پرهام رضایی 400108547

1

T توانا بودن

Fi شکست در مرحله i

طبق فرض:

$P(T) = 0,4$

$P(Fi|T) = 0,3$

$P(Fi|T^c) = 0,8$

* با داشتن T یا T^c ، F_i ها مستقل اند.

الف) به دنبال $P(F3|F1,F_2)$ هستیم.

$$P(F_3|F_1,F_2) = P(F_3|T,F_1,F_2)\,P(T|F_1,F_2) + P(F_3|T^c,F_1,F_2)\,P(T^c|F_1,F_2)$$

حال هریک را حساب می‌کنیم.

با داشتن T ، F_i ها مستقل اند

$$P(F_3|T,F_1,F_2) = 0,3$$

$$* \; P(F_1 \cap F_2) = P(F_1 \cap F_2|T)\,P(T) + P(F_1 \cap F_2|T^c)\,P(T^c)$$

$$= (0,3)^2(0,4) + (0,8)^2(0,6) = 0,42$$

$$P(T|F_1 \cap F_2) = \frac{P(T \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)} = \frac{0,4 \times (0,3)^2}{0,42} = \frac{36 \times 10^{-3}}{42 \times 10^{-2}} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

$$P(F_3|T^c \cap F_1 \cap F_2) = 0,8$$

$$P(T^c|F_1 \cap F_2) = \frac{P(T^c \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)} = \frac{0,6 \times (0,8)^2}{0,42} = \frac{384 \times 10^{-3}}{42 \times 10^{-2}} = \frac{32}{35}$$

$$\Rightarrow P(F_3|F_1,F_2) = 0,3 \times \frac{3}{35} + 0,8 \times \frac{32}{35} = \frac{۲۶,۵}{۳۵} = \frac{۵۳}{۷۰}$$

$P(F_3 | F_1, F_2^c)$ ب)

$$P(F_3 | F_2^c, F_1) = P(F_3 | T, F_2^c, F_1)\, P(T | F_2^c, F_1) + P(F_3 | T^c, F_2^c, F_1)\, P(T^c | F_2^c, F_1)$$

$$* \; P(F_2^c \cap F_1) = P(F_2^c \cap F_1 | T)\, P(T) + P(F_2^c \cap F_1 | T^c)\, P(T^c)$$
$$= (0{,}7)(0{,}3)(0{,}4) + (0{,}2)(0{,}8)(0{,}6) = 0{,}18$$

$$P(F_3 | T, F_2^c, F_1) = 0{,}3$$

$$P(T | F_2^c, F_1) = \frac{P(T \cap F_2^c \cap F_1)}{P(F_2^c \cap F_1)} = \frac{0{,}4 \times (0{,}7)(0{,}3)}{0{,}18} = \frac{\cancel{3} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times 7}{\underset{3}{\cancel{18}}0} = \frac{7}{15}$$

$$P(F_3 | T^c, F_2^c, F_1) = 0{,}8$$

$$P(T^c | F_2^c \cap F_1) = \frac{P(T^c \cap F_2^c \cap F_1)}{P(F_2^c \cap F_1)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}2 \times 0{,}8}{0{,}18} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow P(F_3 | F_2^c, F_1) = 0{,}3 \times \frac{7}{15} + 0{,}8 \times \frac{8}{15} = \frac{8{,}5}{15} = \frac{17}{30}$$

$P(F_3 \mid F_1^c, F_2^c)$ (d

$$P(F_3 \mid F_1^c \cap F_2^c) = P(F_3 \mid T, F_1^c, F_2^c)\, P(T \mid F_1^c, F_2^c) + P(F_3 \mid T^c, F_1^c, F_2^c)\, P(T^c \mid F_1^c, F_2^c)$$

$$* \; P(F_1^c \cap F_2^c) = P(F_1^c, F_2^c \mid T)\, P(T) + P(F_1^c, F_2^c \mid T^c)\, P(T^c)$$

$$= (0{,}7)^2 (0{,}4) + (0{,}2)^2 (0{,}6) = 0{,}22$$

$$P(F_3 \mid T, F_1^c, F_2^c) = 0{,}3$$

$0{,}22$

$$P(T \mid F_1^c, F_2^c) = \frac{P(T \cap F_1^c \cap F_2^c)}{P(F_1^c \cap F_2^c)} = \frac{(0{,}4)(0{,}7)^2}{0{,}22} = \frac{196}{220}$$

$$P(F_3 \mid T^c, F_1^c, F_2^c) = 0{,}8$$

$$P(T^c \mid F_1^c, F_2^c) = \frac{P(T^c \cap F_1^c \cap F_2^c)}{P(F_1^c \cap F_2^c)} = \frac{0{,}6 \times (0{,}2)^2}{0{,}22} = \frac{24}{220}$$

$$\Rightarrow P(F_3 \mid F_1^c \cap F_2^c) = 0{,}3 \times \frac{196}{220} + 0{,}8 \times \frac{24}{220} = \frac{78}{220}$$

3

r نقطه ای که سرجای خود اند را قرار داده، پس بقیه هیچ کدام سرجای خود نیست.

تعداد جایگشت های n عضوی که هیچ کس سرجای خود نباشد را $\phi(n)$ می نامیم.

طبق قضیه پرش ; $\phi(n) = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

پس

$f(n,r) = C(n,r)\,\phi(n-r)$

چرا که r عضو انتخاب که سرجای خود باشد $\binom{n}{r}$ و بقیه هیچ یک جای خود نیست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{r}(n-r)!\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!\,(n-r)!}{r!\,(n-r)!}\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r!}\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{r!}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$n\to\infty \Rightarrow n-r\to\infty$ ثابت r

$$= \frac{1}{r!}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{r!}e^{-1} = \frac{1}{er!}$$

$$* \; e^{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}$$

اثبات قضیه پریش:

فرض می‌کنیم اعضا $1,\dots,n$ برابر جایگاه‌ها $1\dots n$. Π_i تمام جایگشت هایی است که i در جای خود قرار گرفته است.

دنبال $|(\Pi_1\cup\dots\cup\Pi_n)'|$ می‌گردیم.

طبق شمول:

$$X=|(\Pi_1\cup\dots\cup\Pi_n)'|=n!-\left(\sum_{i=1}^{n}|\Pi_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|\Pi_i\cap\Pi_j|+\dots+(-1)^{n-1}|\Pi_1\cap\dots\cap\Pi_n|\right)$$

$*1$ $\Pi_{j_1}\cap\dots\cap\Pi_{j_k}=$ تمام جایگشت هایی که $j_1,\dots,j_k$ سرجای خود اند. $\Rightarrow$ جابجایی فقط n تا [illegible] که $(n-k)!$ جایگشت می‌خورند.

$$\Rightarrow |\Pi_{j_1}\cap\dots\cap\Pi_{j_k}|=(n-k)!$$

و نحوه انتخاب آنها

$$*2\quad \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}|\Pi_{i_1}\cap\dots\cap\Pi_{i_k}| \overset{*1\text{ طبق}}{=} (n-k)!\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow X=n!-\left((n-1)!\binom{n}{1}-\binom{n}{2}(n-2)!+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!\right)$$

$$=n!-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)!=n!+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)!$$

$$=n!+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)!=n!+n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}$$

$$*\ \frac{(-1)^0}{0!}=1$$

③ الف) برای اینکه پس از N مرحله در یک نقطه باشند پس تعداد راست رفتن برابر (همچنین چپ که خودکار بدلیل N قدم بردن نتیجه می‌شود) می‌شود.

برای هر متحرک: k راست $\Leftarrow$ $\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^N$ روی # راست می‌شماریم.

مشخص کردن راست‌ها k تا و چپ‌ها $N-k$ تا که راست‌ها

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N}\left(\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^{2N}}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}^2 = \frac{1}{2^{2N}}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\binom{N}{N-k} = \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}$$

$\binom{2N}{N} =$ دو اتاق N نفره که جمعاً N تا شدن را جدا کنیم.

ب) حرکات متحرک دوم را معکوس می‌کنیم و به حرکات متحرک اول می‌افزاییم

پس گویا متحرک اول طی $2N$ حرکت از $(0,0)$ به $(0,0)$ رفته است.

پس تعداد حرکات راست با چپ همچنین بالا با پایین برابره که

(برگشت‌پذیری با معکوس‌سازی حرکات $N+1$ تا $2N$ و نسبت‌دادن آنها به متحرک ۲)

پس a حرکت راست و چپ که بعداً $2a$ پس $2(N-a)$ حرکت بالا پایین که

می‌شود / $N-a$ بالا و $N-a$ پایین رفته است.

به ازای $0 \le a \le N$

$$\sum_{0\le a\le N}\binom{2N}{2a}\binom{2a}{a}\frac{1}{4^a}\cdot\frac{1}{4^a}\binom{2N-2a}{2N-2a}\binom{2N-2a}{N-a}\frac{1}{4^{N-a}}\frac{1}{4^{N-a}}$$

چپ و راست‌ها — راست‌ها — احتمال راست‌ها — احتمال چپ‌ها — انتخاب بالا و پایین‌ها — انتخاب بالاها — احتمال پایین — بالا

$$\sum_{0\le a\le N}\frac{1}{4^{2a}}\frac{1}{4^{2N-2a}}\binom{2N}{2a}\binom{2a}{a}\binom{2N-2a}{N-a}$$

$$= \frac{1}{4^{2N}}\sum_{0\le a\le N}\frac{(2N)!}{\cancel{(2a)!}\,\cancel{(2N-2a)!}}\frac{\cancel{(2a)!}}{a!\,a!}\frac{\cancel{(2N-2a)!}}{(N-a)!^2}$$

$$= \frac{(2N)!}{4^{2N}}\sum_{0\le a\le N}\frac{1}{a!\,a!\,(N-a)!^2} = \frac{(2N)!}{N!^2\,4^{2N}}\sum_{0\le a\le N}\binom{N}{a}\binom{N}{N-a}$$

$\frac{N!}{a!\,(N-a)!}$

شناختن که دو اتاق N شده، انتخاب N نفر از کل دو اتاق $= \binom{2N}{N}$

$4^2 = 2^4$

$$= \frac{(2N)!}{N!^2\,2^{4N}}\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{N!\,N!}\frac{1}{2^{4N}}\binom{2N}{N} = \frac{\binom{2N}{N}^2}{2^{4N}}$$

۴- مسئله برای سارا و رومین متقارن است پس برای گرگوش حل کرده و متمم می‌گیریم.

دنباله خروج $\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underset{\text{آخرین حرف گرگوش ها}}{\underline{O}}\ \_\ \_\ \_$ (مابقی سارا و رومین)

تا آخرین حرف گرگوش a حرف از سارا و b حرف از رومین استفاده می‌شود

که $0 \le a \le 3$ ، $0 \le b \le 3$. حرف آخر گرگوش ۵ حالت دارد (۲ جفت تکراری)

پس ۵ طریق انتخاب حرف آخر گرگوش. و برای ۴ حرف دیگر و $a+b$ حرف اسامی دیگر

$$\frac{5\,(a+b+4)!}{2!\,2!}$$ تعداد جایگشت ها را می‌شماریم.

دو تا و ها به دو تا گ تکراری

همچنین برای انتخاب خود a و b ، $\binom{4}{a}, \binom{4}{b}$ حالت داریم.

برای باقی حروف دنباله خارج شده که $\underbrace{8-a-b}_{\text{استفاده نشده سارا و رومین ها}}$ حرف مانده.

که جایگشت ها آن‌ها $(8-a-b)!$ می‌شود.

$$\text{تعداد} \Rightarrow \frac{5\binom{4}{a}\binom{4}{b}(a+b+4)!\,(8-a-b)!}{2!\,2!}$$

همچنین در کل $\frac{\overset{\text{۵+۴+۴ حرف}}{13!}}{2!\,2!}$ جایگشت وجود دارد پس احتمال اینکه اسم گرگوش ابتدا خارج شود

برابر است با

$$P(\underset{\text{اول بیاد}}{\text{گرگوش}}) = \frac{\sum_{0\le a,b\le 3} \frac{5\binom{4}{a}\binom{4}{b}(a+b+4)!\,(8-a-b)!}{2!\,2!}}{\frac{13!}{2!\,2!}}$$

$$= \frac{5}{13!}\sum_{0\le a,b\le 3}\binom{4}{a}\binom{4}{b}(a+b+4)!\,(8-a-b)! = \frac{5}{13!}\sum_{0\le a,b\le 3}\frac{\binom{4}{a}\binom{4}{b}\,12!}{\binom{12}{a+b+4}}$$

$$= \frac{5}{13}\sum_{0\le a,b\le 3}\frac{\binom{4}{a}\binom{4}{b}}{\binom{12}{a+b+4}}$$

$$a=0:\ \binom{4}{0}\left(\frac{\binom{4}{0}}{\binom{12}{4}}+\frac{\binom{4}{1}}{\binom{12}{5}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{6}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{7}}\right) = \frac{1}{\text{۴۹۵}}+\frac{\text{۴}}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۶}}{\text{۹۲۴}}+\frac{\text{۴}}{\text{۷۹۲}}$$

$$a=1:\ \binom{4}{1}\left(\frac{\binom{4}{0}}{\binom{12}{5}}+\frac{\binom{4}{1}}{\binom{12}{6}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{7}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{8}}\right) = \text{۴}\left(\frac{1}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۴}}{\text{۹۲۴}}+\frac{\text{۶}}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۴}}{\text{۴۹۵}}\right)$$

$$a=2:\ \binom{4}{2}\left(\frac{\binom{4}{0}}{\binom{12}{6}}+\frac{\binom{4}{1}}{\binom{12}{7}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{8}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{9}}\right) = \text{۶}\left(\frac{1}{\text{۹۲۴}}+\frac{\text{۴}}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۶}}{\text{۴۹۵}}+\frac{\text{۴}}{\text{۲۲۰}}\right)$$

$$a=3:\ \binom{4}{3}\left(\frac{\binom{4}{0}}{\binom{12}{7}}+\frac{\binom{4}{1}}{\binom{12}{8}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{9}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{10}}\right) = \text{۴}\left(\frac{1}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۴}}{\text{۴۹۵}}+\frac{\text{۶}}{\text{۲۲۰}}+\frac{\text{۴}}{\text{۶۶}}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{5}{13}\left(\frac{\text{۶۹}}{\text{۴۹۵}}+\frac{\text{۶۴}}{\text{۷۹۲}}+\frac{\text{۲۸}}{\text{۹۲۴}}+\frac{\text{۴۸}}{\text{۲۲۰}}+\frac{\text{۱۶}}{\text{۶۶}}\right) = \frac{32}{117}$$

$$\Rightarrow P(\text{سارا}) = \frac{1-\frac{32}{117}}{2} = \frac{85}{234} \rightarrow$$ احتمال برنده شدن سارا

(۵)

الف) فرض کنید افزایشی است پس $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$

$$E = \bigcup_{i\ge1} E_i$$

تعریف می‌کنیم $C_1 = E_1$

$$C_n = E_n / E_{n-1} \leftarrow E_n \cap E_{n-1}^c$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

حال دقت کنید که

و پس $\Uparrow$ $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$

چراکه فضای نمونه هریک از E_iها که قبلی‌ها حذفش است در C_i آمده است
پس اجتماع پیشامدها تغییری نمی‌کند.

همچنین $C_i \cap C_j = \emptyset$ $i \neq j$ یعنی C_iها ناسازگارند. چراکه فرض کنید wlog $i>j$

$$E_{i-1} = \bigcup_{k=1}^{i-1} C_i \overset{j<i}{\Rightarrow} C_j \subseteq E_{i-1} \quad (1)$$

$$C_i = E_i / E_{i-1} \Rightarrow C_i \cap E_{i-1} = \emptyset \quad (2)$$

$\Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$

حال داریم که

$$P(\lim_{n\to\infty} E_n) \overset{\text{برابر}}{=} P(\bigcup_{n\ge1} E_n) = P(\bigcup_{n\ge1} C_n) = $$

$$\overset{(\circ)}{=} \sum_{i\ge1} P(C_i) \le 1$$

(۰) چراکه C_iها ناسازگارند
پس طبق اصل سوم کولموگروف (۰) برقرار است.
(برای تعداد شمارا مثل C_iها هم درست)

طبق اصل دوم کولموگروف

$$\Rightarrow 0 \le P(E) - P(E_n) = P(E/E_n) = P(\bigcup_{k>n} C_k) = \sum_{k>n} P(C_k) \quad (B)$$

چراکه $E_n \subseteq E$

دقت کنید که $\sum_{i\ge1} P(C_i) \le 1$ و مثبت اند پس $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\ge1}^{n} P(C_i) = r$

پس سیگما جمع $P(C_1)$، $P(C_1)+P(C_2)$، $\vdots$ افزایشی اند و کران‌بالا دارند ← میل می‌کنند به r

پس

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)$$

$$\sum_{k>n} P(C_k) + S_n = \sum_{k\ge1}^{\infty} P(C_i)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k>n} P(C_k) + S_n\right) = r$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} P(C_k) = r - \lim_{n\to\infty} S_n \overset{*}{=} r - r = 0 \quad (1)$$

$*$ داریم که $r = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} P(C_n)$

$$(1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} P(C_k) = 0 \quad ++$$

ضمناً (B)

$$0 \le P(E) - P(E_n) \le \sum_{k\ge n} P(C_k)$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} 0 \le P(E) - \lim_{n\to\infty} P(E_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k\ge n} P(C_k) \overset{++}{=} 0$$

با ثابت‌ها

$$\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} E_n) = P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

الف) فرض کنید کاهشی است پس $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$

$$E = \bigcup_{i\geq 1}^{\infty} E_i$$

تعریف می‌کنیم $C_1 = E_1$

$$C_n = E_n / E_{n+1} \leftarrow E_n \cap E_{n+1}^c$$

حال دقت کنید که

$$E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

و پس

$$E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i$$

چراکه فضای نمونه هر یک از E_iها که یکتای خودش است در C_i آمده است
پس اجتماع پیشامدها تغییری نمی‌کند.

همچنین $C_i \cap C_j = \emptyset$ $i \neq j$ یعنی C_iها ناسازگارند. چراکه فرض کنید wlog $i > j$

$$E_{i+1} = \bigcup_{k=i+1}^{\infty} C_k \overset{j<i}{\Longrightarrow} C_j \subseteq E_{i+1} \quad ①$$

$$C_i = E_i / E_{i+1} \Rightarrow C_i \cap E_{i+1} = \emptyset \quad ②$$

حل $C_i \cap C_j = \emptyset$

حال داریم که

$$P(\lim_{n\to\infty} E_n) \overset{\text{برابر}}{=} P(\bigcap_{n\geq 1} E_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{n}^{\infty} C_i)$$

$$\overset{\text{هر عضو}}{\leq} P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{n}^{\infty} C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq n}^{\infty} P(C_i) \leq 1$$

طبق جمع احتمالات ناسازگار (کولموگروف)

$$\Rightarrow 0 \leq P(E_n) - P(E) = P(E_n / E) = P(\bigcup_{k\geq n} C_k) = \sum_{k\geq n} P(C_k) \quad (\text{الف})$$

چراکه $E_n \supseteq E$

دقت کنید که $\sum_{i\geq 1} P(C_i) \leq 1$ و مثبت اند پس $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1}^{n} P(C_i) = r$

پس سیگما جمع $P(C_1)$، $P(C_1)+P(C_2)$، $\vdots$ افزایشی اند و کرانبالا دارند به ... میل می‌کنند به r

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)$$

پس

$$\sum_{k>n} P(C_k) + S_n = \sum_{k\geq 1}^{\infty} P(C_i)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k>n} P(C_k) + S_n\right) = r$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} P(C_k) = r - \lim_{n\to\infty} S_n \overset{*}{=} r - r = 0 \quad (1)$$

داریم که $*$

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} P(C_n)$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} P(C_k) = 0 \quad ++$$

ضمنا (الف)

$$0 \leq P(E_n) - P(E) \leq \sum_{k\geq n} P(C_k)$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(E_n) - \underset{\text{ثابت}}{P(E)} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} P(C_k) \overset{++}{=} 0$$

$$\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} E_n) = P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

۵- ب) تعریف کنید $A_k = C_k / C_{k-1}$ برای $k>1$.

داریم که $\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = C_n \cup C_{n+1} \cup \dots$

اما بخش اشتراک C_i با $C_{j\neq i}$ ها را می‌توان تنها یکبار حساب کرد.

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = C_n \cup C_{n+1} \cup \dots = C_n \cup (C_{n+1}/C_n) \cup (C_{n+2}/C_{n+1}) \cup \dots$$

$$= \bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k$$ → تعریف جدید

حال داریم که $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \supseteq \bigcup_{k=2}^{\infty} C_k \supseteq \dots$

$\Rightarrow \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k \to$ کاهشی است. (*) $\Rightarrow$

می‌دانیم $\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k$ پس $\bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k$ ها هم کاهشی اند.

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k\right) \underset{\text{اشتراک از هر یک کمتر است.}}{\leq} P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k\right)$$

طبق * کاهشی پس طبق سوال بخش الف.

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}{}^{*} C_k\right) \underset{\text{جمع احتمالات}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\left(P(C_n) + P(C_{n+1}/C_n) + \dots\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} P(C_n)}_{=0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(C_{k+1}/C_k)}_{=0} = 0$$

← طبق فرض‌های مسئله

طبق کولموگروف احتمال ≥ ۰ است

$$\Rightarrow 0 \leq P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) \leq 0 \Rightarrow \boxed{P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = 0}$$

⑥ تعداد مثلث های با $M_1 < \dots < M_n$ را می شماریم.

$\begin{matrix} 1 \\ 2 & \cdot \\ \vdots \\ n & \cdot & \cdots & \cdot \end{matrix}$ اگر سطر $i+1, \dots, n$ را پر کرده باشیم، و اعداد $\{j_1, \dots, j_s\}$

$\star \Leftarrow$ باقی مانده باشند. از آنجا که $M_i > M_l$، $1 \le l \le i$ و M_i ماکسیمم سطر i است.

پس $M_i = \max\{j_1, \dots, j_s\}$. و دقت کنید با این روند $M_n > \dots > M_1$

حفظ می شود چرا که در هر سطر ماکسیمم اعداد باقی مانده قرار می گیرد.
دقت کنید که این روش پوشاست. چرا که برای هر مثلث $M_n > \dots > M_1$ مشابه روند گفته شده
طی کنیم M_i باید ماکسیمم ارقام باقی باشد طبق $\star$.

پس از پایین شروع به شمردن می کنیم.

اعداد را $a_1 \le \dots \le a_m$ می نامیم. $m = \frac{n(n+1)}{2}$

$a_n = \underset{\text{ماکس}}{M_n} \Leftarrow$ a_n در سطر n ام است. سایر اعضا را رندوم از ما بقی عددها

انتخاب می کنیم $\Leftarrow \binom{m-1}{n-1}$ و به $n!$ روش می چینیم.

برای سطر $n-1 \Leftarrow M_{n-1} =$ ماکس اعداد باقی مانده
$\Leftarrow$ ما بقی $\binom{m-n-1}{n-2}$ به $(n-1)!$ روش چینش

برای سطر $n-i$ ام: $\underset{\text{باقی}}{M_{n-i}} =$ ماکس اعداد باقی
$\Leftarrow \binom{m-\sum_{j=0}^{i-1}(n-j)-1}{n-i-1}$ جمع تعداد اعضای سطرهای پایینی
به $(n-i)!$ روش چینش

$$(n-2)!\,\frac{m-n-(n-1)-1}{n-3}$$

$$\text{ج.} \Rightarrow \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)! \binom{m-\sum_{j=0}^{i-1}(n-j)-1}{n-i-1}$$

$$i=0:\quad n!\binom{m-1}{n-1} \qquad \prod_{i=1}^{n-1} (n-i)! \binom{m-1-in+\frac{i(i-1)}{2}}{n-i-1}$$

$$= n!\binom{m-1}{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (n-i)! \binom{\frac{n(n+1)}{2}-in-1+\frac{i(i-1)}{2}}{n-i-1}$$

تعداد کل مثلث ها $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!$ می باشد ,

$F_n = \frac{n(n+1)}{2}$ طول سطر آ

$$F_n = n! \binom{\binom{n+1}{2}-1}{n-1} F_{n-1}$$

$$\Rightarrow F_n = n!\,(n-1)! \cdots 1! \binom{\binom{n+1}{2}-1}{n-1}\binom{\binom{n}{2}-1}{n-2}\cdots\binom{\binom{3}{2}-1}{1}\binom{0}{0}$$

$$* \quad \binom{n-i}{2}-1-(n-i-1) = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}-(n-i) = \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} = \binom{n-i-1}{2}$$

$$* \quad \binom{n+i}{2}-1-(n+i-2) = \frac{(n+i)(n+i-1)}{2}-(n+i-1) = \frac{(n+i-2)(n+i-1)}{2} = \binom{n+i-1}{2}$$

$$\Rightarrow F_n = n!\,\cancel{(n-1)!}\cancel{\cdots 1!}\;\frac{\left(\binom{n+1}{2}-1\right)!}{\cancel{(n-1)!}\,\cancel{\binom{n}{2}!}\binom{n}{2}}\;\frac{\cancel{\left(\binom{n}{2}-1\right)!}}{\cancel{(n-2)!}\,\cancel{\binom{n-1}{2}!}\binom{n-1}{2}}\times\cdots\times\frac{0!}{0!}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{n!\left(\binom{n+1}{2}-1\right)!}{\binom{n}{2}\binom{n-1}{2}\cdots\binom{2}{2}} \Rightarrow \frac{F_n}{m!} = \frac{F_n}{\binom{n+1}{2}!} = \frac{n!\,\cancel{\left(\binom{n+1}{2}-1\right)!}}{\cancel{\binom{n+1}{2}!}\binom{n}{2}\binom{n-1}{2}\cdots\binom{2}{2}} = \frac{n!}{\binom{n+1}{2}\cdots\binom{2}{2}}$$

$\binom{n+1}{2}$

$$= \frac{n!}{\frac{(n+1)n}{2}\frac{n(n-1)}{2}\times\cdots\times\frac{2\cdot 1}{2}} = \frac{\cancel{n!}}{\frac{(n+1)!\,\cancel{n!}}{2^n}} = \boxed{\frac{2^n}{(n+1)!}}$$

احتمال مدنظر

7) احتمال رشته‌هایی که با یکی از رشته‌های F آغاز می‌شوند را می‌شماریم.

* دقت کنید احتمال ندارد که رشته توسط ۲ رشته در F آغاز شود وگرنه. wlog $lenA < lenB$

$A = i_1 \, i_2 \cdots i_k$ k عضو اول رشته B برابر $\Rightarrow$ A پیشوند B است X

$B = i_1 \, i_2 \cdots i_k \, i_{k+1} \cdots$

برای رشته i عضوی احتمال آغاز شدن با آن یعنی i عضو اول برابر این رشته و مابقی دلخواه باشد. پس $\frac{1}{2}$ برای i عضو اول و 1 برای مابقی

$$P(S) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{i} \times 1 = \frac{1}{2^i} \quad \boxed{**}$$

حال چون $F(i) =$ رویداد آغاز شدن با رشته i ها از هم ناسازگارند

طبق * پس

$$\sum P(F(i)) \le P(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in F} P(F(a)) \le 1 \qquad P(F(a)) \overset{**}{=} \frac{1}{2^i} \text{ if } len(a) == i$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in F} \frac{1}{2^{len(a)}} \le 1$$

طبق نوشتن سوال N_i تا طول i داریم پس

$$1 \ge \sum_{a \in F} \frac{1}{2^{len\,a}} = \sum_i \Big(\underbrace{\frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^i}}_{N_i} \Big) = \sum_i \frac{N_i}{2^i}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{N_i}{2^i} \le 1 \longrightarrow \text{Q.E.D}$$