پروژه تحویلی مبانی آنالیز عددی مدرس: دکتر فاطمه شاکری	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	موضوع: پژوهشی ترم اول ۹۷ـ۹۸

روش تفاضلات محدود

روش تفاضل محدود (به انگلیسی: Finite Difference Method) که به اختصار (FDM) نامیده می‌شود، یکی از روش‌های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آن‌ها تقریب زده می‌شود. این روش را می‌توان برای معادلات دیفرانسیلی معمولی و نیز معادلات دیفرانسیل جزئی به کار برد.

مثال ۱.۰. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر بگیرید.

$$u'(x) = ۳u(x) + ۲, \quad u(۰) = \alpha$$

با استفاده از روش تفاضلات متناهی خواهیم داشت: فرض کنید $u'(x)$ را با قاعده پیشرو تقریب بزنیم:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = ۳u(x) + ۲$$
$$u(x+h) = u(x) + h(۳u(x) + ۲)$$

حال فرض کنید قرار است این معادله در بازه $[۰, ۱]$ با $h = ۰/۲۵$ حل کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$۰ < ۰/۲۵ < ۰/۵ < ۱$$

و برای به دست آوردن $u(۱)$ کافی است بنویسم:

$$u(x+h) = u(x) + h(۳u(x) + ۲)$$
$$u(۰/۲۵) = u(۰) + ۰/۲۵(۳u(۰) + ۲) = ۱/۷۵\alpha + ۰/۵$$
$$u(۰/۵) = u(۰/۲۵) + ۰/۲۵(۳u(۰/۲۵) + ۲)$$
$$u(۱) = u(۰/۵) + ۰/۲۵(۳u(۰/۵) + ۲)$$

معادله انتقال حرارت ناپایا که نمونه اي از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سهموي مرتبه دوم می باشد را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \quad x \in [۰, ۱], \quad ۰ < t < T$$

$u(x, ۰) = u_۰(x)$ شرط اولیه

$u(۰, t) = u(۱, t) = ۰$ سرایط مرزی

در این معادله α مقدار ثابتی است.
از تقریبهاي تفاضل محدود مختلفی براي نشان دادن مشتق‌های معادله بالا می‌توان استفاده کرد. براي زمان از تقریب تفاضل پیشرو زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+۱} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دو برای جمله مکان معادله گرما به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{u_i^{n+۱} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+۱}^n - ۲u_i^n + u_{i-۱}^n}{(\Delta x)^۲}$$

در این معادله تنها مجهول معادله است و به صورت زیر محاسبه مي‌شود.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

که در آن $u(x_i, t_n) = u_i^n$ و $x = [x_0, x_1, \dots, x_N]$ و نیز $t = [t_0, t_1, \dots, t_N]$ فرض شده است. همچنین داریم:

$$\Delta x = \frac{1-0}{N}, \quad \Delta t = \frac{T-0}{M}$$

با ساده سازی می‌توان نوشت:

$$u_i^{n+1} = (1-2\mu)u_i^n + \mu u_i^n + \mu u_{i-1}^n$$

که در آن $\mu = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ و به فرم ماتریسی زیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & (1-2\mu) & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & (1-2\mu) & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu & (1-2\mu) & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix} \tag{1}$$

با توجه به شرط اولیه داریم:

$$u^0 = u_0(x) = [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N)]^T$$

بردار سمت چپ در هر گام n به دست می‌آید. به روش استفاده شده روش صریح گفته می‌شود، چرا که زمان را به صورت پیشرو گسسته کردیم.

اما اگر از تقریب تفاضل پسرو برای گسسته سازی و تقریب $\frac{\partial u}{\partial t}$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

و با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دو برای جمله مکان، معادله گرما به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

که به یک دستگاه منجر خواهد شد. به این روش روش ضمنی گفته می‌شود.

ملاحظه ۲.۰. برای مقایسه جواب واقعی و تقریبی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم جواب تقریبی به صورت u_h و جواب واقعی به صورت u باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$Error = \|u - u_h\|_2 = (\sum_{i=1}^{N} |u_h(x_i) - u(x_i)|^2)^{1/2}$$

سوال ۱. معادله گرمای زیر را با با روش ضمنی حل کنید. (دستگاه به دست آمده را با معلوماتی که در بخش حل دستگاه خوانده‌اید حل نمایید.)

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + 2e^t \sin(x) \qquad x \in [0, \pi] \\ &u(x, 0) = \sin(x) \\ &u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

سوال ۲. مساله مقدار مرزی زیر را با استفاده از روش صریح حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&u''(x,t)+u'(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\sin(x)e^{t} \quad x\in[0,\pi], \quad 0<t<1\\
&u(0,x)=\cos(x)\\
&u'(0,t)=0\\
&u'(\pi,t)=0
\end{aligned}
$$

جواب واقعی معادله فوق به صورت $u(x)=\cos(x)e^{t}$ مي‌باشد.

سوال ۳. معادله دو بعدی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}+u_{yy} \quad (x,y)\ in[0,1]\times[0,1] \quad 0<t<T\\
&u(x,y,0)=u_0(x,y)\\
&u(0,y,t)=g_1(y,t)\\
&u(1,y,t)=g_2(y,t)\\
&u(x,0,t)=h_1(x,t)\\
&u(x,1,t)=h_2(x,t)
\end{aligned}
$$

روش های صریح و ضمنی گفته شده را برای معادله فوق به دست آورید.