دانشکده مهندسی برق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تمرین درس کنترل دیجیتال

نیمسال دوم : ۱۴۰۲-۱۴۰۳

استاد درس : دکتر طالبی

"Well done is better than well said"
– Benjamin Franklin

۱ بخش مقدماتی (۳۵ نمره)

حل دو سوال از این بخش الزامی است.

سوال اول

حل. برای $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 4\frac{rad}{sec}$ مکان مطلوب قطب‌های حلقه بسته $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ می‌باشد. جبران‌ساز پیش فاز را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}\right) \qquad ;0 < \alpha < 1$$

در این سیستم زاویه $G(s)$ در قطب حلقه بسته مطلوب برابر است با:

$$\left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210^\circ$$

پس برای این که مکان هندسی ریشه‌ها از این قطب حلقه بسته بگذرد، جبران‌ساز پیش‌فاز باید در این نقطه زاویه $\varphi = 30^\circ$ ایجاد کند. با روش نیمساز محل صفرها و قطب‌های جبران‌ساز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$z = \frac{1}{T} = 2.9 \qquad , \qquad p = \frac{1}{\alpha T} = 5.4$$

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر در می‌آید:

$$G_c(s)G(s) = K_c\left(\frac{s+2.9}{s+5.4}\right)\left(\frac{4}{s(s+2)}\right) = \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \qquad ;K = 4K_c$$

بهره K را با توجه به شرط اندازه به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\left|\frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 18.7 \quad \Rightarrow \quad K_c = 4.68$$

و سرانجام توابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده و جبران‌ساز به صورت زیر بدست می‌آیند

$$G_c(s)G(s) = \frac{18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \qquad , \qquad G_c(s) = 4.68\left(\frac{s+2.9}{s+5.4}\right)$$

ثابت خطای ایستای سرعت K_v به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = 5.02 s^{-1}$$

حال برای اطمینان از نتیجه حاصل قطب حلقه بسته سوم سیستم را به صورت زیر مشخص می‌کنیم

$$s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) = \left(s+2+j2\sqrt{3}\right)\left(s+2-j2\sqrt{3}\right)(s+3.4)$$

سوال دوم

حل. قطب‌های حلقه بسته غالب به صورت $s = -0.3307 \pm j0.5864$ می‌باشند. نسبت میرایی قطب‌های غالب $\xi = 0.491$ است. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های غالب $0.673\ [ra\ \ /\ \ ]$ است. ثابت خطای ایستای سرعت $0.53s^{-1}$ است برای این که ثابت خطای ایستای سرعت با ضریبی حدود 10 اضافه شود، $\beta = 10$ می‌گزینیم و صفر و قطب جبران‌ساز پس‌فاز را به ترتیب در $s = -0.05$ و $s = -0.005$ قرار می‌دهیم. پس تابع تبدیل جبران‌ساز پس‌فاز به صورت زیر است

$$G_c(s) = \widehat{K}_c\left(\frac{s+0.05}{s+0.005}\right)$$

زاویه‌ای که این شبکه پس‌فاز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه بسته ایجاد می‌کند حدود 4° است. چون این زاویه خیلی کوچک نیست، مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی قطب‌های غالب مطلوب کمی تغییر می‌کند. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است:

$$G_c(s)G(s) = \widehat{K}_c\left(\frac{s+0.05}{s+0.005}\right)\left(\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}\right) = \frac{K(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}$$

اگر نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته غالب، بخواهد بدون تغییر بماند، این قطب‌ها با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه‌های جدید باید به صورت $s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$ باشند. پس با استفاده از شرط اندازه ایوانز، مقدار K را تعیین و از روی آن بهره $\widehat{K}_c$ و در نتیجه ثابت خطای سرعت K_v را بصورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\widehat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656 \qquad , \qquad K_v = 5.12s^{-1}$$

دو قطب حلقه بسته دیگر سیستم جبران شده در $s_3 = -2.326$ و $s_4 = -0.0549$ قرار می‌گیرند.

افزودن جبران‌ساز پس‌فاز باعث شده است که مرتبه سیستم از ۳ به ۴ برسد، و یک قطب حلقه بسته اضافی نزدیک صفر جبران‌ساز پس‌فاز ایجاد شود. (قطب حلقه بسته اضافی در $s = -0.0549$ و نزدیک صفر واقع در $s = -0.05$ قرار دارد.) این قطب و صفر باعث می‌شوند که پاسخ گذرا دنباله‌ای دراز و با دامنه کم داشته باشد. چون قطب $s = -2.326$ در مقایسه با قطب‌های حلقه بسته غالب خیلی دور از محور $j\omega$ قرار دارد و اثر چندانی بر پاسخ گذرا نمی‌گذارد. بنابراین می‌توانیم قطب‌های حلقه بسته $s = -0.31 \pm j0.55$ را قطب‌های غالب به حساب آوریم. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های حلقه بسته غالب سیستم جبران شده $0.631\ [rad/s]$ است. این مقدار حدود 6% کمتر از مقدار اصلی، یعنی 0.673 است. یعنی پاسخ گذرای

سیستم جبران شده کندتر از سیستم اصلی و زمان نشست پاسخ نیز طولانی‌تر است. همچنین ماکزیمم فراجهش پاسخ پله سیستم جبران شده نیز بزرگ‌تر شده است. اگر بتوان این تغییرات را تحمل کرد، جبران‌ساز پس‌فاز طراحی شده در بالا برای این مساله، جواب قابل قبولی به حساب می‌آید.

سوال سوم

حل. زاویه خروج از قطب $-0.5 + j1$ در سیستم جبران نشده برابر است با:

$$\theta_d = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 63.4^\circ) = -26.6^\circ$$

برای آن که θ_d به -135° تبدیل شود باید در محل قطب $-0.5 + j1$ زاویه‌ای به اندازه -108.4° به سیستم اضافه شود.

$$\theta_p = 108.4^\circ \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.5 - p}\right) = 71.6^\circ \quad \Rightarrow \quad p = 0.17$$

سوال چهارم

سوال پنجم

۲ بخش متوسط (۳۵ نمره)

حل دو سوال از این بخش الزامی است.

سوال ششم

سوال هفتم

سوال هشتم

سوال نهم

سوال دهم

۳ بخش تکمیلی (۳۰ نمره)

حل دو سوال از این بخش الزامی است.

سوال یازدهم

سوال دوازدهم

سوال سیزدهم

سوال چهاردهم

سوال پانزدهم