

# آرایه پویا با طعم فیبوناچی

پویا آقاحسینی ۹۵۱۳۰۰۶

برای دنباله ای از عملیات می‌خواهیم بررسی کنیم که عملیات های Add و Remove در  $O(1)$  به صورت سرشکن انجام میشود.

ایده اثبات مشابه ایده اثبات برای عملیات های ArrayList در کتاب OpenDataStructures است که برای هر باری که آرایه جدید می‌سازیم حداقل تعداد Add و Remove ها را از آخرین باری که آرایه را Resize کردیم بررسی میکنیم.

ابتدا دو حالت Add و Remove را بررسی میکنیم و سپس مجموع تعداد Add و Remove ها را بررسی میکنیم که به صورت سرشکن چگونه میشود.

## حالت اول:

در حالتی که Add کردیم و مجبور هستیم Resize کنیم، طول آرایه  $F_k$  و تعداد عناصر  $F_{k-1}$  شده است. مرتبه قبلی که Resize کردیم،  $F_{k-2}$  عنصر داشتیم و برای اینکه با کمترین عملیات به این وضعیت برسیم باید فقط Add میکردیم پس باید حداقل  $F_{k-2} - F_{k-1} = F_{k-3}$  بار Add را صدا بزنیم.

## حالت دوم:

در حالتی که Remove کردیم و مجبور هستیم Resize کنیم، طول آرایه  $F_k$  و تعداد عناصر  $F_{k-3}$  شده است. مرتبه قبلی که Resize کردیم،  $F_{k-2}$  عنصر داشتیم و برای اینکه با کمترین عملیات به این وضعیت برسیم باید فقط Remove میکردیم پس باید حداقل  $F_{k-2} - F_{k-3} = F_{k-4}$  بار Remove را صدا بزنیم.

تا اینجا نشان دادیم که هر بار که Resize میکنیم تعداد Add و Remove ها از Resize قبلی به ترتیب حداقل  $F_{k-4}$  و  $F_{k-3}$  است. می‌خواهیم بگوییم که برای دنباله ای  $m$  تایی از عملیات Add و Remove زمان کلی همه Resize ها  $O(m)$  میشود و در نتیجه هر عملیات را  $O(1)$  نتیجه میدهد.

برای راحتی اثبات زمان  $F_{k-4}$  برای Remove را مانند Add همان  $F_{k-3}$  در نظر میگیریم. حال برای هر مرحله که ریسایز صدا زده میشود حداقل عملیات های Add و Remove آن را جمع میزنیم که میشود:

$$\sum_{i=0}^r F_{i-3} \leq m$$

که هر  $F_{i-3}$  میتواند یک عدد فیبوناچی دلخواهی در مرحله  $i$  امین ریسایز باشد.

حال می‌خواهیم  $F_{i-3}$  ها را به صورت  $F_{i-1}$  بنویسیم چون زمانی است که برای کبی کردن عناصر صرف میشود(زمانی

که برای Remove صرف میشود اینجا نیز کمتر است و ما آن را با Add برابر میگیریم).

$$F_{k-1} = F_{k-2} + F_{k-3} = 2F_{k-3} + F_{k-4} \leq 3F_{k-3}$$

پس داریم

$$F_{k-1} \leq 3F_{k-3}$$

$$\sum_{i=0}^r F_{i-3} \leq m \Rightarrow \sum_{i=0}^r 3F_{i-3} \leq 3m \Rightarrow \sum_{i=0}^r F_{i-1} \leq \sum_{i=0}^r 3F_{i-3} \leq 3m$$

پس زمان کپی کردن عناصر برای هر بار صدا زدن ریسایز به ازای  $m$  عملیات نیز بدین صورت بدست می آید:

$$\sum_{i=0}^r Elements(i) = \sum_{i=0}^r F_{i-1} \leq 3m = O(m)$$

که در مجموع  $m$  عملیات Add و Remove در  $O(m)$  اجرا میشود و به صورت سرشکن هر عملیات در  $O(1)$  صورت میپذیرد.