



تمرین عملی سری دوم

دانشکده مهندسی برق

علوم اعصاب یادگیری، حافظه، شناخت

استاد درس: دکتر کربلایی آقاجان

نیمسال اول سال ۱۴۰۳-۱۴۰۴

آخرین مهلت تحویل: ۱۴ آذر ۱۴۰۳

نکات و ضوابط مرتبط با تمرینات

- تأکید می‌شود که کیفیت گزارش تمرینات، به اندازه خروجی نهایی تمرین‌ها اهمیت داشته و درصد مهمی از بارم تمرین را شامل می‌شود. بنابراین لازم است که استدلال‌ها و دلیل استفاده از دستورات و نتایج را به‌صورت دقیق در گزارش خود شرح دهید.
- هر فرد یا گروه تمرین خود را در قالب فایل ZIP یا RAR شامل فایل PDF گزارش و تمامی کدهای مربوطه را در بخش تعیین شده در سامانه درس ارسال کند.
- در صورتی که تمرینات عملی را به صورت گروهی انجام می‌دهید، نام همگروهی خود را حتماً در گزارش تمرین ذکر کنید. علاوه بر این، هر دو عضو گروه باید تمرین را به صورت جداگانه در سامانه ارسال کنند. عدم رعایت این نکته منجر به از دست دادن نمره تمرین برای هر دو عضو گروه می‌شود.
- در صورت استفاده از منابع خارجی یا همفکری با دیگران، حتماً اسامی همفکران و لیست منابع و لینک‌ها را در گزارش خود ذکر کنید. عدم رعایت این امر ممکن است منجر به کسر نمره شود. همچنین استفاده از ابزارهای هوش مصنوعی در تمرینات عملی بلامانع است.
- هر فرد یا گروه برای مجموعه تمرین‌های عملی تا سقف ۱۰ روز تأخیر بدون کسر نمره مجاز است. در صورت اتمام این مهلت مجاز، برای هر روز تأخیر در تحویل تمرین‌ها ۳۰ درصد از نمره آن تمرین کسر خواهد شد.
- با توجه به حجم تمرینات، توصیه می‌شود که انجام آن‌ها را به روزهای آخر موکول نکنید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام یا سوال از تمرینات، از طریق گروه درس یا [ایمیل](#) با دستیاران آموزشی درس مطرح کنید.

مقدمه

در این تمرین، شما باید توابع مربوط به محاسبه ارتباطات مغزی¹ را پیاده سازی کرده و روی دیتای واقعی آن را بررسی کنید. تمرین شامل دو قسمت است. قسمت اول، پیاده سازی توابع و بررسی حساسیت‌های آن است و قسمت دوم مقایسه معیارها.

اساس مطالعات ارتباطات مغزی، بر نگاه سیستم پیچیده² داشتن بر مغز بنا شده، به بیان دقیق‌تر، در سیستم‌های پیچیده، ما با مجموعه‌ی بسیار بزرگی از اجزا مواجه هستیم که در آن اجزا به طرق متفاوتی با هم ارتباط دارند و قسمتی از عملکردهای سیستم در همین ارتباط معنا پیدا می‌کند. در مغز نیز همین روال برقرار است، قسمت‌های مختلف مغز عملکردهایی دارند اما برای برآورده کردن بسیاری از اعمال پیچیده‌تر، ارتباطی بین قسمت‌های مختلف مغز برقرار می‌شود و مانند شبکه‌ای از پردازشگرها عمل می‌کند. این ارتباط‌ها را در حالت کلی به سه دسته تقسیم می‌کنند، (۱) ارتباطات ساختاری³، (۲) ارتباطات کارکردی⁴ و (۳) ارتباطات موثر⁵.

ارتباط ساختاری، بر اساس ساختار آناتومی مغز تعریف می‌شود و به این معنی است که بین دو قسمت مغز، به طور مستقیم ارتباط نورونی وجود دارد. ارتباطات کارکردی لزوماً بیانگر ارتباط مستقیم آناتومی نیستند و صرفاً یک بیان ریاضی از هماهنگی عملکرد میان دو قسمت از مغز است، به عنوان مثال به طور هماهنگ دو قسمت از مغز در فرکانسی به خصوص با الگوی مشابهی نوسان می‌کنند، به تعریف ریاضی، این دو قسمت ارتباط کارکردی دارند، اما این ارتباط به معنای Correlation است و نه لزوماً Cause. یعنی نمی‌توان مشخص کرد که آیا فرستنده و گیرنده‌ای وجود دارد و یا منبع مشترکی این دو قسمت را داشته که هماهنگ نوسان داشته باشند. در ارتباطات موثر، تا حدی این مشکل جهت‌داری رفع شده، اما همچنان بیان ریاضی وجود دارد و به طور دقیق و مستقیم نمی‌توان نتایج را به عملکرد مغز منتسب کرد. به عنوان نمونه در این نوع ارتباط مشخص می‌شود که رفتار الکتروفیزیولوژیکال مغز در یک ناحیه به خصوص، تابعی از گذشته ناحیه دیگری است، پس می‌توان نوعی رابطه شبه‌علی میان این دو ناحیه تصور کرد (یعنی یک ناحیه برای یک ناحیه اطلاعاتی را می‌فرستد)

از حیث نظری، دو مورد آخر از انواع ارتباطات مغزی با استفاده از سیگنال‌های EEG قابل رهگیری هستند. به دلیل وجود دقت زمانی بالای این سیگنال‌ها این امر ممکن است، هر چند به علت دقت پایین در مولفه‌های مکانی، تفسیر دقیق این نتایج با چالش‌هایی رو به رو است.

¹Brain Connectivity

²Complex System

³Structural Connectivity

⁴Functional Connectivity

⁵Effective Connectivity

بخش اول: پیاده سازی و تست توابع

هر سیگنال حقیقی را می توان به صورت سیگنال تحلیلی¹ بیان کرد. از این طریق می توان به دامنه² و فاز لحظه ای³ سیگنال دسترسی پیدا کرد. در واقع اگر سیگنال $s(t)$ را داشته باشیم، می توان سیگنال تحلیلی آن را به صورت زیر نوشت.

$$s_a(t) = s(t) + jH[s(t)]$$

که در آن $H[s(t)]$ تبدیل هیلبرت⁴ سیگنال است. مطابق تعریف بالا واضح است که

$$s(t) = \text{Re}\{s_a(t)\}$$

و از روی همین تعریف، فاز و دامنه سیگنال ها به این صورت تعریف می شوند.

$$A_s(t) = |s_a(t)|$$

$$\phi_s(t) = \angle s_a(t)$$

در ادامه تمرین، منظور از فاز و دامنه مقادیری هستند که در بالا تعریف آن آورده شده است.

در پردازش سیگنال های زیستی و به طور خاص سیگنال های الکتروانسفالوگرام، از مقایسه فاز و یا دامنه دو یا چند الکتروود برای بررسی ارتباطات استفاده می شود. بر همین اساس می توان سه دسته از ارتباطات را تعریف کرد،

- ارتباطات فاز-فاز
- ارتباطات دامنه-دامنه
- ارتباطات فاز-دامنه

در این تمرین شما سه تابع پیاده سازی می کنید که شامل هر سه مورد ارتباطات گفته شده است و طبق تعریف دو مورد در دسته ارتباطات کارکردی قرار می گیرند و یک مورد در دسته ارتباطات موثر. این سه تابع شامل موارد زیر است،

- Directed Phase Lag Index (dPLI) (Phase-to-Phase Coupling)
- Power-to-Power Correlation (Amplitude-to-Amplitude Coupling)
- Phase-Amplitude Coupling (PAC)

¹Analytic Signal

²Amplitude

³Instantaneous Phase

⁴Hilbert Transformation

Directed Phase Lag Index

در مطالعات ارتباطات مغزی، یکی از مهم‌ترین ابزارهای محاسبه ارتباط آن دسته هستند که مبتنی بر هماهنگی عملکرد فاز است. یعنی این‌طور فرض می‌شود که یکی از راه‌های ارسال سیگنال در مغز، هم‌فاز شدن یا نوعی هماهنگی در فاز است. متداول‌ترین روشی که امروزه محاسباتی با این فرض را انجام می‌دهد، خانواده توابع Phase Lag Index هستند. رابطه‌ی اولیه و همچنان پرکاربردترین آن‌ها در زیر آورده شده است.

$$PLI(x, y) = |E[sign(\Delta\phi_{x,y})]|$$

این تابع در عمل عدم تقارن توزیع اختلاف فازها حول صفر را ملاک قرار می‌دهد. ایده این معیار به این صورت است که در صورتی که یک الکتروود برای یک الکتروود اطلاعاتی ارسال کند و این اطلاعات در فاز قابل رهگیری باشد، باید اختلاف فاز آن‌ها حول صفر نامتقارن باشد. یعنی یکی از فازها از دیگری جلوتر یا عقب‌تر باشد و میانگین آن دیگر صفر نباشد. در این صورت اثر منبع مشترک¹ را (که یکی از مشکلات اصلی کار با سیگنال‌های EEG است) حذف می‌کند. قدرمطلق هم برای این است که معنای جهت‌داری در آن وجود نداشته باشد.

در عمل این معیار نشان می‌دهد که در بازه مورد آزمایش، چه میزان اختلاف فاز آن‌ها یک دست است، در صورت عدم هماهنگی کامل، فازها به احتمال قوی یکنواخت توزیع شده‌اند و حول صفر متقارن خواهند بود، اما در صورت هماهنگی و عدم وجود منبع مشترک، توزیع به سمت مثبت‌ها یا منفی‌ها متقارن خواهد بود.

یکی دیگر از اعضای این خانواده که هدف این تمرین نیز هست، معیار Directed Phase Lag Index است. در این معیار می‌توان به طور ضمنی نوعی از جهت‌داری را مشخص کرد. رابطه آن به صورت زیر است.

$$dPLI = E[Heaviside(\Delta\phi_{x,y})]$$

که در آن

$$Heaviside(x) = 1 \text{ for } x > 0, 0 \text{ for } x < 0, 0.5 \text{ for } x = 0$$

در این معیار، در صورتی که ارتباطی وجود نداشته باشد یا دو سیگنال تماماً با فاز یکسان نوسان کنند، مقدار خروجی ۰.۵ خواهد بود. در واقع این عدد نشان می‌دهد که فاز سیگنال x در چند درصد بازه مورد تحلیل فاز سیگنال y را دنبال می‌کند. اگر حدود ۰.۵ باشد، یعنی ۵۰٪ مواقع فاز سیگنال x فاز سیگنال y را دنبال می‌کند و ۵۰٪ بالعکس، هر چه این میزان از ۵۰ فاصله بگیرد نشان‌دهنده ارتباط قوی‌تری است، به عنوان مثال اگر برابر ۰.۷ باشد، یعنی ۷۰٪ مواقع فاز سیگنال y سیگنال x را دنبال می‌کند. به طور ضمنی می‌توان گفت که غالباً سیگنال x فرستنده و y گیرنده است.

این دو معیار با هم ارتباط دارند، در واقع از روی $dPLI$ می‌توان PLI را استخراج کرد، اما بر عکس نه.

¹ Common Source

$$PLI = 2|dPLI - 0.5|$$

- تابعی بنویسید که با گرفتن دو سیگنال با طول دلخواه (ولی طبیعتاً برابر) مقدار dPLI میان آن‌ها را محاسبه کند. این تابع باید دو آرایه یک بعدی را ورودی گرفته و یک عدد بین ۰ و ۱ خروجی دهد.

در پردازش سیگنال‌های EEG، با دو مشکل عمده مواجه هستیم، مورد اول نویز است و مورد دوم اثر منبع مشترک. در بخش بعد می‌خواهیم اثر نویز و اثر منبع را پس از سنجش صحت عملکرد تابع بررسی کنیم.

- سه سیگنال به صورت زیر تولید کنید.

$$x(t) = \sin(2\pi f_s t)$$

$$y(t) = \sin(2\pi f_s (t - t_0))$$

$$C(t) = \sin(2\pi f_c t)$$

- f_s را برابر ۱۰ هرتز قرار داده و به ازای t_0 های بازه $[0, \frac{1}{f_s}]$ نمودار dPLI میان دو سیگنال x و y ترسیم کنید. مشاهدات خود را شرح دهید.

○ بازه زمانی را میان ۰ و ۱ ثانیه با فرکانس زمانی ۵۰۰ هرتز در نظر بگیرید.

○ نمودار را حداقل به ازای ۱۰۰ تاخیر زمانی ترسیم کنید.

برای بررسی اثر منبع مشترک، مقدار تاخیر t_0 را ثابت و برابر $\frac{1}{500}$ فرض کنید. یعنی با توضیحات بالا، y نسبت به x یک نمونه زمانی شیفت خورده است.

- سیگنال‌های زیر را بسازید. (مقدار f_c را برابر ۴ هرتز قرار دهید)

$$x_c(t) = x(t) + \alpha C(t)$$

$$y_c(t) = y(t) + \beta C(t)$$

که ضرایب α و β نشان دهنده میزان تاثیری است که از منبع مشترک می‌گیرند.

- به ازای ضرایب متفاوت α و β مقدار dPLI میان x_c و y_c را محاسبه کرده و در نمودار هیت‌مپ نمایش دهید.

○ برای نمایش نمودارهای هیت‌مپ، می‌توانید از دستور `pcolormesh` یا `imshow` استفاده کنید. مشاهدات خود را شرح دهید.

○ ضرایب را میان ۰ تا ۵ تغییر دهید، به ازای هر ضریب حداقل ۵۰ نقطه.

برای بررسی اثر نویز، بایستی دو سیگنال را مستقلاً تحت اثر نویز قرار دهیم و سپس مقدار dPLI آن‌ها را مقایسه کنیم.

- برای این منظور، سیگنال‌های x و y را با نویزهایی با SNRهای مختلف جمع کنید و مقدار dPLI سیگنال‌های نویزی را نمایش دهید. مشاهدات خود را شرح دهید.
- در واقع در یک نمودار هیت‌مپ بایستی نمودارها ترسیم شوند، به ازای SNRهای میان ۵۰- تا ۵۰+ (برای هر سیگنال به ازای حداقل ۱۰۰ مقدار متفاوت)

Power-to-Power Correlation

مورد بعدی و پر اهمیت به عنوان معیاری برای سنجش ارتباط دو الکتروود، ارتباط دامنه به دامنه آن‌هاست. منظور از همبستگی در اینجا همان هماهنگی عمل کردن و تغییرات یکنوا در دامنه‌است. مولفه‌های متفاوتی برای ارتباط همبستگی وجود دارد که هر کدام در جایگاهی مورد بحث قرار می‌گیرند، اما در اینجا می‌خواهیم ارتباط دامنه‌ها را با هم بررسی کنیم. (ارتباط خود سیگنال‌ها و نیز توان آن‌ها نیز ممکن است بررسی شوند)

همبستگی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که در اینجا دامنه‌های دو سیگنال، همان متغیرهای X و Y هستند. هر چه ضریب همبستگی به یک نزدیک‌تر باشد، می‌توان گفت که دو سیگنال هماهنگ‌تر با هم نوسان می‌کنند و این تغییر در یک جهت است. نزدیک‌تر بودن به ۱- نیز به معنای هماهنگی عملکرد قوی‌تر اما در جهت مخالف است. هر چه اندازه همبستگی به صفر نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده ناهمبستگی بیشتر دو سیگنال است. می‌خواهیم مراحل ماندن آن‌چه در بخش قبل صورت گرفت را پیش ببریم تا عملکرد این معیار ارتباط را بررسی کنیم.

- همانند بخش قبل سه سیگنال $x(t)$ ، $y(t)$ و $C(t)$ تولید کنید.
- اثر تاخیر بر این معیار را همانند بخش قبل بررسی کرده نمودارهای آن را رسم کنید.

برای بررسی اثر منبع مشترک،

- ابتدا دو سیگنال $n_1(t)$ و $n_2(t)$ که نویز سفید گوسی با میانگین صفر و توان یک است را تولید کنید.
- سپس سیگنال‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$n_{1,c}(t) = n_1(t) + \alpha C(t)$$

$$n_{2,c}(t) = n_2(t) + \beta C(t)$$

به ازای α و β های مختلف ارتباط میان سیگنال‌ها را بررسی کنید.

- ضرایب را میان ۰ و ۵ تغییر دهید (به ازای حداقل ۵۰ مقدار مختلف) و در یک نمودار سه‌بعدی/هیت‌مپ نمایش دهید. مشاهدات خود را توضیح دهید.

- یک بار دیگر به روشی مشابه قسمت قبل اثر منبع مشترک را بررسی کنید.
- از مقایسه دو سوال قبل آیا می‌توان نتیجه گرفت که منبع مشترک با استفاده از این معیار تولید ارتباط غیر واقعی نمی‌کند؟
- همان‌طور که برای معیار قبلی اثر نویز را بررسی کردید، برای این سیگنال نیز عمل کنید. مشاهدات خود را بیان کنید.

Phase-Amplitude Coupling

در این بخش به بررسی و آنالیز یکی از معیارهای مهم در بررسی ارتباطات مبتنی بر فاز-دامنه می‌پردازیم. کوپلاژ فاز و دامنه یکی دیگر از روش‌های اندازه‌گیری ارتباطات کارکردی است که میزان ارتباط بین فاز فرکانس پایین یک ناحیه را با دامنه فرکانس بالا در ناحیه ای دیگر بررسی می‌کند. همچنین برخلاف دو روش قبل، کوپلاژ فاز و دامنه به صورت محلی روی یک کانال نیز محاسبه می‌شود که تفسیر متفاوتی دارد. برای درک بهتر از توصیف ارتباط مبتنی بر فاز-دامنه بین شبکه‌های نورونی می‌توانید توضیحات مربوط به شکل ۱ در [این مقاله](#) را مطالعه کنید.

در این سری تمرین، شما با دو روش متفاوت در محاسبه کوپلاژ فاز و دامنه را بین دو سیگنال مصنوعی پیاده‌سازی خواهید کرد. برای این منظور،

- ابتدا یک تابعی بنویسید که بردار زمان t در بازه 0 تا 1 ثانیه با نرخ نمونه‌برداری 500 هرتز ایجاد کرده و سپس سیگنال‌های $x_p(t)$ و $x_a(t)$ را همراه با متغیرهای ثابت به صورت زیر تشکیل دهد:

$$x_p(t) = k_p \cos(2\pi f_{phase} t) + \sigma_n n_1(t)$$

$$x_a(t) = k_a \left(\frac{(1 - \chi) \cos(2\pi f_{phase} t) + \chi + 1}{2} \right) \cos(2\pi f_{amp}) + \sigma_n n_2(t)$$

سیگنال‌های $n_1(t)$ و $n_2(t)$ نویزهای سفید گوسی هستند که از یکدیگر مستقل بوده و دارای میانگین صفر و واریانس 1 هستند و σ_n توان نویز را مشخص می‌کند.

- توسط این تابع سیگنالی با پارامترهای زیر بسازید:

$$k_p = 1, k_a = 1, f_{phase} = 5Hz, f_{amp} = 60Hz, \chi = 0, \sigma_n = 0$$

- دو سیگنال را در یک نمودار رسم کرده و ارتباط دو سیگنال را شرح دهید.

حال برای محاسبه PAC بین دو سیگنال، به استخراج فاز و دامنه لحظه‌ای دو سیگنال در هر فرکانس نیاز داریم. برای این منظور، از تجزیه مختلط زمان-فرکانس ویولت¹ استفاده می‌کنیم. توضیحات مربوط به تبدیل ویولت در انتهای این پی‌دی‌اف موجود است. در اعمال ویولت، آرگومان کرنل را برابر 1.5-0.5 cmor قرار دهید.

- ابتدا تابعی بنویسید که با دریافت ورودی‌های $x_p(t)$ و $x_a(t)$ عملیات زیر را انجام دهد:
 - تجزیه ویولت دو سیگنال $x_p(t)$ و $x_a(t)$ را بدست آورده و دو ماتریس مختلط به صورت $X_p(t, f)$ و $X_a(t, f)$ تشکیل دهد.
 - فاز تمام درایه‌های ماتریس $X_p(t, f)$ را محاسبه کرده و فرکانس‌های خارج از محدوده ۲ تا ۱۲ هرتز را از محور فرکانس آن حذف کنید تا ماتریس فاز $\phi(t, f_p)$ حاصل شود که در آن $f_p = [2, \dots, 12]$ می‌باشد.
 - دامنه تمام درایه‌های ماتریس $X_a(t, f)$ را محاسبه کرده و فرکانس‌های خارج از محدوده ۲۰ تا ۸۰ هرتز را محور فرکانس از آن حذف کنید تا ماتریس دامنه $A(t, f_a)$ حاصل شود که در آن $f_a = [20, \dots, 80]$ می‌باشد.
 - خروجی‌های این تابع، ماتریس‌های فاز $\phi(t, f_p)$ و دامنه $A(t, f_a)$ هستند.

حال قصد داریم از روی ماتریس‌های زمان-فرکانس فاز و دامنه بدست آمده، PAC را با دو روش مختلف محاسبه کنیم: **روش MVL²**: برای پیاده‌سازی این روش در هر فرکانس فاز و دامنه میانگین بردار تشکیل شده از فاز و دامنه لحظه‌ای محاسبه کرده و اندازه بردار خروجی نشان‌دهنده مقدار PAC است.

$$PAC(n, m) = \left| \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} A(t, f_a(n)) e^{j\phi(t, f_p(m))} \right|$$

که در آن n و m اندیس‌های مربوط به فرکانس فاز و دامنه هستند.

- تابعی بنویسید که با دریافت ماتریس‌های فاز $\phi(t, f_p)$ و دامنه $A(t, f_a)$ مقادیر PAC را به ازای هر فرکانس فاز f_p و دامنه f_a با روش MVL محاسبه کند.

روش MI³: یکی دیگر از روش‌های بررسی همبستگی فاز و دامنه، روش شاخص نوسان یا Modulation Index است. ایده کلی این روش، مانند روش‌های بخش اول (خانواده PLI) مبتنی بر عدم تقارن است، با یک سری تفاوت‌های عمده. زمانی که می‌خواهیم همبستگی فاز و دامنه را بررسی کنیم، در صورت وجود این همبستگی، می‌توانیم فرض کنیم که به ازای یک سری

Wavelet¹

Mean Vector Length²

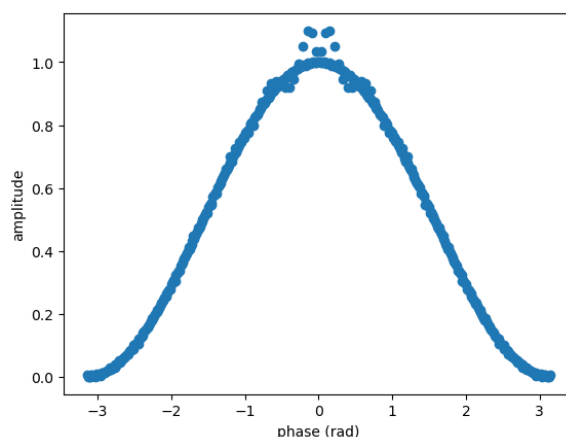
Modulation Index³

فازهای خاص، دامنه افزایش پیدا می‌کند و به ازای یک سری فاز این مقدار کاهش پیدا می‌کند. مثلاً اگر فاز به π برسد، همواره دامنه در حداکثر مقدار خود است و اگر به $-\pi$ برسد، دامنه در کمینه خود قرار می‌گیرد. یعنی، اگر جفت‌هایی به صورت زیر تشکیل دهیم،

$$[A_a(t), \phi_p(t)]$$

و دامنه در هر نمونه زمانی را در کنار فاز در آن لحظه قرار دهیم، انتظار داریم که در رسم این مجموعه نقاط در صفحه X-Y به یک توزیع با ضریب همبستگی (واضحا) غیر صفر برسیم.

ایده کلی این روش، بر اساس همین توزیع نامتقارن است، دامنه‌های زیاد به سمت یک فاز تمایل دارند و دامنه‌های کم به سمت فازهای دیگر، مانند شکل زیر که در یک نمونه ساده نمودار دامنه و فاز در هر نمونه زمانی را بر حسب یکدیگر نشان می‌دهد.



به طور دقیق‌تر، در این روش این جفت‌های فاز-دامنه در هر نمونه زمانی تشکیل می‌شوند و بر اساس گروه بندی فازها، دامنه‌ها نیز تقسیم می‌شوند. فرض کنید که ده نقطه زمانی داریم و می‌خواهیم این فرایند را اجرا کنیم. برای سادگی بازه $[-\pi, \pi]$ را به سه بازه تقسیم می‌کنیم. (یعنی $[-\pi, -\pi/3]$, $[-\pi/3, \pi/3]$, $[\pi/3, \pi]$)

نقاط شامل این موارد هستند:

Phase	$\pi/9$	$4\pi/7$	π	$-\pi/8$	$7\pi/11$	0	$-2\pi/5$	$-3\pi/4$	$-5\pi/16$	$\pi/12$
Amplitude	0.8	0.25	0.1	0.7	0.6	0.95	0.4	0.14	0.65	0.9

حالا باید بررسی کنیم که فاز هر کدام از این نقاط در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد. بازه‌ها را به ترتیب از مقادیر کوچک‌تر به بزرگ‌تر شماره گذاری می‌کنیم. با این حساب می‌توان جدول را کامل‌تر کرد و اطلاعات بازه را به آن اضافه کرد.

Phase	$\pi/9$	$4\pi/7$	π	$-\pi/8$	$7\pi/11$	0	$-2\pi/5$	$-3\pi/4$	$-5\pi/14$	$\pi/12$
Amplitude	0.8	0.25	0.1	0.7	0.6	0.95	0.4	0.14	0.35	0.9
Bin Number	2	3	3	2	3	2	1	1	1	2

در این حالت، هر بازه، در واقع نماینده طیفی از فازهاست که می‌توان به آن دامنه‌هایی را نیز منتسب کرد، یعنی می‌توان گفت که دامنه‌های متناظر با فازهای هر بازه، در مجموع چه مقدار هستند.

Bin Number	Sum of Amplitudes	Normalized Amplitude
1	0.89	0.17
2	3.35	0.65
3	0.95	0.18

که ستون دوم مجموع دامنه‌هایی هستند که فاز آن‌ها در بازه مشخص شده قرار می‌گیرد و ستون آخر نشان می‌دهد که هر بازه فاز، چند درصد از توان کل را در اختیار دارد.

فرض کنید به تابعی که ما را از مجموعه‌ای شامل تعداد دلخواهی نقاط (مانند مثال)، به ستون آخر جدول بالا می‌رساند، تابع ProxyHistogram بگوییم. در واقع این تابع هیستوگرام یک مولفه از نقطه (مانند مولفه فاز از نقاط [فاز، دامنه]) در نظر می‌گیرد و برای هر بین در نمودار، به جای تعداد نقاطی که در آن بازه هستند، مجموع مولفه‌های دومی (در اینجا دامنه) که مولفه اول آن در بین هستند، قرار می‌دهد. (و در نهایت بر مجموع کل تقسیم می‌کند تا مجموع این مقادیر برابر یک شود و یک معنای احتمالاتی بتوان از آن برداشت کرد)

- تابع ProxyHistogram را پیاده سازی کنید که در آن، یک مجموعه N تایی از نقاط دو بعدی به همراه تعداد بین را دریافت می‌کند و در نهایت مقادیر خواسته شده (مشابه ستون سوم جدول بالا) را برای هر بین خروجی می‌دهد.

○ می‌توانید تابع را به صورت خاص برای دامنه و فاز پیاده سازی کنید. در این صورت بین‌های خروجی همواره بازه‌های میان π و $-\pi$ را در نظر می‌گیرد.

- دو سیگنال نویز سفید گوسی با توان یک در نظر بگیرید و نمودار خروجی این تابع را به ازای دامنه و فرکانس آن‌ها نمایش دهید. آیا می‌توان ارتباطی برای آن‌ها در نظر گرفت؟

همان‌طور که گفته شد، در صورت عدم وجود ارتباط، انتظار می‌رود که توزیع مجموع دامنه‌ها به ازای بازه‌های فرکانسی مختلف توزیع یکنواختی داشته باشد، به این معنا که حول فرکانس مشخصی دامنه‌ها اندازه بزرگتری نداشته باشند. می‌توان این‌طور برداشت کرد که در صورت وجود ارتباط این شکل از توزیع یکنواخت فاصله می‌گیرد و تقارن میان بازه‌های مختلف از بین می‌رود. بنابراین مقایسه توزیع فاز-دامنه (خروجی از تابع ProxyHistogram) و توزیع یکنواخت با همان تعداد بین، می‌تواند یکی از معیارهای مناسب عدم تقارن باشد. یکی از راه‌های مقایسه که مفهومی شبیه به فاصله دارد، تابع Kullback-Leibler Divergence است (رابطه زیر). این تابع تفاوت میان دو تابع را نشان می‌دهد.

$$D_{KL}(P || Q) = \sum_x P(x) \log\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$$

- این تابع را پیاده سازی کنید.

○ این تابع باید دو بردار را در ورودی بگیرد که شامل نمونه‌هایی از دو توزیع هستند. در تابع این مقایسه میان دو توزیع انجام شده و معیار بالا را خروجی بدهد.

- دو بردار با توزیع گوسی و دو بردار با توزیع یکنواخت تولید کرده و خروجی تابع را میان توزیع‌های ناهمسان و همسان (هر دو توزیع) مقایسه کنید و گزارش دهید.

تا به اینجا، با داشتن نمونه‌های زمانی مطلوب فاز و دامنه از سیگنال‌ها، می‌توانیم معیاری عددی برای همبستگی میان فاز و دامنه ارائه دهیم.

- تابع نهایی Modulation Index را با توضیحات زیر پیاده سازی کنید.

○ ورودی تابع شما ماتریس‌های فاز $\phi(t, f_p)$ و دامنه $A(t, f_a)$ بدست آمده از تابعی که در مرحله قبل نوشتید، باشد.

○ سپس با استفاده از تابع ProxyHistogram به ازای تعداد بین‌های دلخواه توزیع توان دامنه بر حسب فاز را محاسبه کند.

○ در مرحله آخر میان توزیع خروجی مرحله دوم و توزیع یکنواخت هم ارز آن مقایسه کرده و حاصل را بر $\log K$ تقسیم کنید که K برابر با تعداد بین می‌باشد. عدد حاصل را به عنوان مقدار Phase-Amplitude Coupling خروجی دهد.

بنابراین این تابع هسته اصلی محاسبه PAC به بیان MI براساس رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$PAC = \frac{D_{KL}(U || P)}{\log K}$$

که در این رابطه، K تعداد بین، U توزیع یکنواخت و P توزیع نرمالیزه شده دامنه در بین‌های فازی (Normalized Amplitude) می‌باشد.

- حال به کمک تابعی که در ابتدای این بخش نوشتید، سیگنال‌های $x_p(t)$ و $x_a(t)$ را با پارامترهای زیر تشکیل دهید:

$$k_p = 1, k_a = 1, f_{phase} = 5Hz, f_{amp} = 60Hz, \chi = 0, \sigma_n = 0.5$$

- به ازای مقادیر $\chi = \{0, 0.5, 1\}$ ، مقادیر PAC را با هر دو روش MVL و MI محاسبه کرده و نمودارهای هیت‌مپ مقادیر PAC را به ازای هر فرکانس فاز و هر فرکانس دامنه رسم کنید. به نمودار حاصل کومدلوگرام^۱ گفته می‌شود.

○ با توجه به نتایج حاصل، پارامتر χ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

○ در حالت ایده‌آل به ازای $\chi = 0$ و $\chi = 1$ ، انتظار دارید نمودارهای کومدلوگرام چگونه باشد؟

○ کدام روش محاسبه PAC بهتر عمل کرده است؟

- حال با ثابت در نظر گرفتن $\chi = 0$ نمودارهای کومدلوگرام را برای هر دو روش به ازای افزایش توان نویز برا با $\sigma_n = \{0.5, 1, 2, 3\}$ رسم کرده و نتایج را باهم مقایسه کنید.

○ کدام روش محاسبه PAC در برابر افزایش توان نویز بهتر عمل کرده است؟

- با اعمال یک شیفت چرخشی (circular shift) در جهت دلخواه به میزان ۱۰۰ میلی ثانیه در سیگنال x_p ، نمودارهای

کومدلوگرام را برای هر دو روش برای سیگنال شیفت یافته x_p و سیگنال x_a رسم کنید. ($\chi = 0, \sigma_n = 0.5$)

○ با توجه به نتایج، آیا می‌توانیم PAC را به عنوان یک معیار مقاوم در برابر اثر تاخیر بدانیم؟

در ادامه این بخش، مشابه بخش‌های گذشته به بررسی اثر منبع مشترک به ارزیابی عملکرد هر یک از روش‌های محاسبه PAC در مواجهه با اثر منبع مشترک بررسی می‌کنیم.

- ابتدا با در نظر گرفتن پارامترهای زیر، سیگنال‌های x_p و x_a را بسازید:

$$k_p = 1, k_a = 1, f_{phase} = 5Hz, f_{amp} = 60Hz, \chi = 0, \sigma_n = 0.5$$

- سپس به هر دو سیگنال یک ترم کسینوسی به صورت زیر اضافه کنید:

$$\hat{x}_p = x_p + \alpha \cos(2\pi f_{cs} t)$$

$$\hat{x}_a = x_a + \beta \cos(2\pi f_{cs} t)$$

که در آن $f_{CS} = 40$ می باشد.

- به ازای مقادیر مختلف $\alpha = \beta = \{0,5,10,50\}$ مقادیر PAC را روی سیگنال‌های \hat{x}_p و \hat{x}_a توسط هر دو روش MVL و MI محاسبه کرده نمودارهای کومدلوگرام را رسم کنید. نتایج بدست آمده را باهم مقایسه کنید.
- افزایش مقادیر α و β چه تاثیری بر نتایج دارند؟
- کدام روش در برابر اثر منبع مشترک بهتر عمل می کند؟

بخش دوم: مقایسه معیارهای ارتباطی

با توجه به این که معیارهای معرفی شده در بخش اول، ارتباطات مختلفی را بررسی کرده و اندازه گیری می کنند، نمی توان آن‌ها را نسبت به یکدیگر برتر یا بدتر دانست. اما می توان با کنار گذاشتن یک سری فرض‌های کلی، آن‌ها را نشان دهنده اصل وجود ارتباط (یا عدم وجود آن) دانست و مقایسه‌ای بین آن‌ها ترتیب داد. بر همین اساس، سه معیار معرفی شده با روش‌های مختلف را از نظر

- اثری که از تاخیر می گیرند،
- اثری که منبع مشترک بر آن‌ها می گذارد
- و اثری که نویز بر آن‌ها می گذارد

مقایسه کنید.

در واقع باید در یک متن منسجم به سوالات زیر پاسخ دهید.

- در صورت وجود تاخیر در نوسان هماهنگ کدام منبع اثر کمتری از آن می گیرد.
- اثر منبع مشترک در کدام معیار تولید ارتباط تقلبی می کند، یعنی اساساً ارتباطی وجود ندارد، اما وجود منبع مشترک باعث می شود که ارتباط دیده شود، یا برعکس.
- نویز اثر مخرب‌تری بر کدام معیار دارد، به ازای SNR های پایین‌تر کدام معیار مقاومت بیشتری از خود نشان می دهد.
- به نظر شما و طبق پیشینه پژوهشی، چه عاملی در این معیارها وجود دارد که نتایج بالا حاصل می شود.

توضیحاتی درباره روش تجزیه زمان-فرکانس Wavelet

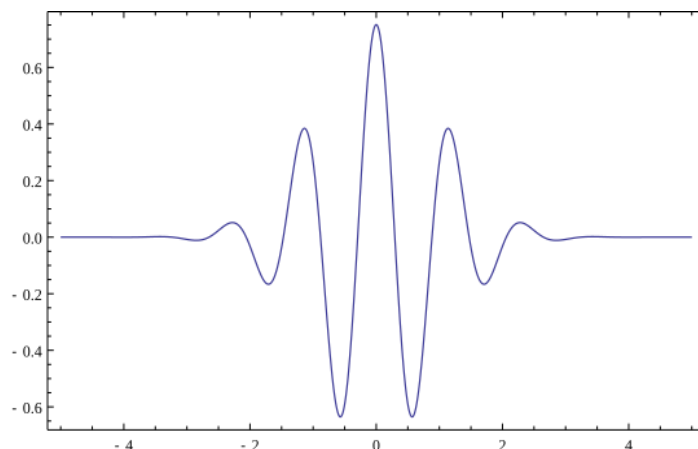
در قسمتی از این تمرین و تمرین آینده نیاز به اعمال تجزیه زمان-فرکانس خواهید داشت. روش‌های مختلفی برای تجزیه زمان-فرکانس سیگنال‌های حقیقی وجود دارد و به فراخور نیاز و کاربرد می توان از آن‌ها استفاده کرد. در پردازش سیگنال‌های حیاتی، یکی از متداول‌ترین راه‌ها تبدیل ویولت است. ایده محوری این روش، مانند روش‌های دیگر تجزیه، نگاشت سیگنال بر روی مجموعه‌ای از پایه‌های متعامد است، در تجزیه‌های مبتنی بر تبدیل فوری این پایه‌ها سیگنال‌های سینوسی و کسینوسی با

فرکانس‌های مختلف هستند، اما در ویولت گروهی از توابع برای این کار وجود دارد که با مقیاس‌ها و تاخیرهای متفاوت تعامد را برآورده می‌کنند، به این تابع، تابع مادر می‌گویند. شیفت‌ها و مقیاس‌های مختلف این تابع بر یکدیگر عمود هستند و می‌توان سیگنال را با استفاده از آن‌ها توصیف کرد.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$WT\{x\}(a,b) = \int_R x(t) \psi_{a,b}(t) dt$$

در عبارت بالا ψ تابع مادر است و در نهایت مقدار تبدیل ویولت سیگنال x به ازای تاخیر b و مقیاس a محاسبه می‌شود. این دو عدد فرکانس و دقت فرکانسی را مشخص کند. یکی از پرکاربردترین توابع مادری که استفاده می‌شود، تابع مورلت است، که تصویر آن در شکل زیر آمده است.



توضیح دقیق نحوه عملکرد این تبدیل از حوصله این بحث خارج است و ضروری نیز نیست، در اینجا به همین توضیحات ابتدایی اکتفا می‌کنیم. برای به دست آوردن تبدیل ویولت یک سیگنال در پایتون می‌توانید از [ماژول pywt](#) استفاده کنید. به طور دقیق‌تر از دستور [pywt.cwt](#) استفاده کنید.