مهرشاد رضایی

تمرین ۲

400108547

①

الف)

$\vec{d_1}' = \vec{B} - \vec{A} = (6,8,1) - (3,4,1) = (3,4,0) \quad \|d_1'\|^2 = 25 \Rightarrow \vec{d_1} = \frac{1}{5}(3,4,0)$

$\vec{d_2}' = \vec{D} - \vec{C} = (2,4,2) - (1,2,2) = (1,2,0) \quad \|d_2'\|^2 = 5 \Rightarrow \vec{d_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

$\vec{d_3}' = \vec{F} - \vec{E} = (4,2,3) - (2,1,3) = (2,1,0) \quad \|d_3'\|^2 = 5 \Rightarrow \vec{d_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$

ب)

تصویر:

$(6,8,1) \times (3,4,1) = 4i - 3j \qquad (4,-3,0)$

$(2,4,1) \times (1,2,1) = 2i - j \qquad (2,-1,0)$

$(4,2,1) \times (2,1,1) = i - 2j \qquad (1,-2,0)$

Vanishing point $= (0,0) \longleftarrow$ اند $(0,0,0)$ گذرا از

حل: (طبق راهنمایی کوئرا)

$d_1 \times d_2$

$\frac{1}{5}(3,4,0) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = (0,0,\frac{2}{5\sqrt{5}}) \rightarrow$ vanishing point

$$\left\| \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0i + 0j + \frac{2}{5\sqrt{5}}\hat{k}$$

همگن $(0,0,1) \longrightarrow (0,0)$ در صفحه تصویر دوربین

پ)

بجز دومورد گفته شده:

- از ونیشینگ پوینت ها میشود برای تصحیح distortion موجود در پرسپکتیو استفاده کرد. به کمک آنها میتوان برای مثال خطوط دیفورم شده را صاف کرد و دیستوشن را رفع نمود.
- همچنین در تسک ویژن AR کاربرد دارد. با استفاده از ونیشینگ پوینت ها میشود هم راستا شدن ابجکت های تصویر فضای واقعی و ابجکت های مجازی را ایجاد نمود.
- همچنین برای یافتن هوموگرافی بین دو تصویر که در پاناروما و ... کاربرد دارد استفاده می شوند که تبدیل آنها در دوصفحه چگونه است.

درک صحنه:

برای یافت صحنه واقعی سه بعدی از روی تصویر دوبعدی می توان از آنها استفاده کرد. هنگامی که میدانیم در دنیای واقعی تعداد راستای موازی وجود دارند برای مثال خطوط پنجره های ساختمان در عکس، و در تصویر ارائه شده به دلیل پروجکشن ایجاد شده این خطوط موازی در ونیشینگ پوینت یکدیگر را قطع کرده اند می توان از این نقطه ها و تبدیل آنها به خطوط موازی برای یافتن صحنه واقعی استفاده کرد.

تعیین وضعیت دوربین:

از ونیشینگ پوینت ها میشود برای تعیین ویژگی های دوربین استفاده کرد. به کمک آنها میتوان معادلاتی برای ماتریس وضعیت ایجاد نمود که به توان با تخمین خوبی آن را تعیین کرد.

فرض کنید که دو صفحه و حداقل یک جفت خط موازی در هر صفحه در واقعیت داشته باشیم. این به ما دو تا ونیشینگ پوینت میده. و فرض کنید برای مثال این دو صفحه یافته عمود نیز باشند. (حالت بعیدی نیست چون اجسام عین درخت و غیره با زمین همه عمودند و شامل خطوط موازی). در این صورت به اسانی(*) میشود دید اگر ماتریس ویژگی های داخلی اش K باشد داریم که a(KK^T)-1b برابر صفر است که a،b نقاط ونیش اند. حال K برای ما ۵ مجهول دارد. و عبارت نوشته شده به ما یک معادله می دهد.. حال اگر یک نقطه ونیش دیگر هم بیابیم داریم که سه معادله داریم. حال با یافتن تعداد بیشتر ونیش پوینت و یا فرض اینکه برای مثال دوربین skew صفر دارد یا پیکسلی مربعی باشد داریم که تعداد متغیر کافی برای یافت KK^T را داریم. حال روی این عبارت بدست آمده کافیست cholesky بزنیم تا دوربین ما کالیبره شود.

(*) اگر ماتریس 1-^(KK^T) را w بنامیم . زاویه واقعی بین دو خط از این فرمول بدست می آید.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{d_1 \cdot d_2}{\|d_1\|\|d_2\|} \\ &= \frac{v_1^T \omega v_2}{\sqrt{v_1^T \omega v_1}\sqrt{v_2^T \omega v_2}}\end{aligned}$$

۲

الف)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \times 5 + (-1) \times (-7) + 1 \times (-1) = 16$$

$$\det(A_1) = \left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right| = 5 + 9 + (-7) = 7$$

$$\det(A_2) = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \right| = 18 + -7 + 8 = 19$$

$$\det(A_3) = \left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = 14 + 8 + -1 = 21$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7}{16} \qquad y = \frac{19}{16} \qquad z = \frac{21}{16}$$

ب)

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & . \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & . \\ 0 & 7 & -1 & . \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل دوم :

$\det|A| = 10 + 7 + -1 = 16 \neq 0 \rightarrow$ full rank است.

$\Rightarrow$ فقط $x = 0$ $\qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب)

تبدیل خطی در ویژن کاربرد های زیادی دارد. برای مثال:
فیلترینگ: تسک های مختلفی مثل بلور کردن عکس، حذف نویز، تشخیص اج و ... را می توان توسط کانوالو کردن با کرنل‌های مخصوص خود انحام داد که کانولوشن یک تبدیل خطی می‌باشد.

تصویر کردن: بسیاری از اعمالی که روی تصویر می توان انحام داد مانند چرخش، اسکیل کردن یا شیرینگ که جزو بخش هایی است که در پری پراسسینگ کاربرد فراوانی دارد همگی عضوی از تبدیل های خطی می‌باشند.
همچنین در مدل های دوربین برای مثال pinhole در حالت عمومی مرکزیت دوربین در فضا داریم که تبدیلی که شی سه بعدی را به صفحه دوربین می‌برد یک تبدیل خطی می باشد.
همچنین روشهایی چون PCA که برای یافتن فیچرهای مهم‌تر تصویر به کار می روند که در تسک هایی مانند کامپرشن یا تشخیص چهره می تواند کاربرد داشته باشد از تبدیل های خطی می باشند.
با تبدیل های خطی می توان کارهای چون استرچ کانترست یا histogram equalization انحام داد که موجب بهبود کیفیت یا رنگ در تصویر بشویم.

سوال ۳

$$R = R_X R_Y R_Z = R_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$R_X \downarrow I$ ، $R_Z \downarrow I$ — چرخش ندارد

θ درجه چرخش ساعتگرد حول محور Y

$$90^\circ = \frac{90}{180}\pi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$X' = RX = R_Y X = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & \sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0-1 \\ 0+2+0 \\ -4+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

مختصات پس از چرخش $\longrightarrow$ $x' = (-1, 2, -4)^T$

④

الف)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^*A}(\lambda) = \det(A^*A - \lambda I) = \left|\begin{bmatrix} 6-\lambda & 5 & 5 \\ 5 & 6-\lambda & 5 \\ 5 & 5 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right| = -(\lambda-16)(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow$ eigen value $_{A^*A}$ s $= 1, 1, 16 \rightarrow \sigma_1 = 4 \quad \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = 1$

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} - I\right)\vec{x} = 0 \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow a + b + c = 0 \rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بدلیل تکرار ۲ eig val این ۲ بردار basis کافی است. فقط باید ارتونرمال کنیم. طبق گرام اشمیت

$$v_{new} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نرمال‌سازی

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 16I\right)\vec{x} = 0 \rightarrow \text{null space } T = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

مجموع ۲ ستون اول ستون سوم را می دهد (این ۲ ضریب هم نیست) $\Leftarrow$ rank $= 2$

$\Rightarrow \dim(\text{nullspace}) = n - \text{rank} = 3 - 2 = 1$

$T x = 0$ چون جمع هر سطر ماتریس ۰ است داریم $\vec{X} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ حال

پس eigen vector نرمال مدنظر را داشتیم:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = 4 \quad \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = 1$

حال داریم که

$$A = U\Sigma V^T \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2-1+0 \\ 1-2+0 \\ 1-1+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2+1-2 \\ 1+2-2 \\ 1+1-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad V = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A = U\Sigma V^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

دیدیم که در متقابل ضرب داخلی هر دو ستون ۰ و

اندازه هر ستون 1 است.

$\Rightarrow U, V$ orthonormal

را مخرج $\longrightarrow$ گویا

$$V = U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

میگه تقریبا فرقی نداره

ب

اس وی دی می توان برای کامپرس کردن تصویر استفاده کرد. هنگامی که نیاز داریم پترن های اساسی موجود در تصویر را داشته باشیم می توانیم از اس وی دی استفاده کنیم. با استفاده از این دیکامپوزیشن دیمنشن ماتریس را کاهش می دهیم و به موجب آن حجم داده ای که برای بازسازی عکس تا حد مطلوب نیاز داریم را میتوانیم کاهش دهیم.
همچنین با استفاده از این ریداکشن می توان با حذف کامپوننت های رنک پایین با نگه داشتن فیچرهای مهم نویزها را حذف کرد.
همچنین در تصاویر داخل ویدیو می توان از بدست آوردن اس وی دی عکس ها در طی فریم ها و مقایسه سینگولار ولیو ها بین بک گراند و مابقی عکس تمایز ایجاد کرد و حذف بک گراند کرد که به تشخیص اجزای اصلی تصویر کمک کننده است.

اس وی دی برای حل مسائل کمینه مربعات در معادلات همگن مستقیما کاربرد دارد. به دلیل فرم ماتریس گرام که در این بهینه سازی ایجاد می شود، اس وی دی به ما بردار و مقدار ویژه های مورد نیاز ما را تهیه میکند. این معادلات در ویژن برای کالیبره کردن دوربین کاربرد دارند. همچنین برای تبدیل نقاط تصویر از یک دوربین به دوربین در نقطه ای دیگر که تبدیلی پروجکتیو است، داریم که جفت نقاط مشترکی که داریم به ما معادلات همگنی می دهد که برای حل آنها همانطور که اشاره شد از svd استفاده می کنیم.