40108547 مبانی سیستم تمرین ۱ تشریحی رهام رضایی

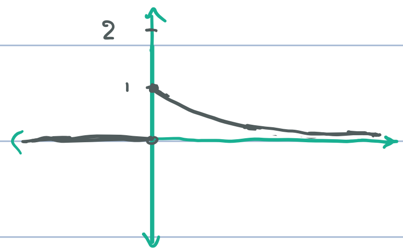
سوال ۱

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

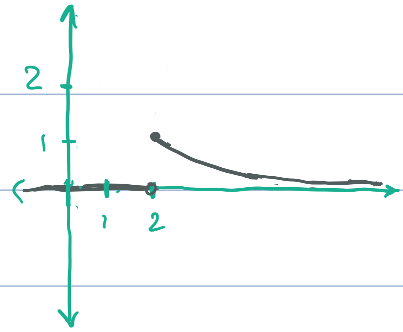
$$h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$$

-۱.۱.۱

$x(t)$:



$h(t)$



کانولوشن :

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-2)} u(\tau-2)\, e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$$

I) $t>2$:

$$= \int_{-\infty}^{2} \underbrace{e^{-(\tau-2)}(0)\, e^{-(t-\tau)}(1)}_{0}\, d\tau + \int_{2}^{t} e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)}\, d\tau + \int_{t}^{\infty} \underbrace{e^{-(\tau-2)} \cdot 1 \cdot e^{-(t-\tau)} \cdot 0}_{0}\, d\tau$$

$$= \int_{2}^{t} e^{-\tau} e^{2} e^{-t} e^{\tau}\, d\tau = \int_{2}^{t} e^{2-t}\, d\tau = (t-2)e^{2-t}$$

II) $t \leq 2$:
$$\int_{-\infty}^{2} \underbrace{e^{-(\tau-2)} \times 0 \times e^{-(t-\tau)} \times u(t-\tau)}_{0}\, d\tau + \int_{2}^{\infty} \underbrace{e^{-(\tau-2)} \times 1 \times e^{-(t-\tau)} \times 0}_{0}\, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow A(t) = h(t) * x(t) : \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ (t-2)e^{-(t-2)} & t>2 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{A(x) = (x-2)e^{-(x-2)}u(x-2)}$$

راه دوم:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+1)t}\, dt = \frac{-1}{j\omega+1}\left[e^{-(1+j\omega)t}\right]_{0}^{\infty} \underset{1>0}{=}$$

$$\frac{-1}{j\omega+1}\left[0 - e^{0}\right] = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$h(t) = x(t-2) \Rightarrow H(\omega) = e^{-2j\omega} X(\omega)$$

ضرب : $H(\omega)X(\omega) = e^{-2j\omega}X(\omega)^2 = \frac{e^{-2j\omega}}{(1+j\omega)^2}$

اگر $a(t) \rightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^2}$ جواب ما $a(t-2)$ خواهد بود.

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \left((1+j\omega)^{-1}\right)' = \frac{-j}{(1+j\omega)^2} \Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = -jA(\omega)$$

$$\Rightarrow jt\,x(t) = -j\,a(t) \Rightarrow a(t) = t\,x(t)$$

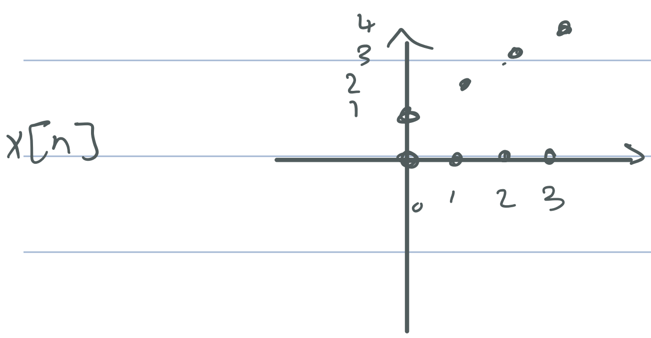
$$\Rightarrow \text{جواب} = a(t-2) = (t-2)x(t-2) = \underline{(t-2)e^{-(t-2)}u(t-2)}$$

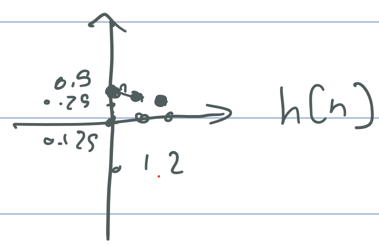
1.2.

$x[n] = [1,2,3,4]$

$h[n] = [0.5, 0.25, 0.125]$

1.2.1 :





$A[n] = x[n] * h[n]$

$$A[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

m	n
0	0,1,2
1	1,2,3
2	2,3,4
3	3,4,5

بازای هر : $x[m]$

درخارج این بازه تداخل ندارند ۰ می‌شود.

$A[0] = x[0]h[0] = 0.5$

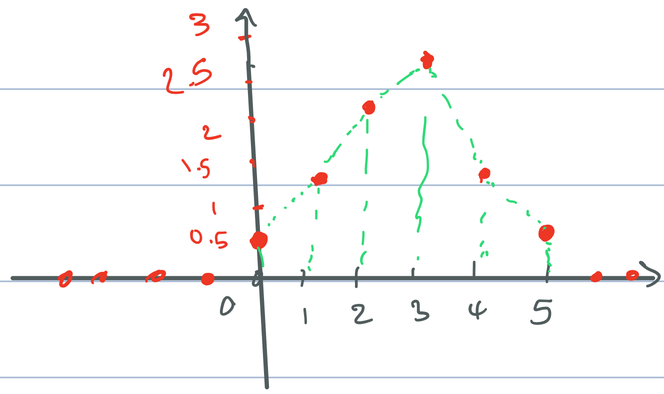
$A[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = 0.25 + 2\times 0.5 = 1.25$

$A[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0.125 + 0.5 + 1.5 = 2.125$

$A[3] = x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] = 0.5 + 0.75 + 1.5 = 2.75$

$A[4] = x[2]h[2] + x[3]h[1] = 0.375 + 1 = 1.375$

$A[5] = x[3]h[2] = 0.5$



1.3

$X(f) = \text{sinc}(f)$ $\qquad H(f) = \begin{cases} 1 & \text{if } |f| \le 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

: 1.3.1

$H(f) \rightsquigarrow h(t)$ $\qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$ تبدیل معکوس فوریه :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \underset{|f| \le 1}{=} 0 + \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-1}^{1} e^{j2\pi f t}\, df = \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi j t}\left(e^{2\pi j t} - e^{-2\pi j t}\right) = \frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{2\pi t j} - e^{-2\pi t j}}{2j}\right) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

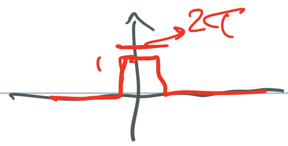
$\star \ \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ $\qquad \star \ \text{sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

$$\to = 2\, \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} = 2\,\text{sinc}(2t)$$

بنابراین سیگنال در حوزه زمان برابر با $2\,\mathrm{sinc}(2t)$ می‌شود.

برای درستی دو استدلال می‌آوریم.

استدلال ۱: به دلیل خاصیت دوگانی، طبق محاسبه بالا، و همچنین محاسبه $rect(\tau)$ داریم:



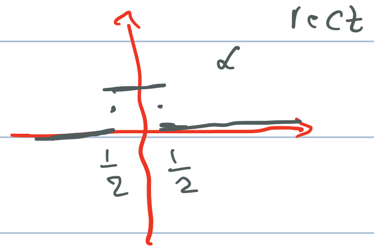
$$\xrightarrow{f} X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} rect(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$=0+\int_{-\tau}^{\tau} e^{-2\pi j f t}\, dt = \left[\frac{e^{-2\pi j f t}}{-2\pi j f}\right]_{-\tau}^{\tau} = \frac{1}{-2\pi j f}\left(e^{-2\pi j f \tau} - e^{2\pi j f \tau}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi f}\left(\frac{e^{2\pi j f \tau} - e^{-2\pi j f \tau}}{2j}\right) = \frac{1}{\pi f}\sin 2\pi f \tau = 2\tau\,\frac{\sin \pi(2f\tau)}{\pi(2f\tau)} =$$

$$2\tau\,\mathrm{sinc}(2\tau f)$$

طبق محاسبه بالا چون $\tau=\frac{1}{2}$



حال داریم که

پس به $\mathrm{sinc}(f) = 2\times\frac{1}{2}\sin 2\times\frac{1}{2} f$ تبدیل می‌شود. تبدیل فوریه یکتاست

بنابراین معکوس $\mathrm{sinc}(f)$ همان rect $\frac{1}{2}$ تا $-\frac{1}{2}$ می‌شود

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t|<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t|=\frac{1}{2} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

می‌توان این را همان ۱ گرفت ولی برای همخوانی نقاط ناپیوستگی اینگونه قرار دادم.

استدلال 2 :

از فرمول معکوس تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi f}{\pi f} e^{j2\pi f t} df \underset{\omega = 2\pi f}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$\hookrightarrow d\omega = 2\pi \, df$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2j\omega\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+\frac{1}{2})}}{j\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-\frac{1}{2})}}{j\omega} d\omega \right]}_{A}$$

$$A = \lim_{l \to \infty} \left(\int_{-l}^{l} \frac{e^{j\omega(t+\frac{1}{2})}}{j\omega} d\omega - \int_{-l}^{l} \frac{e^{j\omega(t-\frac{1}{2})}}{j\omega} d\omega \right)$$

$\epsilon = t - \frac{1}{2}$ $\qquad \omega(t-\frac{1}{2}) = \omega_2 \Rightarrow d\omega = \frac{d\omega_2}{\epsilon}$

$\qquad \omega(t+\frac{1}{2}) = \omega_1 \Rightarrow d\omega = \frac{d\omega_1}{\epsilon+1}$

$$\Rightarrow A = \lim_{l \to \infty} \left(\int_{-\frac{l}{\epsilon+1}}^{\frac{l}{\epsilon+1}} \frac{e^{j\omega_1}}{\frac{j\omega_1}{\epsilon+1}} \frac{d\omega_1}{\epsilon+1} - \int_{-\frac{l}{\epsilon}}^{\frac{l}{\epsilon}} \frac{e^{j\omega_2}}{\frac{j\omega_2}{\epsilon}} \frac{d\omega_2}{\epsilon} \right)$$

$$= \lim_{l \to \infty} \left(\int_{-\frac{l}{\epsilon+1}}^{\frac{l}{\epsilon+1}} \frac{e^{j\omega}}{j\omega} d\omega - \int_{-\frac{l}{\epsilon}}^{\frac{l}{\epsilon}} \frac{e^{j\omega}}{j\omega} d\omega \right)$$

درصورتی که ϵ و $\epsilon+1$ هم علامت باشند در $l \to \infty$ این دو انتگرال برابر شده، پس صفر A می‌شود.

ϵ و $\epsilon+1$ هم علامت باشند یعنی $\epsilon \notin (-1, 0)$ پس $t - \frac{1}{2} \notin (-1, 0)$

$\Rightarrow t \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

پس $\quad$ if $|t| > \frac{1}{2}$: $x(t) = 0$

در حالت $t=\frac{1}{2}$ و مشابهاً $t=-\frac{1}{2}$ داریم که

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega}}{j\omega}d\omega+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\omega}d\omega}_{\text{فرد}\ \to\ 0}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega}}{j\omega}d\omega=\pi$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\pi=\frac{1}{2}\Rightarrow x\left(\frac{1}{2}\right)=x\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

برای $|t|<\frac{1}{2}$ داریم که می‌توان به دلیل نزول با $\frac{1}{\omega}$ تابع کانتور را مقداری شیفت داد:

$$A=\int_{-\infty+\delta j}^{\infty+\delta j}\frac{e^{j\omega}}{j\omega}d\omega+\int_{\infty-\delta j}^{-\infty-\delta j}\frac{e^{j\omega}}{j\omega}d\omega=\oint\frac{e^{j\omega}}{j\omega}d\omega=2\pi$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}A=\frac{1}{2\pi}2\pi=1$$

$\to$ همان پاسخ قبل بدست آمد.

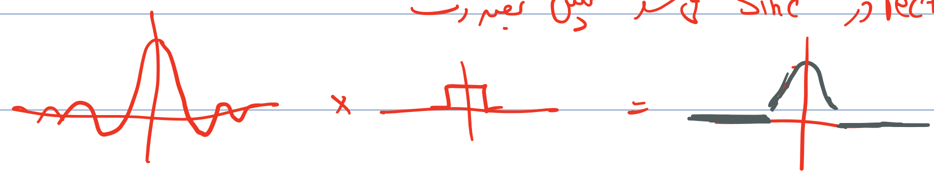
1.3.2

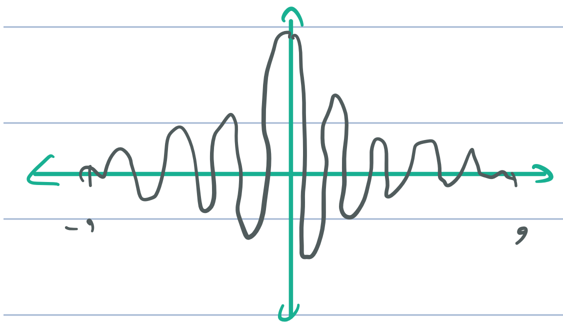
$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2x(t-\tau)\,\mathrm{sinc}(2\tau)\,d\tau$$

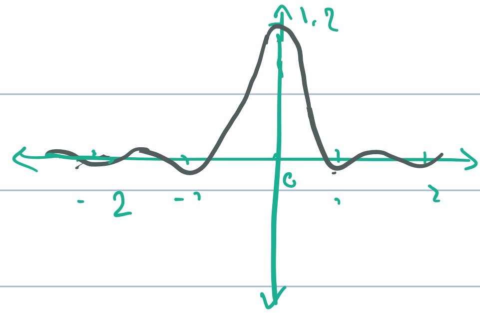
$$=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}\mathrm{sinc}(2\tau)2d\tau\underset{\substack{r=2\tau\\dr=2d\tau}}{=}\int_{2t-1}^{2t+1}\mathrm{sinc}(r)\,dr$$

$$\Rightarrow x(t)*h(t)=\int_{2t-1}^{2t+1}\mathrm{sinc}(r)dr=\frac{Si(\pi(1-2t))+Si(\pi(1+2y))}{\pi}$$

* در فضای فرکانس با داشتن ضرب rect در sinc و شد پس بصورت







سوال دوم

2.1 .

روش اول)

low-pass فیلتر کنیم . ابتدا با تبدیل فوریه عکس را به فضای فرکانس میبریم و سپس magnitude ها را

در یک سیگنال rect  دو بعدی ضرب کنیم تا بدین وسیله فرکانس های پایین را نگه داشته

و بالا ها را حذف می کنیم. در نهایت تصویر را با فوریه معکوس به فضا spatial برمیگردانیم. با این کار چون نویزها و اج ها

از فرکانس های بالا اند تصویر هموار می شود. البته اگر قصد داشته باشیم تصویر هموار شود اما اج ها خیلی بلوری

نشوند، می توانیم به طرق مختلف اج ها را مشخص کرده یا فرکانس های بالایی که اندازه زیادی هستند را نگه داریم

چرا که نویزها معمولا اندازه کم دارند. یعنی مثل یک high-pass که مقادیر اکستریم را از یک ترشهولد به خروجی

lowpass می افزاییم.

روش دوم:

از gaussian filter استفاده کنیم. با کانولوشن با کرنل گاوسی هر خانه نسبت به فاصله

از خانه اصلی روی مقدار نهایی آن تاثیر می گذارد. (میزان اثرگذاری به واریانس انتخابی

بستگی دارد.) مثلا 3x3

$$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

روش سوم:

این روش که برای حذف نویز بیشتر استفاده می‌شود، نسبت به سایر مثل 3×3 در کرنل 3×3 مقادیر خانه‌ها را سورت کرده و سپس مقدار میانی را به عنوان مقدار ثانویه خانه مرکزی معرفی کنید. در این حالت وجود نویزهای اسپارسی مثل s and p چون در دو سمت سورت قرار می‌گیرند، احتمال تأثیرگذاری کمتری در خانه مرکزی دارند برای همین روش موجب حذف نویزها می‌شود.

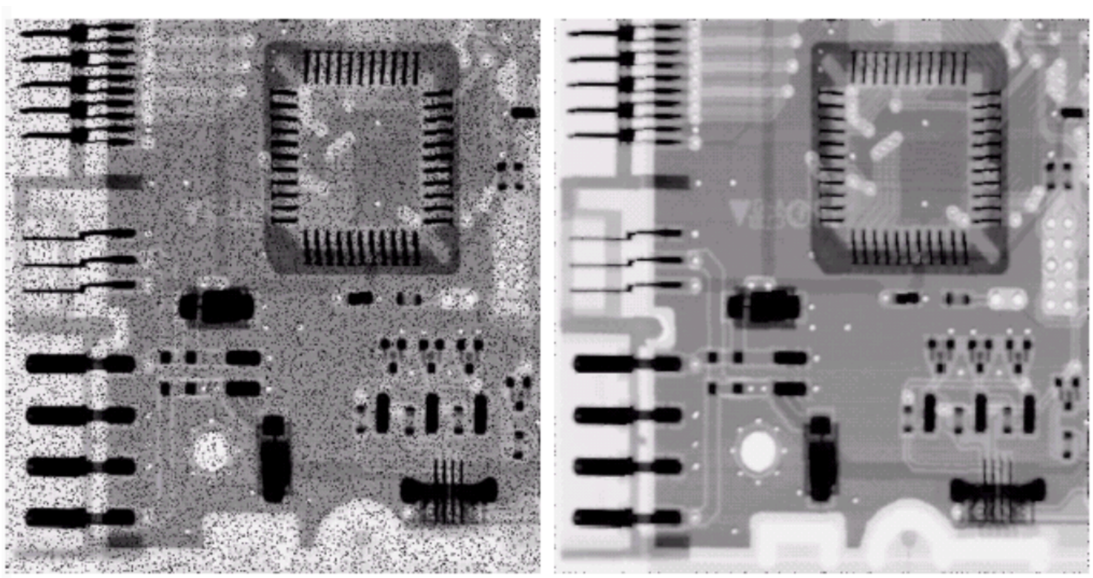
2.2

contra-harmonic mean filter

از این فیلتر برای حذف نویز نمک و فلفل استفاده می شود.
فرمول آن به شکل رو به رو می‌باشد. بدین وسیله نوعی میانگین روی خانه های مجاور بسته به سایر کرنلمان از تصویر می گیرد. Q مثبت موجب حذف نویز فلفل و منفی موجب حذف نویز نمک می شود بنابراین در عمل نمی‌تواند جفت نوع نویز را حذف کند.
همچنین در حالتی که Q=0 باشد داریم که معادل کرنل میانگین گیر عمل می‌کند.
در غیر این صورت این فیلتر غیرخطی است.

$$\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$

مثال حذف پپر نویز:



نکته ای که هست این است که درصورت انتخاب بد order فیلترمان که همون Q است میتواند تخریب در تصویر بجز حذف نویز ایجاد کند.

Median Filter

این جزو فیلترهای مبنی بر مرتب سازی است. ابتدا در کرنلمان که مثلا سایز n است، بجز خانه مرکزی که مقدار ثانویه آن را بدست میاوریم سورت انجام می دهیم. در n^2-1 عدد بدست آمده اکنون عضو میانی را انتخاب می کنیم. بدین طریق بدون اینکه هموارسازی زیادی که موجب بلوری شدن زیاد عکس شود انجام دهیم می توانیم نویز های نمک و فلفل را حذف کنیم چرا که با قرارگیری این نویزها در سر و ته سورت های انجام شده و انتخاب نشدن به عنوان میانه تاثیران از بین می‌رود.
این فیلتر را می توان چند بار اعمال کرد که بدین طریق نویزها کاهش بیشتری می یابند ولی تصویر نیز هربار هموارتر (بلوری) می شود.

Min/Max Filter

مشابه median صورت میکنیم ولی این بار کمترین یا بیشترین را انتخاب می‌کنیم. این روش تغییراتی که در تصویر ایجاد می کند بیشتر است و هر یک از فیلترها فقط برای یکی از نویزهای فلفل و نمک قابل استفاده است. ماکس برای فلفل و مین برای نمک.

Morphological Filter

کلیت این فیلتر بدین گونه است که اجزا را کوچک میکند تا بدین طریق جزئیات کوچک از بین برود و دوباره اسکیل بزرگ میکند. روی حالت باینری توضیح میدهم کلیش هم مشابه است.

در مشابه ماتریس کرنلی که دارد هر یک از مقادیر ۰ یا ۱ اند و به آنها structuring element میگوییم.

دو عملیات dilation و erosion داریم.

دایلیشن برای گسترش استفاده میشه و درواقع جمع تک تک اعضای عملوندها با یکدیگر را می سازد.

$$I \oplus H \equiv \{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \mid \text{for every } \boldsymbol{p} \in I, \boldsymbol{q} \in H\}$$

ایروژن برای عملوند اول A و دوم B بدین صورت است که تمام نقاط Z^2 را در نظر میگیرد که اگر با اعضای B جمع شوند زیرمجموعه اعضای A می شوند. هر یک از این دو عملیات خواص خود را دارند.

$$I \ominus H \equiv \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^2 \mid (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \in I, \text{ for every } \boldsymbol{q} \in H\}$$

حال ترکیب این عملیات ها به ما اعمال کاربردی‌ای می‌دهد. اگر به ترتیب یک دایلیشن و ایروژن یا برعکس با کرنل داشته باشیم به ترتیب عملیات opening و closing به دست می‌آید.

$$I \circ H = (I \ominus H) \oplus H$$

$$I \bullet H = (I \oplus H) \ominus H$$

برای تصویر گری بجای باینری مقداری تغییر داریم. کرنل ما مشابه ماتریس عادی است اما مقادیر ۰ آن نیز کاربردی اند.
برای دایلیشن داریم که ماکس مقداری که از جمع اعضای کرنل با مقادیر نظیر (بعد از روی هم قرار دادن مرکز کرنل با خانه عکس مدنظر) بدست می آید. همچنین ایروژن از مینیمم تفریق این مقادیر بدست می‌آید.

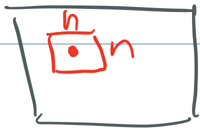
$$(I \oplus H)(u,v) = \max_{(i,j)\in H}\{I(u+i,v+j)+H(i,j)\} \quad (I \ominus H)(u,v) = \min_{(i,j)\in H}\{I(u+i,v+j)-H(i,j)\}$$

از اونجایی که این مقادیر میتونن از بازه خارج بشن ما تهش کلیپ میکنیم توی بازه 255-0 مون مثلا.
دو عملیات opening و closing مشابه قبل تعریف میشوند.
بدین ترتیب با انجام این دو عملیات به ترتیب ما کاهش استراکچر های ریز و نویزها به خصوص نویز نمک و فلفل را مشاهده می‌کنیم.

ادامه 2.2.

توضیح فیلتر غیرخطی از median

تصویر: A



در این روش در کرنل $n \times n$ مقدار خانه‌های تصویر (n^2-1 تا) را سورت می‌کنیم. سپس از میان n^2-1 خانه غیرمرکزی مقدار میانه را انتخاب کرده و به عنوان مقدار نمونه خانه مرکزی کرنل اختصاص می‌دهیم.

این روش به خوبی نویز salt and pepper را دینویز می‌کند چرا که این نویزها درصورت سورت آخر قرار می‌گیرند. ولی چون روش غیرخطی است قابل پیاده‌سازی با conv نیست که کند و مشکل می‌کند پیاده‌سازیش را.

این دو روش دیگر انتظار کارکرد خوبی لزوماً در نویز فلفل نمکی ازشون نداریم.

روش دیگر: averaging

اگر p احتمال در نویز sp کم باشد، می‌توانیم با روش‌های هموارساز تصویر کانوو با کرنل‌ها حملت

در این حالت $\frac{1}{n^2}(1)_{n \times n}$، تاثیر نویز را کاهش دهیم.

روش دیگر: Gaussian filter

با کرنلی که به نسبت فاصله از خانه مرکزی به صورت توزیع نرمال خانه‌ها را ضریب می‌دهد استفاده کنیم. بدین طریق با هموارسازی تصویر تاثیر هر یک از خانه‌های نویز در تعداد خانه کاسته شده و تصویر با نویز کمتری داریم. البته همچنان مقادیر نویز چون اکستریم‌اند 0 و 1 (یا 255) قدر داریم به تاثیر بر مقادیر ثانویه دارند. بنابراین انتظار هموارسازی ولی نه به خوبی median filter در دینویز کردن sp داریم.

مثال 5x5

$$\frac{1}{273}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

.2.3

نویز گاوسی، نویزی است که به نقاط سیگنال اضافه شده و از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

بدین معنی که:

سیگنال اولیه

$$A(x) = P(x) + n(x)$$

سیگنال با نویز

$$n(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(n(x)=z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma}}$$

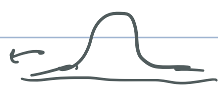
حال به طور معمول داریم که $\mu = 0$.

برای هموارسازی و رفع آن از low-pass filter ها که به منظور رفع نویز بهره برده می‌شوند می‌توان استفاده کرد.

به خصوص gaussian filtering یعنی با کرنل گوسی

که مثال آن به صورت (برای 3x3) $\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

این کرنل با توجه به فاصله خانه ها نزدیک سعی در هموارسازی عکس می‌کند.

در حالت 1D :  تابع گوسی با میانگین μ و واریانس σ^2.

حال داریم که در صورت جمع این مقادیر از آنجا که جمع ضرایب کانولوشن ۱ است:

$$A[i,j] \rightsquigarrow \sum w_{mk} A[i-m, j-k)$$

$$= \sum w_{mk} \left(P[i-m, j-k] + n[i-m, j-k] \right) \Rightarrow$$

اگر داشته باشیم $\mu = 0$ ← با بالا بردن اندازه داریم که

$$\sum w n \to E(n) = 0$$

و تغییری smooth با تأثیر اندک نویز داشته باشیم.

اما مشکلی که هست محو شدن edge ها همراه این smoothing است که با هدف denoise مشکل ایجاد می‌کند.

بدین منظور کرنل را بهبود می‌دهیم و بجای گاوسی عادی از bilateral استفاده می‌کنیم. بدین طریق

$$X_{new}[i,j] = \frac{\sum X[m,k]\, w(i,j,m,k)}{\sum w(i,j,m,k)}$$

که m,k بسته به اندازه کرنل بازه می‌گیرند.

حال

$$w(i,j,m,k) = \exp\left(-\frac{(i-m)^2 + (j-k)^2}{2\sigma_D^2} - \frac{\| X[i,j] - X[m,k] \|^2}{2\sigma_r^2} \right)$$

بنابراین علاوه بر فاصله، میزان اختلاف خود خانه‌ها نیز در ضرایب کرنل تأثیر دارند که بدین طریق با کمتر بلوری شدن edge ها فرایند denoise را انجام می‌دهیم

.3

.3.1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	-9	7	4	5	6	-2	0
0	5	8	5	-6	9	7	0
0	8	5	7	4	9	6	0
0	-6	-8	7	3	5	-6	0
0	5	2	4	5	6	4	0
0	-6	5	-8	0	0	1	0
0	5	5	5	6	-3	9	0
0	0	0	0	0	0	0	0

pad 0 کنیم که سایز عوض نشه.

$h(-t)$:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

قرینه h

خروجی :

48	-25	1	-16	-12	21
-13	-10	-7	47	-20	-15
-28	-5	-7	-3	-12	-14
29	40	-22	9	-8	39
-30	-2	-10	-7	-10	-15
39	-27	46	3	4	9
-21	-5	-17	-22	27	-38

.3.2

برای $x[i,j]$ داریم

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

$$x[i-1,j] + x[i+1,j] + x[i,j+1] + x[i-1,j] - 4x[i,j] =$$

$$\underbrace{(x[i+1,j] - x[i,j]) - (x[i,j] - x[i-1,j])}_{\Delta_{row}} +$$

$$\underbrace{(x[i,j+1] - x[i,j]) - (x[i,j] - x[i,j-1])}_{\Delta_{col}}$$

دارد تغییرات اختلاف ها در ستون و سطر را می‌سازد که معادلاً آن را مشتق دوم می‌گیرد.
بنابراین رفتاری مشابه لاپلاسین دارد پس برای یافتن edge ها می‌توان از آن بهره برد.

3.3 .

$$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماسک smooth کردن گاوسی است و با در نظر گرفتن خانه‌های مجاور نسبت به واریانس خود موجب می‌شود که تأثیر نویزی که در خانه مرکزی است کاهش یابد.

این انتخاب بنابر مشاهده بازه اعداد در ۱،۹ تا ۱ بود که گویا مقادیر میانی اند و مقدار نویز به افزوده شده است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} * \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه خروجی کانوالو شدن تصویر با کرنل ارائه شده:

-2	3	4	3	4	1
3	5	4	3	5	5
3	3	4	4	5	4
0	0	3	5	3	1
0	0	1	3	3	1
0	1	0	1	2	3
2	3	3	2	1	4

اگر از فیلتر گاوسی $\sigma = 1$ استفاده کنیم:

0	2	3	3	3	2
2	3	3	3	4	4
2	2	3	3	3	3
0	1	3	3	3	1
0	0	1	2	2	1
0	1	1	1	1	2
1	2	2	2	2	3

* حال اگر فرض کنیم که اعداد عادی بودند ولی مثلاً اعداد متنی‌مان نویزهای مشابه pepper بودند که اضافه شدن، می‌توانستیم از median filter استفاده کنیم. در این صورت نتیجه به شکل زیر می‌شد:

0	4	4	4	0	0
5	5	5	5	6	6
0	5	5	5	5	5
0	5	4	5	5	4
0	2	3	4	3	0
2	5	5	4	4	0
0	0	0	0	0	0

0 های دور بخاطر 0-padding اند.