

شبکه ای از کارها

تعریف: یک cut یک افراز مرتب (A, B) از رئوس یک شبکه است. در کلاس فرض کردیم یک شبکه دارای یک منبع با نام s و یک مقصد با نام t است. اگر $s \in A$ و $t \in B$ باشد آنگاه آن cut را با cut_{s-t} نشان می دهند. ظرفیت cut برابر است با جمع ظرفیت تمام یال ها از A به B (یعنی شروع آن یال ها در داخل مجموعه A و انتهای آن یال ها در داخل مجموعه B قرار دارد). به یک cut که در میان تمام cut_{s-t} ها کمترین ظرفیت را دارد $min-cut$ می گویند. طبق قضیه ای، میدانیم ظرفیت $min-cut$ برابر است با اندازه $max-flow$.

فرض کنید به شما تعدادی کار داده شده در مجموعه J . برخی از این کار ها سودده هستند یعنی $profit(x_i)$ مثبت است که آن ها را در مجموعه P قرار میدهیم. بقیه کار ها هزینه دارند یعنی $profit(x_i)$ منفی است، که این ها را در مجموعه C میریزیم. در انجام این کار ها یک سری محدودیت داده شده به صورت $j_l \rightarrow j_i$ (هر کدام ممکنه از سودده ها یا هزینه بر ها باشند) که $j_l, j_i \in J$ و این محدودیت یعنی j_l به j_i وابسته است و باید قبل از آن انجام شود. این محدودیت ها در قالب یک گراف داده شده اند. یک مجموعه قابل انجام از کار ها مثل V زیرمجموعه ای از J است که اگر j_l به j_i وابسته است و j_l در V است آنگاه j_i هم در V باشد. سود یک زیر مجموعه مثل V جمع $profit(x_i)$ برای هر $x_i \in V$ است. ما به دنبال سود بیشینه هستیم.

این مسئله را می خواهیم با $min-cut$ حل کنیم. یک راس s اضافه می کنیم که جزو کار ها نیست و همچنین یک راس t . یال های s به j_i را با ظرفیت $profit(j_i)$ برای هر $j_i \in P$ اضافه میکنیم. یال های j_i به t را با ظرفیت $-profit(j_i)$ برای هر $j_i \in C$ اضافه میکنیم. دقت کنید در این روش ساخت شبکه ظرفیت ها مثبت خواهد بود.

- یال های محدودیت که در ورودی بودند را با چه وزنی در شبکه بگذاریم؟ دقت کنید در $min-cut$ اگر بخش A منهای راس s (که جزو کار ها نیست) بخواهد یک زیرمجموعه قابل انجام باشد هیچ یک از یال های محدودیتی نباید از A به B باشند. به علاوه دقت کنید همیشه جواب مسئله مثبت یا صفر است چون حتی اگر تمام کار ها هزینه بر باشند میتوان هیچ کاری نکرد و سود صفر برد.

- اثبات کنید در $min-cut$ شبکه گفته شده اگر $A - \{s\}$ را برابر V بگیریم، آنگاه V جواب است. برای یک cut_{s-t} اگر $A - \{s\}$ قابل انجام باشد سودش با ظرفیت cut چه رابطه ای دارد. رابطه را دقیقاً

بنویسید.