400108547 — تمرین سوم بینایی 3D — پرهام رضایی

①

internal ویژگی‌ها داخلی دوربین است که وابسته به جهت و مختصات آن در فضا نیست. این ویژگی‌ها تصویر در image plane را به پیکسل‌ها نهایی ما مرتبط می‌کنند.

ویژگی‌ها تغییر: focal length ، S_x , S_y ← اسکیل افقی و عمودی تصویر

O_x , O_y ← مختصات x و y principal point و S_θ که پارامتر skewness و زاویه بین دو محور x,y تصویر را می‌دهد.

distortion (انحنای لنز) ممکن است در طول زمان تغییر کند.

external : ویژگی‌ها بیرونی که نقاط مختصات در دنیای واقعی را به فضا دوربین می‌آورد (camera pose) یعنی R و T میزان چرخش (ماتریس) و بردار جابجایی دوربین (مختصات دوربین در فضای دنیا) که با جابجایی دوربین تغییر می‌کند.

- با تغییر جایگاه T تغییر می‌کند ⟸ external عوض می‌شود ولی internal ثابته. R ثابته.
- با تغییر lens مختصات و جهت تغییر نمی‌کنه پس external ثابته ولی internal تغییر می‌کند چون ویژگی‌های داخلی (ناشی از optic / لنز) تغییر می‌کنه.

فاصله کانونی (f) تغییری کند ← internal تغییر کرده

$O_x, O_y, S_x, S_y, S_\theta$ بسته به نحوه ساخت تصویر ماهم و تغییر در این حالت نمی‌کند.

distortion در تصویر هم می‌تواند تغییر optic ایجاد کند.

②

الف) • برحسب notation سوال فرض کردم منظور از R, t ماتریس نسبت به اسلاید ها

نحوه $X_w \rightsquigarrow X_c$ است نه نحوه ساخت مرکز دوربین از o.

$$X_c = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_w \rightsquigarrow X_c = R X_w + T$$

homogenous — non homogenous

$$X_c = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1\times 25 + 0.5\times 40 + 0.3\times 50 \\ 0.6\times 25 + 0.1\times 40 + 0.2\times 50 \\ 0.4\times 25 + 0.5\times 40 + 0.8\times 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 47.5 \\ 49 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ب) جهت نداشت پاد ساعتگرد که معمولا فرض کردم.

ابتدا نقطه در دوربین اول را نسبت به ما آوریم (قبل چرخش دوم)

$$X_c = R X_w + T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 85 \\ 78 \\ 170 \end{bmatrix}$$

حال X_{c_1} را به X_{c_2} تبدیل می کنیم. C_2 فقط چرخیده است.

45° حول X و 45° حول Y دوربین چرخیده پس مختصات معادل در دوربین جدید وارون دوران می‌خورد.

$$(R_Y R_X)^{-1} = R_X^{-1} R_Y^{-1}$$

$$R_X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

$$R_Y^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & \sin 45 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 45 & 0 & \cos 45 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

$$R_X^{-1} R_Y^{-1} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 \\ 78 \\ 170 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2828 & 0.5 & 0.1414 \\ 0.5656 & 0.1 & -0.2828 \\ 0.8485 & 0.5 & 0.2828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 \\ 78 \\ 170 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87.083 \\ 7.8 \\ 159.208 \end{bmatrix}$$

* جواب دوم از سوال هم در پایان حل‌ها نوشته‌ام.

$$\lambda k \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$x = \lambda k \underbrace{R[I|T]}_{\text{ماتریس } 3\times4 \to M} X$$

homogenous

$\begin{pmatrix} -X_0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ است اینجا

برابر با ضریب

$$\Rightarrow x \sim MX$$

ثابت می کنیم سه نقطه هم خط، هم خط می مانند.

X_1, X_2, X_3 هم خط $\exists \alpha \in R \Rightarrow \alpha X_1 + (1-\alpha) X_3 = X_2$

پس خط ها تبدیل به خط می شوند.

$$\lambda_1 x_1 = M X_1$$
$$\lambda_2 x_2 = M X_2$$
$$\lambda_3 x_3 = M X_3$$

ضرب ماتریس خاصیت پخش دارد.

$$\Rightarrow \alpha M X_1 + (1-\alpha) M X_3 = M(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_3) = M X_2$$

$$\Rightarrow \alpha \lambda_1 x_1 + (1-\alpha)\lambda_3 x_3 = \lambda_2 x_2$$

پس $\lambda_i x_i$ ها هم خط اند. ←

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \dots \Rightarrow \alpha\lambda_1 x_1 + (1-\alpha)\lambda_3 X_3 = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 x_1 + (1-\alpha)\lambda_3 x_3 \\ \alpha\lambda_1 y_1 + (1-\alpha)\lambda_3 y_3 \\ \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 x_2 \\ \lambda_2 y_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3$$

$$\Rightarrow \alpha\lambda_1 x_1 + (1-\alpha)\lambda_3 x_3 = (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3)\, x_2$$

شرط نیاز ها

$\lambda_2 = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3 \neq 0 \Leftarrow \lambda_i \neq 0$ *

تقسیم

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\alpha\lambda_1}{\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3}}}_{\theta} x_1 + \underbrace{\frac{(1-\alpha)\lambda_3}{\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_3}}_{1-\theta} x_3 = x_2$$

$$\Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_3 = x_2 \qquad \Rightarrow \theta \vec{x}_1 + (1-\theta)\vec{x}_3 = \vec{x}_2 \to \text{هم خط اند.}$$
$$\theta y_1 + (1-\theta) y_3 = y_2$$

← خط ها خط می شوند.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ 4

ابتدا رو H SVD اعمال می‌دهیم.

$$H^T H = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{H^TH}(\lambda) = \det(H^TH - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right| =$$

$$(2-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda) - 0\right] + 0 - 2\left[0 - (-2)(4-\lambda)\right] =$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = (4-\lambda)(4 + \lambda^2 - 4\lambda - 4) =$$

$$(4-\lambda)\lambda(\lambda-4) = -\lambda(\lambda-4)^2$$

$\sigma_3 = 0$ $\quad \sigma_1 = \sqrt{4} = 2$, $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$ $\longleftarrow$

$\lambda = 4$

$$(H^TH - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} v = 0$$

(v_1, v_2, v_3)

$\Rightarrow -2v_1 - 2v_3 = 0$

$\Rightarrow v_1 + v_3 = 0$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$H^T H v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$4v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} 2v_1 - 2v_3 = 0 \\ -2v_1 + 2v_3 = 0 \end{array}\right\} v_1 = v_3$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که ضرب دو به دو هم صفر، پس ستون‌ها متعامدند، چون $\frac{1}{\text{نرم}}$ کردیم نرمال اند.
پس ارتونورمال اند.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} H v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} H v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ← حال $u_3 \perp u_1, u_2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i \times 1 + 0j + 0k$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

حال R و T را از روی به‌دست آورده و آخر سر جایگذاری می‌کنیم.

داریم $H = R[t]_x$ ←

$$Ht = R[t]_x t = R(\underbrace{t \times t}_{0}) = 0 \rightarrow$$ t is H's right null vector

rank 2

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ قرار دهیم

چون $[t]_x$ پادمتقارن است می‌توان نوشت به صورت

$$[t]_x = \underset{\text{عدد}}{\phi}\, \underset{\text{orthonormal}}{V}\, Z V^T$$

$$H = R[t]_\times = \phi R V Z V^T = \phi R \underbrace{V W}_{U} D V^T = \phi U D V^T$$

$Z = WD$

ضرب یه تعدادی ارتونورمال ← ارتونورماله

نرم SVD

$$[t_1]_\times = VZV^T \qquad [t_2]_\times = -VZV^T$$

$\phi = \pm 1 \Leftarrow$ نرمال

$R = UQV^T \Rightarrow R[t]_\times = UQV^T[t]_\times = \pm UQV^T V Z V^T = \pm UQZV^T$

دوران یا rotation

درست

$= \pm UDV^T \Rightarrow \pm D = QZ$

$\Rightarrow Q = W$ یا W^T

$$\Rightarrow R_1 = UW^TV^T \qquad R_2 = UWV^T$$

$H = \phi U D V^T$

$\phi = 2$

نرمال کنیم

حال با این تعیین مسئله داریم که

$$R_1 = UW^TV^T \text{ یا } UWV^T$$

$$t = 2VZV^T \text{ یا } -2VZV^T$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$[t_1]_x = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{array}{cc} z_0 & \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -Y_0 \\ X_0 \\ \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad t_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 [t_1]_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = H \quad *$$

$$R_1 [t_2]_x = -R_1 [t_1]_x = -H$$

$$R_2 [t_1]_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -H$$

$$R_2 [t_2]_x = -R_2 [t_1]_x = H$$

برداشت قبلی من اسلاید‌ها است اگه این مدل زیر منظور بود حل ذکر شده.

* ادامه 2:

الف)

یک تعریف دیگر نیز وجود دارد که R و T ساخت اندعینی که R و T چرخش دوربین اندر آستان آن.

$$X_w = RX_c + T \Rightarrow R^{-1}X_w - R^{-1}T = X_c$$

مختصات دوربین

$$x_c = R^{-1}(X_w - T) = R^{-1}\left(\begin{pmatrix}25\\40\\50\end{pmatrix} - \begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix}\right) =$$

$$R^{-1}\begin{pmatrix}15\\20\\20\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}17.5\\15\\32\end{bmatrix}$$

ب) با تعریف بالا

داریم که چرخش دوربین تغییر کرده و در نتیجه

$$R \rightsquigarrow R_y(45)R_x(45)R$$

پس داریم

$$X_c = R^{-1}R_x^{-1}R_y^{-1}(X_w - T)$$

$$= R^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\60\\70\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}143.807\\304.822\\-296.700\end{bmatrix}$$