HW1 Solutions

نویسنده : رضا شهریاری

۱ بخش مقدماتی (۳۵ نمره)

سوال اول

حل. برای $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 4\frac{rad}{sec}$ مکان مطلوب قطب‌های حلقه بسته $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ می‌باشد. جبران‌ساز پیش فاز را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}\right) \qquad ;0 < \alpha < 1$$

در این سیستم زاویه $G(s)$ در قطب حلقه بسته مطلوب برابر است با:

$$\left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210^{\circ}$$

پس برای این که مکان هندسی ریشه‌ها از این قطب حلقه بسته بگذرد، جبران‌ساز پیش‌فاز باید در این نقطه زاویه $\varphi = 30^{\circ}$ ایجاد کند. با روش نیمساز محل صفرها و قطب‌های جبران‌ساز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$z = \frac{1}{T} = 2.9 \qquad , \qquad p = \frac{1}{\alpha T} = 5.4$$

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر در می‌آید:

$$G_c(s)G(s) = K_c\left(\frac{s+2.9}{s+5.4}\right)\left(\frac{4}{s(s+2)}\right) = \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \qquad ;K = 4K_c$$

بهره K را با توجه به شرط اندازه به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\left|\frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad K = 18.7 \quad \Longrightarrow \quad K_c = 4.68$$

و سرانجام توابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده و جبران‌ساز به صورت زیر بدست می‌آیند

$$G_c(s)G(s) = \frac{18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \qquad , \qquad G_c(s) = 4.68\left(\frac{s+2.9}{s+5.4}\right)$$

ثابت خطای ایستای سرعت K_v به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = 5.02s^{-1}$$

حال برای اطمینان از نتیجه حاصل قطب حلقه بسته سوم سیستم را به صورت زیر مشخص می‌کنیم

$$s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) = \left(s+2+j2\sqrt{3}\right)\left(s+2-j2\sqrt{3}\right)(s+3.4)$$

سوال دوم

حل. قطب‌های حلقه بسته غالب به صورت $s = -0.3307 \pm j0.5864$ می‌باشند. نسبت میرایی قطب‌های غالب $\xi = 0.491$ است. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های غالب $0.673\ [ra\ /\ ]$ است. ثابت خطای ایستای سرعت $0.53s^{-1}$ است برای این که ثابت خطای ایستای سرعت با ضریبی حدود 10 اضافه شود، $\beta = 10$ می‌گزینیم و صفر و قطب جبران‌ساز پس‌فاز را به ترتیب در $s = -0.05$ و $s = -0.005$ قرار می‌دهیم. پس تابع تبدیل جبران‌ساز پس‌فاز به صورت زیر است

$$G_c(s) = \widehat{K}_c\left(\frac{s+0.05}{s+0.005}\right)$$

زاویه‌ای که این شبکه پس‌فاز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه بسته ایجاد می‌کند حدود 4° است. چون این زاویه خیلی کوچک نیست، مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی قطب‌های غالب مطلوب کمی تغییر می‌کند. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است:

$$G_c(s)G(s) = \widehat{K}_c\left(\frac{s+0.05}{s+0.005}\right)\left(\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}\right) = \frac{K(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}$$

اگر نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته غالب، بخواهد بدون تغییر بماند، این قطب‌ها با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه‌های جدید باید به صورت $s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$ باشند. پس با استفاده از شرط اندازه ایوانز، مقدار K را تعیین و از روی آن بهره $\widehat{K}_c$ و در نتیجه ثابت خطای سرعت K_v را بصورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\widehat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656 \qquad , \qquad K_v = 5.12s^{-1}$$

دو قطب حلقه بسته دیگر سیستم جبران شده در $s_3 = -2.326$ و $s_4 = -0.0549$ قرار می‌گیرند.

افزودن جبران‌ساز پس‌فاز باعث شده است که مرتبه سیستم از ۳ به ۴ برسد، و یک قطب حلقه بسته اضافی نزدیک صفر جبران‌ساز پس‌فاز ایجاد شود. (قطب حلقه بسته اضافی در $s = -0.0549$ و نزدیک صفر واقع در $s = -0.05$ قرار دارد.) این قطب و صفر باعث می‌شوند که پاسخ گذرا دنباله‌ای دراز و با دامنه کم داشته باشد. چون قطب $s = -2.326$ در مقایسه با قطب‌های حلقه بسته غالب خیلی دور از محور $j\omega$ قرار دارد و اثر چندانی بر پاسخ گذرا نمی‌گذارد. بنابراین می‌توانیم قطب‌های حلقه بسته $s = -0.31 \pm j0.55$ را قطب‌های غالب به حساب آوریم. فرکانس طبیعی نامیرای قطب‌های حلقه بسته غالب سیستم جبران شده $0.631\ [rad/s]$ است. این مقدار حدود 6% کمتر از مقدار اصلی، یعنی 0.673 است. یعنی پاسخ گذرای

سیستم جبران شده کندتر از سیستم اصلی و زمان نشست پاسخ نیز طولانی‌تر است. همچنین ماکزیمم فراجهش پاسخ پله سیستم جبران شده نیز بزرگ‌تر شده است. اگر بتوان این تغییرات را تحمل کرد، جبران‌ساز پس‌فاز طراحی شده در بالا برای این مساله، جواب قابل قبولی به حساب می‌آید.

سوال سوم

حل. زاویه خروج از قطب $-0.5 + j1$ در سیستم جبران نشده برابر است با:

$$\theta_d = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \left(180^{\circ} - 63.4^{\circ}\right) = -26.6^{\circ}$$

برای آن که θ_d به -135° تبدیل شود باید در محل قطب $-0.5 + j1$ زاویه‌ای به اندازه -108.4° به سیستم اضافه شود.

$$\theta_p = 108.4^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.5 - p}\right) = 71.6^{\circ} \quad \Rightarrow \quad p = 0.17$$

سوال چهارم

ابتدا حاشیه بهره و فاز را محاسبه می‌کنیم. فرکانسی که حاشیه بهره در آن اتفاق می‌افتد از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.
$-\pi/2 = \tan^{-1}(\omega/4) - \tan^{-1}(\omega/16)$
این تساوی در $\omega = 8$ اتفاق می‌افتد.
گین در فرکانس برابر -1.94 دسی بل می‌باشد.
جال حاشیه فاز این تابع تبدیل با بررسی فاز آن در ۰ دسی بل بررسی کنید. حاشیه فاز -۰۲.۵ درجه می‌باشد.
جبرانساز این سیستم باید به اندازه $5.02 + 15$ درجه به فاز سیستم اضافه کند و همچنین $1.94 + 1.5$ دسی بل به گین سیستم بیافزاید.
یک کنترلر PD با تابع تیدیل زیر طراحی می‌کنیم
$C = K(s + z)$
باید در فرکانس ۹۳.۸، ۲۰ درجه فاز تزریق شود و گین نیز باید در فرکانس ۸ درجه ۰۴.۳ تزریق شود.
$C = 2.2(s + 4)$

سوال پنجم

سیستم حلقه باز جبران شده به صورت زیر است:

$C(s)G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}(\frac{s}{z} + 1)$

ثابت خطای سرعت استاتیکی به فرم زیر قابل محاسبه است:

$K_v = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s) = s\frac{K}{s(0.5s+1)}(\frac{s}{z} + 1) = K$
$K_v = K = 20$

حاشبه فاز G برابر ۱۸ درجه و در فرکانس ۱۷.۶ رادیان بر ثانبه است. برای حصول به جاشبه قاز ۴۵ درجه کافیست در فرکانس ذکر شده ۲۷ درجه به فاز اضافه شود. برای راحتی محاسبات این مقدار را به ۳۰ درجه می‌رسانیم

$\tan^{-1}(\frac{\omega}{z} + 1)$
$\omega = 6.17 and phase = 27$
$z = 10.68$
$C(s) = (\frac{s}{10.68} + 1)$

۲ بخش متوسط (۳۵ نمره)

سوال ششم

یکی از روش های قابل اتکا برای سیستم های نپایدار طراحی کنترلر PID می باشد.
می توان به روش زیگلر-نیکولز و داشتن گین بحرانی این کنترلر را طراحی کرد.
در اینجا از قابلیت pidTuner متلب استفاده شده است و نتیجه بیان شده است.

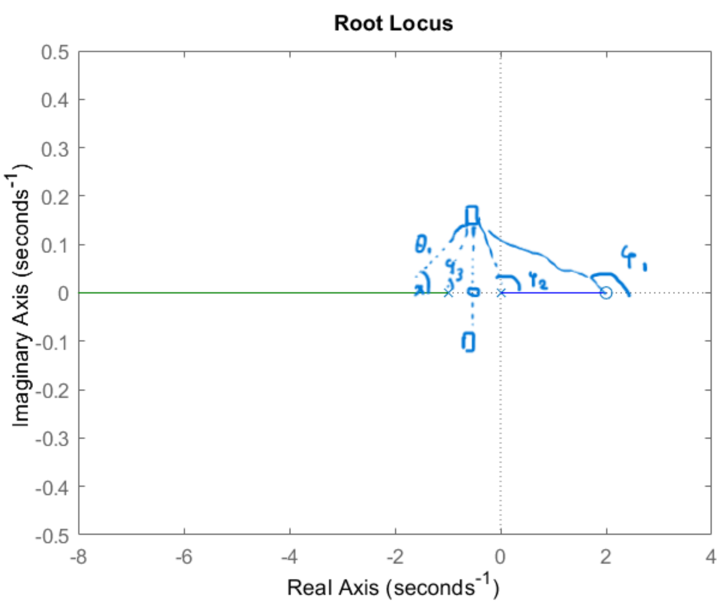
سوال هفتم

کنترلر پیشفاز را به صورت زیر طراحی می‌کنیم :
۱) صفر را زیر قطب مطلوب قرار می‌دهیم.
۲) با استفاده از شرط زاویه محل قطب را تعیین می‌کنیم.
۳) با استفاده از شرط اندازه گین کنترلر را تعیین می‌کنیم.
از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$\omega_c = 0.63\omega_b$
$G_c(s) = \alpha\frac{s+z_c}{s+p_c}$

طراحی کنترلر به روش فرکانسی در این سوال ممکن است اما بسیار پیچیده است به همین دلیل از روابط زیر طراحی سیستم را به روش تحلیل زمانی انجام می‌دهیم.
در سیستم های درجه ۲ رابطه زیر برقرار است:

$\zeta = 0.01 * PM = 0.45$
$\omega_n = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = \frac{0.63}{1.296} = 0.81$
$s = -0.3645 \pm j0.72$



شرط زاویه :

$-\theta_1 - \phi_3 + 90 - \phi_2 + \phi_1 = -180$
$G_c = K\frac{s+0.3645}{s+0.33507}$
$K = 0.36$

سوال هشتم

شکل سمت چپ پاسخ پله سیستم بدون کنترلر می باشد. با توجه به قضیه مقدار اولیه می‌انیم که احتمالاً سیستم به فرم ذیل بوده است.

$G(s) = \frac{\alpha s^m + ...}{s*(\beta s^n + ...)}$
$m = n$
$\lim_{s\to\infty} sG(s) = G(0)$

شکل سمت راست سیستم با کنترلر را با اورشوت نشان می‌دهد. این به این معناست که کنترلر قطعاً نمی‌توانسته به فرم lead یا lag باشد. همچنین به فرم PD هم نمی باشد چرا که برای حصول به مقدار اولیه صفر مرتبه مخرج باید از مرتبه صورت بزرگتر باشد.
پس می‌توان نتیجه گرفت که در دینامیک کنترلر مرتبه مخرج بزرگتر از صورت می‌باشد.

سوال نهم

B-7-29. Referring to Figure 7-9 and examining the Bode diagram of Figure 7-164, we find the damping ratio ζ and undamped natural frequency ω_n of the quadratic term to be

$$\zeta = 0.1, \qquad \omega_n = 2 \text{ rad/sec}$$

Noting that there is another corner frequency at $\omega = 0.5$ rad/sec and the slope of the magnitude curve in the low-frequency range is -40 dB/decade, $G(j\omega)$ can be tentatively determined as follows:

$$G(j\omega) = \frac{K\left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)}{(j\omega)^2\left[\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 + 0.1(j\omega) + 1\right]}$$

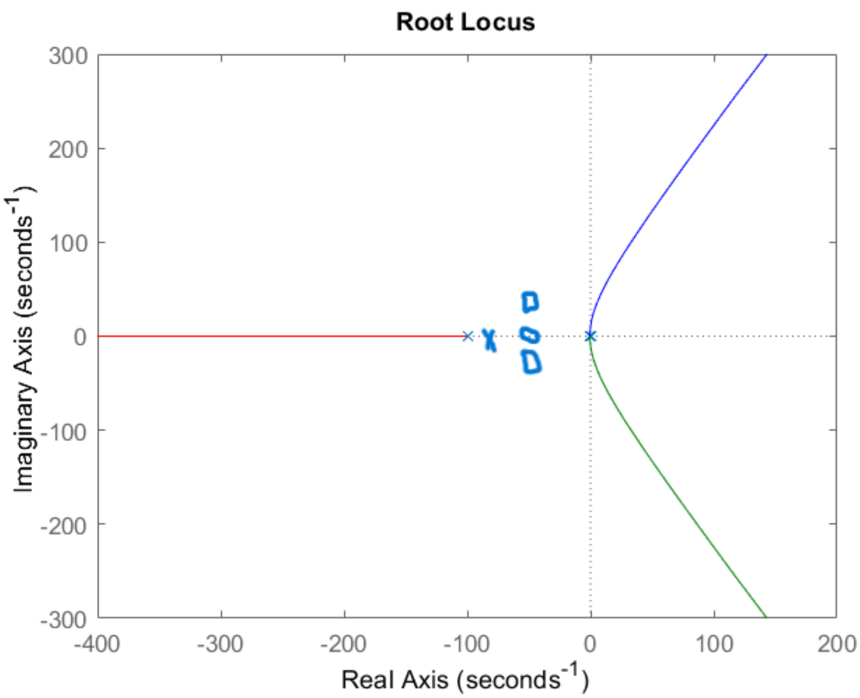
Since, from Figure 7-164, we find $|G(j0.1)| = 40$ dB, the gain value K can be determined to be unity. Also, the calculated phase curve, $\angle G(j\omega)$ versus ω, agrees with the given phase curve. Hence, the transfer function G(s) can be determined to be

$$G(s) = \frac{4(2s+1)}{s^2(s^2 + 0.4s + 4)}$$

سوال دهم

قطب های مطلوب به فرم زیر بدست می‌آیند.

$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(PO)^2}{\pi(\ln(PO))^2}} = 0.718$
$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} => \omega_n = 3.95$
$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
$s = -2.22 \pm j2.74$



همانطور که در شکل نشان داده شده است صفر کنترلر را برابر با بخش حقیقی قطب های مطلوب سیستم حلقه بسته انتخاب می‌کنیم حال شرط زاویه را می‌نویسیم.

تعریف :

ϕ_1 : زاویه بین قطب ۱۰۰-

ϕ_2 : زاویه بین قسمت مثبت محور افقی و ۱-

ϕ_3 : زاویه قطب روی ۰

θ_1 : زاویه صفر که نود درجه هست

شرط زاویه:

$-\phi_1 - \theta_1 + 90 - \phi_2 - \phi_3 = 180$
$-tan^{-1}(\frac{2.74}{97.78}) - \theta_1 + 90 - (180 - tan^{-1}(\frac{2.74}{1.22})) - (180 - tan^{-1}(\frac{2.74}{2.22})) = 180$
$\theta_1 = 24.34$
$G_c = K\frac{s+2.22}{s+8.3}$
$|GG_c(s = -2.22 + j2.74)| = 1$
$\frac{100K(2.74)}{\sqrt{2.22^2+2.74^2}\sqrt{1.22^2+2.74^2}\sqrt{97.78^2+2.74^2}\sqrt{6.08^2+2.74^2}} = 1$
$K = 25.181$
$G_c = 25.181\frac{s+2.22}{s+8.3}$

می توانید برای اهداف کنترلی یک prefilter دلخواه انتخاب کرده و پاسخ را در حضور آن بررسی کنید. این بخش به دلیل دلخواه بودن بر عهده دانشجو قرار داده شده است.

۳ بخش تکمیلی (۳۰ نمره)

سوال یازدهم

سوال دوازدهم

سوال سیزدهم

برای حل این سوال، ابتدا باید تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را با استفاده از تابع تبدیل کنترل‌کننده ($C(s)$) و تابع تبدیل سیستم ($G(s)$) بدست آوریم. سپس، با تنظیم مقادیر (k_p)(k_i)(k_d) به گونه‌ای که صفرهای مورد نظر را ایجاد کنند، تأثیر آن‌ها را بر روی سیستم بررسی می‌کنیم. تابع تبدیل کنترل‌کننده ($C(s)$) به صورت زیر است:

$$C(s) = kp + ski + kds$$

و تابع تبدیل سیستم ($G(s)$) به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته ($T(s)$) با فرض فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

برای داشتن صفرهای ($z = -3 \pm j$) در تابع تبدیل حلقه بسته، باید تابع تبدیل کنترل‌کننده ($C(s)$) را به گونه‌ای تنظیم کنیم که این صفرها را در مخرج تابع تبدیل حلقه بسته ایجاد کند. این کار با افزودن یک جمله به تابع تبدیل کنترل‌کننده که صفرهای مورد نظر را ایجاد می‌کند، امکان‌پذیر است.
به عنوان مثال، اگر یک جمله به صورت ($(s+3+j)(s+3-j)$) به مخرج تابع تبدیل کنترل‌کننده اضافه کنیم، صفرهای مورد نظر را خواهیم داشت. این جمله را می‌توان با تنظیم مقادیر (k_p)(k_i)(k_d) ایجاد کرد.
تغییرات در ضرایب کنترل‌کننده می‌تواند تأثیرات مختلفی بر روی پاسخ سیستم داشته باشد، از جمله تغییر در سرعت پاسخ، میزان ارتعاش، و زمان نشستن سیستم. برای مثال، افزایش (k_p) می‌تواند سرعت پاسخ سیستم را افزایش دهد، در حالی که افزایش (k_d)می‌تواند به کاهش ارتعاشات و بهبود پایداری کمک کند. همچنین، (k_i) برای رفع خطای دائمی در سیستم‌های کنترلی استفاده می‌شود.
برای تحلیل دقیق‌تر و بررسی تأثیرات این تغییرات، می‌توان از روش‌های تحلیلی مانند مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus)استفاده کرد. این روش به ما امکان می‌دهد که ببینیم با تغییر ضرایب کنترل‌کننده، قطب‌ها و صفرهای سیستم چگونه در صفحه s حرکت می‌کنند و چه تأثیری بر پایداری و پاسخ سیستم دارند.

سوال چهاردهم

در این سوال با توجه به رابطه زیر هرگاه گین C(s) نسبت به G(s) بسیار بالاتر باشد در حالت دائم تاثیر اغتشاش حذف می‌شود.

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}D(s)$$

برای سیستم های ناپایدار طراحی کنترلر PID مناسب تر است. می توان نشان داد کنترلر زیر شرایط سوال را برآورده می‌کند.

$$C(s) = 0.8742 + \frac{1.2239}{s}$$

سوال پانزدهم

دقیقاً مانند سوال قبل حل این سوال نیز نیازمند یک کنترلر PI می‌باشد. البته تنظیم حد فاز با پهنای باند داده شده برای این سیستم امکان پذیر نمی باشد.

$$C(s) = 1.414 + \frac{0.02475}{s}$$

کنترلر بالا تقریباً شرایط سوال را برآورده می‌کند.