گزارش کار پروژه درس مبانی آنالیز عددی (فایل کد های زده شده در زیپ ضمیمه شده است)

اعضای گروه : رضا مشایخی – وحید محزون – سجاد دادگر

روش صریح :

$$u_t = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{(\triangle x)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{(\triangle y)^2}$$

حال این مقادیر که به روش عددی به دست آمده اند را در معادله جایگذاری میکنیم تا به یک فرمول صریح برای $u_{i,j}^{n+1}$ برسیم .

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t} = \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{(\triangle x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{(\triangle y)^2}$$

حال تعریف می کنیم :

$$a = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2} \quad . \quad b = \frac{\triangle t}{(\triangle y)^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$u_{i,j}^{n+1} = (1 - 2a - 2b)u_{i,j}^{n} + a\left(u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}\right) + b(u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n})$$

حال یک فرمول صریح برای $u_{i,j}^{n+1}$ بدست آورده ایم و به راحتی و به کمک مقادیر اولیه می توانیم کد آن را بزنیم .

ما در کدی که زده ایم مقادیر اولیه را به صورت یک فرمول دلخواه در یک ماتریس زده ایم مثلا :

```
for i=1:6
    for t=1:T
        h2(i,t)=6*i+t;
```
همچنین x ها و y ها را متساوی الفاصله و با فاصله ی 0.2 در نظر گرفته ایم .

در هر زمان t یک ماتریس u داریم که هر درایه آن حرارت در فضای دو بعدی (i,j) را نمایش می دهد که بعضی از اعضای این ماتریس به کمک مقادیر اولیه و بعضی از آن به روش فرمول صریح به دست می آیند .

روش ضمنی :

$$u_t = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\triangle x)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\triangle y)^2}$$

حال این مقادیر که به روش عددی به دست آمده اند را در معادله جایگذاری میکنیم تا به یک فرمول صریح برای $u_{i,j}^{n+1}$ برسیم .

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\triangle x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\triangle y)^2}$$

حال تعریف می کنیم :

$$a = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2} \quad . \quad b = \frac{\triangle t}{(\triangle y)^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$u_{i,j}^{n+1} = (1-2a-2b)u_{i,j}^{n} + a\left(u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}\right) + b(u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})$$

حال به یک دستگاه میرسیم که باید آن را حل کنیم :

چند معادله ی اول آن را مینویسیم : (مقادیر اولیه را به سمت راست می بریم)

i=2 , j=2 :

$$u_{2,2}^{n+1} - a\,u_{3,2}^{n+1} - b\,u_{2,3}^{n+1} = (1-2a-2b)u_{2,2}^{n} + au_{1,2}^{n+1} + bu_{2,1}^{n+1}$$

i=2 , j=3

$$u_{2,3}^{n+1} - a\,u_{3,3}^{n+1} - b\,u_{2,2}^{n+1} - bu_{2,4}^{n+1} = (1-2a-2b)u_{2,2}^{n} + au_{1,3}^{n+1}$$

حال ما باید یک دستگاه به صورت AX=b حل کنیم .

در کدی که ما زدیم ابتدا ماتریس A را تشکیل داده ایم و سپس بردار b .

برای تشکیل دادن این ماتریس و بردار نیاز بود معادله ها را بنویسیم تا روابط ما بدست آیند .

حال برای این دستگاه یک تابع نوشتیم که آن را به روش عددی حل کند :

که ما در اینجا روش گاوس سایدل را انتخاب کرده ایم .

از این تابع برای حل دستگاه مشخص شده در روش ضمنی استفاده میکنیم .