①

الف) باید طبق اصل دوم کولموگروف: $\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|}dx = 1$ شود.

متقارن بودن

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|}dx = 2\int_0^\infty ce^{-x}dx = 2c\int_0^\infty e^{-x}dx = 2c\left(-e^{-x}\Big|_0^\infty\right) =$$

$$\lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 \Rightarrow 2c\left(0-(-e^0)\right) = 2c \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$$

ب)

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left(ce^{-|x|}\right)dx \qquad x<0 \Rightarrow -|x| = x$$

$$= c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx + c\int_{-\infty}^0 x^k e^{x}dx =$$

$$c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx + c\int_0^\infty (-x)^k e^{-x}dx =$$

$$c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx + c(-1)^k\int_0^\infty x^k e^{-x}dx$$

در نتیجه:

$$E(X^{2n+1}) = c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx + c(-1)^{2n+1}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx$$

$$= c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx - c\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = 0$$

$$E(X^{2n}) = c\int_0^\infty x^{2n}e^{-x}dx + c(-1)^{2n}\int_0^\infty x^{2n}e^{-x}dx = 2c\int_0^\infty x^{2n}e^{-x}dx$$

می‌دانستیم $c=\frac{1}{2} \Rightarrow 2c=1 \Rightarrow E(X^{2n}) = \int_0^\infty x^{2n}e^{-x}dx$

لم) $n\geq 0$ صحیح در نتیجه $\circledast \quad \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$

انتگرال ناسره نوع اول. داریم که $\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{t/2}} = 0$ پس

به ازای t های بزرگ کافی: $t^n < e^{\frac{t}{2}}$ پس $t^n e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}}$ و چون $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt$ همگراست پس

$\circledast$ هم همگراست. حال جزء به جزء می‌زنیم:

$$\int_0^A t^n e^{-t}dt = -t^n e^{-t}\Big|_0^A + \int_0^A nt^{n-1}e^{-t}dt = -\frac{A^n}{e^A} + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}dt$$

چون $\lim_{A\to\infty}\frac{A^n}{e^A}=0$ پس $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$

نوعی رابطه بازگشتی شد پس $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt$. با ادامه همین روند.

و چون طبق الف $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ پس $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$

$= n!$ Q.E.D

طبق لم داریم که $E(X^{2n}) = \int_0^\infty x^{2n}e^{-x}dx = (2n)!$

②

تعداد خرید بلیط

$$P(X = i) = 1 - \frac{\binom{10^6 - 10^2}{i}}{\binom{10^6}{i}}$$

۱ - احتمال
جنس مشترک

الف)

$$100 \text{ بلیط} \rightarrow \quad P(X = 100) = 1 - \frac{\binom{10^6 - 10^2}{100}}{\binom{10^6}{100}} \underset{\text{ولفرام}}{\simeq} 1 - 0{,}990 = 0{,}01$$

ب) a تا بخرد:

$$P(X = a) = 1 - \frac{\binom{10^6 - 10^2}{a}}{\binom{10^6}{a}} \geq 95\%$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{999900}{a}}{\binom{1000000}{a}} \leq \frac{5}{100} \xrightarrow[\text{در ولفرام آلفا}]{\text{جنس باینری سرچ}} L(a) = \frac{\binom{999900}{a}}{\binom{10^6}{a}}$$

$$L(29511) > 0$$
$$L(29512) < 0$$

و چون صعودی نیست احتمال برد با تعداد بلیط زده شده ⇐ حاصل 29512 بلیط باید بخرد.

ج) در واقع:

$$E(X) = \sum_{a=0}^{10^6} (a+1) \frac{\binom{10^6 - 10^2}{a}}{\binom{10^6}{a}} \binom{100}{1}$$

طبق گفته‌ها با اینکه صحیح نیست و احتمال جایزه بودن بلیط‌ها با برداشتن هر بلیط غیرجایزه فرق می‌کند $\frac{100}{10^6 - k}$

ولی سوال را با احتمال ثابت می‌گیریم که geometric distribution شود با $p = \frac{100}{10^6} = 10^{-4}$

پس احتمال جایزه نبردن هر بلیط $(1-p)$ است و مستقل اند.

الف)

احتمال هیچ یک جایزه نبردن $= (1-p)^{100} \Rightarrow$ احتمال win $= 1-(1-p)^{100}$

ب)

a بلیط بخرد $\quad 1-(1-p)^a \ge \frac{95}{100} \Rightarrow (1-p)^a \le \frac{5}{100}$

چون $1-p < 1$ است

$\Rightarrow a \ge \log_{1-p} 0.05 = \log_{1-10^{-4}} 0.05 = \log_{0.9999} 0.05 \overset{\text{ولفرام}}{=} 29955.8..$

a صحیح $\Rightarrow \boxed{a = 29956}$

ج)

$P(X=a) = (1-p)^{a-1} p$ ~ تا اول a-1 جایزه نباشد.

$$E(X) = \sum_{a=1}^{\infty} a(1-p)^{a-1} p = p\left(\sum_{a=0}^{\infty} (1-p)^a\right)' = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

پس امید ریاضی صورت به دست آمده $\frac{1}{p}$ یعنی $\frac{1}{10^{-4}} = 10^4$ می باشد.

دو مورد: ① مستقل p گرفتن احتمال ها صحیح نیست. ② سیگما تا بی نهایت نیست، و تا 10^6 است.

$$\sum_{a=1}^{10^6} a(1-p)^{a-1} p = p\left(\sum_{a=0}^{10^6} (1-p)^a\right)' =$$

$$\sum_{a=0}^{m} x^a = \frac{x^{m+1}-1}{x-1} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{(m+1)x^m(x-1) - (x^{m+1}-1)}{(x-1)^2}$$

ولفرام

$$= p \frac{-p(10^6+1)(1-p)^{10^6} - \left((1-p)^{10^6+1} - 1\right)}{p^2} \sim 9999.9 \simeq 10000$$

۳

$Y = 5 - X \qquad X \sim N(3, 9)$

$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \qquad Z = \dfrac{X-3}{3} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$

الف)

$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) =$

$1 - P\left(\dfrac{X-3}{3} \le \dfrac{2-3}{3}\right) = 1 - P\left(Z \le -\dfrac{1}{3}\right) = 1 - \phi\left(-\dfrac{1}{3}\right) =$

$* \ \phi(-x) = 1 - \phi(x)$ از تقارن نمودار $\qquad \phi\left(\dfrac{1}{3}\right)$

ب)

$P(-1 < Y < 3) = P(-1 < 5 - X < 3) = P(-6 < -X < -2)$

$= P(6 > X > 2) = P\left(\dfrac{6-3}{3} > \dfrac{X-3}{3} > \dfrac{2-3}{3}\right) =$

$P\left(1 > Z > -\dfrac{1}{3}\right) = F_Z(1) - F_Z\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \phi(1) - \phi\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

پیوسته‌ست دیگه.

ج)

$P(X>4 \mid Y<2) = P(X>4 \mid 5-X<2)$

$= P(X>4 \mid -X<-3) = P(X>4 \mid X>3) =$

$P\left(\dfrac{X-3}{3} > \dfrac{4-3}{3} \,\middle|\, \dfrac{X-3}{3} > \dfrac{3-3}{3}\right) = P\left(Z > \dfrac{1}{3} \,\middle|\, Z > 0\right)$

$= \dfrac{P\left(Z > \frac{1}{3}, Z > 0\right)}{P(Z>0)} = \dfrac{P\left(Z > \frac{1}{3}\right)}{P(Z>0)} = \dfrac{1 - P\left(Z \le \frac{1}{3}\right)}{1 - P(Z \le 0)} =$

$\dfrac{1 - \phi\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \phi(0)} = 2\left(1 - \phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2\phi\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$* \ \phi(-0) = 1 - \phi(0) \Rightarrow \phi(0) = \dfrac{1}{2}$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ۴

الف) واحد زمانی دو برابر دارد (ترتیب در توزیع نمی کند صرفا $2 \times \lambda$ می شود)

$2\lambda = 4$

تعداد زلزله در 2 هفته اتفاق بیفتد

$$P(Y=t) = \frac{(2\lambda)^t e^{-2\lambda}}{t!} = \frac{4^t}{t!} e^{-4}$$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2))$$

$$P(Y=0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = e^{-4} \qquad P(Y=1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4e^{-4}$$

$$P(Y=2) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} = 8e^{-4}$$

$$\Rightarrow P(Y \geq 3) = 1 - (e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4}) = 1 - 13e^{-4}$$

ب) فاصله زمانی پواسون از توزیع exponential پیروی می کند.

مسأله: هر بازه زمانی را n قسمت می کنیم. طبق فرض های پواسون از آنجا که هر بخش مستقل است داریم که (و حداکثر 1 رخداد) اثبات پواسون

احتمال رخداد در هر یک $\frac{\lambda}{n}$ است. اگر تا زمان t را بخواهیم $E(X) = t\lambda$ پس هر قسمت $t \geq 0$

$\frac{t\lambda}{n} = p$ احتمال دارد. حال برای اینکه تا زمان t رخ ندهد یعنی هر قسمت در $[0, t]$ رخ ندهد،

$$P(X>t) \quad (1-p)^n = \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{\text{میل } n \to \infty} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^n = e^{-t\lambda}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = 1 - P(X>t) = 1 - e^{-t\lambda}$$

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial (1 - e^{-x\lambda})}{\partial x} = -\lambda(-e^{-x\lambda}) = \lambda e^{-x\lambda} \rightarrow \exp(\lambda)$$

پس توزیع احتمال می شود $\exp(2)$

(5)

$$P(Y > a) = P(\min(X, \tfrac{\lambda}{2}) > a) =$$

$$P((X > a) \cap (\tfrac{\lambda}{2} > a))$$

$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$

$\exp(\lambda)$

if $\frac{\lambda}{2} > a$: $= P(X > a) = 1 - F_X(a) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x} dx\right)$

$$= 1 - \left(-e^{-\lambda x}\Big|_0^a\right) = 1 + (e^{-\lambda a} - 1) = e^{-\lambda a}$$

if $\frac{\lambda}{2} \leq a$: $P(X > a, \underbrace{\tfrac{\lambda}{2} > a}_{0}) = 0$

$$\Rightarrow \text{CDF}(Y): F_Y(a) = \begin{cases} \text{if } a < \frac{\lambda}{2}: & 1 - P(Y > a) = 1 - e^{-\lambda a} \\ \text{if } a \geq \frac{\lambda}{2}: & 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

6

X_i خروج از مرحله i ام است.

برای حل مسئله باید از همه خارج شویم (قابلیت برگشت هم نداریم).

حل مسئله

خطی بودن امید ریاضی

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

حال برای یک i ، $E(X_i)$ را حساب می‌کنیم.

X_i از توزیع geometric با $p = \frac{1}{2^i}$ پیروی می‌کند.

احتمال خروج پس از a مسیر برابر $(1-p)^{a-1}p$ می‌باشد.

پس

$$E(X_i) = \sum_{a=1}^{\infty} a(1-p)^{a-1} p = p\left(\sum_{a=1}^{\infty} a(1-p)^{a-1}\right)$$

$$= p\left(\sum_{a=1}^{\infty} (1-p)^a\right)' \overset{\text{به } 1-p}{=} p\left(\sum_{a=0}^{\infty} (1-p)^a\right)' \quad (o)$$

(چرا که در $a=0$ ، $(1-p)^0 = 1$ و ضریب ثابت در مشتق‌گیری تأثیری ندارد (0 می‌شود).)

$$(*) \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left((1-x)^{-1}\right)' = -(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(o),(*) \longrightarrow E(X_i) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \times \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\Leftarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{p} = 2^i$$

پس در مسئله

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2^i = -1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 1 = 2^{n+1} - 2$$