بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی شریف دانشکدهی مهندسی کامپیوتر

یادگیری عمیق نیمسال دوم ۰۳-۰۴ مدرس: مهدیه سلیمانی

ددلاین تمرین: تمرین تئوری:۱۰ اردیبهشت ، تمرین عملی: ۱۹ اردیبهشت

تمرين سوم

- برای ارسال هر تمرین تا ساعت ۲۳:۵۹ روز ددلاین فرصت دارید. دقت شود که تمرین تئوری سوم تاخیر مجاز ندارد (به دلیل نزدیکی با میانترم درس) اما برای تمرین عملی یک هفته تاخیر مجاز دارید (یعنی حداکثر تاریخ ارسال تمرین تئوری ۱۰ اردیبهشت و تمرین عملی ۲۶ اردیبهشت است.)
- در هر کدام از سوالات، اگر از منابع خارجی استفاده کردهاید باید آن را ذکر کنید. در صورت همفکری با افراد دیگر هم باید نام ایشان را در سوال مورد نظر ذکر نمایید.
- پاسخ تمرین باید ماحصل دانستههای خود شما باشد. در صورت رعایت این موضوع، استفاده از ابزارهای هوش مصنوعی
 با ذکر نحوه و مصداق استفاده بلامانع است.
 - پاسخ ارسالی واضح و خوانا باشد. در غیر این صورت ممکن است منجر به از دست دادن نمره شود.
 - پاسخ ارسالی باید توسط خود شما نوشته شده باشد. به اسکرینشات از منابع یا پاسخ افراد دیگر نمرهای تعلق نمیگیرد.
- در صورتی که بخشی از سوالها را جای دیگری آپلود کرده و لینک آن را قرار داده باشید، حتما باید تاریخ آپلود مشخص و قابل اتکا باشد.
- محل بارگذاری سوالات نظری و عملی در هر تمرین مجزا خواهد بود. به منظور بارگذاری بایستی تمارین تئوری در یک فایل pdf با نام PW3_[First-Name]_[Last-Name]_[Student-Id].pdf و تمارین عملی نیز در یک فایل مجزای زیپ با نام HW3_[First-Name]_[Last-Name]_[Student-Id].zip بارگذاری شوند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام یا مشکل، در کوئرای درس آن مشکل را بیان کنید و از پیغام دادن مستقیم به دستیاران آموزشی خودداری کنید.
 - طراحان این تمرین : محمد امانلو، آرش رسولی، مهرداد صالحی، محمد جواد رنجبر، شایگان ادیم، امیرمحمد ایزدی

بخش نظری (۱۰۰ نمره)

پرسش اول (۱۵ نمره)

در این سوال به بررسی Backpropagation در شبکههای LSTM میپردازیم. معماری استاندارد LSTM را معرفی کرده و فرآیند کامل پس انتشار خطا (Backpropagation) آن را به صورت ریاضیاتی استخراج کنید. گام به گام مشتقات را با تمامی معادلات مرتبط ارائه دهید.

نمادگذاری متغیرها:

- t ورودی در گام زمانی: \mathbf{x}_t
- t خالت پنهان در گام زمانی: \mathbf{h}_t
- t رمانی در گام زمانی: c_t

- t زمانی در گام زمانی: \mathbf{f}_t
- t زمانی : \mathbf{i}_t خروجی دروازه ورودی در گام زمانی :
- t زمانی دروازه خروجی در گام زمانی \mathbf{o}_t
- t زمانی حالت سلول در گام زمانی : \mathbf{g}_t
- $ilde{\mathbf{x}}_t = egin{bmatrix} \mathbf{h}_{t-1} \ \mathbf{x}_t \end{bmatrix}$ ترکیب حالت پنهان قبلی و ورودی فعلی، یعنی $ilde{\mathbf{x}}_t$
- اندیدای حالت سلول و : $\mathbf{W}_f, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_g, \mathbf{W}_o$ ماتریسهای وزن مربوط به دروازههای فراموشی، ورودی، کاندیدای حالت سلول و خروجی
 - بایاسهای مربوط به دروازههای مذکور: $\mathbf{b}_f,\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_g,\mathbf{b}_o$

پرسش دوم (۲۰ نمره)

در این سوال به بررسی ویژگیهای تابع خودتوجه و عملکرد آن در مدلهای ترانسفورمر میپردازیم.

1. بخش الفنشان دهید تابع خودتوجه که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y = Attention(Q, K, V) = \operatorname{Softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{D_k}}\right)V$$

به صورت یک ماتریس تمام متصل (fully connected) در قالب یک ماتریس که تمام دنباله ورودی از بردارهای کلمه به صورت پیوسته را به یک بردار خروجی با همان بعد نگاشت میکند، میتواند توسعه یابد.

- ۲. بخش ب: سپس ثابت کنید که چنین ماتریسی از (N^2D^2) پارامتر برخوردار خواهد بود.
- ۳. بخش ج: نشان دهید که شبکه خودتوجه متناظر با یک نسخه پراکنده(sparse) از این ماتریس با اشتراکگذاری پارامترها است. یک نمودار از ساختار این ماتریس را بکشید و نشان دهید که کدام بلوکهای پارامتر به اشتراک گذاشته می شوند و کدام بلوکها تمام عناصرشان صفر است.
- بخش د: فرض کنید که $E \in \mathbb{R}^{n \times d_{\text{model}}}$ ماتریسی است که شامل بردارهای موقعیتی E_t است که موقعیت t را در $E : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}^{d_{\text{model}}}$ یک دنباله ورودی به طول $E : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}^{d_{\text{model}}}$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$e(t) = E_{t,:} := \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{t}{f_1}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{f_2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{f_3}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{f_4}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{t}{f_{d_{\text{model}}}}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{f_{d_{\text{model}}}}\right) \end{bmatrix}$$

که در آن فرکانسها به صورت زیر تعریف میشوند:

$$f_m = \frac{1}{\lambda_m} := 10000^{\frac{2m}{d_{\text{model}}}}.$$

سپس نشان دهید که یک تبدیل خطی $T^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_{\mathrm{model}} \times d_{\mathrm{model}}}$ وجود دارد که برای آن رابطه زیر برقرار است:

$$T^{(k)}E_{t,:}=E_{t+k,:}$$

 $t\in \mathbb{R}$ به این معنی که این تبدیل خطی برای هر انحراف موقعیتی $k\in \{1,\dots,n\}$ در هر موقعیت معتبر به این معنی که این تبدیل برقرار است. $\{1,\dots,n-k\}$

پرسش سوم (۳۰ نمره)

خودتوجه چندسر جزء اصلی مدلسازی ترنسفرمرها است. در این سوال، ما میخواهیم بررسی کنیم که چرا خودتوجه چندسر می تواند به خودتوجه تکسر ترجیح داده شود. می دانیم که مکانیسم توجه را می توان به عنوان یک عملیات پرس وجو دید که در آن $q \in \mathbb{R}^d$ عبارت پرس و جو، در کنار $v_i \in \mathbb{R}^d$ ، $v_i \in \mathbb{R}^d$ به عنوان مجموعه یا زا بردارهای کلید $v_i \in \mathbb{R}^d$ به صورت زیر مشخص می شود.

$$c = \sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i \tag{1}$$

$$\alpha_i = \frac{\exp(k_i^\top q)}{\sum_{j=1}^n \exp(k_j^\top q)} \tag{Y}$$

در اینجا α_i وزن توجه نامیده میشود.همانطور که میبینید خروجی $c \in \mathbb{R}^d$ یک میانگین وزندار از بردارهای مقدار با وزن α_i است.

(الف) امکان شباهت بردار خروجی مکانیسم توجه به یکی از بردارهای مقدار: در این بخش میخواهیم بگوییم که در شرایط خاصی امکان این وجود دارد که بردار c شباهت زیادی به یکی از بردارهای v_i از بردارهای مقدار داشته باشد. به این منظور به سوالات زیر پاسخ دهید.

. توضیح دهید که چرا α را میتوان به عنوان توزیع احتمال Categorical تفسیر کرد (i)

(ii) توزیع α معمولاً نسبتاً "پراکنده" است، به طوری که جرم احتمال بین α_i های مختلف توزیع می شود. اما این همیشه درست نیست. در یک جمله توضیح دهید که در چه شرایطی توزیع طبقه ای α تقریباً تمام وزن خود را بر روی مقدار α_i به طوری که α_i متمرکز می کند؟ (به عبارت دیگر پرس وجو α_i و یا کلیدهای α_i به عبارت دیگر پرس وجو α_i و یا کلیدهای α_i به طوری که α_i مقدار ویژگی هایی باید داشته باشند؟)

ردوی کی تا به توجه به توضیحاتی که در (ii) بیان کردید، اگر توزیع α پراکنده باشد، خروجی c چه ویژگیهایی خواهد داشت؟

(iv) در راستای توضیح امکان شباهت بین بردار خروجی مکانیسم توجه و یکی از بردارهای مقدار، به طور خلاصه توضیح دهید که از (iii) و (iiii) چه نتیجهای میتوان گرفت؟

(ب) قابلیت ترکیب: یک مدل ترنسفورمر که فقط بر یک بردار v_j متمرکز است، ممکن است بخواهد اطلاعات را k_b و k_a را با بردارهای کلید که میخواهیم اطلاعات دو بردار v_b و v_a را با بردارهای کلید که میخواهیم ترکیب کنیم.

نیم تا اطلاعات هر دو بردار حفظ شود؟ یکی از v_a را در یک بردار خروجی ترکیب کنیم تا اطلاعات هر دو بردار حفظ شود؟ یکی از روشهای رایج برای انجام این کار در یادگیری ماشین، محاسبه میانگین است:

$$c = \frac{1}{2}(v_a + v_b)$$

استخراج اطلاعات در مورد بردارهای اصلی v_a و v_b از حاصل ممکن است به نظر دشوار بیاید، اما در شرایط خاصی میتوان این کار را انجام داد. در این مسئله، خواهیم دید که جز این موارد است.

فرض کنید که اگرچه ما v_a یا v_b را نمی دانیم، اما می دانیم که v_a در یک زیرفضای A قرار دارد که توسط m بردار پایه v_a نیم کنید که اگرچه ما v_b یا v_b را نمی دانیم، در حالی که v_b در یک زیرفضای ناهمپوشان a_1, a_2, \ldots, a_m تشکیل شده است. تمام بردارهای پایه دارای طول ۱ و متعامد با یکدیگر هستند. علاوه بر این، فرض کنید که دو زیرفضا متعامد هستند، یعنی:

$$\langle a_i, b_k \rangle = 0$$
 و iبرای همه k .

اگر $a \in V_a + v_b$ و $a \in V_a + v_b$ ، میتوانیم از ماتریس a برای استخراج a از بردار مجموع $a \in S_a$ استفاده کنیم. به عبارت دیگر، میخواهیم $a \in S_a$ را طوری بسازیم که برای هر $a \in S_a$:

$$M \cdot s = v_a$$
.

B و v_b باید به صورت یک بردار در \mathbb{R}^d بیان شوند، نه بر حسب بردارهای A و v_b اینکه بردارهای v_a بردارهای v_a هم متعامد هستند و هم مبنای نرمال شده ای برای v_a می دانیم که نکته: با توجه به اینکه بردارهای v_a برای v_a می دانیم که

 $v_a=(c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ma_m)$ مقدار $\{c_1,c_2,\ldots,a_m\}$ وجود دارد به طوری که

ورون و به بردارهای کلید و به طوری و به بردارهای کلید و بردار مقدار باشند که به ترتیب مربوط به بردارهای کلید k_i هستند. (ii) همانطور که قبلاً گفتیم، تصور کنید متعامد هستند، بنابراین k_i و برای همه $i \neq j$ و تمام بردارهای کلید دارای طول ۱ هستند. یک عبارت برای بردار پرس و جو p پیدا کنید به طوری که:

$$\frac{1}{2}(v_a + v_b) \approx c.$$

(ج) رفع یکی از اشکالات توجه تک سر: در قسمت قبل دیدیم که چگونه ممکن است توجه تک سر به طور مساوی روی دو مقدار متمرکز شود. این مفهوم را میتوان به راحتی به هر زیرمجموعهای از بردارهای مقدار تعمیم داد. در این سوال خواهیم دید که چرا این راه حل عملی نیست.

مجموعهای از بردارهای کلید k_1, \dots, k_n را در نظر بگیرید که اکنون به صورت تصادفی نمونهبرداری شدهاند:

$$k_i \sim N(\mu_i, \Sigma_i),$$

که در آن میانگین μ_i برای شما شناخته شده است، اما کوواریانس Σ_i ناشناخته است. علاوه بر این، فرض کنید:

$$\|\mu_i\|=1,$$

و بردارهای میانگین μ_i همگی متعامد هستند. اگر $j \neq i$ ، آنگاه:

$$\langle \mu_i, \mu_i \rangle = 0.$$

 $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ برای $\Sigma_i=\alpha I$ تصور کنید که ماتریسهای کوواریانس برای α بسیار کوچک به صورت $\Sigma_i=\alpha I$ برای α بسیار کوچک به صورت تعریف می شوند. یک پرس و جو α را بر حسب α طراحی کنید که α ها از توزیع نرمالی با میانگین آنها نمونه برداری شوند، طوری که مانند قبل:

$$c \approx \frac{1}{2}(v_a + v_b).$$

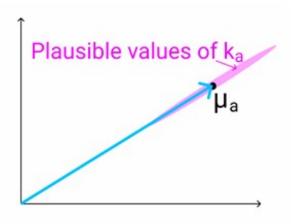
یک استدلال مختصر در مورد اینکه چرا این اتفاق میافتد ارائه دهید. (ii) اگرچه توجه تکسر در برابر آشفتگیهای کوچک در کلیدها مقاوم است، اما برخی از انواع آشفتگیهای بزرگتر ممکن است مشکلات جدی تری ایجاد کنند. به طور خاص، در برخی موارد، یکی از بردارهای کلید k_a ممکن است از نظر نرم بزرگتر یا کوچکتر از بقیه باشد، در حالّی که همچنان در همان راستای میآنگین μ_a است. به عنوان مثال، تصور کنید که کوواریانس نمونه بسیار کوچک a به صورت زیر باشد:

$$\Sigma_a = \frac{1}{2}(\mu_a \mu_a^T) + \alpha I$$

در نظر بگیرید این باعث می شود که k_a تقریباً در جهتی مشابه μ_a باشد، اما با واریانس های بزرگ در اندازه. علاوه بر این، در نظر بگیرید که:

$$\Sigma_a = \alpha I$$

 $a \neq i$ برای همه



شکل π : بردار μ_i (که در اینجا به صورت دوبعدی به عنوان مثال نشان داده شده است)، با محدوده مقادیر ممکن به رنگ بنفش نشان داده شده است. همانطور که قبلاً ذکر شد، k_a تقریباً در جهتی مشاب μ_a است، اما ممکن است k_a اندازهی آن بزرگتر یا کوچکتر باشد.

وقتی چندین بار از $\{k_1, \dots, k_n\}$ نمونهبرداری میکنید و از بردار q که در قسمت i تعریف کردید استفاده میکنید، انتظار دارید بردار c از نظر کیفی برای نمونههای مختلف چگونه باشد و مقدار آن در چه حدود مقادیری تغییر کند؟

(د) راهحل با استفاده از مزایای توجه چندسر: اکنون میخواهیم در مورد توانایی خودتوجهی چندسر در مواجهه با این مشکل صحبت کنیم. ما یک نسخه ساده از خودتوجهی چندسر را در نظر خواهیم گرفت که مشابه خودتوجهی تکسر است که در این تمرین ارائه کردهایم، به جز اینکه دو بردار پرس و جو q_1,q_2 تعریف شده است که منجر به یک جفت از بردارهای c_1, c_2 میشود که هر یکِ خروجی خودتوجهی تکسر نسبت به بردار پرس و جو مربوطه ی خود هستند. خروجی نهایی خودتوجهی چندسر، میانگین آنهاست:

$$\frac{1}{2}(c_1+c_2).$$

همانطور که در بخش سوم این سوال، مجموعه ای از بردارهای کلید $\{k_1,\dots,k_n\}$ را در نظر گرفتیم که به طور تصادفی نمونه برداري مي شوند:

$$k_i \sim N(\mu_i, \Sigma_i),$$

 μ_i که در آن میانگین μ_i برای شما شناخته شده است، اما کوواریانس Σ_i ناشناخته است. فرض میکنیم که میانگین متعامد هستند و برای $j \neq i$:

$$\langle \mu_i, \mu_j \rangle = 0.$$

همچنین نرم واحد دارند:

 $\|\mu_i\|=1.$

نرش کنید که ماتریسهای کوواریانس برای lpha های بسیار کوچک به صورت $\Sigma_i=lpha I$ تعریف شدهاند. بردارهای و رفع دار به گونهای پیدا کنید که خروجی برابر با میانگین دو بردار v_a و v_b شود.

(ii) فرض کنید که ماتریسهای کوواریانس برای α های بسیار کوچک به صورت:

$$\Sigma_a = \frac{1}{2}(\mu_a \mu_a^T) + I$$

و برای هر i، اگر $a \neq i$ آنگاه برابر:

$$\Sigma_i = \alpha I$$

هستند. بردارهای پرس و جو q_1 و q_2 را که در بخش قبلی سوال طراحی شدهاند، در نظر بگیرید. انتظار دارید خروجی بر اساس نمونههای مختلف بردارهای کلید چگونه باشد؟ یا به عبارت دیگر، چه رابطهای بین بردار c و بردارهای مقدار مربوط به کلیدها وجود خواهد داشت؟ (لطفاً به طور خلاصه توضیح دهید که چرا میتوانید مواردی را که در آن $k_a^T q_i < 0$

پرسش چهارم (۲۰ نمره)

یکی از مشکلات عملیاتی مکانیزم توجه با context window های بزرگ، هزینهی محاسباتی بسیار زیاد محاسبهی ماتریس توجه است. برای رفع این مشکل، روشهای بسیاری به کار گرفته شده که مهمترین آنها، روشهای دودد و دود در دارند که استفاده ی خیلی زیاد از حافظه ی cache است.

در این تمرین، قصد داریم هزینه محاسباتی یک گام inference تک توکنی از یک لایه Multi-head Attention در یک مدل زبانی بزرگ decoder-only را تحلیل کنیم و نقاط قوت و ضعف اعمال روشهای KV-Cache را بررسی کنیم.

فرضيات:

- ا تعداد توكنها :n
- بعد Embedding ورودی هر توکنd
 - Key-Query بعد فضای: $d_h \bullet$
 - Attention تعداد سرهای: $n_h ullet$
- 1. تحلیلی دقیق از هزینه محاسباتی یک لایه از این ساختار را بر حسب متغیرهای داده شده ارائه دهید. توجه داشته باشید که در این بخش باید فرض کنید که هیچ روش بهینهسازی ای بهبود مکانیزم توجه نداریم.
- ۲. ابتدا KV-Cache را کامل توضیح دهید و سپس تحلیل قبل را تکرار کنید، اما این بار KV-cache معمول را برای ماتریسهای کلید و مقدار در نظر بگیرید. تمام محاسبات را دوباره انجام دهید. در این بخش، تعداد عناصر(اعداد) مورد نیاز برای ذخیره در حافظه را نیز محاسبه کنید.

- ۳. ابتدا روش Multi-Query Attention را کامل توضیح دهید و بار دیگر، همان تحلیل را با استفاده از KV-cache معمول برای ماتریسهای کلید و مقدار انجام دهید، اما این بار در معماری مدل از KV-cache استفاده میکنیم. همینطور مانند بخش قبل، تعداد عناصر(اعداد) مورد نیاز برای ذخیره در حافظه را محاسبه کنید.
- KV- ابتدا روش Grouped-Query Attention را کامل توضیح دهید و سپس همان تحلیل را با استفاده از Grouped-Query Attention ابتدا و مقدار انجام دهید، اما این بار از cache معمول برای ماتریسهای کلید و مقدار انجام دهید، اما این بار از g را به عنوان استفاده می کنیم. تعداد عناصر (اعداد) مورد نیاز برای ذخیره در حافظه پنهان را محاسبه کنید. g را به عنوان تعداد گروهها در نظر بگیرید.)
- ۵. با فرضهای زیر و با استفاده از fp۱۶، مقدار عددی پیچیدگی محاسباتی و همچنین حافظهی cache استفاده شده را در هر یک از موارد بالا را محاسبه و مقایسه کنید:
 - $n = 1 \cdot YF \bullet$
 - $d = V \mathcal{F} \Lambda \bullet$
 - $d_h = 99$
 - $n_h = 17 \bullet$
 - $q = \mathcal{F} \bullet$
- ۶. (امتیازی) در یک نوآوری خلاقانه، در مدل DeepSeek-R۱ ، نوع جدیدی از معماری توجه به نام Multi-Head Latent را به شدت افزایش و استفاده از حافظه را به شدت کاهش داد. معماری مکانیزم توجه در این مدل را به طور کلی توضیح دهید و نشان دهید که چگونه این روش استفاده از حافظه را به شدت کم میکند.

يرسش ينجم (۱۵ نمره)

- ۱. یکی از اولین و معروفترین مدلها Encoder-Only مدل BERT است که در سال ۲۰۱۸ معرفی شد. در مورد این مدل به سوالات زیر پاسخ دهید.
 - (آ) توضیح دهید که معنی اینکه میگوییم مدل BERT از ترنسفورمر دو طرفه استفاده می کند، چیست؟
- (ب) آموزش این مدل بر اساس دو وظیفه Masked Language Modeling(MLM) و Masked Language Modeling بوده است. هر کدام از این وظایف را توضیح دهید و بگویید چگونه به آموزش و یادگیری مدل کمک میکند.
 - (ج) نقش توکن ویژه CLS چیست و چگونه از آن در هنگام تنظیم دقیق Fine-Tuning استفاده می شود؟
- (د) آیا میتوان با استفاده از مدل BERT وظیفه تولید متن را انجام داد؟ توضیح دهید که چگونه میشود یا چرا نمی شود.
- (ه) یکی دیگر از مدلهای موفق که پس از BERT معرفی شد مدل RoBERTa بود. توضیح دهید که چه تفاوتی در آن ایجاد شد.
- (و) در مورد مدل ViT تحقیق کنید و به صورت مختصر بیان کنید که چه تفاوت و شباهتی با مدل BERT دارد.
- ۲. در همان سالهایی که مدل BERT معرفی شد، مدل Generative Pre-Training Transformer(GPT) معرفی شد، مدل Decoder-Only پایه و ایده اصلیای شده است برای شد که یک مدل Decoder-Only به حساب می آمد. معرفی معماری GPT پایه و ایده اصلیای شده است برای تمام مدلهای زبانی بزرگ مانند ChatGPT که امروزه می بینید. در این باره به سوالات زیر پاسخ دهید.

- (آ) آموزش این مدلها عموما با وظیفه Next Token Prediction(NTP) انجام می شوند. آن را توضیح دهید.
 - (ب) مکانزیم Masked-Attention در مدلهای GPT چیست و چرا برای تولید متن ضروری است؟
- (ج) روش تولید متن در این معماری را توضیح دهید. یعنی توضیح دهید که ورودی مدل در ابتدا چه بوده و هربار که لغت جدید تولید می شود چه اتفاقی صورت می گیرد.
 - (د) چرا معماریهای Decoder-Only در زمان استنتاج کندتر از معماریهای Encoder-Only هستند؟
- (ه) طول کانتکست در یک مدل زبانی بزرگ چگونه بر توانایی آن در حفظ و بازیابی اطلاعات از ابتدای ورودی تأثیر میگذارد و چه تاثیری بر پیچیدگی محاسباتی و میزان حافظه مصرفی دارد؟
- (و) چرا مدلهای GPT ممکن است اطلاعات نادرست یا به اصطلاح "hallucination" تولید کنند، حتی اگر روی دادههای واقعی آموزش دیده باشند؟
- ۳. یکی از روشهای تنظیم دقیق مدلهای بزرگ استفاده از روشهای Parameter Efficient Fine-Tuning یا همان PEFT است که موجب صرفهجویی و بهینه کردن زمان و حافظه مورد نیاز برای آموزش است. حال به سوالات زیر پاسخ دهید:
- (آ) توضیح دهید که روشهای PEFT چگونه به بهینه کردن آموزش مدلها کمک میکنند. همچنین در مورد روشهای Adapter, Prompt-Tuning و LoRA که از این دسته از روشها هستند توضیح مختصری بدهید و نحوه عملکرد آنها را شرح دهید.
- (ب) معمولاً در زمان آموزش با روش LoRA ماتریس \mathbf{B} با مقدار صفر مقداردهی اولیه می شود. دلیل این کار را توضیح دهید.
- (ج) فرض کنید یک معماری Transformer که فقط شامل یک بلوک Encoder داریم. اندازه بعد لایههای پنهان و امبدینگها برابر d است و همچنین d برابر تعداد head ها در بلوک Multi-Head Attention پنهان و امبدینگها برابر d است و همچنین d برابر و سپس به اندازه خود باز میگردد. اگر بخواهیم است و در لایه Feed-Forward سایز لایه پنهان d برابر و سپس به اندازه خود باز میگردد. اگر بخواهیم روش Lora با رنک d را بر روی تمامی ماتریسها اعمال کنیم، تعداد پارامترهایی که آموزش می بینند را بدست آورید. (فقط پارامترهای Feed-Forward و Attention را در نظر بگیرید و از بایاسها صرف نظر کنید.)
- (د) در سالهای اخیر با توجه به عملکرد خوب روش LoRA در تسکهای مختلف، توجهات زیادی به این روش شده است. با تحقیق و جستجو، ۴ مورد از این روش شده است. با تحقیق و جستجو، ۴ مورد از این روشها را پیدا کنید و توضیح مختصری در مورد آنها و تفاوتشان با LoRA ارائه دهید. (هر مورد را نهایتاً در ۲ الی ۳ خط توضیح دهید.)

پرسش ششم (امتیازی - ۳۰ نمره)

ما این بخش را با مرور مختصری از فرمولبندی خود_توجه (Self-Attention) و کانولوشنها آغاز میکنیم. هر دو روش بهطور جداگانه و مشترک در وظایف مختلف پردازش زبان طبیعی استفاده شدهاند. هدف ما از این سوال این است که درباره شباهتهایی که بین آنها وجود دارد، بحث کنیم.

$$O = \text{Self-Attention}(Z) := \operatorname{softmax}\left(\frac{ZW_qW_k^\top Z^\top}{\sqrt{d_k}}\right) ZW_v \tag{1}$$

که در آن $W_v \in \mathbb{R}^{(D_i \times D_{o})}$, $W_k \in \mathbb{R}^{(D_i \times D_{o})}$ و $W_v \in \mathbb{R}^{(D_i \times D_{o})}$ ماتریسهای قابل آموزش هستند که به ترتیب برای کوئری (query)، کلید (key) و مقدار (value) میباشند. این شکل خاص از توجه، به عنوان خود_توجه شناخته می شود، زیرا تمام ماتریسهای وزن با همان ماتریس ورودی Z ضرب می شوند. برای وضوح بیشتر، ماتریس توجه $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A := ZW_q W_k^{\top} Z^{\top} \tag{Y}$$

عناصر این ماتریس به عنوان نمرات توجه (attention scores) شناخته می شوند و نشان می دهند که هر توکن چقدر به هر توکن دیگر مرتبط است. هر عنصر (softmax(A) را نیز احتمالهای توجه (attention probabilities) می نامیم. به طور تجربی ثابت شده است که انجام مکانیسم خود ـ توجه بر روی سرهای متعدد مفید است. به عبارت دیگر چند سر توجه داشتن به این معنی است که چندین بار به صورت موازی در یک لایه، هر بار با ماتریس های وزنی مختلف، فرایند خود ـ توجه را انجام دهیم. سپس خروجی های سرهای توجه به صورت زیر ترکیب شوند:

$$\text{MultiHead-Self-Attention}(Z)_{t,:} = \left(\operatorname{concat}_{h \in [N_h]} \left(\operatorname{Self-Attention}_h(Z) W_h^{\operatorname{out}} \right) \right)_{t,:} + b_{\operatorname{out}}$$
 (\mathbf{r})

که در آن $W_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{(N_h \cdot D_o) \times D_{\text{out}}}$ و $W_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{1 \times D_{\text{out}}}$ پارامترهای قابل آموزش هستند و $W_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{(N_h \cdot D_o) \times D_{\text{out}}}$ ردیفهای ماتریس ورودی Z معمولاً تعبیه های توکن ها هستند که توکن را در یک فضای برداری نشان می دهند. با این حال، اخیراً از لایههای توجه با پچ تصویری به عنوان ورودی استفاده می شود که نتایج خوبی در وظایف بینایی رایانه مانند طبقه بندی تصویر به دست می آورد.

در این حالت، تصویر ورودی با یک تنسور $Z \in \mathbb{R}^{(W \times H \times D_i)}$ کدگذاری می شود، جایی که W و W اندازه های تصویر ورودی هستند و D_i تعداد کانال ها است. ما می خواهیم فرمول بندی خود_ توجه در معادله ۱ را طوری تطبیق دهیم که با پیکسل ها $Z_{i,j,:}$ به عنوان $Z_{i,j,:}$ به عنوان نمایان می کنیم.

(الف)

چند پارامتر قابل آموزش در یک لایه خود_توجه چندسر با N_h سر، مانند آنچه در معادله $oldsymbol{\pi}$ توضیح داده شده، وجود دارد؟

(ب)

معادله ۱ و معادله ۳ را برای تک پیکسل کوئری q بازنویسی کنید، به طوری که خود توجه به صورت زیر بدست آید:

Self-Attention
$$(Z)_{q,:} \in \mathbb{R}^{(1 \times D_o)}$$

و

$\textbf{MultiHead-Self-Attention}(Z)_{q,:} \in \mathbb{R}^{(1 \times D_{\text{out}})}$

ویژگی خاص خود_توجه همانطور که در معادله ۱ تعریف شده است، این است که تغییرات در ترتیب را تحمل میکند (permutation invariant). با این حال، هم زمانی که با دنبالههای متنی کار میکنیم و هم زمانی که با تصاویر کار میکنیم، موقعیت هر توکن یا پیکسل اطلاعات مهمی را حمل میکند که میخواهیم آن را حفظ کنیم. برای انجام این کار، ما از یک ماتریس موقعیت (ماتریس $P \in \mathbb{R}^{N \times D_i}$ که میتواند یادگرفته شده یا ثابت باشد) استفاده میکنیم که فرم ماتریس توجه $P \in \mathbb{R}^{N \times D_i}$ در معادله ۲ را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$A := (Z+P)W_qW_k^{\top}(Z+P)^{\top} \tag{\mathfrak{F}}$$

رمزگذاریهای موقعیتی میتوانند مطلق(absolute) یا نسبی(relative) باشند. در رمزگذاریهای مطلق، یک بردار موقعیت P_p برای پیکسل ورودی p، تنها به موقعیت مطلق p در ورودی بستگی دارد. بنابراین، ما میتوانیم معادله p برای پیکسل کوئری p و پیکسل کلید p گسترش دهیم و به شکل زیر برسیم:

$$\begin{split} A_{q,k}^{\text{absolute}} &= (Z_{q,:} + P_{q,:}) W_q W_k^\top (Z_{k,:} + P_{k,:})^\top \\ &= Z_{q,:} W_q W_k^\top Z_{k,:}^\top + Z_{q,:} W_q W_k^\top P_{k,:}^\top + P_{q,:} W_q W_k^\top Z_{k,:} + P_{q,:} W_q W_k^\top P_{k,:} \end{split} \tag{Δ}$$

 $\delta:=q-k=0$ از طرف دیگر، در رمزگذاری نسبی، بردار موقعیت برای پیکسل کوئری تنها به تفاوت موقعیت نسبی یا $\delta:=q-k=0$ بین خود و پیکسل کلید بستگی دارد.

$$A_{q,k}^{\text{relative}} := Z_{q,:} W_q W_k^{\top} Z_{k,:}^{\top} + Z_{q,:} W_q \widetilde{W}_k r_{\delta} + u^{\top} W_k Z_{k,:} + v^{\top} \widetilde{W}_k r_{\delta}$$
 (9)

در اینجا، u و v بردارهای قابل یادگیری هستند و ما یک ماتریس پارامتر جدید $\widetilde{W}_k \neq W_k$ معرفی میکنیم. در حالی که انواع مختلفی از رمزگذاری نسبی به نام رمزگذاری انواع مختلفی از رمزگذاری نسبی به نام رمزگذاری گاوسی می پردازیم که از معادلات زیر تبعیت میکند:

$$v^{(h)} := -\alpha^{(h)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\Delta_1^{(h)} \\ -2\Delta_2^{(h)} \end{pmatrix}, \quad r_{\delta} := \begin{pmatrix} \|\delta\|^2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad W_q = W_k := 0, \quad \widetilde{W}_k := I$$
 (Y)

 $\Delta_2^{(h)}$ ما $D_p=3$ ما به عنوان بُعد هر دو $v^{(h)}$ و $v^{(h)}$ و را به عنوان بُعد هر دو $v^{(h)}$ و مگیریم. در این حالت، داریم $v^{(h)}$ و میکنین، $v^{(h)}$ و بارامترهای قابل یادگیری هستند.

(ج)

عبارات داده شده در معادله ۷ را در معادله ۶ قرار دهید تا $A_{a,k}^{\mathrm{relative}}$ را ساده کنید.

(3)

هزینه محاسباتی یک لایه توجه تکسر با استفاده از رمزگذاری مطلق چقدر است؟ فرض کنید که P قبلاً محاسبه شده است. هزینه محاسباتی چه خواهد بود اگر لایه توجه از رمزگذاری گاوسی استفاده کند؟ از نماد P بزرگ برای مقایسه دو حالت نسبت به P برای P برای P به P به P برای مقایسه دو حالت نسبت به P برای P برای P به استفاده کنید. ما اکنون به طور مختصر ساختار یک کانولوشن را مرور می کنیم. با در نظر گرفتن یک تنسور تصویر P به در P و P به ترتیس وزن P به نادازه کرنل و P و یک بردار بایاس P به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد P به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد P به به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد P به به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد P به به به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد P به به به ترتیب تعداد کانالهای ورودی و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد و خروجی هستند، خروجی یک لایه کانولوشنی برای یک پیکسل منفرد و خروجی به به ترتیب تعداد کانالهای و به به ترتیب تعداد کانالهای و به به تربیب تعداد کانالها کند و به به تربیب تعداد کانالهای و به تود و به به تربیب تعداد کانالهای و به تود و به به تربیب تعداد کانالهای و به تود و به توجه و به تود و به تود و به تود و به تود و به توجه و به تود و به تو

$$Convolution(Z)_{i,j,:} := \left(\sum_{(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_K} Z_{i+\delta_1, j+\delta_2,:} W_{\delta_1, \delta_2,:}\right) + b \tag{Λ}$$

که در آن Δ_K مجموعهای از تمام جابجاییهای ممکن است که توسط کرنل کانولوشنی با اندازه K مجاز است.

$$\Delta_K := \left\{ \left[\lfloor -\frac{K}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{K-1}{2} \rfloor \right] \times \left[\lfloor -\frac{K}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{K-1}{2} \rfloor \right] \right\} \tag{9}$$

در نهایت، هدف ما اثبات قضیهای است که شباهتهای کلیدی میان قابلیتهای محاسباتی لایههای خودتوجهی و لایههای کانولوشنی در یک معماری عصبی نمایان میسازد.

قضیه اصلی: یک \overline{K} یه خود_توجه چند_سر که روی \overline{K} سر با ابعاد D_o و ابعاد خروجی عمل میکند، با استفاده از یک رمزگذاری موقعیتی نسبی با ابعاد $D_p \geq 3$ ، میتواند وظیفه هر لایه کانولوشنی با کرنل اندازه $K \times K$ و کانالهای خروجی D_o را ادا کند.

ما آثبات آین قضیه اصلی را به اثبات جداگانه دو قضیه فرعی تقسیم می کنیم. قضیه ۱ به شرح زیر است: قضیه ۱ به فرض اینکه یک لایه خود_توجه چند_سر با $N_h=K^2$ سر و $D_o\geq D_{\mathrm{out}}$ داده شده باشد، فرض کنیم که برای هر سر که $f:[N_h]\to\Delta_K$ می نگاشت یک به یک بین سرها و جابجاییها است. همچنین فرض می کنیم که برای هر سر داریم:

$$\operatorname{softmax}(A_{q,:}^{(h)})_k = \begin{cases} 1 & \text{if } (h) = q - k \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$$
 در غیر این صورت.

 $\{W_v^{(h)}\}_{h\in N_h}$ انگاه برای هر لایه کانولوشنی با کرنل $K\times K$ و کانالهای خروجی D_{out} یک مجموعه از وزنها وزنها وجود دارد که به گونه ای است که:

MultiHead-Self-Attention $(Z)= ext{Convolution}(Z)$ مرای هر تنسور ورودی $Z\in\mathbb{R}^{W imes H imes D_{ ext{in}}}$

(0)

معادله ۳ را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\operatorname{MultiHead-Self-Attention}(Z) = \sum_{h \in [N_h]} \operatorname{softmax}(A^{(h)}) ZW^{(h)} + b_{\operatorname{out}} \tag{11}$$

وزن $W^{(h)}$ را به صورت تابعی از W_v و بیان کنید. سپس از $W^{(h)}$ برای نوشتن یک عبارت برای

MultiHead-Self-Attention $(Z)_{q,:} \in \mathbb{R}^{D_{\mathrm{out}}}$

استفاده كنيد.

(e)

از مفروضات قضیه ۱ استفاده کنید ته معادل یک MultiHead-Self-Attention $(Z)_{q,:}$ از مفروضات قضیه ۱ استفاده کنید که معادل یک لایه کانولوشنال طبق تعریف معادله ۸ باشد.

قضیه ۲

ما اکنون باید اثبات کنیم که آیا میتوانیم یک رمزگذاری موقعیتی خاص بسازیم که مجموعهای از مفروضاتی که در قضیه ۱ از آنها استفاده کردیم، بهدست آورد. بنابراین، ما تلاش میکنیم که قضیه زیر را اثبات کنیم:

 $W_q, W_k, \widetilde{W}_k$ با استفاده از پارامترهای $\{r_\delta \in \mathbb{R}^{D_p}\}_{\delta \in \mathbb{Z}^2}$ با استفاده از پارامترهای $W_q, W_k, \widetilde{W}_k$ و بسازیم به طوری که برای هر جابجایی $\Delta \in \Delta_K$ یک بردار v وجود داشته باشد که نگاشت f از معادله ۱۰ را ته لبد کند.

ر .. ما از رمزگذاری گاوسی تعریفشده در معادله ۷ استفاده خواهیم کرد و فرض میکنیم که معادله زیر برقرار است:

$$A_{q,k} = -\alpha(\|\delta - \Delta\|^2 + c) \tag{1Y}$$

(;**)**

حد زیر را برای هر دو حالت $\Delta = \delta$ و $\Delta
eq \Delta$ حل کنید و توضیح دهید که چرا این معادله ۱۰ را برآورده میکند:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \operatorname{softmax}(A_{q,:})_k \tag{17}$$

(ح)

از تعریف رمزگذاری گاوسی استفاده کنید و تعیین کنید که برای کدام مقدار ثابت c مفروضه در معادله ۱۲ برقرار است. با ترکیب قضیه ۱ و قضیه ۲، ما قضیه اصلی را اثبات کردیم و نشان دادیم که تحت برخی شرایط، یک لایه توجه می تواند یاد بگیرد که مانند یک لایه کانولوشنال رفتار کند.

در نهایت، بررسی کنید آیا این نتیجه برای هایپرپارامترهای مختلفی که معمولاً در هنگام بهینهسازی شبکههای کانولوشنی تنظیم میشوند صادق است یا خیر.

(4)

برای کدام اندازهها و مقادیر پدینگ خروجی یک لایه خود_توجه چندسر معادل خروجی یک لایه کانولوشنال است؟

(ی)

آیا یک لایه خود_توجه چندسر میتواند یک کانولوشن با dilations دلخواه را با وجود محدودیتهای ساختاری مرتبط با تصویر ورودی بیان کند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(ک)

آیا یک لایه خود_توجه چندسر میتواند یاد بگیرد که یک کانولوشن با stride را شبیهسازی کند؟ اگر بله، چرا؟ در غیر این صورت، چرا این امکان وجود ندارد؟

بخش عملی (۱۰۰ نمره)

پرسش ۱. پیشبینی قیمت نفت خام (۲۵ نمره)

مقدمه

پیش بینی سری های زمانی یکی از مهمترین و کاربردی ترین مباحث در حوزه یادگیری ماشین و تحلیل داده است. در بسیاری از حوزه ها از جمله اقتصاد، انرژی، حمل ونقل، بازارهای مالی و سلامت، داده ها به صورت دنباله ای از مشاهدات در طول زمان ثبت می شوند. هدف از تحلیل سری های زمانی، مدل سازی رفتار داده ها در طول زمان و استفاده از آن برای پیش بینی مقادیر آینده است.

در این پروژه، تمرکز شما بر پیش بینی قیمت نفت خام خواهد بود؛ یکی از اصلی ترین شاخصهای اقتصادی در جهان. نوسانات قیمت نفت تأثیر گستردهای بر بودجه کشورها، نرخ ارز، تورم و حتی سیاستهای اقتصادی دارد. بنابراین، ساخت مدلی که بتواند این قیمت را بهصورت دقیق پیش بینی کند، از اهمیت بالایی برخوردار است.

شما باید با استفاده از دادههای واقعی مربوط به نماد CL=F از پایگاه Finance، Yahoo چند مدل مختلف سری رزانی و آنها کار خواهید کرد شامل RNN، زمانی را پیادهسازی کرده و با یکدیگر مقایسه کنید. مدلهایی که در این پروژه با آنها کار خواهید کرد شامل RNN، مقاله مرجع GRU، LSTM و ARIMA هستند. در نهایت باید بتوانید عملکرد این مدلها را ارزیابی کرده و نتایج را با مقاله مرجع مقایسه نمایید.

مرحله اول: دریافت و آمادهسازی داده

ابتدا باید دادههای تاریخی قیمت نفت خام را از وبسایت Yahoo Finance مربوط به نماد CL=F برای بازه زمانی از سال ۲۰۱۰ تا امروز دانلود کرده و آن را به پروژه وارد کنید.

سپس از ستون Ādj Close به عنوان ویژگی اصّلی برای پیش بینی استفاده کنید. پس از آن، بهصورت تصادفی ۱۰ درصد از مقادیر داده را حذف کرده و با یکی از روش های زیر، مقادیر گمشده را جایگزین کنید:

- استفاده از میانگین متحرک
- یر کردن با مقدار قبلی (forward fill)
- یر کردن با مقدار بعدی (backward fill)

در ادامه، دادهها را مطابق با نسبت آموزش به آزمون مشخصشده در مقاله (برای مثال ۷۰ درصد آموزش و ۳۰ درصد آزمون) تقسیم بندی کنید و سپس آنها را نرمالسازی (Scaling) نمایید تا آماده ورود به مدل شوند. در پایان این مرحله، باید یک هیستوگرام از توزیع قیمتها رسم کنید که مشابه شکل ۶ مقاله مرجع باشد تا نمای کلی از رفتار قیمت نفت به دست آورید.

مرحله دوم: پیادهسازی مدلهای یادگیری عمیق

در این بخش باید چهار مدل یادگیری عمیق را پیادهسازی و آموزش دهید. مدلها شامل موارد زیر هستند:

- RNN (Recurrent Neural Network) •
- LSTM (Long Short-Term Memory)
 - **GRU (Gated Recurrent Unit)** •

هر مدل را با استفاده از پایتون و کتابخانههایی مانند TensorFlow یا PyTorch بسازید و طبق تنظیمات مقاله مرجع آن را آموزش دهید. به عنوان تابع هزینه از (Mean Squared Error استفاده کنید. پس از آموزش مدلها، باید پیش بینی آنها را در کنار مقادیر واقعی قیمت نفت رسم کرده و نتایج را مقایسه نمایید.

مرحله سوم: ارزيابي مدلها

در این مرحله باید عملکرد مدلها را با استفاده از چهار معیار خطا ارزیابی کنید:

- RMSE
 - MAE •
- MAPE •
- R-Squared •

مقادیر این معیارها را برای هر مدل محاسبه کرده و آنها را با یکدیگر و با نتایج مقاله مرجع مقایسه کنید تا متوجه شوید کدام مدل دقت بیشتری در پیشبینی قیمت نفت داشته است.

مرحله چهارم: مدل آماری ARIMA

در این بخش باید مدل آماری ARIMA را پیادهسازی کنید. ابتدا تفاوت بین ARIMA و SARIMA را به طور خلاصه بررسی کنید و سپس فرمول ریاضی ARIMA و نقش پارامترهای (p, d, q) را شرح دهید. برای یافتن مقادیر بهینه این پارامترها، می توانید از نمودارهای ACF و PACF یا تابع auto_arima استفاده نمایید. پس از تعیین پارامترها، مدل ARIMA را روی داده ها آموزش داده و نتایج آن را با سایر مدلهای یادگیری عمیق و جدول شماره ۶ مقاله مقایسه کنید.

مرحله پایانی: جمع بندی

در پایان، باید بهصورت خلاصه یافتههای خود را گزارش دهید. بررسی کنید کدام مدل بهترین عملکرد را در پیشبینی قیمت نفت داشته است، دلایل آن چه بوده و مزایا و محدودیتهای هر مدل را توضیح دهید. این پروژه به شما کمک میکند تا بهصورت عملی با مدلسازی سری زمانی، استفاده از یادگیری عمیق و مقایسه آن با روشهای آماری آشنا شوید. همچنین مهارت کار با دادههای واقعی، ارزیابی مدلها و تحلیل نتایج علمی را در شما تقویت خواهد کرد.

پرسش ۲. GPT2 From Scratch (۲۵ نمره)

در این تمرین، یک نسخه ی بسیار کم حجم از معماری GPT-2 شرکت OpenAI را از صفر (صفر مطلق!) پیادهسازی خواهید کرد و سپس روی کامنتهای اسنپفود آموزش می دهید. هدف اصلی تمرین، ایجاد یک مدل زبانی مولد است که بتواند کامنتهای مصنوعی فارسی با sentiment کنتول پذیو (مثبت یا منفی) تولید کند.

پرسش ۳. تنظیم دقیق بهینه (۲۵ نمره)

یکی از چالشهای تنظیم دقیق (Fine-Tuning) مدلهای زبانی این است که به حافظه و زمان بسیار زیادی نیاز دارند و همچنین اگر بخواهیم مدل را برای وظایف مختلفی آموزش دهیم به ازای هر وظیفه باید یک مدل کامل نگهداری و در PEFT(Parameter Efficient Fine-Tuning) بالا آید. برای حل این مشکلات روشهای بهینه production بالا آید. برای حل این مشکلات روشهای بهینه و در واقع وزنهای کمتری نسبت به معرفی شدند که آموزش مدلهای بزرگ را در زمان و حافظه کمتری انجام میدهند و در واقع وزنهای کمتری نسبت به مدل کامل آموزش میدهند. در نوتبوک peft شما به بررسی این روشها میپردازید و یکی از آنها را پیادهسازی میکنید.

پرسش ۴. استدلال در LLM ها و روشهای Inference Time Scaling (۲۵ نمره)

در این تمرین، ما درباره استدلال در مدلهای زبانی بزرگ (LLMs) صحبت میکنیم و توانایی استدلال آنها را با استفاده از مجموعه دادههای ریاضی (Math benchmark) ارزیابی میکنیم. ما برخی از روشهای inference time scaling را مورد بررسی قرار میدهیم که عبارتند از:

- Chain of Thought: روشی که مدل را تشویق میکند تا به صورت مرحله به مرحله فکر کند و راهحل را توضیح دهد.
 - Best of N: انتخاب بهترین پاسخ از میان N پاسخ تولیدشده توسط مدل.
 - Beam Search: الگوریتمی برای جستجوی بهترین دنباله های ممکن در تولید پاسخ.
 - Self-Refinement: فرآیندی که در آن مدل پاسخ خود را بازبینی و بهبود میدهد.