۲. نشان دهید که معادله دکارتی رویه دوار حاصل از دوران یک منحنی در صفحه حول یکی از سه محور به صورت زیر ارائه می گردد.
الف. از دوران منحنی $y = f_1(z)$ در صفحه $y \circ z$حول محور z نتجه می شود.

$$x^2 + y^2 = f_1(z)^2. \tag{۴.۲}$$

ب. از دوران منحنی $z = f_2(x)$ در صفحه $z \circ x$حول محور x نتجه می شود.

$$y^2 + z^2 = f_2(x)^2. \tag{۵.۲}$$

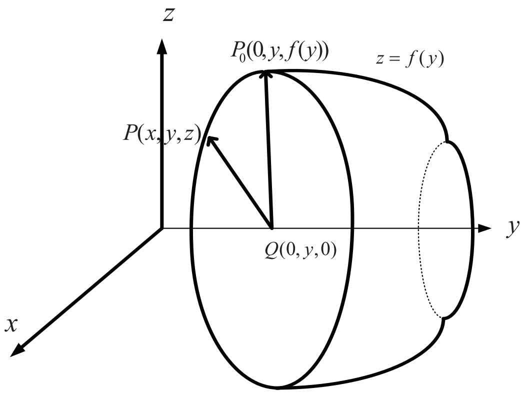
ج. از دوران منحنی $x = f_1(y)$ در صفحه $x \circ y$حول محور y نتجه می شود.

$$z^2 + x^2 = f_3(y)^2. \tag{۶.۲}$$

راهنمایی. یکی از فرمول ها را با توجه به شکل ۱۲.۲ محاسبه و بقیه را به شکل دوری از

رابطه اول نتیجه بگیرید. توجه کنید که همواره $|QP| = |QP.|$.

د. درستی رابطه ۴.۲ را با استفاده از دوران منحنی $z = y^۲$ حول محور z ها تحقیق کنید.



شکل ۱۲.۲: معادله دکارتی سطح دوار

تمرین ۴.۳.۲. نشان دهید معادله چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به مرکز $(۰, a, ۰)$ و به شعاع b حول محور z پدید می آید به صورت زیر نوشته می شود.

$$z^۲ + \left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - a\right)^۲ = b^۲ \quad a > b > ۰. \tag{۷.۲}$$

تمرین ۵.۳.۲. الف. آیا رویه مخروطی یک رویه معمولی است؟

ب. آیا رویه مخروطی یک رویه منتظم است؟

ج. آیا رویه مخروطی یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است؟

د. نشان دهید که در معادله دکارتی رویه استوانه‌ای قائم موازی با یکی از محورها متغییری که مربوط به آن محور است در معادله نیست.

تمرین ۶.۳.۲. الف. شرایطی تعریف کنید که تحت آن شرایط رویه خط دار یک رویه منتظم باشد.

ب. اگر منحنی پایه مسطح و راستای خط L ثابت باشد چه رویه ای پدید می آید.

تمرین ۷.۳.۲. الف. یک نمایش پارامتری برای رویه زین اسبی که توسط رابطه $z = x^{2} - y^{2}$ داده شده است ارائه کنید.

ب. آیا این رویه منتظم است.

ج. رویه زین اسبی یک رویه خط دار است.یعنی می توان آن را با حرکت دادن یک (یا دو) خانواده از خطوط راست در فضا پدید آورد. این موضوع را با استفاده از رابطه $z = (x - y)(x + y)$ تحقیق می کنیم. یعنی تقاطع صفحه $x - y = u.$ و رویه زین اسبی خط راستی است که توسط تقاطع صفحه های $x - y = u.$ و $z = u.(x + y)$ بیان می گردد.

د. نشان دهید که نمایش پارامتری رویه زین اسبی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x(u, v) = (\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}, uv).$$

راهنمایی. قرار دهید $x - y = u$ و $x + y = v$.

ه. نشان دهید که رویه زین اسبی را می توان به شکل استاندارد رویه های خط دار نوشت. سپس منحنی پایه و بردار هادی آن را تعیین کنید.

۴.۲ توابع پیوسته و مشتق‌پذیر روی یک رویه

در تعریف یک رویهٔ دیفرانسیل پذیر M شرایط را طوری فراهم نمودیم که بتوانیم تابع مشتق‌پذیر حقیقی روی M تعریف کنیم. قبل از آوردن تعریف تابع مشتق پذیر روی یک رویه ابتدا به تعریف تابع پیوسته می پردازیم. در حقیقت با استفاده از کارت ها و تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع حقیقی دو متغییره در ریاضی عمومی این مفاهیم را به صورت زیر تعریف می کنیم.

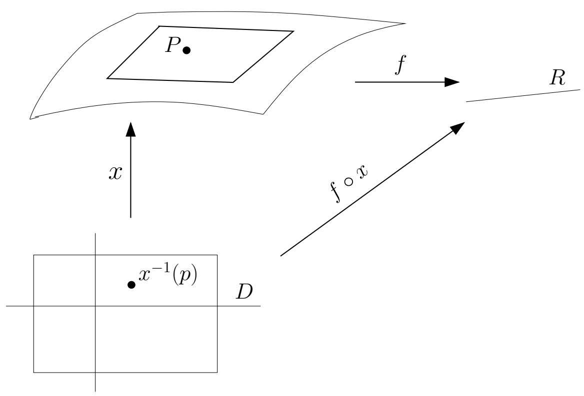
تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد، تابع $f : M \longrightarrow I\!R$ را در

همسایگی نقطهٔ $p \in M$ **پیوسته** [۳۰] گوییم، اگر کارت دلخواهی مانند (x, U) شامل نقطه $p \in U$ موجود باشد به طوری که تابع حقیقی ۲-متغییره $f \circ x : D \subseteq I\!R^{۲} \longrightarrow I\!R$ در $x^{-۱}(p)$ پیوسته باشد.

بدیهی است که این تعریف بستگی به انتخاب کارت x ندارد. زیرا در حقیقت پیوستگی تابع دو متغییره حقیقی $f \circ x : I\!R^{۲} \mapsto I\!R$ را می توانیم با اطلاعات ریاضی عمومی بررسی کنیم و از طرف دیگر اگر (y, V) کارت دیگری شامل نقطه $p \in V$ باشد چون کارت ها همئومورفیسم هستند، داریم

$$f \circ x(x^{-۱}(p)) = f \circ x \circ x^{-۱}(p) = f(p) = f \circ y \circ (y^{-۱}(p)).$$

در نتیجه اگر سمت چپ تساوی پیوسته باشد سمت راست نیز پیوسته است و پیوستگی به انتخاب کارت x بستگی ندارد.



شکل ۱۳.۲: مشتق‌پذیری توابع روی رویه ها.

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنیم M یک رویه از کلاس C^k باشد، تابع $f : M \longrightarrow I\!R$ را در همسایگی نقطهٔ $p \in M$ **دیفرانسیل پذیر** [۳۱] از کلاس C^k گوییم، اگر کارتی مانند x

[۳۰] continus

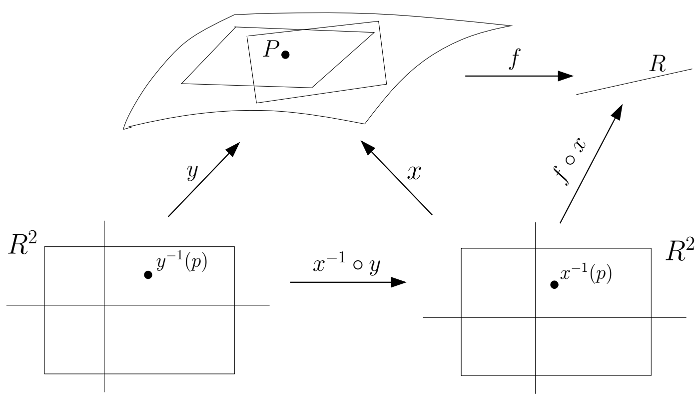
[۳۱] differentiable surface

موجود باشد به طوری که تابع حقیقی ۲-متغییره $f \circ x : D \subseteq I\!R^{۲} \longrightarrow I\!R$ در یک همسایگی $x^{-۱}(p)$ از کلاس C^k باشد. x در اینجا کارت مختصاتی دلخواهی از M است. شکل ۱۳.۲ را ببینید.

بدیهی است که این تعریف بستگی به انتخاب کارت x ندارد. این موضوع را می‌توان به صورت زیر تحقیق نمود. فرض کنیم نقطه $p \in M$ در تصویر دو کارت x و y در روی M قرار گیرد. چون M از کلاس C^k است، نگاشت تغییر کارت نیز از کلاس C^k است، لذا $x^{-۱} \circ y$ از کلاس C^k است. بنابراین اگر f در نقطهٔ p دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k باشد، بنا بر تعریف $f \circ x$ در $x^{-۱}(p)$ دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k است و می‌توان نوشت

$$f \circ y = f \circ x \circ x^{-۱} \circ y$$

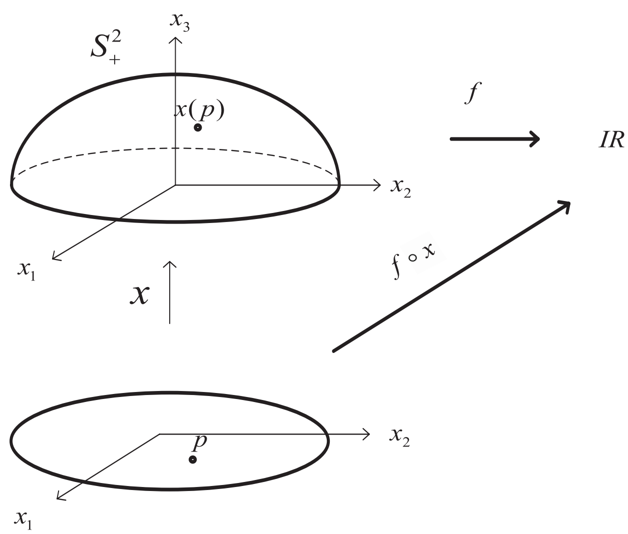
و در نتیجه $f \circ y$ نیز دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k است. شکل ۱۴.۲ را ببینید. خانواده



شکل ۱۴.۲: مشتق‌پذیری توابع به انتخاب کارت هابستگی ندارد.

توابع حقیقی $f : M \to I\!R$ از کلاس C^∞ روی رویهٔ دیفرانسیل پذیر M را با $C^\infty(M)$ و خانوادهٔ توابع حقیقی از کلاس C^∞ در همسایگی نقطه $p \in M$ را با $C^\infty(p)$ نمایش می دهیم.

مثال ۳.۴.۲. فرض کنیم $f:(x,y,z)\in S^{۲}\to x+y+z\in I\!R$ تابعی حقیقی روی کره باشد. می خواهیم نشان دهیم که f روی تمام نقاط کره $S^{۲}$ مشتق پذیر است. برای این کار باید نشان دهیم که کارتی مانند x وجود دارد به طوری که تابع $f\circ x: I\!R^{۲}\to I\!R$ در نقطه دلخواه p از دامنه کارت x مشتق‌پذیر باشد. نمودار ۱۵.۲ را ببینید. با توجه به تمرین



شکل ۱۵.۲: مثالی از یک تابع مشتق‌پذیر روی کره

۴.۲.۲ در صفحه ۷۵ می توان کره را با شش کارت به صورت زیر پوشانید.

$$x:(u,v)\in D\subset I\!R^{۲}\to (u,v,\sqrt{۱-u^{۲}+v^{۲}}).$$

کافی است نشان دهیم که نگاشت زیر در هر نقطه $(u,v)\in I\!R^{۲}$ مشتقپذیر است.

$$x\circ f:(u,v)=u+v+\sqrt{۱-u^{۲}+v^{۲}}.$$

در حقیقت چون $D=\{(u,v)\subset I\!R^{۲}|u^{۲}+v^{۲}<۱\}$ مشتقات جزیی کلیه مولفه های تابع $x\circ f$ موجود و پیوسته بوده و بنابر قضیه‌ای در آنالیز در کلیه نقاط D مشتق‌پذیر است.

۱.۴.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۴.۲. نشان دهید که اگر تابعی مانند $f : M \longrightarrow I\!R$ در یک نقطه از رویه M مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

۲.۴.۲ منحنی روی یک رویه

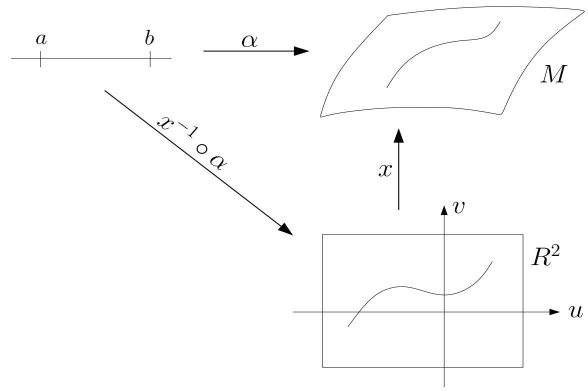
یک منحنی C در روی رویهٔ $M \subset I\!R^۳$ تصویر نگاشتی است مانند $\alpha(t)$ از فاصله $I = [a, b] \subset I\!R$ روی M. در فصل منحنی ها دیدیم که چگونه می توان C را به عنوان یک منحنی در $I\!R^۳$ مطالعه نمود. در اینجا می خواهیم منحنی C را به عنوان یک زیرمجموعه از رویه M توسط مختصات روی رویه یا مختصات منحنی الخط به شکل مستقل تعریف کنیم. خاصیت این تعریف این است که می توان آن را برای هر زیر مجموعه دلخواه در ابعاد بالاتر نیز به طور مشابه بیان نمود. اگر این نگاشت یک به یک باشد (یعنی منحنی خودش را قطع نکند) می گوییم C یک **منحنی ساده** روی رویهٔ $M \subset I\!R^۳$ است.

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow M \subset I\!R^۳,$$
$$t \mapsto \alpha(t).$$

با توجه به تعریف پیوستگی توابع روی رویه‌ها، می‌توان منحنی پیوسته را تعریف نمود. منحنی α روی رویهٔ دیفرانسیل‌پذیر M را در یک نقطه **پیوسته** گوییم، اگر $x^{-۱}\circ\alpha : I\!R \longrightarrow I\!R^۲$ در آن نقطه پیوسته باشد. لذا برای مطالعهٔ منحنی‌ها می‌توان تصویر وارون آن‌ها را توسط کارت x روی $I\!R^۲$، مورد مطالعه قرار داد. شکل ۱۶.۲ را ببینید. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی روی M باشدکه در کارت زیر قرار داشته باشد.

$$x(u, v) = \Big(x^۱(u, v), x^۲(u, v), x^۳(u, v)\Big).$$

برای نمایش منحنی C روی رویه M به عنوان یک منحنی در $I\!R^۳$ می توان از کارت $x(u, v)$ به صورت زیر استفاده نمود. شکل ۱۶.۲ را ببینید. اگر در اینجا فرض کنیم



شکل ۱۶.۲: مولفه های منحنی در روی یک رویه با استفاده از کارت x.

$\alpha : I \longrightarrow x(D) \subseteq M$ آنگاه $x^{-1} \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow I\!R^2$ یک منحنی پارامتری روی $I\!R^2$ است.

$$\alpha(t) = x \circ (x^{-1} \circ \alpha(t)) = x(u(t), v(t)), \tag{۸.۲}$$
$$= \Big(x^1(u(t), v(t)), x^2(u(t), v(t)), x^3(u(t), v(t))\Big).$$

هر منحنی پارامتری روی $I\!R^2$ را می‌توان توسط توابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ نمایش داد. لذا داریم

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)).$$

توابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ را **مختصات منحنی الخط منحنی** [۳۲] یا **مختصات گاوسی**[۳۳] می گویند. بنابراین پیوستگی منحنی $\alpha(t)$ روی رویه M معادل پیوستگی توابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ است. با توجه به تعریف دیفرانسیل‌پذیری توابع روی رویه‌ها، می‌توان منحنی دیفرانسیل‌پذیر را تعریف نمود. منحنی α روی رویهٔ دیفرانسیل‌پذیر M از

[۳۲] curve linear coordinates

[۳۳] Gaussian coordinates

کلاس C^k را در همسایگی یک نقطه **دیفرانسیل‌پذیر** C^r گوییم، اگر $x^{-1} \circ \alpha : I\!R \longrightarrow I\!R^2$ در همسایگی آن نقطه دیفرانسیل‌پذیر C^r با فرض $r \leq k$ باشد. شکل ۱۶.۲ را ببینید.

نتیجه ۲.۴.۲. *فرض کنیم $\alpha : t \in I \longrightarrow M$ یک منحنی روی رویه M باشدکه درکارت $x(u,v)$ قرار داشته باشد. چنانچه احتمال اشتباه نرود با سو استفاده از نماد گذاری قبل $\alpha(t)$ را در روی رویه M با مختصات منحنی الخط و توسط دو تایی $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \subset M$ نمایش می دهیم.*

چنانچه یک منحنی روی یک کارت نگنجد، باید خواص آن روی کارت‌های مختلف را بررسی نموده، سپس با استفاده از خاصیت هم‌ارزی کارتها آن خواص را در صورت امکان بر روی کل منحنی توسعه داد. رویهٔ M را **همبند کمانی** [۳۴] گوییم، اگر به ازای هر دو نقطهٔ p و q از M یک منحنی α روی M موجود باشد، به طوری که $\alpha(a) = p \ , \ \alpha(b) = q$.

مثال ۳.۴.۲. فرض کنیم $\alpha_1 = a_1 t + b_1$ و $\alpha_2 = a_2 t + b_2$ معادله پارامتری خط راست در $I\!R^2$ باشد. تصویر این خط راست توسط کارت x که با ضابطه زیر تعریف می شود یک منحنی روی استوانه است.

$$\alpha(t) = x(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (\cos\alpha_1(t), \sin\alpha_1(t), \alpha_2(t)).$$

با بحث در مورد اعداد ثابت a_1, a_2, b_1, b_2 می توان دید که تصویر خط راست در صفحه توسط این کارت بخشی از یک خط راست، دایره یا مارپیچ در روی استوانه است. اگر خط راست موازی محور u باشد، معادله پارامتری آن در $I\!R^2$ به صورت $u = a_1 t + b_1$ و $v = b_2$ است، که تصویر آن دایره $\alpha(t) = (\cos(a_1 t + b_1), \sin(a_1 t + b_1), b_2)$ به ارتفاع b_2 در روی استوانه است. اگر خط راست موازی محور v باشد، معادله پارامتری آن در $I\!R^2$ به صورت $u = b_1$ و $v = a_2 t + b_2$ است، که تصویر آن خط راست

[۳۴] path connected or connected by arc

$\alpha(t) = (\cos b_۱, \sin b_۱, a_۲t + b_۲)$ در روی استوانه موازی محور z است. اگر خط راست مورب دلخواه باشد، تصویر آن منحنی مارپیچ

$$\alpha(t) = (\cos(a_۱t + b_۱), \sin(a_۱t + b_۱), a_۲t + b_۲),$$

در روی استوانه است. بردار مماس بر استوانه در هر نقطه را نیز می توان با مشتقگیری از منحنی های روی استوانه به دست آورد. به عنوان مثال بردار

$$V_p = \alpha'(t) = (-u'(t)\sin u(t), u'(t)\cos u(t), v'(t)),$$

در هر نقطه هم بر منحنی مماس است و هم بر استوانه.

۳.۴.۲ بردار و صفحه مماس بر یک رویه

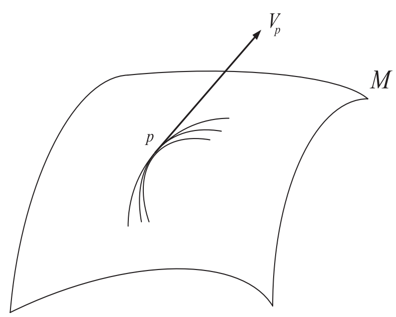
مقدمه. مفهوم بردار مماس بر یک رویه و خانواده بردارهای مماس که به فضای مماس بر رویه مشهور است، از مفاهیم بسیار جالب هندسه است. یکی از خواص جالب این مفهوم این است که به مشتق یک تابع یک تعبیر هندسی وابسته می کند. به عبارت دیگر فضای مماس، فضایی را معرفی می کند که مشتق توابع تعریف شده روی یک رویه در آن فضا زندگی می کنند.

فرض کنیم که $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ دو منحنی در روی رویه M باشند که از نقطه $p = \beta(۰) = \alpha(۰)$ گذشته و در یک راستاباشند، یعنی

$$\begin{aligned} \alpha(۰) &= \beta(۰) = p, \\ \frac{d\alpha}{dt}(۰) &= \frac{d\beta}{dt}(۰). \end{aligned}$$

در این صورت می گوییم که این دو منحنی **هم ارز** هستند، یعنی از یک نقطه گذشته و در یک راستا قرار دارند. این موضوع به ما کمک می کند تا بردار مماس را به عنوان **یک**

کلاس هم ارزی از منحنی ها یی که از یک نقطه گذشته و مشتقات اول آنها با هم برابر است، معرفی کنیم. لذا یک بردار مماس بر یک رویه را می توان به صورت بردار مماس بر خانواده ای از منحنی های روی آن رویه که از یک نقطه گذشته و در یک راستا باشند، معرفی کرد. شکل ۱۷.۲ را ببینید.



شکل ۱۷.۲: بردارمماس یک کلاس هم ارزی از منحنی های مماس بر یک راستا است.

تعریف ۴.۴.۲. می گوییم X_p **بردار مماس** بر رویه M در نقطه $p \in M$ است اگر یک منحنی مانند $\alpha(t)$ روی M موجود باشد به طوری که

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(\cdot) = X_p, \\ \alpha(\cdot) = p. \end{cases}$$

گزاره ۵.۴.۲. *اگر مجموعه بردارهای مماس بر رویه M در نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) را با T_pM نمایش دهیم، آنگاه T_pM یک فضای برداری ۲-بعدی است که پایه های آن عبارتند از $\{x_u, x_v\}$.*

برای آنکه یک تجسم هندسی از پایه های $\{x_u, x_v\}$ صفحه مماس در هر نقطه بر رویه داشته باشیم می توان از شکل ۱.۱.۲ در صفحه ۶۳ استفاده کرد.

اثبات. فرض کنیم X_p و Y_p دو بردار مماس بر رویه منتظم M در نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) باشند. بنا بر تعریف دو منحنی $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(\cdot) = X_p, \quad \frac{d\beta}{dt}(\cdot) = Y_p, \\ \alpha(\cdot) = \beta(\cdot) = p \end{cases}$$

بنابر رابطه (۸.۲) و قاعده زنجیره ای روی کارت (x, U) داریم

$$X_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx}{dt}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \alpha_۱}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \alpha_۲}{\partial t} = \alpha'_۱ x_u + \alpha'_۲ x_v.$$

به همین صورت $Y_p = \beta'_۱ x_u + \beta'_۲ x_v$. جمع دو بردار مماس و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} X_p + Y_p = (\alpha'_۱ + \beta'_۱)x_u + (\alpha'_۲ + \beta'_۲)x_v, \\ \lambda X_p = (\lambda\alpha'_۱)x_u + (\lambda\alpha'_۲)x_v, \qquad \lambda \in I\!R. \end{cases}$$

برای آنکه نشان دهیم این جمع خوش تعریف است باید نشان دهیم که یک منحنی مانند $\gamma(t) = x(\gamma_۱(t), \gamma_۲(t))$ گذرنده از نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) وجود دارد به طوری که بردار مماس بر آن برابر جمع این دو بردار مماس باشد. در حقیقت مشتقات این منحنی در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک t باید به صورت زیر تعریف شوند.

$$\begin{cases} \gamma'_۱(t) = \alpha'_۱ + \beta'_۱, \\ \gamma'_۲(t) = \alpha'_۲ + \beta'_۲. \end{cases}$$

با انتگرال گیری نسبت به t داریم

$$\begin{cases} \gamma_۱(t) = \alpha_۱(t) + \beta_۱(t) + c_۱, \\ \gamma_۲(t) = \alpha_۲(t) + \beta_۲(t) + c_۲. \end{cases}$$

مقدار اعداد ثابت c_1 و c_2 را طوری انتخاب می کنیم که منحنی از نقطه $p = \gamma(0)$ بگذرد. $c_1 = -\beta_1(0)$ و $c_2 = -\beta_2(0)$. بنابر این

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p + Y_p, \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

لذا جمع دو بردار مماس و به استدلال مشابه ضرب عدد در بردار مماس فوق الذکر خوش تعریف بوده و T_pM در شرایط فضای برداری صدق می کند. از طرفی چون رویه منتظم است دو بردار x_u و x_v مستقل خطی اند و تشکیل یک پایه برای T_pM می دهند. این موضوع اثبات گزاره را کامل می کند. $\square$

تعریف ۶.۴.۲. اگر مجموعه بردارهای مماس بر رویه M در نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) را با T_pM نمایش دهیم، آنگاه فضای برداری T_pM را **صفحه مماس**[۳۵] بر رویه M در نقطه $p \in M$ می نامیم.

یکتایی صفحه مماس در هر نقطه از یک رویه از یکتایی فضای برداری تولید شده توسط پایه های مربوط به کارتهای رویه در همسایگی های روی هم افتاده آن نقطه نتیجه می شود.

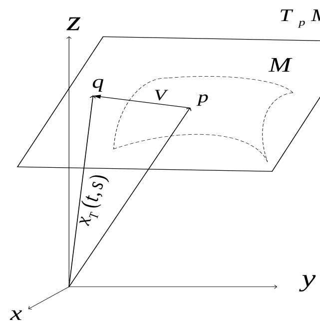
بنابر گزاره ۵.۴.۲ بردارهای پایه فضای مماس $T_{p_0}M$ عبارتند از $\{x_u, x_v\}_{p_0}$. لذا اگر V یک بردار مماس در $T_{p_0}M$ باشد، آنگاه می توان آن را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت. یعنی $V = v_1 x_u + v_2 x_v$ ، که در آن $v_1(u,v), v_2(u,v)$ مولفه های بردار V توابعی از (u,v) هستند.

لم ۷.۴.۲. *فرض کنیم که M یک رویه منتظم با کارت (x, U) باشد. آنگاه $x_T(t,s)$ نمایش پارامتری صفحه مماس بر M در نقطه $p = x(u_0, v_0)$ یا T_pM به صورت زیر نوشته می شود.*

$$x_T(t,s) = p + \big(t x_u + s x_v\big)|_{(u_0,v_0)},$$

[۳۵] tangent space

که در آن $\{\big(tx_u + sx_v\big)|_{(u.,v.)} | \forall s,t \in I\!R\} = Sp\{x_u, x_v\}|_{(u.,v.)}$ مجموعه *ترکیبات خطی دو بردار پایه x_u و x_v در نقطه p است.*



شکل ۱۸.۲: $x_{_T}(t,s)$ معادله پارامتری صفحه مماس $T_{p.}M$.

اثبات. بنابر گزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۳ بردارهای پایه فضای مماس $T_{p.}M$ عبارتند از $\{x_u, x_v\}_{p.}$. از آن جا بردار موضع هر نقطه q از صفحه مماس $T_{p.}M$ را می توان به صورت جمع بردار موضع p و بردار $V = pq$ نوشت. $x_{_T} = p + V$. شکل ۱۸.۲ را ببینید. لذا نمایش پارامتری T_pM صفحه مماس بر M در نقطه $p = x(u.,v.)$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$x_{_T}(t,s) = p + \big(tx_u + sx_v\big)|_{(u.,v.)},$$

که در آن $tx_u + sx_v = Sp\{x_u, x_v\}$ مجموعه ترکیبات خطی دو بردار پایه x_u و x_v برای هر $s,t \in I\!R$ است. $\square$

مثال ۸.۴.۲. معادله صفحه مماس بر کره $S^۲$ در نقطه $x(۱/۲, ۱/۲)$ را به دست آورید. در اینجا کارت x در تمرین ۴.۲.۲ در صفحه ۷۵ معرفی شده است.

حل. در این تمرین دیدیم که می توان کره را با شش کارت زیر پوشانید.

$$x : (u, v) \in D \subset I\!R^{۲} \to (u, v, \sqrt{۱ - u^{۲} - v^{۲}}).$$

از آنجا پایه های فضای برداری مماس عبارتند از

$$x_u = (۱, ۰, \frac{-u}{\sqrt{۱ - u^{۲} - v^{۲}}}), \qquad x_v = (۰, ۱, \frac{-v}{\sqrt{۱ - u^{۲} - v^{۲}}}).$$

چون $D = \{(u, v) \subset I\!R^{۲} | u^{۲} + v^{۲} < ۱\}$ مشتقات جزیی موجود هستند و معادله پارامتری یا کارت صفحه مماس بر کره $S^{۲}$ در نقطه $p = x(۱/۲, ۱/۲)$ عبارت است از

$$x_{_T}(t, s) = p + \big(tx_u + sx_v\big)|_{(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})},$$
$$x_{_T}(t, s) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}) + (t, ۰, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}t) + (۰, s, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}s),$$
$$x_{_T}(t, s) = \big(t + \frac{۱}{۲}, s + \frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}(t + s - ۱)\big).$$

در این روش نحوه استفاده از کارت ها در معرفی مفاهیم هندسی را دیدیم. اما معادله دکارتی صفحه مماس را می توان با اطلاعات دروس ریاضی عمومی نیز به دست آورد. کافی است با استفاده از بردار یکه قائم معادله صفحه مماس را بنویسیم.

$$n = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = (u, v, \sqrt{۱ - u^{۲} - v^{۲}}).$$

با محاسبه مولفه های بردار قائم در نقطه $x(۱/۲, ۱/۲) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ از سطح کره می توان معادله صفحه مماس را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲}(y - \frac{۱}{۲}) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(z - \frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۰.$$

مثال ۹.۴.۲. پایه و معادله پارامتری صفحه مماس بر سطح دوار در یک نقطه دلخواه را به دست آورید.

حل. در بخش ۱.۳.۲ در صفحه ۷۶ دیدیم که معادله پارامتری سطح دوار به صورت زیر داده می شود.

$$x(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)). \tag{۹.۲}$$

حل. اعضای پایه فضای برداری مماس در یک نقطه دلخواه عبارت است از

$$\begin{aligned} x_u &= (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)), \\ x_v &= (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, \cdot). \end{aligned}$$

معادله پارامتری یا کارت صفحه مماس در نقطه $x(u_\cdot, v_\cdot) = p = (a,b,c)$ عبارت است از

$$x_{_T}(t,s) = p + \big(tx_u + sx_v\big)|_{(u_\cdot,v_\cdot)},$$

از آن جا با جایگذاری مقادیر بالا، معادله پارامتری صفحه مماس بر سطح دوار در یک نقطه دلخواه به دست می آید.

$$\begin{aligned} x_{_T}(t,s) = (a,b,c) &+ t\big(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\big)|_{(u_\cdot,v_\cdot)} \\ &+ s(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, \cdot)\big)|_{(u_\cdot,v_\cdot)}. \end{aligned}$$

معادله دکارتی صفحه مماس را می توان با استفاده از بردار یکه قائم نوشت.

$$n = (n_۱, n_۲, n_۳) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}.$$

از آنجا معادله دکارتی صفحه مماس در هر نقطه دلخواه $p = (a,b,c)$ از سطح رویه دوار را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(x-a)n_۱ + (y-b)n_۲ + (z-c)n_۳ = \cdot.$$

۴.۴.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۴.۲. ثابت کنید که اگر صفحه‌ای با یک رویه تنها در یک نقطه مشترک باشد، آنگاه آن صفحه بر رویه مماس است.
راهنمایی.کافی است نشان دهید که صفحه و رویه در آن نقطه دارای بردارهای قائم مشترک هستند.

تمرین ۲.۴.۲. فرض کنیم $u = a_۱t + b_۱$ و $v = a_۲t + b_۲$ معادله پارامتری خط راست در $I\!R^۲$ باشد.
الف. تصویر این خط روی بخشی از کره واحد تحت نگاشت

$$x(u, v) = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u),$$

را پیدا کنید.
ب. بردار مماس بر رویه و بر تصویر این خط راست در روی رویه را به دست آورید.

تمرین ۳.۴.۲. معادله پارامتری صفحه مماس بر کره $S^۲$ در نقطه $x(۱/۲, ۱/۲)$ به دست آمده در مثال ۸.۴.۲ را با معادله دکارتی صفحه مماس بر کره $S^۲$ در نقطه $x(۱/۲, ۱/۲)$ مقایسه و درستی آن ها را بررسی کنید.

تمرین ۴.۴.۲. چنبره رویه‌ای است منتظم که از دوران یک دایره حول یک محور پدید می آید. چنبره را می توان توسط کارت هایی به صورت زیر پوشانید.

$$x(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, \sin u),$$

که در آن $a > b > ۰$ بوده و D ناحیه تعریف کارت که به صورت زیر تعریف می شود یک مربع باز است. شکل ۲۱.۲ در صفحه ۱۰۷ را ببینید.

$$D = \{(u, v) \in I\!R^۲ | -\pi < u < \pi, \quad -\pi < v < \pi\}$$

الف. نشان دهید چنبره یک رویه منتظم است. چند کارت از این نوع برای پوشاندن کره لازم است.

ب. یک منحنی در روی چنبره معرفی نمایید.

ج. یک بردار مماس بر چنبره در یک نقطه دلخواه ارائه کنید .

د. یک نمایش پارامتری از صفحه مماس در نقطه $x(۱,۱)$ بنویسید.

ه. معادله صفحه مماس بر چنبره را در نقطه $x(۱,۱)$ بنویسید.

۵.۲ مشتق سویی روی رویه

در این بخش ابتدا تعریف مشتق سویی[۳۶] در فضای $I\!R^۳$ را که در ریاضی عمومی با آن آشنا شده ایم آورده سپس تعریف آن را برای رویه ها بیان می کنیم. مشتق گیری سویی از یک تابع در راستای یک بردار در حقیقت میزان تغییرات آن تابع در طول منحنی مماس بر آن بردار را تعیین می کند.

مشتق سویی در $I\!R^۳$

اگر $g(x,y,z)$ یک تابع حقیقی روی $I\!R^۳$ و $\alpha(t) = \big(x^۱(t), x^۲(t), x^۳(t)\big)$ یک منحنی در $I\!R^۳$ باشد. در ریاضیات عمومی دیدیم که مشتق سویی یا تغییرات g در جهت بردار مماس بر منحنی $\alpha(t)$، با مشتق گیری از تابع مرکب $g \circ \alpha$ تعریف می شود. به عبارت دیگر

$$\alpha(s) : I\!R \longrightarrow I\!R^۳, \quad g(x,y,z) : I\!R^۳ \longrightarrow I\!R$$

$$g \circ \alpha : I\!R \longrightarrow I\!R.$$

[۳۶] directional derivative

فرض کنیم $g(x,y,z)$ یک تابع حقیقی روی $I\!R^۳$ و $\alpha(t)$ یک منحنی با فرض $\alpha(\cdot) = p$ در $I\!R^۳$ باشد. مشتق سویی تابع g در نقطهٔ p توسط رابطه زیر تعریف می گردد.

$$V_p[g] = \frac{d}{dt} g(\alpha(t))|_{t=\cdot} = \lim_{t \mapsto \cdot} \frac{g(\alpha(t)) - g(\alpha(\cdot))}{t}.$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=\cdot}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t)$، و v^i مولفه های آن می باشد. بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dt} g(\alpha(t)) = \frac{\partial g}{\partial x^۱}\frac{dx^۱}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x^۲}\frac{dx^۲}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x^۳}\frac{dx^۳}{dt} = \sum_{i=۱}^{۳} v^i \frac{\partial g}{\partial x^i}. \quad (۱۰.۲)$$

بدون توجه به تابع g از رابطه ۱۰.۲ نتیجه می شود که عملگر مشتق سویی در جهت بردار مماس بر یک منحنی در $I\!R^۳$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_p = \sum_{i=۱}^{۳} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

در بخش بعد این تعریف را برای رویه ها تعمیم می دهیم.

مشتق سویی روی یک رویه

فرض کنیم M یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس $C^۲$ ، $x(u^۱, u^۲)$ یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد. تابع $g : M \longrightarrow I\!R$ از کلاس $C^۱$ را در همسایگی نقطهٔ $p \in M$ در نظر می گیریم. بنا بر نتیجه ۲.۴.۲ در صفحه ۹۱ هر منحنی روی رویه را می توان توسط مختصات منحنی الخط $u^۱(t)$ و $u^۲(t)$ به صورت $\alpha(t) = (u^۱(t), u^۲(t))$ نوشت. از آنجا مولفه های بردار مماس بر این منحنی در کارت $x(u^۱, u^۲)$ توسط $v^۱_{(p)} = \frac{du^۱}{dt}$ و $v^۲_{(p)} = \frac{du^۲}{dt}$ ارائه می‌گردد. حوزهٔ تعریف تابع g بخشی از رویهٔ M است که توسط کارت (x, U) پوشیده شده و مختصات منحنی الخط منحنی $\alpha(t)$ روی رویهٔ M از $u^۱(t)$ و $u^۲(t)$ تشکیل شده است. می خواهیم تغییرات g را در

طول $\alpha(t)$ محاسبه کنیم. فرض کنیم $g : M \to I\!R$ یک تابع حقیقی روی رویهٔ دیفرانسیل پذیر M از کلاس $C^{۲}$ ، $x(u^{۱}, u^{۲})$ یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد. **مشتق سویی** تابع g در نقطهٔ $p = \alpha(۰)$ توسط رابطه زیر تعریف می گردد.

$$V_p[g] = \frac{d}{dt} g(\alpha(t))|_{t=۰} = \lim_{t \mapsto ۰} \frac{g(\alpha(t)) - g(\alpha(۰))}{t}.$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=۰}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t) = (u^{۱}(t), u^{۲}(t))$ در نقطه p و $v^j_{(p)} = \frac{du^j}{dt}$ مولفه های آن در کارت $x(u^{۱}, u^{۲})$ می باشند. بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dt} g(\alpha(t)) = \frac{\partial g}{\partial u^{۱}} \frac{du^{۱}}{dt} + \frac{\partial g}{\partial u^{۲}} \frac{du^{۲}}{dt} = \sum_{j=۱,۲} \frac{du^j}{dt} \frac{\partial}{\partial u^j} g.$$

لذا لم زیر را داریم.

لم ۱.۵.۲. *فرض کنیم $g : M \to I\!R$ یک تابع حقیقی روی رویهٔ دیفرانسیل پذیر M از کلاس $C^{۲}$ ، $x(u^{۱}, u^{۲})$ یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد.* ***مشتق سویی تابع*** *g در نقطهٔ $p = \alpha(۰)$ برابر است با*

$$V_p[g] = \sum_{j=۱}^{۲} v^j_{(p)} \frac{\partial}{\partial u^j} g, \qquad (۱۱.۲)$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=۰}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t) = (u^{۱}(t), u^{۲}(t))$ در نقطه p و $v^j_{(p)} = \frac{du^j}{dt}$ مولفه های آن در کارت $x(u^{۱}, u^{۲})$ می باشند.

بدون در نظر گرفتن تابع می توان بردار مماس بر رویه را به صورت زیر نوشت.

$$V_p = \sum_{i=۱}^{۲} v^i_{(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}_{(p)}.$$

این عبارت بردار مماس را به عنوان عملگر مشتق سویی تعریف می‌کند. از این تعریف نتیجه می‌شود که $\{\frac{\partial}{\partial u^{۱}}, \frac{\partial}{\partial u^{۲}}\}$ نیز یک پایه برای فضای برداری T_pM بوده و آن را تولید می‌کند. این پایه را پایهٔ استاندارد با توجه به کارت $x(u^{۱}, u^{۲})$ می‌نامیم.

مثال ۲.۵.۲. تابع حقیقی $f \in C^{\infty}(M)$ روی رویهٔ دیفرانسیل پذیر M با کارت $x(u^۱, u^۲) = (u^۱, u^۲, (u^۱)^۲ + (u^۲)^۲)$ را در نظر می‌گیریم. ضابطه این تابع را توسط رابطه $f(x(u^۱, u^۲)) = (u^۱)^۲ + (u^۲)^۲$ معرفی می کنیم.

اگر $V = u^۲\frac{\partial}{\partial u^۱} + u^۱\frac{\partial}{\partial u^۲}$ یک میدان برداری روی رویهٔ M در کارت x باشد ، مشتق سویی تابع در راستای بردار V در نقطه $p = (۱, ۲)$ را محاسبه کنید.

حل. بنا بر رابطه ۱۱.۲ داریم

$$V_p[f] \;=\; \sum_{i=۱}^{۲} v^i \frac{\partial f}{\partial u^i}|_p = (u^۲\frac{\partial f}{\partial u^۱} + u^۱\frac{\partial f}{\partial u^۲})|_p.$$

با جایگذاری مقادیر $\frac{\partial f}{\partial u^۱} = ۲u^۱$ و $\frac{\partial f}{\partial u^۲} = ۲u^۲$ داریم

$$V_p[f] = ۴u^۱u^۲|_p, \quad V_p f \in C^{\infty}(p).$$

حال اگر p نقطه‌ای از رویه به مختصات $u^۱ = ۱$ و $u^۲ = ۲$ باشد، مقدار عددی مشتق سویی در این نقطه به دست می آید.

$$V_{(۱,۲)}[f] = ۴u^۱u^۲|_{(۱,۲)} = ۴ \times ۲ = ۸, \quad V_{(۱,۲)} f \in C^{\infty}(۱, ۲).$$

۱.۵.۲ تابع مشتق‌پذیر بین دو رویه و نگاشت مشتق

تعریف ۳.۵.۲. فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k باشند، نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را که به هر نقطهٔ $p \in M$، نقطهٔ $f(p) \in N$ را وابسته می‌کند، در یک همسایگی باز نقطه p **مشتق‌پذیر از کلاس** C^r $(r \leq k)$ گوییم، اگر کارت‌های x و y به ترتیب شامل p و $f(p)$ موجود باشند به طوری که نگاشت $F = y^{-۱} \circ f \circ x : D_x \longrightarrow$

D_y از کلاس C^r باشد.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ x \uparrow & & \uparrow y \\ D_x \subseteq \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{y^{-1} \circ f \circ x} & D_y \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

تعریف فوق مشتق پذیری یک تابع در یک همسایگی باز را معرفی می نماید. اما اگر رویه بسته باشد **مشتق‌پذیری در نقاط مرزی** این رویه ها را به صورت زیر تعریف می کنیم. فرض کنیم M و N دو رویه بسته و $V \subset \mathbb{R}^3$ یک همسایگی باز شامل M باشد. می گوییم تحدید $f|_M : M \subset V \longrightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ مشتق‌پذیر است، اگر نگاشت $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ مشتق‌پذیر باشد

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل‌پذیر و $f : M \to N$ یک نگاشت مشتق‌پذیر در $p \in M$ باشد. همچنین فرض کنیم که $\alpha(t)$ یک منحنی در روی M و $X_p = \alpha'(0)$ بردار مماس بر آن در نقطه p باشد. **نگاشت مشتق تابع** f را با f_* ، نمایش داده آن را به صورت زیر تعریف می کنیم. اگر $X_p \in T_pM$ تعریف می کنیم

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N,$$
$$f_*(X_p) = \beta'(0),$$

که در آن $\beta(t) = f(\alpha(t))$ تصویر منحنی $\alpha(t)$ توسط f و $\beta(0) = f(p)$ است. نگاشت مشتق را با نماد df یا Tf نیز نمایش می‌دهند.

به راحتی می توان نشان داد که f_* یک نگاشت خطی است. تمرین ۲.۵.۲ در صفحه ۱۰۵ را ببینید.

۲.۵.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۵.۲. ثابت کنید مشتق‌پذیری تابع $f : M \to N$ در نقطه $p \in M$ به انتخاب کارتها بستگی ندارد.

تمرین ۲.۵.۲. فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل‌پذیر و $f : M \to N$ یک نگاشت مشتق‌پذیر در $p \in M$ باشد. همچنین فرض کنیم که $\alpha(t)$ یک منحنی در روی M و $X_p = \alpha'(\cdot)$ بردار مماس بر آن در نقطه p باشد. نگاشت f_* یا Tf را به صورت زیر تعریف می کنیم. اگر $X_p \in T_pM$ تعریف می کنیم

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N,$$
$$f_*(X_p) = \beta'(\cdot),$$

که در آن $\beta(t) = f(\alpha(t))$ تصویر منحنی $\alpha(t)$ توسط f و $\beta(\cdot) = f(p)$ است. ثابت کنید که f_* یک نگاشت خطی است.

راهنمایی. کافی است نشان دهید $\forall X_p, Y_p \in T_pM$ داریم

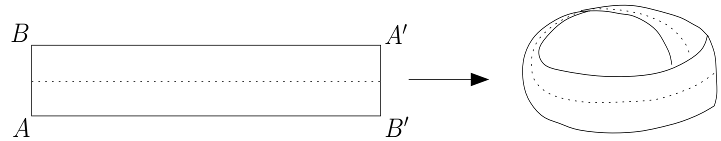
$$f_*(X_p + Y_p) = f_*X_p + f_*Y_p,$$
$$f_*(cX_p) = cf_*X_p, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

۶.۲ رویه جهت پذیر

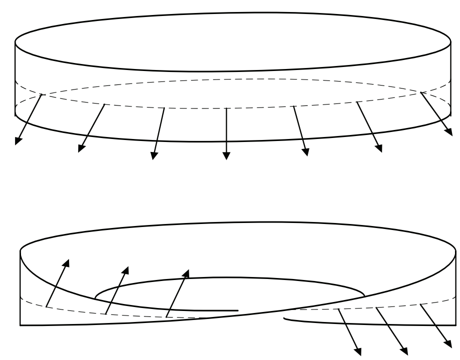
می‌خواهیم برای تعیین جهت در روی یک رویه، بردار یکهٔ قائمی در نقطهٔ p انتخاب کرده و آن را جهت رویه [۳۷] بنامیم. انتخاب جهت را می‌توان در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه منتظم به طور پیوسته ادامه داد. اما این کار همیشه برای کل رویه ممکن نیست. در

[۳۷] orientation of a surface

بعضی از رویه‌ها مجاز به انتخاب بردار یکهٔ قائم در هر نقطه هستیم مثل کره که در آن بردارهای قائم به یک کره اشاره به بیرون کره دارند. چنین رویه‌هایی را **جهت‌پذیر**[۳۸] می‌نامند. در مورد رویه‌های دیگر این کار عملی نیست، چنین رویه‌ای را **جهت‌ناپذیر**[۳۹] می‌نامند. نمونه مشهور یک رویهٔ جهت‌ناپذیر نوار موبیوس [۴۰] می‌باشد. این رویه از نوار مستطیل شکل $ABA'B'$ تشکیل می‌شود که دو سر آن را به هم چسبانده باشند، به طوری که نقاط A' و B' به ترتیب بر نقاط A و B منطبق شوند. شکل ۱۹.۲ را ببینید.



شکل ۱۹.۲: نوار موبیوس با چسباندن دو سر یک نوار با تغییر جهت پدید می آید.



شکل ۲۰.۲: مسیر حرکت بردار عمود بر نوار در استوانه و چنبره.

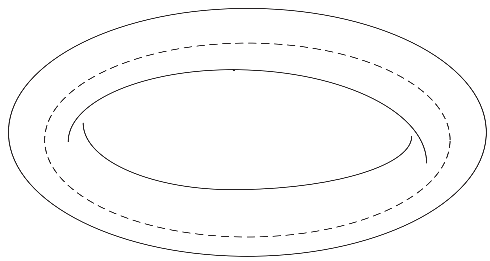
اگر خط–چینی در وسط نوار رسم کنیم و با انتخاب یک بردار قائم خاص در طول خط–چین حرکت کنیم، مجدداً به همان نقطه می‌رسیم، ولی با جهت مخالف. شکل ۲۰.۲ را

[۳۸] orientable

[۳۹] non-orientable

[۴۰] Mobius bond

ببینید. این نشان می‌دهد که روی نوار موبیوس نمی توان هیچ جهت پیوسته‌ای بدست آورد. چنانچه دو سر استوانه بدون تغییر جهت به یکدیگر متصل شوند، رویهٔ حاصل چنبره است



شکل ۲۱.۲: از به هم چسباندن دو سر یک استوانه بدون تغییر جهت چنبره پدید می آید.

که جهت‌پذیر است. شکل ۲۱.۲ را ببینید.

بین فرمول پارامتری رویه و جهت آن نیز یک رابطهٔ طبیعی وجود دارد. فرض کنیم معادلهٔ پارامتری منتظم یک رویه به صورت $x = x(u, v)$ باشد، دو بردار $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ و $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ بردارهای مماس و $x_u \times x_v$ بردار قائم بر رویه می‌باشد. اگر جهت رویه را m انتخاب کنیم داریم $m = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}$

اگر مختصات (u, v) را با مختصات (u', v') تحت فرمول‌های زیر تعویض کنیم،

$$u = u(u', v') \ \ , \ \ v = v(u', v')$$

بنابر قضیه قاعده زنجیره ای داریم:

$$x'_u \times x'_v = (\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}) \times (\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}).$$

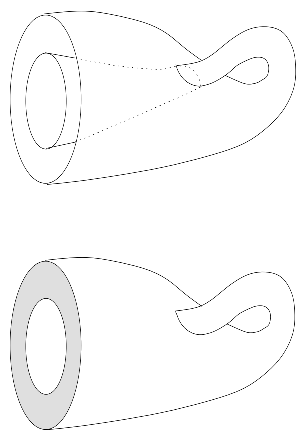
از آنجا با ضرب این دو عبارت و مختصری اعمال جبری داریم

$$x'_u \times x'_v = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} x_u \times x_v.$$

برای بردار یکهٔ جدید خواهیم داشت: $m' = \varepsilon m$ که در آن

$$\varepsilon = sgn \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}.$$

بنابراین در پارامتر جدید اگر**ژاکوبی تغییر مختصات** مثبت باشد، **جهت تغییر** نمی‌کند و اگر ژاکوبی منفی باشد، جهت معکوس می‌شود. رویهٔ S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه بتوان یک بردار یکهٔ قائم در تمام نقاط آن تعریف نمود. به عبارت دیگر می‌توانیم تعریف زیر را داشته باشیم:



شکل ۲۲.۲: از به هم چسبانیدن دو سر یک استوانه با تغییر جهت بطری کلاین پدید می آید.

تعریف ۱.۶.۲. رویهٔ S را **جهت‌پذیر**[۴۱] گوییم، هرگاه یک نمایش پارامتری از آن موجود باشد که نگاشت‌های تغییر مختصات آن همه جا دارای ژاکوبین مثبت باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که کلیهٔ رویه‌هایی که توسط یک کارت سرتاسری معرفی می‌شوند -یعنی حوزهٔ مقادیر این کارت کل رویه را می‌پوشاند- جهت‌پذیرند، زیرا نگاشت

[۴۱] orientable

تغییر مختصات همانی بوده و ژاکوبین آن همواره مثبت است. بطری کلاین [۴۲] نیز نمونهٔ دیگری از یک رویهٔ جهت‌ناپذیر می‌باشد که مستطیل فوق با چسباندن AB' روی BA' با حفظ جهت تبدیل به یک استوانه شده، سپس با چسباندن دو سر استوانه و تغییر جهت پدید می‌آید. شکل ۲۲.۲ را ببینید. بطری کلاین جهت پذیر نیست.

۱.۶.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۶.۲. نوار موبیوس یک رویه خط دار است که منحنی پایه آن دایره $(\cos u, \sin u, ۰)$ است. ثابت می شود که بردار هادی رویه خط دار بردار $(\sin \frac{u}{۲} \cos u, \sin \frac{u}{۲} \sin u, \cos \frac{u}{۲})$ است. لذا معادله پارامتری نوار موبیوس توسط کارت

$$x(u,v) = (\cos u, \sin u, ۰) + v(\sin \frac{u}{۲} \cos u, \sin \frac{u}{۲} \sin u, \cos \frac{u}{۲}),$$

داده می شود. این رابطه را به صورت زیر می نویسیم

$$x(u,v) = (\cos u(۱ + v \sin \frac{u}{۲}), \sin u(۱ + v \sin \frac{u}{۲}), v \cos \frac{u}{۲}),$$

که در آن دامنه کارت x به صورت زیر تعریف شده است.

$$D = \{(u,v) \in I\!R^{۲} | -\pi < u < \pi, \quad -۱/۲ < v < ۱/۲\}.$$

الف. آیا نوار موبیوس یک رویه منتظم است.

ب. بردار یکه عمود U را در نقطه $(u, ۰)$ به دست آورید.

ج. نشان دهید که حد کارت $x(u, ۰)$ در نوار موبیوس وقتی که $u \to \pi$ از چپ و $u \to -\pi$ از راست با یکدیگر برابر است . یعنی

$$\lim_{u \to -\pi^+} x(u, ۰) = \lim_{u \to +\pi^-} x(u, ۰).$$

[۴۲] Klein

د. نشان دهید حد بردار عمود $U(u, ۰)$ وقتی که $u \to \pi$ از چپ و از راست با یکدیگر متفاوت است . یعنی

$$\lim_{u \to -\pi} U(u, ۰) = -\lim_{u \to \pi} U(u, ۰),$$

و از آن نتیجه بگیرید که نوار موبیوس جهت پذیر نیست.

کتاب‌نامه

[۱] بیدآباد بهروز، *هندسه منیفلد ۱*،انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ چهارم نوروز ۱۳۸۹.

[۲] بیدآباد بهروز، *هندسه منیفلد ۲*،انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ اول نوروز ۱۳۹۰.

[۳] بیدآباد بهروز و فاطمه آهنگری ، *مدل سازی حرکت هواپیما درگردباد و مسیر های بهینه زمانی* ، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال بیستم، شماره ۷۰-ه زمستان ۱۳۸۷.

[۴] بیدآباد بهروز و زعیم امیرحسام ، *مسیرهای کوتاهترین زمان برای یک ربات دیفرانسیلی* ، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال نوزدهم، شماره ۶۹-ه زمستان ۱۳۸۷.

[۵] بیدآباد بهروز و آهنگری فاطمه ، *مدل سازی حرکت هواپیما درگردباد و مسیرهای بهینه زمانی*، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال‌بیستم، شماره ۷۰-ه، ۱۳۸۸.

[۶] جذبی ع.، *هندسه ایرانی در عمل* ، ابولوفا محمد بن البوزجانی، انشارات سروش ۱۳۶۷.

[۷] رضایی مرتضی میر محمد و نجفی بهزاد، *هندسه منیفلدها* ، انتشارات سال ۱۳۸۲.

[۸] رضوی اسدالله، *جبر وگروه لی* ، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، سال ۱۳۸۷.

[۹] عابدی، حسین *هندسه دیفرانسیل موضعی* ، انتشارات دانشگاه بوعلی سینا، سال ۱۳۸۸.

[10] Asanjarani A. and Bidabad B.; *A classification of complete Finsler manifolds*, Differential Geometry and its Applications, vol(26), 2008, 434-444.

[11] Bao, D., Chern, S.S. and Z. Shen;*An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*,

[12] Bidabad, B. ;*On compact Finsler spaces of positive constant curvature*,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1191–1194.

[13] Bidabad, B. *Transformations conformes et projectives d'une variétés riemannienne.* L'Université Paul Sabatier de Toulouse, France. Thèse de doctorat no 3402, (1987).

[14] Bidabad, B. ;*Conformal vector fields on tangent bundle of Finsler manifolds*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, 11, no. 2, 2006, pages 28-35.

[15] Bidabad B.; *Complete Finsler manifolds and adapted coordinates*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol. 14, No 1, 2009, pp 21-29.

[16] Bidabad B.; *A remark on the Gauss-Bonnet theorem in Finsler geometry* , BSG Proceeding 15, International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems, DGDS-2008, Bucarest Romania, pp. 1-10, Geometry of Balkan Press, 2009.

[17] Bidabad B.; *Finsler manifolds of positive constant curvature*, 5th seminar of Geometry and Topology, Kurdestan University, Sanandaj, 12-14 May 2009.

[18] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ;*Conformal vector fields on tangent bundle of Riemannian manifolds*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 29, No. A3, 2005, 531-540.

[19] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ;*Compact Capacity on Finsler Spaces*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 31, No. A3, 2007.

[20] Bidabad B. and Rafie-Rad, M.; *Pure pusuit Navigation on Riemannian Manifolds*, Non-Linear Analysis; Real World Application, Vol(10), 2009, 1265-1269.

[21] Bidabad B. and Shen, Z.; *Circle-preserving transformations in Finsler spaces*, Publication Mathematicae Debrecen, 81, 3-4, (2012), 435-445.

[22] Boothby, W. M.; *An Introduction to Differentiable Manifolds and and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003.

[23] Do Carmo, M. P.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Printice-Hall, 1976.

[24] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J.; *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, second edition, 1990.

[25] Goetz, A.; *Introduction to Differential Geometry*, Reading, Mass, Addison-Weseley, 1970.

[26] Grifone, J. *Cours de maitrise en geometrie differentielle*, L'universite' Paul Sabatier de Toulouse, France, 2004.

[27] Guillemin V. and Pollack A.; *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974. Academic Press, 1978.

[28] Jost J.; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, second edition, 1998.

[29] Kuhnel, W. ; *Differntial Geometry, Curves-surfaces-Manifolds*, American Mathematical Society, second edition, 2006.

[30] Lang, S.; *Differntial and Riemannian Manifolds*, Graduate texts in Math., Spriger, 1996.

[31] Lee, J. M.; *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1997.

[32] Lee, J.M.; *Introuduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, 2001.

[33] Milnor, M.; *Morse Theory,*

[34] Montiel, Sebastián; Ros, Antonio; *Curves and Surfaces.*, Second edition. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt. Graduate Studies in Mathematics, 69. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2009; American Mathematical Society, second edition, 2006.

[35] Prakash, N *Differential geometry: an integrated approach,*Tata McGraw-Hill, 1981.

[36] Nomizu, K; Yano, K. *On circles and spheres in Riemannian geometry.* Math. Ann. 210 (1974), 163–170.

[37] Oprea, J.; *Differential Geometry and its Applications*, Second edition, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[38] Toponogov Victor A.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Birkhauser, 2006.

نمایه