



سوال اول: ضرایب سری فوریه و طیف نگاره^۱

در این سوال هدف کار با ضرایب سری فوریه گسسته و همچنین نمایش طیف نگاره برای سیگنال‌های متغیر در بازه‌های زمانی طولانی است.

۱. تابعی بنویسید که با گرفتن یک سیگنال یک بعدی، ضرایب سری فوریه آن را محاسبه کند.
 ۲. تابعی بنویسید که با گرفتن ضرایب سری فوریه یک بعدی، سیگنال اولیه را بازسازی نماید.
 ۳. یک سیگنال صوتی یک بعدی را از ورودی بخوانید. برای این کار فایل صوتی 1.wav را از ورودی بخوانید. ضرایب سری فوریه را برای این سیگنال به دست آورید و این ضرایب را نمایش دهید.
 ۴. حال با استفاده از ضرایب سری فوریه که در قسمت قبل به دست آوردید، سیگنال اولیه را بازسازی نمایید. سیگنال بازسازی شده را با سیگنال اصلی مقایسه نمایید. آیا خطایی در سیگنال بازسازی شده وجود دارد؟ میزان خطا (تفاوت سیگنال بازسازی شده و سیگنال اولیه) چقدر است؟
 ۵. برای سیگنال‌های متغیر در زمان، بهتر است که ضرایب سری فوریه در بازه‌های محدود بررسی شوند. در بعضی از سیگنال‌ها، ساختار دامنه‌ی فرکانسی سیگنال در طول زمان تغییر می‌کند. در واقع این تغییر در ساختار فرکانسی سیگنال در بعضی موارد مهمتر از ساختار فرکانسی خود سیگنال می‌باشد. برای مثال سیستم شنوایی انسان قادر به شنیدن صوت در بازه‌ی فرکانسی بالای ۲۰ kHz نیست. ولی مغز انسان تغییرات کمتر از ۲۰ kHz را به عنوان تغییر در ساختار فرکانسی تلقی می‌کند.
- برای مثال در سیگنال زیر که به سیگنال جیر^۲ مشهور است، ساختار فرکانسی سیگنال در طول زمان تغییر می‌کند. به همین دلیل بررسی سری فوریه زمان-کوتاه^۳ این سیگنال، ساختار بیشتری از آن را نشان می‌دهد.

$$y = \alpha \sin(\beta t^2) \quad (۱)$$

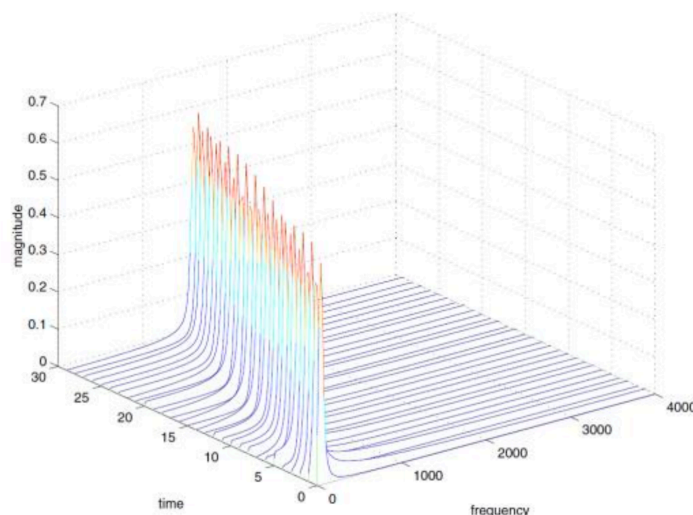
در این سوال، هدف پیاده سازی تابعی است که بتواند محتویات سری فوریه ی یک سیگنال را در بازه‌های زمانی کوتاهی به دست آورده و نمایش دهد. برای مثال نمودار زیر که نمودار آشنایی سیگنال بالا است، نشان می‌دهد که در طول بازه‌های زمانی مختلف، ساختار فرکانسی سیگنال **معادله ۱** تغییر می‌کند.

¹ Spectrogram

² Chirp

³ Short-time Fourier transform

پس شما باید بتوانید ضرایب سری فوریه را برای محتویات سیگنال درون یک پنجره زمانی کوتاه به دست آورید. به دلیل کوتاه بودن این پنجره زمانی، ضرایب سری فوریه اطلاعات بهتر و دقیق‌تری در مورد ساختار فرکانسی سیگنال در اختیار می‌دهند. این کار را برای بازه‌های بدون همپوشانی برای کل طول سیگنال انجام دهید و نموداری مانند **شکل ۱** که به نمودار آبشاری معروف است را برای سیگنال مورد نظر رسم کنید. این نمودار با دستور waterfall در متلب به دست آمده است. این کار را برای سیگنال **معادله ۱** و همچنین فایل صوتی variable_pitch.wav انجام داده و خروجی را نمایش دهید.



شکل ۱: نمودار سیگنال جیر.

۶. خروجی روش مبتنی بر پنجره زمانی را با خروجی حاصل از روش اول که ضرایب سری فوریه را برای کل سیگنال به دست می‌آورد، مقایسه کنید.

سوال دوم: کار با اندازه و فاز تبدیل یافته‌ی سیگنال‌ها

در این سوال، هدف بررسی فاز و اندازه تبدیل فوریه سیگنال‌های یک بعدی و دو بعدی می‌باشد.

۱. دو سیگنال یک بعدی هم طول را در نظر بگیرید (فایل‌های صوتی 1.wav و 2.wav). برای هر کدام، فاز و اندازه‌ی تبدیل فوریه را به دست آورید. حال فاز سیگنال اول و اندازه‌ی سیگنال دوم را با هم ترکیب کنید. همین کار را با ترکیب اندازه‌ی سیگنال اول و فاز سیگنال دوم انجام دهید. سپس معکوس این ترکیب‌ها را به دست آورید.

۲. سیگنال‌های جدید را بشنوید. کدام سیگنال شباهت به سیگنال اول دارد؟ کدام به سیگنال دوم؟

۳. همین کار را بر روی سیگنال‌های دو بعدی هم‌اندازه انجام دهید (فایل‌های تصویری Baboon.bmp و Peppers.bmp).

۴. تصاویر جدید را ببینید. کدام تصویر بازسازی شده شباهت به تصویر اول دارد؟ کدام بیشتر شبیه تصویر دوم می‌باشد؟

۵. از روی این مشاهدات، نتیجه‌گیری کنید که کدام جزء (فاز یا اندازه تبدیل فوریه) در حالت یک بعدی (صدا) و دو بعدی (تصویر) اطلاعات بیشتری از سیگنال را در خود دارد.

۶. فایل test.wav را بخوانید و تبدیل فوریه آن را به دست آورده و دامنه و فاز آن را جدا کنید. دامنه‌ی سیگنال را با یک نویز گاوسی جمع کنید به طوری که نسبت سیگنال به نویز ۵ دسی‌بل شود. با استفاده از دامنه‌ی نویزی و فاز بدون نویز سیگنال را در حوزه‌ی زمان بازیابی کنید. به طور مشابه فاز سیگنال را با یک نویز گاوسی جمع کنید تا به طوری که نسبت سیگنال به نویز ۵ دسی‌بل شود این بار با استفاده از دامنه‌ی بدون نویز و فاز نویزی سیگنال را بازیابی کنید. با شنیدن دو سیگنال بازیابی شده، آن چه از تأثیر هر کدام از نویزها مشاهده می‌کنید، گزارش دهید.

سوال سوم: بررسی عملکرد FFT

۱. در این سوال هدف بررسی زمان اجرای الگوریتم FFT به ازای طول‌های مختلف سیگنال ورودی است. سیگنال x که یک بردار N تایی است در نظر بگیرید. در هر مرحله یک بردار تصادفی N تایی برای x تولید کنید. زمان اجرای $fft(x, N)$ برای $1 \leq N \leq 50$ را به دست آورید و آن را ذخیره کنید.

۲. نمودار زمان اجرا نسبت به N را رسم کنید.

۳. آیا می‌توانید این نمودار را تفسیر کنید. الگوریتم FFT به ازای چه N هایی بهترین عملکرد و به ازای چه N هایی بدترین عملکرد را دارد؟

۴. تابع کانولوشن برای N های کوچک بسیار با سرعت عمل می‌کند. برای N های بزرگتر می‌توان کانولوشن را با استفاده از الگوریتم FFT سرعت بخشید. فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال با طول N_1 و $h[n]$ یک سیستم با پاسخ به ضربه با طول N_2 باشد. برای انجام کانولوشن با سرعت بالا عدد N طبق فرمول زیر انتخاب می‌شود:

$$N = 2^{\lceil \log_2(N_1 + N_2 - 1) \rceil} \quad (۲)$$

کانولوشن خطی $x[n] * h[n]$ می‌تواند با استفاده از دو FFT به طول N نقطه و یک ضرب N نقطه‌ای طبق فرمول زیر پیاده‌سازی شود:

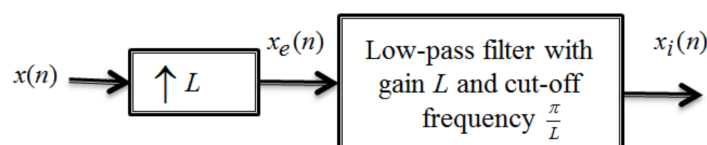
$$x[n] * h[n] = \text{ifft}(\text{fft}(x[n]) \cdot \text{fft}(h[n])) \quad (۳)$$

فرض کنید طول $x[n]$ و $h[n]$ برابر هم و مساوی L باشد. $x[n]$ یک بردار تصادفی گاوسی (با میانگین صفر و واریانس یک) و $h[n]$ یک بردار تصادفی با توزیع یکنواخت است. کانولوشن $x[n] * h[n]$ را با هر دو روش برای $L = 50$ و $L = 1000$ انجام دهید و زمان‌های اجرا در هر دو حالت را گزارش کنید.

سوال چهارم: Up-Sampling و Down-Sampling سیگنال‌های صوتی

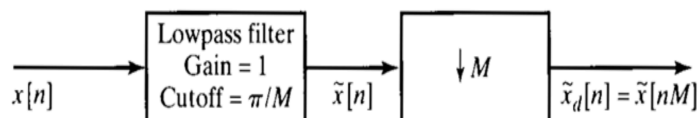
۱. از فایل صوتی test.wav، DFT گرفته و نمودار اندازه آن را رسم کنید.

۲. یک تابع به نام Up-Sampler بنویسید که یک سیگنال را گرفته و آن را با فاکتور L ، Up-Sample کند. به این صورت که ابتدا بین هر دو نمونه سیگنال به تعداد $L - 1$ صفر درج کنید و سپس با استفاده از یک فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{L}$ عملیات درونیابی را انجام دهید.



۳. فایل صوتی test.wav را توسط تابع Up-Sampler با فاکتور ۳ نمونه‌افزایی کنید و آن را بشنوید و از آن DFT گرفته و نمودار اندازه آن را رسم کنید و با نتیجه قسمت قبل مقایسه کنید.

۴. یک تابع به نام Down-Sampler بنویسید که یک سیگنال را گرفته و آن را با فاکتور M ، Down-Sample کند. به این صورت که ابتدا برای جلوگیری از Aliasing یک فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{M}$ اعمال می‌کند. سپس عملیات نمونه‌کاهی را انجام می‌دهد؛ به این صورت که یک نمونه را نگه می‌دارد و $M - 1$ نمونه بعدی را دور می‌ریزد.



۵. فایل صوتی test.wav را توسط تابع Down-Sample با فاکتور ۲ نمونه‌کاهی کنید و آن را بشنوید و اندازه DFT را برای آن رسم کنید و با نتایج قسمت قبل مقایسه کنید.

۶. ابتدا فایل صوتی test.wav را با فاکتور ۴ نمونه‌کاهی و سپس با فاکتور ۴ نمونه‌افزایی کنید و صدای خروجی را بشنوید و اندازه DFT را برای آن رسم کنید. آیا خروجی دقیقاً همان سیگنال اولیه می‌شود؟ توضیح دهید.

سوال پنجم: تبدیل Z

۱. با استفاده از خواص تبدیل Z، $X(z)$ را برای سیگنال زیر به صورت دستی حساب کنید:

$$x[n] = (0.5)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n] \quad (۴)$$

حال هدف این است که چک کنیم $X(z)$ به دست آمده، صحیح است یا خیر. برای این کار گام‌های زیر را طی کنید:

(آ) ۸ نمونه اول سیگنال $x[n]$ را محاسبه کنید و در یک بردار ذخیره کنید.

(ب) یک سیگنال ضربه با طول ۸ و در مبدا صفر ایجاد کنید.

(ج) یک فیلتر با ضرایب $X(z)$ ایجاد کنید.

(د) سیگنال ضربه‌ای که قبلاً ایجاد کردید را وارد فیلتر کنید. حال اگر سیگنال خروجی همان سیگنال **فقره ۱** شود، $X(z)$ را درست حساب کرده‌اید!

(ه) توضیح دهید چرا این اتفاق می‌افتد؟

۲. یک سیستم علی با معادله تفاضلی زیر داریم:

$$y[n] - 0.9y[n-1] - x[n] = 0 \quad (۵)$$

(آ) $H(z)$ را محاسبه کنید و نمودار صفر-قطب آن را رسم کنید.

(ب) نمودارهای $|H(e^{j\omega})|$ و $\angle H(e^{j\omega})$ را رسم کنید.

سوال ششم: برابر سازی کانال برای سیگنال‌های صوتی

در این سوال، هدف ما حذف اثرات ناخواسته یک سیستم بر روی یک سیگنال صوتی است. این فرایند به برابر سازی کانال^۴ معروف است.

برای این منظور، دو سیگنال ورودی و خروجی به نام‌های clean1.wav (سیگنال بدون اعوجاج) و dis-torted1.wav (سیگنال با اعوجاج) داده شده‌اند. سیگنال clean1 یک سیگنال بدون اعوجاج است و سیگنال distorted1 خروجی سیستم است که توسط سیستم دچار اعوجاج شده است.

⁴ Channel Equalization

همچنین، یک سیگنال دیگر به نام `distorted2.wav` به عنوان خروجی این سیستم داده شده است، اما به سیگنال اصلی آن (`clean2`) دسترسی نداریم.

۱. با استفاده از سیگنال‌های `clean1.wav` و `distorted1.wav`، پاسخ فرکانسی سیستم را محاسبه کنید.

۲. سعی کنید با استفاده از پاسخ معکوس سیستم، سیگنال `clean2` را بازیابی نمایید.

۳. روش خود را توضیح داده و سیگنال بازیابی شده را با نام `recovered2.wav` ذخیره کنید.

سوال هفتم: طراحی و تحلیل فیلتر FIR چندباندی با استفاده از پنجره‌های مختلف

در پردازش سیگنال‌های صوتی، معمولاً نیاز داریم که فرکانس‌های مختلف را به شکل‌های متفاوتی پردازش کنیم. برای مثال، در یک اکولایزر صوتی، باید بتوانیم باندهای فرکانسی مختلف را به طور مستقل تقویت یا تضعیف کنیم. همچنین در بسیاری از کاربردها مانند حذف نویز یا جداسازی سیگنال‌های مختلف، نیاز به فیلترهایی داریم که رفتار متفاوتی در فرکانس‌های مختلف داشته باشند.

در این سوال، هدف طراحی یک فیلتر FIR چندباندی با استفاده از سه روش مختلف است. این فیلتر باید مشخصات فرکانسی معینی را برآورده کند، و ما می‌خواهیم عملکرد روش‌های مختلف طراحی را با یکدیگر مقایسه کنیم. به عبارت دیگر، یک فیلتر با مشخصات یکسان را سه بار و هر بار با استفاده از یک پنجره متفاوت طراحی خواهیم کرد تا بتوانیم مزایا و معایب هر روش را بررسی کنیم.

مشخصات مورد نیاز فیلتر که باید در هر سه طراحی رعایت شود به شرح زیر است:

• نرخ نمونه‌برداری: $f_s = 44100 \text{ Hz}$ (نرخ استاندارد برای سیگنال‌های صوتی)

• مشخصات باندهای فرکانسی:

- باند عبور اول (Low Band): ۰ تا ۱۰۰۰ هرتز با حداکثر ریبیل ۰/۱ دسی‌بل
این باند شامل فرکانس‌های پایه صداها و انسان و بسیاری از سازها است.
- باند میان‌گذر (Mid Band): ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ هرتز با تضعیف حداقل ۲۰ دسی‌بل
این ناحیه به عنوان یک ناحیه انتقالی عمل می‌کند.
- باند عبور دوم (High Band): ۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰ هرتز با حداکثر ریبیل ۰/۲ دسی‌بل
این باند شامل هارمونیک‌های بالاتر و جزئیات صوتی است.
- باند توقف (Stop Band): بالای ۴۰۰۰ هرتز با تضعیف حداقل ۶۰ دسی‌بل
فرکانس‌های بالاتر که معمولاً شامل نویز هستند در این باند تضعیف می‌شوند.

برای طراحی این فیلتر، از سه نوع پنجره متداول استفاده خواهیم کرد:

۱. پنجره Kaiser: این پنجره قابلیت تنظیم تعادل بین عرض باند گذار و ریبیل باند را دارد.

۲. پنجره Hamming: این پنجره تعادل خوبی بین پیچیدگی و کارایی دارد.

۳. پنجره Blackman: این پنجره تضعیف خوبی در باند توقف ایجاد می‌کند.

مراحل انجام کار:

۱. طراحی فیلتر با پنجره‌های مختلف:

- برای هر پنجره، یک تابع بنویسید که ضرایب فیلتر را محاسبه می‌کند (استفاده از توابع آماده فیلتر مجاز نیست).

- پاسخ فرکانسی هر فیلتر را به دست آورید و نمودار دسی‌بل اندازه و فاز آن را رسم کنید.

- نتایج را با هم مقایسه کنید و توضیح دهید که هر پنجره چه مزایا و معایبی دارد.

۲. محاسبه مرتبه بهینه:

در طراحی فیلترهای FIR، انتخاب مرتبه فیلتر اهمیت زیادی دارد. مرتبه فیلتر باید به اندازه‌ای باشد که بتواند تمام مشخصات خواسته شده (مانند میزان ریبیل در باندهای عبور و میزان تضعیف در باند توقف) را برآورده کند. از طرفی، مرتبه بیش از حد بزرگ باعث پیچیدگی محاسباتی غیرضروری می‌شود.

- با استفاده از روابط تئوری مربوط به هر سه پنجره Kaiser، Hamming و Blackman، تابعی بنویسید که حداقل مرتبه لازم برای برآورده کردن مشخصات را محاسبه کند. برای مثال، در پنجره Kaiser، رابطه‌ای بین پارامتر β پنجره، مرتبه فیلتر و میزان تضعیف وجود دارد که می‌توان از آن استفاده کرد.

- با توجه به خصوصیات هر پنجره توضیح دهید که چرا برای رسیدن به مشخصات یکسان، به مرتبه‌های متفاوتی نیاز است.

۳. تحلیل عملکرد:

برای هر فیلتر، پارامترهای مهم زیر را محاسبه و مقایسه کنید:

- تأخیر گروهی: این پارامتر نشان می‌دهد که هر فرکانس با چه تأخیری از فیلتر عبور می‌کند.

- پاسخ فاز: خطی بودن فاز در کاربردهای صوتی اهمیت زیادی دارد.

- پاسخ ضربه: شکل پاسخ ضربه می‌تواند اطلاعات مفیدی در مورد عملکرد فیلتر بدهد.

۴. آزمایش با سیگنال تست:

- یک سیگنال سینوسی شامل فرکانس‌های ۵۰۰، ۱۵۰۰، ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰ هرتز بسازید.

- این سیگنال را از هر سه فیلتر عبور دهید.
- نتایج را در حوزه زمان و فرکانس نمایش دهید.

۵. ارزیابی کمی:

برای درک بهتر تفاوت‌های عملکردی بین پنجره‌ها و انتخاب مناسب‌ترین روش برای کاربردهای مختلف، معیارهای کمی زیر را محاسبه و مقایسه کنید:

- نسبت سیگنال به نویز (SNR) در باندهای عبور: برای هر باند عبور (۰ تا ۱۰۰۰ هرتز و ۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰ هرتز)، نسبت توان سیگنال خروجی به توان نویز را محاسبه کنید. این معیار نشان می‌دهد که فیلتر چقدر توانسته سیگنال را در باندهای عبور حفظ کند.
- میزان تضعیف در باند توقف: برای فرکانس‌های بالای ۴۰۰۰ هرتز، میزان کاهش دامنه را بر حسب دسی‌بل محاسبه کنید و با مقدار هدف (۶۰ دسی‌بل) مقایسه نمایید.
- میزان تداخل بین باندها: مقدار نشتی انرژی از یک باند به باندهای دیگر را محاسبه کنید. به طور خاص:

– نشتی از باند میان‌گذر (۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ هرتز) به باندهای عبور مجاور

– نشتی از باند توقف به باند عبور دوم

برای هر معیار، نتایج را در قالب جدول و نمودار مقایسه‌ای ارائه دهید تا بتوان عملکرد سه پنجره را به راحتی با هم مقایسه کرد.

بخش اختیاری:

- روشی برای بهینه‌سازی ضرایب فیلتر پیشنهاد دهید (مانند استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی یا ترکیب پنجره‌ها) که بتواند تعادل بهتری بین پارامترهای مختلف ایجاد کند.
- الگوریتم پیشنهادی خود را پیاده‌سازی کنید و نتایج را با حالت بدون بهینه‌سازی مقایسه کنید.

نکات:

- می‌توانید کدهای خود را با استفاده از هر زبان برنامه‌نویسی که ترجیح می‌دهید بنویسید.
 - استفاده از هر کتابخانه‌ای مجاز است، مگر اینکه به‌طور خاص ذکر شده باشد که باید پیاده‌سازی شود.
 - تحویل فایل Jupyter Notebook به زبان برنامه‌نویسی دلخواه به همراه توضیحات داخل آن، کافی است. در صورتی که کدها را به صورت فایل متنی ارسال می‌کنید، باید یک گزارش شامل نمودارها و توضیحات خواسته شده را نیز ارائه دهید.
 - به ازای هر ساعت تأخیر در تحویل، ۲٪ جریمه اعمال خواهد شد.
- در صورت وجود هر گونه سوال، لطفاً با من تماس بگیرید.