

HW1 Solutions

نویسنده : رضا شهریاری

۱ بخش مقدماتی (۳۵ نمره)

سوال اول

حل. برای $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 4 \frac{rad}{sec}$ مکان مطلوب قطب‌های حلقه بسته $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ می‌باشد. جبران‌ساز پیش‌فاز را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \right) ; 0 < \alpha < 1$$

در این سیستم زاویه $G(s)$ در قطب حلقه بسته مطلوب برابر است با:

$$\left. \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210^\circ$$

پس برای این که مکان هندسی ریشه‌ها از این قطب حلقه بسته بگذرد، جبران‌ساز پیش‌فاز باید در این نقطه زاویه $\varphi = 30^\circ$ ایجاد کند. با روش نیمساز محل صفرها و قطب‌های جبران‌ساز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$z = \frac{1}{T} = 2.9, \quad p = \frac{1}{\alpha T} = 5.4$$

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر در می‌آید:

$$G_c(s)G(s) = K_c \left(\frac{s + 2.9}{s + 5.4} \right) \left(\frac{4}{s(s+2)} \right) = \frac{K(s + 2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} ; K = 4K_c$$

بهره K را با توجه به شرط اندازه به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\left| \frac{K(s + 2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow K = 18.7 \Rightarrow K_c = 4.68$$

و سرانجام توابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده و جبران‌ساز به صورت زیر بدست می‌آیند

$$G_c(s)G(s) = \frac{18.7(s + 2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}, \quad G_c(s) = 4.68 \left(\frac{s + 2.9}{s + 5.4} \right)$$

ثابت خطای ایستای سرعت K_v به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = 5.02s^{-1}$$

حال برای اطمینان از نتیجه حاصل قطب حلقه بسته سوم سیستم را به صورت زیر مشخص می‌کنیم

$$s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) = (s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+3.4)$$

سوال دوم

حل. قطب‌های حلقه بسته غالب به صورت $s = -0.3307 \pm j0.5864$ می‌باشند. نسبت میرایی قطب‌های غالب $\xi = 0.491$ است. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های غالب 0.673 rad/s است. ثابت خطای ایستای سرعت 0.53 s^{-1} است برای این که ثابت خطای ایستای سرعت با ضریبی حدود 10 اضافه شود، $\beta = 10$ می‌گزینیم و صفر و قطب جبران‌ساز پس‌فاز را به ترتیب در $s = -0.05$ و $s = -0.005$ قرار می‌دهیم. پس تابع تبدیل جبران‌ساز پس‌فاز به صورت زیر است

$$G_c(s) = \hat{K}_c \left(\frac{s + 0.05}{s + 0.005} \right)$$

زاویه‌ای که این شبکه پس‌فاز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه بسته ایجاد می‌کند حدود 4° است. چون این زاویه خیلی کوچک نیست، مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی قطب‌های غالب مطلوب کمی تغییر می‌کند. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است:

$$G_c(s)G(s) = \hat{K}_c \left(\frac{s + 0.05}{s + 0.005} \right) \left(\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right) = \frac{K(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}$$

اگر نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته غالب، بخواهد بدون تغییر بماند، این قطب‌ها با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه‌های جدید باید به صورت $s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$ باشند. پس با استفاده از شرط اندازه ایوانز، مقدار K را تعیین و از روی آن بهره \hat{K}_c و در نتیجه ثابت خطای سرعت K_v را بصورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\hat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656, \quad K_v = 5.12 \text{ s}^{-1}$$

دو قطب حلقه بسته دیگر سیستم جبران شده در $s_3 = -2.326$ و $s_4 = -0.0549$ قرار می‌گیرند. افزودن جبران‌ساز پس‌فاز باعث شده است که مرتبه سیستم از ۳ به ۴ برسد، و یک قطب حلقه بسته اضافی نزدیک صفر جبران‌ساز پس‌فاز ایجاد شود. (قطب حلقه بسته اضافی در $s = -0.0549$ و نزدیک صفر واقع در $s = -0.05$ قرار دارد.) این قطب و صفر باعث می‌شوند که پاسخ گذرا دنباله‌ای دراز و با دامنه کم داشته باشد. چون قطب $s = -2.326$ در مقایسه با قطب‌های حلقه بسته غالب خیلی دور از محور $j\omega$ قرار دارد و اثر چندانی بر پاسخ گذرا نمی‌گذارد. بنابراین می‌توانیم قطب‌های حلقه بسته $s = -0.31 \pm j0.55$ را قطب‌های غالب به حساب آوریم. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های حلقه بسته غالب سیستم جبران شده 0.631 rad/s است. این مقدار حدود 6% کمتر از مقدار اصلی، یعنی 0.673 است. یعنی پاسخ گذرای

سیستم جبران شده کندتر از سیستم اصلی و زمان نشست پاسخ نیز طولانی‌تر است. همچنین ماکزیمم فراجهش پاسخ پله سیستم جبران شده نیز بزرگ‌تر شده است. اگر بتوان این تغییرات را تحمل کرد، جبران‌ساز پس‌فاز طراحی شده در بالا برای این مساله، جواب قابل قبولی به حساب می‌آید.

سوال سوم

حل. زاویه خروج از قطب $-0.5 + j1$ در سیستم جبران نشده برابر است با:

$$\theta_d = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 63.4^\circ) = -26.6^\circ$$

برای آن که θ_d به -135° تبدیل شود باید در محل قطب $-0.5 + j1$ زاویه‌ای به اندازه -108.4° به سیستم اضافه شود.

$$\theta_p = 108.4^\circ \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.5 - p}\right) = 71.6^\circ \Rightarrow p = 0.17$$

سوال چهارم

ابتدا حاشیه بهره و فاز را محاسبه می‌کنیم. فرکانسی که حاشیه بهره در آن اتفاق می‌افتد از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$-\pi/2 = \tan^{-1}(\omega/4) - \tan^{-1}(\omega/16)$$

این تساوی در $\omega = 8$ اتفاق می‌افتد.

گین در فرکانس برابر -1.94 دسی بل می‌باشد.

جال حاشیه فاز این تابع تبدیل با بررسی فاز آن در 0 دسی بل بررسی کنید. حاشیه فاز -0.25 درجه می‌باشد.

جبران‌ساز این سیستم باید به اندازه $15 + 5.02$ درجه به فاز سیستم اضافه کند و همچنین $1.5 + 1.94$ دسی بل به گین سیستم بیافزاید.

یک کنترلر PD با تابع تبدیل زیر طراحی می‌کنیم

$$C = K(s + z)$$

باید در فرکانس 93.8 ، 20 درجه فاز تزریق شود و گین نیز باید در فرکانس 8 درجه 0.3 تزریق شود.

$$C = 2.2(s + 4)$$

سوال پنجم

سیستم حلقه باز جبران شده به صورت زیر است:

$$C(s)G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}\left(\frac{s}{z} + 1\right)$$

ثابت خطای سرعت استاتیکی به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) = s \frac{K}{s(0.5s+1)}\left(\frac{s}{z} + 1\right) = K$$

$$K_v = K = 20$$

حاشیه فاز G برابر 18 درجه و در فرکانس 17.6 رادیان بر ثانیه است. برای حصول به حاشیه فاز 45 درجه کفایت در فرکانس ذکر شده 27 درجه به فاز اضافه

شود. برای راحتی محاسبات این مقدار را به 30 درجه می‌رسانیم

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z} + 1\right)$$

$$\omega = 6.17 \text{ and } phase = 27$$

$$z = 10.68$$

$$C(s) = \left(\frac{s}{10.68} + 1\right)$$

۲ بخش متوسط (۳۵ نمره)

سوال ششم

یکی از روش‌های قابل اتکا برای سیستم‌های ناپایدار طراحی کنترلر PID می‌باشد.

می‌توان به روش زیگلر-نیکولز و داشتن گین بحرانی این کنترلر را طراحی کرد.

در اینجا از قابلیت pidTuner متلب استفاده شده است و نتیجه بیان شده است.

سوال هفتم

کنترلر پیشفاز را به صورت زیر طراحی می کنیم :

(۱) صفر را زیر قطب مطلوب قرار می دهیم.

(۲) با استفاده از شرط زاویه محل قطب را تعیین می کنیم.

(۳) با استفاده از شرط اندازه گین کنترلر را تعیین می کنیم.

از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\omega_c = 0.63\omega_b$$

$$G_c(s) = \alpha \frac{s+z_c}{s+p_c}$$

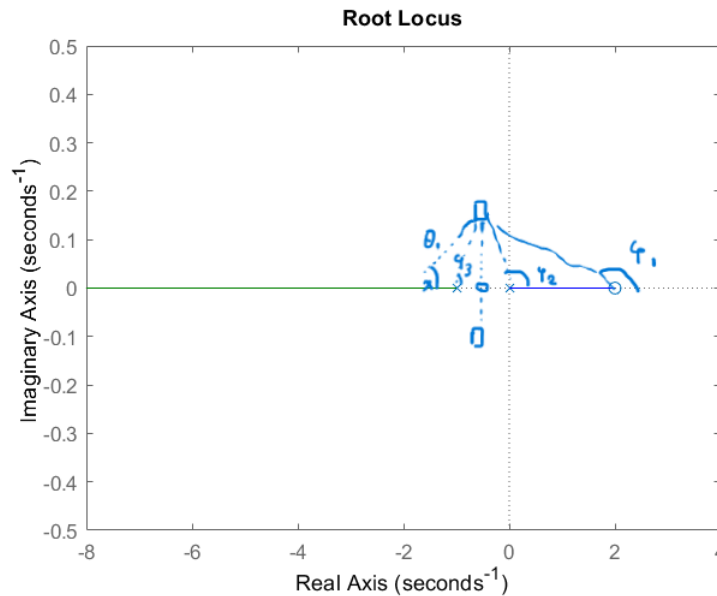
طراحی کنترلر به روش فرکانسی در این سوال ممکن است اما بسیار پیچیده است به همین دلیل از روابط زیر طراحی سیستم را به روش تحلیل زمانی انجام می دهیم.

در سیستم های درجه ۲ رابطه زیر برقرار است:

$$\zeta = 0.01 * PM = 0.45$$

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = \frac{0.63}{1.296} = 0.81$$

$$s = -0.3645 \pm j0.72$$



شرط زاویه :

$$-\theta_1 - \phi_3 + 90 - \phi_2 + \phi_1 = -180$$

$$G_c = K \frac{s+0.3645}{s+0.33507}$$

$$K = 0.36$$

سوال هشتم

شکل سمت چپ پاسخ پله سیستم بدون کنترلر می باشد. با توجه به قضیه مقدار اولیه می انیم که احتمالاً سیستم به فرم ذیل بوده است.

$$G(s) = \frac{\alpha s^m + \dots}{s^*(\beta s^n + \dots)}$$

$$m = n$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = G(0)$$

شکل سمت راست سیستم با کنترلر را با اورشوت نشان می دهد. این به این معناست که کنترلر قطعاً نمی توانسته به فرم lead یا lag باشد. همچنین به فرم PD هم نمی باشد چرا که برای حصول به مقدار اولیه صفر مرتبه مخرج باید از مرتبه صورت بزرگتر باشد. پس می توان نتیجه گرفت که در دینامیک کنترلر مرتبه مخرج بزرگتر از صورت می باشد.

B-7-29. Referring to Figure 7-9 and examining the Bode diagram of Figure 7-164, we find the damping ratio ζ and undamped natural frequency ω_n of the quadratic term to be

$$\zeta = 0.1, \quad \omega_n = 2 \text{ rad/sec}$$

Noting that there is another corner frequency at $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ and the slope of the magnitude curve in the low-frequency range is -40 dB/decade , $G(j\omega)$ can be tentatively determined as follows:

$$G(j\omega) = \frac{K \left(\frac{j\omega}{0.5} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left[\left(\frac{j\omega}{2} \right)^2 + 0.1(j\omega) + 1 \right]}$$

Since, from Figure 7-164, we find $|G(j0.1)| = 40 \text{ dB}$, the gain value K can be determined to be unity. Also, the calculated phase curve, $\angle G(j\omega)$ versus ω , agrees with the given phase curve. Hence, the transfer function $G(s)$ can be determined to be

$$G(s) = \frac{4(2s+1)}{s^2(s^2 + 0.4s + 4)}$$

سوال دهم

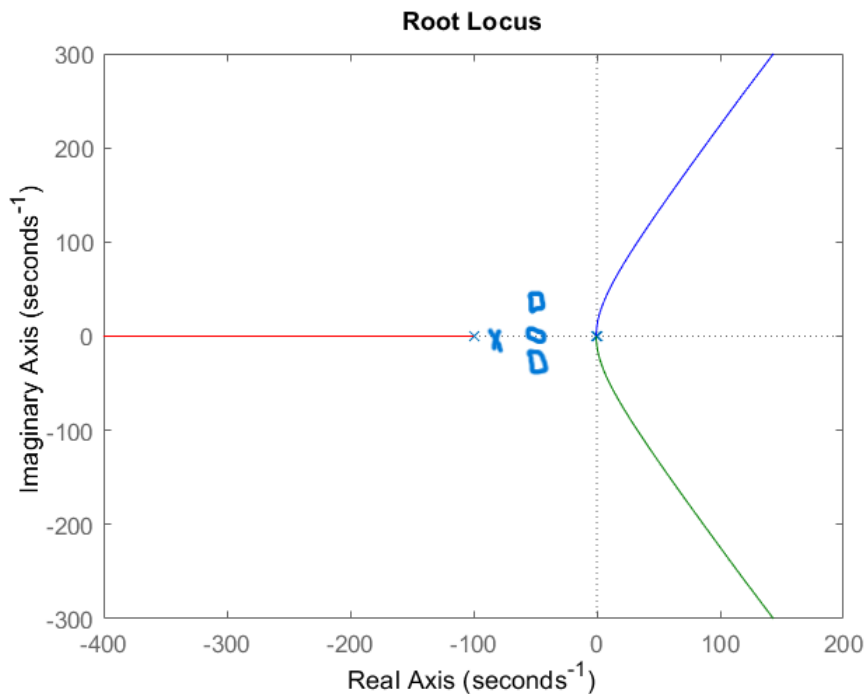
قطب های مطلوب به فرم زیر بدست می آیند.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(PO)^2}{\pi(\ln(PO))^2}} = 0.718$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 3.95$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s = -2.22 \pm j2.74$$



همانطور که در شکل نشان داده شده است صفر کنترلر را برابر با بخش حقیقی قطب های مطلوب سیستم حلقه بسته انتخاب می کنیم حال شرط زاویه را می نویسیم.

تعریف :

ϕ_1 : زاویه بین قطب -۱۰۰

ϕ_2 : زاویه بین قسمت مثبت محور افقی و -۱

ϕ_3 : زاویه قطب روی ۰

θ_1 : زاویه صفر که نود درجه هست

شرط زاویه:

$$-\phi_1 - \theta_1 + 90 - \phi_2 - \phi_3 = 180$$

$$-\tan^{-1}\left(\frac{2.74}{97.78}\right) - \theta_1 + 90 - (180 - \tan^{-1}\left(\frac{2.74}{1.22}\right)) - (180 - \tan^{-1}\left(\frac{2.74}{2.22}\right)) = 180$$

$$\theta_1 = 24.34$$

$$G_c = K \frac{s+2.22}{s+8.3}$$

$$|GG_c(s = -2.22 + j2.74)| = 1$$

$$\frac{100K(2.74)}{\sqrt{2.22^2+2.74^2}\sqrt{1.22^2+2.74^2}\sqrt{97.78^2+2.74^2}\sqrt{6.08^2+2.74^2}} = 1$$

$$K = 25.181$$

$$G_c = 25.181 \frac{s+2.22}{s+8.3}$$

می توانید برای اهداف کنترلی یک prefilter دلخواه انتخاب کرده و پاسخ را در حضور آن بررسی کنید. این بخش به دلیل دلخواه بودن بر عهده دانشجو قرار داده شده است.

۳ بخش تکمیلی (۳۰ نمره)

سوال یازدهم

ابتدا باید Type در سیستم مورد بررسی قرار بگیرد. بنظر می‌رسد سیستم حداقل یک قطب در صفر دارد چرا از فرکانس ۱۰۰ رادیان بر ثانیه دائماً به صورت کاهشی بوده است.

برای تایید این مشاهده محاسبات زیر را انجام می‌دهیم. برای یافتن شیب اندازه، باید اندازه را در فاصله یک دهه داشته باشیم. اگر $\omega = 0.1$ را مبنای کار خود قرار دهیم باید اندازه در $\omega = 1$ هم داشته باشیم. $\omega = 1$ بین دو مقدار ۸۸۵۹۰ و ۲۷۴۳۰۱ در جدول قرار دارد. برای یافتن مقدار اندازه تقریبی از درون یابی قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1-0.8859}{1.2743-0.8859} = \frac{x-0.0114}{0.0080-0.0114}$$

$$x = 0.01$$

مقدار ارائه شده برای x تقریبی است اما فاصله ۱۰ برابری کافیت برای اینکه متوجه شویم نمودار اندازه این سیستم در ابتدا دارای شیب ۲۰- دسی بل بر دهه است. این نشان می‌دهد که دقیقاً یک قطب در صفر داریم پس کافیت گین کنترلر طوری تعیین شود که به ثابت خطای سرعت مطلوب دست یابیم. یادتان باشد که جدول رسم شده مربوط به $K = 0.01$ است و برای اینکه بدانید گین پلنت در صفر چند دسی بل است (که برای تعیین گین کنترلر کننده نیاز است) باید جدول را با $K = 1$ تحلیل کنید.

پس عناصر اندازه جدول همگی باید در ۱۰۰ ضرب شوند مشاهده می‌شود که در این حالت اندازه در $\omega = 0.1$ برابر با ۱۰ می‌شود. این مقدار همان $G(0)$ می‌باشد. با توجه به رابطه کنترلر $C(s) = \alpha \frac{s/z+1}{s/p+1}$ سعی می‌کنیم α را بیابیم.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} C(0)G(0) = 10\alpha = 20 \rightarrow \alpha = 2$$

مجدداً رابطه اندازه را در مقدار ۲ ضرب می‌کنیم تا در این حالت حاشیه فاز را بیابیم. در مجموع جدول را در مقدار ۲۰۰ باید ضرب کنید برای بدست آوردن حاشیه فاز باید فاصله فاز را تا ۱۸۰- در اندازه ۱ بیابید. پس از ضرب مقدار ۲۰۰ در اندازه فاز در اندازه ۱ حدوداً ۹۶- بدست می‌آید. از آنجا که نسبت میرایی ۵۰ داده شده است و حدوداً می‌توان گفت که این قید هم ارز حاشیه فاز بزرگتر از ۵۰ درجه است؛ کار طراحی کنترلر در اینجا تمام است. فقط یک کنترلر P می‌تواند شرایط مطلوب ما را تأمین کند.

$$C(s) = 2$$

سوال دوازدهم

در این سوال هم مانند سوال قبل از فرکانس ۰.۱ تا ۱ شیب ۲۰- دسی بل حاکم است. پس دقیقاً یک قطب در ۰ داریم در اینجا چون صورت سوال اشاره نکرده است فرض می‌کنیم نمودار برای $K = 1$ رسم شده است. برای ایجاد شرایط حالت دائم کافیت K_v را بیابیم در این صورت داریم: $ess = 1/K_v = 0.5$

داریم: $K_v = 2$ با فرض رابطه $C(s) = \alpha \frac{s/z+1}{s/p+1}$ برای کنترلر α را می‌یابیم.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} C(0)G(0) = 5\alpha = 2 \rightarrow \alpha = 0.4$$

عدد ۵ در بالا به صورت زیر بدست آمد.

$$20\log(G(0)) = 13.9686, G(0) = 5$$

جدول باید با مقدار گین اضافه شده جمع شود تا شرایط زاویه را بدست آوریم.

$$20\log(0.4) = -8$$

با جمع کردن ستون اندازه با مقدار بالا فازی را که در آن مقدار اندازه ۰ می‌شود را بدست می‌آوریم. مقدار فاز در $\omega = 0.1$ برابر ۶ دسی بل می‌شود و در $\omega = 1.1$ برابر با ۱۶- دسی بل می‌شود با استفاده از درون یابی خطی محلی که در آن اندازه برابر ۰ دسی بل می‌شود را بدست می‌آوریم:

$$\frac{6}{22} = \frac{x+92.8624}{-25.9484}, x = -100$$

این یعنی حاشیه فاز ۸۰ درجه می‌باشد که شرایط مطلوب را برآورده می‌کند.

سوال سیزدهم

برای حل این سوال، ابتدا باید تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را با استفاده از تابع تبدیل کنترل کننده $(C(s))$ و تابع تبدیل سیستم $(G(s))$ بدست آوریم. سپس، با تنظیم مقادیر $(k_p)(k_i)(k_d)$ به گونه‌ای که صفرهای مورد نظر را ایجاد کنند، تأثیر آن‌ها را بر روی سیستم بررسی می‌کنیم. تابع تبدیل کنترل کننده $(C(s))$ به صورت زیر است:

$$C(s) = kp + ski + kds$$

و تابع تبدیل سیستم $(G(s))$ به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته $(T(s))$ با فرض فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

برای داشتن صفرهای $(z = -3 \pm j)$ در تابع تبدیل حلقه بسته، باید تابع تبدیل کنترل کننده $(C(s))$ را به گونه‌ای تنظیم کنیم که این صفرها را در مخرج تابع تبدیل حلقه بسته ایجاد کند. این کار با افزودن یک جمله به تابع تبدیل کنترل کننده که صفرهای مورد نظر را ایجاد می‌کند، امکان‌پذیر است. به عنوان مثال، اگر یک جمله به صورت $((s+3+j)(s+3-j))$ به مخرج تابع تبدیل کنترل کننده اضافه کنیم، صفرهای مورد نظر را خواهیم داشت. این جمله را می‌توان با تنظیم مقادیر $(k_p)(k_i)(k_d)$ ایجاد کرد.

تغییرات در ضرایب کنترل کننده می‌تواند تأثیرات مختلفی بر روی پاسخ سیستم داشته باشد، از جمله تغییر در سرعت پاسخ، میزان ارتعاش، و زمان نشست سیستم. برای مثال، افزایش (k_p) می‌تواند سرعت پاسخ سیستم را افزایش دهد، در حالی که افزایش (k_d) می‌تواند به کاهش ارتعاشات و بهبود پایداری کمک کند. همچنین، (k_i) برای رفع خطای دائمی در سیستم‌های کنترلی استفاده می‌شود.

برای تحلیل دقیق‌تر و بررسی تأثیرات این تغییرات، می‌توان از روش‌های تحلیلی مانند مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus) استفاده کرد. این روش به ما امکان می‌دهد که ببینیم با تغییر ضرایب کنترل کننده، قطب‌ها و صفرهای سیستم چگونه در صفحه s حرکت می‌کنند و چه تأثیری بر پایداری و پاسخ سیستم دارند.

سوال چهاردهم

در این سوال با توجه به رابطه زیر هرگاه گین $C(s)$ نسبت به $G(s)$ بسیار بالاتر باشد در حالت دائم تأثیر اغتشاش حذف می‌شود.

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}D(s)$$

برای سیستم‌های ناپایدار طراحی کنترلر PID مناسب تر است. می‌توان نشان داد کنترلر زیر شرایط سوال را برآورده می‌کند.

$$C(s) = 0.8742 + \frac{1.2239}{s}$$

سوال پانزدهم

دقیقاً مانند سوال قبل حل این سوال نیز نیازمند یک کنترلر PI می‌باشد. البته تنظیم حد فاز با پهنای باند داده شده برای این سیستم امکان‌پذیر نمی‌باشد.

$$C(s) = 1.414 + \frac{0.02475}{s}$$

کنترلر بالا تقریباً شرایط سوال را برآورده می‌کند.