تمرین تئوری 4

یادگیری ماشین

پرهام رضایی

400108547

سوال ۱

الف)

از آنجا که با یک لایه مخفی می‌توانیم برابر ۲ ورودی را تست کنیم.
و کلاً $\binom{4}{2}=6$ جفت از ورودی ها هست. با ۶ واحد محاسباتی در لایه مخفی می‌توان برابری هردو تایی را چک کرد.

ب)

$Wx+b$

$\Rightarrow$

$\dim(W^{(1)}x) = 6 \qquad X \in R^{4\times 1}$

$\Rightarrow \quad W^1 \in \mathbb{R}^{6\times 4}$ و $b \xleftrightarrow{\text{هم بعد}} Wx \rightarrow [6\times 4][4\times 1] = 6\times 1$

$b^1 \in \mathbb{R}^{6\times 1}$

$W^{(2)}h + b^{(2)} \xRightarrow{\dim 1} \text{shape}(W^{(2)}h) = 1\times 1 \qquad \text{shape}(h) = 6\times 1$

$\Rightarrow \quad W^{(2)} \in \mathbb{R}^{1\times 6}$

$\text{shape } b^{(2)} = \text{shape } W^{(2)}h = [1\times 6]\times[6\times 1] = [1\times 1]$

$\Rightarrow \quad b^{(2)} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

ج)

$$W^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b^{(2)} = 0$$

با این کار پس از لایه اول اگر x_i, x_j برابر باشند خروجی لایه پنهان ۱ وگرنه ۰ است.
پس از لایه دوم اینها جمع می شوند و ϕ می گیریم. اگر همه ۰ باشند جمع ۰ ⇐ خروجی ۱
اگر دراقل ۲ x_i برابر باشند خروجی لایه پنهان ۱ بوده پس ضرب $W^{(2)}$ جمع با $b^{(2)}$ از ۰ بیشتره
پس خروجی ϕ = ۱ می شود.

ت)

$$W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.5 \\ -3.5 \\ -3.5 \\ -3.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\phi} a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad W^{(2)}a_1 + b^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 2 \xrightarrow{\phi} a_2 = 0$$

$$W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\phi} a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad W^{(2)}a_1 + b^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 1 \xrightarrow{\phi} a_2 = 0$$

$$W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\phi} a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad W^{(2)}a_1 + b^{(2)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0] = 2 \xrightarrow{\phi} a_2 = 0$$

$$W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\phi} a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad W^{(2)}a_1 + b^{(2)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0] = 0 \xrightarrow{\phi} a_2 = 1$$

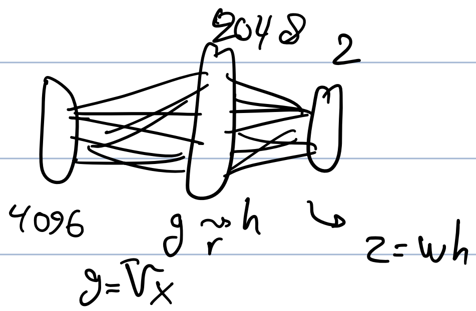
سوال ۲

الف)

برای لایه پنهان با احتساب بایاس ← $(4096+1) \times 2048$

و مشابهاً برای لایه آخر $(2048+1) \times 2$

$$\Rightarrow \quad 4097 \times 2048 + 2049 \times 2$$



ب)

$$J = \frac{1}{2}|y-z|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial z} = (z-y)^T$$

$$z = wh$$

$$J = \frac{1}{2}(y-z)^T(y-z) = \frac{1}{2}\left(y^Ty + z^Tz - y^Tz - z^Ty\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(y^Ty + z^Tz - 2y^Tz\right) \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(2z^T - 2y^T\right) = (z-y)^T \quad (1)$$

همچنین $z = wh \Leftarrow \quad (2) \quad \frac{\partial z}{\partial w_{ij}} = h_j$

$$(1),(2) \rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = (z_i - y_i)\, h_j$$

ج) طبق ب داریم که هر درایه $\frac{\partial J}{\partial w}$ از ضرب $z_i - y_i$ در h_j بدست می‌آید پس outer product بین آنها را داریم پس

$$\frac{\partial J}{\partial W} = (z-y)h^T$$

د)

$$\frac{\partial J}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v_{ij}} \overset{\text{طبق } ①}{=} (z-y)^T \frac{\partial z}{\partial v_{ij}}$$

$$z = Wh \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v_{ij}} = W \frac{\partial h}{\partial v_{ij}} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial v_{ij}} = (z-y)^T W \frac{\partial h}{\partial v_{ij}}$$

حال داریم که

$$h = r(g) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial v_{ij}} = r'(g) \frac{\partial g}{\partial v_{ij}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial v_{ij}} = [0, 0, \dots, r'(g_i) x_j, 0, \dots, 0]^T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial v_{ij}} = (z-y)^T W [0, 0, \dots, r'(g_i) x_j, 0, \dots, 0]^T$$

تنها درایه i ام تأثیر دارد.

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial v_{ij}} = \left((z-y)^T W\right)_i r'(g_i)\, x_j$$

سوال ۳

الف) هر دو W_1 و b_1 بعد اول باید سایز a_1 باشه و b_1 تک بعد و W_1 اندازه ورودی
ضرب می‌شود مشابها W_2 و b_2 پس

چون $Wx+b$

$$W_1 \in R^{D_{a_1} \times D_x}$$

$$b_1 \in R^{D_{a_1} \times 1}$$

$$W_2 \in R^{D_{a_2} \times D_x} \qquad b_2 \in R^{D_{a_2} \times 1}$$

اگر روی m تا نمونه داشته باشیم ←

$$X \in R^{D_x \times m} \qquad y \in R^{m \times 1}$$

ب)

$$\hat{y} = \sigma(z_3) \qquad \frac{\partial \hat{y}}{\partial z_3} = \sigma(z_3)\,(1-\sigma(z_3))$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial z_3} = y^i \times \frac{1}{\hat{y}^i} \times \frac{\partial \hat{y}^i}{\partial z_3} + (1-y^i)\,\frac{1}{1-\hat{y}^i}\left(-\frac{\partial \hat{y}^i}{\partial z_3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial z_3} = \frac{-1}{m}\left(\frac{y^{(i)}}{\hat{y}^{(i)}} - \frac{1-y^{(i)}}{1-\hat{y}^{(i)}}\right) * \sigma(z_3)(1-\sigma(z_3))$$

از آنجا که $\hat{y}^{(i)} = \sigma(z_3)$ می‌توان ساده کرد:

$$\frac{\partial J}{\partial z_3} = -\frac{1}{m}\left(y^{(i)}(1-\hat{y}^{(i)}) - \hat{y}^{(i)}(1-y^{(i)})\right) = \frac{1}{m}\left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right)$$

$$\delta_1^{(i)} = \frac{1}{m}\left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right)$$

(iii

$$z_3 = W_2 a + b \Rightarrow \frac{\partial z_3}{\partial a} = W_2 = \delta_2^{(i)}$$

(IV

$$\frac{\partial a}{\partial z_2} = \frac{-\partial a_2}{\partial z_2} = -R'(z_2) = -H(z_2) = \delta_3^{(i)}$$

↳ Relu

↳ $\max(0, x)$ مشتق $\Rightarrow$ $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(V

$$\frac{\partial a}{\partial z_1} = \frac{\partial a_1}{\partial z_1} = R'(z_1) = H(z_1) = \delta_4^{(i)}$$

↳ Relu

(VI

$$z_1 = W_1 x^{(i)} + b_1 \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial W_1} = x^{(i)T}$$

(VII

$$\frac{\partial J}{\partial W_1} = \frac{\partial J}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial W_1} + \frac{\partial a}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial W_1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial W_1} = \frac{1}{m}\left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right) W_2 \circ \left(H(z_1)\, x^{(i)T} - H(z_2)\, x^{(i)T} \right)$$

$$\Rightarrow \delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \circ \left(\delta_4^{(i)} x^{(i)T} + \delta_3^{(i)} x^{(i)T} \right)$$

هر درایه ضرب درایه تقسیم

(VIII

برای W_1 داشتیم که :

$$\frac{\partial J}{\partial W_1} = \delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \odot \left(\delta_4^{(i)} x^{(i)T} + \delta_3^{(i)} x'^{(i)T}\right)$$

برای W_2 داریم که

$$z_3 = W_2 a + b_2 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial z_3} \times a^T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial W_2} = \delta_1^{(i)} \times a^T$$

فقط بدون x^T ها

$$\frac{\partial J}{\partial b_1} = \frac{\partial J}{\partial z_1} \times \frac{\partial z_1}{\partial b_1} = \frac{\partial J}{\partial z_1} = \delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \odot \left(\delta_4^{(i)} + \delta_3^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_2} = \frac{\partial J}{\partial z_2} \cdot \overbrace{\frac{\partial z_2}{\partial b_2}}^{1} = \delta_1^{(i)}$$

$$W_1^{(t+1)} = W_1^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial W_1} = W_1^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \odot \left(\delta_4^{(i)} x^{(i)T} + \delta_3^{(i)} x'^{(i)T}\right)$$

$$W_2^{(t+1)} = W_2^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial W_2} = W_2^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \delta_1^{(i)} \times a^T$$

$$b_1^{(t+1)} = b_1^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial b_1} = b_1^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \odot \left(\delta_4^{(i)} + \delta_3^{(i)}\right)$$

$$b_2^{(t+1)} = b_2^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial b_2} = b_2^{(t)} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \delta_1^{(i)}$$

سوال چهارم

الف) می دانیم $Loss\ CE(\hat{y}, y) = -\sum_{i=1}^{k} y_i \log \hat{y}_i$

فرض کلاس درست t باشد.

$$Loss\ CE(\hat{y}, y) = -\log \hat{y}_t = -\log \frac{e^{z_t}}{\sum e^{z_i}} = \log \sum e^{z_i} - \log e^{z_t} =$$

$$= LSE(z) - z_t \Rightarrow loss\ CE(\hat{y}, y) = LSE(z) - z_t$$

ب)

$$\frac{\partial LSE(z)}{\partial z_j} = \frac{\partial \log \sum e^{z_i}}{\partial z_j} = \frac{1}{\sum e^{z_i}} \frac{\partial \sum e^{z_i}}{\partial z_j} = \frac{1}{\sum e^{z_i}} e^{z_j} =$$

$$= \frac{e^{z_j}}{\sum e^{z_i}} \Rightarrow$$ طبق softmax $$\Rightarrow = \hat{y}_j$$

ج)

$$LSE(x_1, \dots, x_n) = \log \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i) = \log \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i - \alpha + \alpha)$$

$$= \log \sum_{i=1}^{n} \exp(\alpha) \exp(x_i - \alpha) = \log \exp(\alpha) \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i - \alpha) = \log(\exp(\alpha)) +$$

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i - \alpha)\right) = \alpha + LSE(x_1 - \alpha + \dots + x_n - \alpha) \quad \boxed{\checkmark}$$