محاسبات عددی تمرین 3

پرهام رضایی 400108547

1

برای روش ذوزنقه داریم که

N intervals $a_0=0 \quad a_N=\pi \quad a_i = 0+i\frac{\pi-0}{N} = \frac{i\pi}{N}$

$$\Rightarrow \text{Estimate} = \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)\right)$$

$$\text{Error} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\varepsilon) \qquad \varepsilon \in (a,b)$$

برای روش سیمپسون نیز داریم که:

N زوج : $$|Err| = \frac{1}{180} h^4 (b-a) \max_{\varepsilon \in (a,b)} |f^{(4)}(\varepsilon)|$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

الف)

ابتدا مشتق ها را حساب می کنیم.

f	f'	f''
$x\cos x$	$\cos x - x\sin x$	$-\sin x - \sin x - x\cos x = -x\cos x - 2\sin x$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x + x\sin x - 2\cos x = x\sin x - 3\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x + x\cos x + 3\sin x = 4\sin x + x\cos x$$

نیازمند $\max_{x\in(0,\pi)} |f''(x)|$ هستیم.

داریم که $|\pi\cos\pi + 2\sin\pi| = |\pi(-1)| = \pi$: در π ماکس در تمام بازه: طبق نمودار

و دستی داریم که

$$|x\cos x + 2\sin x| \leq |x||\cos x| + |2\sin x| \leq \pi \times 1 + 2 = \pi + 2$$

ذوزنقه :

تخمین : $|err| \leq \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\varepsilon) \right| \leq \frac{(\pi-0)^3}{12N^2}(\pi+2) < 10^{-6}$

$$\Rightarrow N^2 > \frac{10^6 \pi^3(\pi+2)}{12} \Rightarrow N > \sqrt[2]{\frac{10^6\pi^3(\pi+2)}{12}} \approx 3644.87 \rightarrow N \geq 3645$$

مقدار دقیق تر: $|f''(\varepsilon)| \leq \pi$

$$\Rightarrow |err| \leq \frac{\pi^3 \pi}{12N^2} < 10^{-6} \Rightarrow N^2 > \frac{10^6\pi^4}{12} \Rightarrow N > \sqrt{\frac{10^6\pi^4}{12}} \approx 2849.01 \Rightarrow N \geq 2850$$

سیمپسون :

$$f^{[4]}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

غیردقیق : $|f^{[4]}(x)| \leq 4|\sin x| + |x||\cos x| \leq 4 + \pi \times 1 = 4+\pi$

دقیق (نمودار ولفرام) : $x \approx 1.31384 \underset{maxima}{\Rightarrow} |f^{(4)}(x)| \approx 4.20257$

تخمین : کافی است: $|err| = \left| \frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{N^4} f^{(4)}(\varepsilon) \right| \leq \frac{\pi^5}{180N^4} \times (4+\pi) < 10^{-6}$

$$\Rightarrow N^4 > \frac{10^6 \pi^5}{180}(4+\pi) \Rightarrow N > \sqrt[4]{\frac{10^6\pi^5(4+\pi)}{180}} \approx 59.029 \Rightarrow N \geq 60$$

دقیق تر: $|f^{[4]}(\varepsilon)| \leq 4.20258$

$$\Rightarrow N^4 > \frac{10^6\pi^5(4.20258)}{180} \Rightarrow N > \sqrt[4]{\frac{10^6\pi^5(4.20258)}{180}} \approx 51.70 \Rightarrow N \geq 52$$

ب)

$$f(x) = (4+x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f''(x) = (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(4+x^2)^{-\frac{3}{2}} = 4(4+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = x(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f^{(3)}(x) = -12x(4+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -12(4+x^2)^{-\frac{5}{2}} + 60x^2(4+x^2)^{-\frac{7}{2}} = 48(x^2-1)(4+x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(5)}(x) = 96x(4+x^2)^{-\frac{7}{2}} - 336(x^3-x)(4+x^2)^{-\frac{9}{2}} = -240x(x^2-3)(4+x^2)^{-\frac{9}{2}}$$

قاعده ذوزنقه :

$$\max f''(\xi) \rightsquigarrow f^{(3)}(\xi)=0 \Rightarrow -12x(4+x^2)^{-\frac{5}{2}}=0 \Rightarrow x=0$$

ته بازه : $4 \rightsquigarrow 4(4+16)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{20^{\frac{3}{2}}}$

$$0 \rightsquigarrow 4(4+0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{4^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\max} \frac{4}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |err| = \frac{|b-a|^3}{12N^2}|f''(\xi)| \le \frac{4^3}{12N^2} \times \frac{1}{2} < 10^{-6} \Rightarrow N^2 > \frac{8\times 10^6}{3} \Rightarrow N > \sqrt{\frac{8\times10^6}{3}} \simeq 1632.993$$

$$\Rightarrow \boxed{N \ge 1633}$$

قاعده سیمپسون :

$$\max f^{(4)}(x) \Rightarrow f^{(5)}(x)=0 \Rightarrow -240x(x^2-3)(4+x^2)^{-\frac{9}{2}}=0$$

$x \in [0,4]$

$$\Rightarrow x=0 \ \text{یا} \ x=\sqrt{3}$$

ته بازه ، $x=4 \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = 48\times 15 \times 20^{-\frac{7}{2}} \simeq 0.0201$

$$x=0 \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = |48\times(-1)\times 4^{-\frac{7}{2}}| = 0.375$$

$$x=\sqrt{3} \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = |48\times 2 \times 7^{-\frac{7}{2}}| \simeq 0.1057$$

$$\Rightarrow |err| = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{4^5}{180N^4} \times 0.375 < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow N^4 > \frac{4^5 \times 10^6 \times 0.375}{180} \Rightarrow N > \sqrt[4]{\frac{4^5\times10^6\times0.375}{180}} \approx 38.21 \Rightarrow N \ge 39$$

$$\boxed{N \ge 40}$$

زوج تا بازه در سیمپسون

ج)

$f(x) = x\ln(x) \qquad f'(x) = \ln(x)+1 \qquad f''(x) = \frac{1}{x}$

$f^{[3]}(x) = -x^{-2} \qquad f^{[4]}(x) = 2x^{-3} \qquad f^{[5]}(x) = -6x^{-4}$

قاعده ذوزنقه :

$\max f''(x) \rightsquigarrow \underset{x=(1,4)}{\overset{(\sup)}{\max}} \frac{1}{x} = 1$ چون $x>1 \Rightarrow \frac{1}{x}<1$

$\Rightarrow |Err| = \left|\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)\right| \leq \frac{(4-1)^3}{12N^2}\times 1 < 10^{-6} \Rightarrow N^2 > \frac{\overset{9}{\cancel{27}}\times 10^6}{\underset{4}{\cancel{12}}} \Rightarrow N > \sqrt{\frac{9\times 10^6}{4}} = \frac{3\times 10^3}{2}$

$= \frac{3000}{2} = 1500 \Rightarrow N \geq 1501$

قاعده سیمپسون :

$\max f^{[4]}(x) \rightsquigarrow \underset{x\in(1,4)}{\overset{(\sup)}{\max}} 2x^{-3} = 2 \qquad x\geq 1 \Rightarrow x^{-3}\leq 1 \Rightarrow 2x^{-3}\leq 2$

$\Rightarrow |Err| = \left|\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{[4]}(\xi)\right| \leq \frac{(4-1)^5}{180N^4}\, 2 = \frac{27}{10N^4} < 10^{-6}$

$\Rightarrow N^4 > \frac{27\times 10^6}{10} = 27\times 10^5 \Rightarrow N > \sqrt[4]{27\times 10^5} \simeq 40.536 \Rightarrow N\geq 41$

$N \geq 42$ سیمپسون N زوج

2

الف)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

در بخش کردیم :

$$\frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{N}\right)\right.$$

$$\rightarrow E = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

$b = 2.4 \quad a=0 \quad h = 1.2 \quad N=2$

$$\Rightarrow \text{تخمین}: \frac{2.4}{2}\left(\frac{1.5+1.5}{2} + 1.8\right) = 1.2(1.5+1.8) = 1.2\times 3.3$$

$$= 3.96 \qquad \rightarrow |err| = \left|\frac{2.4^3}{12\times 4} f''(\xi)\right| = |0.288 f''(\xi)|$$

ب)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right) - \frac{h^5}{90} f^{4}(\xi)$$

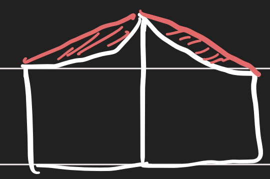
$h = 1.2 \quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1.2 \quad x_2 = 2.4$

$$\Rightarrow \text{تخمین} = \frac{1.2}{3}\left(1.5+4\times1.8+1.5\right) - \frac{h^5}{90} f^4(\xi)$$

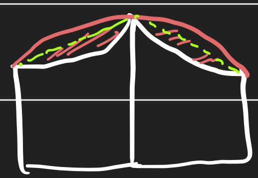
$$\rightarrow 0.4\times(3+4\times1.8) = 4.08$$

$$|err| = \left|\frac{1.2^5}{90} f^{4}(\xi)\right| \simeq |0.0276 f^{4}(\xi)|$$

ج)



در روش ذوزنقه مساحت نمایش داده شده
دارد به میزان ارور در تخمین ما زیاد ظاهر می‌شود.



درحالیکه در سیمپسون مشابه شکل سهمی درجه دو را داریم تخمین
می‌زنیم که دقیق‌تر می‌توان شکل روبه‌رو را متصور شد
حال به علت تحدب این تابع داریم که مطابق شکل ارور بیشتری از متد ذوزنقه
داریم ایجاد می‌کنیم. ← روش ذوزنقه تقریب بهتری به ما می‌دهد.

(شباهت تابع واقعی از مدل درجه ۲ زیاد است ما بایاس ایجاد کرده‌ایم که موجب ارور بیشتر شده است.)

3

* شرط خطی واسه همین ax^0 و $b \cdot x^0$ میشه وقتی درجه پایین‌ترها بررسی شه، همون x^0 گرفت.

f ثابت

$$f(x)=c \rightarrow \int_0^4 c\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1) \Rightarrow 4c = c_0 c + c_1 c \overset{\forall c}{\Rightarrow} 4 = c_0 + c_1$$

f خطی

$$f(x)=x \rightarrow \int_0^4 x\,dx = c_0 \times 0 + c_1 x_1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = c_1 x_1 \Rightarrow 8 = c_1 x_1$$

f درجه 2

$$f(x)=x^2 \rightarrow \int_0^4 x^2\,dx = c_0 \times 0 + c_1 x_1^2 \Rightarrow \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = c_1 x_1^2 \Rightarrow \frac{64}{3} = c_1 x_1^2$$

حال سه معادله داریم و سه مجهول c_0, c_1, x_1

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 4 & (1) \\ c_1 x_1 = 8 & (2) \\ c_1 x_1^2 = \frac{64}{3} & (3) \end{cases}$$

پس می‌توان سه معادله سه مجهول را حل کرد (تا اگه مستقل بودند معادلات مجهول‌ها را داریم)

$$\frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \frac{c_1 x_1^2}{c_1 x_1} = \frac{\frac{64}{3}}{8} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{8}{3}}$$

$$(2) \Rightarrow c_1 x_1 = 8 \Rightarrow c_1 \frac{8}{3} = 8 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3}$$

$$(1) \Rightarrow c_0 + c_1 = 4 \Rightarrow c_0 + 3 = 4 \Rightarrow \boxed{c_0 = 1}$$

حال به دست آوردیم که برای دقیق بودن تا درجه ۲ باید این ۳ مقدار باشد.
بررسی می‌کنیم آیا برای درجات بالاتر نیز صادق است؟

درجه ۳

$$f(x)=x^3 \rightarrow \int_0^4 x^3 = c_0 \times 0 + c_1 \times x_1^3 \Rightarrow \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = c_1 x_1^3$$

$$\Rightarrow \frac{256}{4} = 3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^3 \Rightarrow 64 = \frac{64 \times 8}{9} \Rightarrow 8 = 9 \;\; \times$$

پس برای صدق تا حداکثر درجه که 2 باشد مقادیر به صورت زیر باید باشند،

$$x_1 = \frac{8}{3}$$

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 3$$

دنبال ترکیب خطی ای از $f(x_0-h), f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), f(x_0+3h)$ هستیم که $f'(x_0)$ را بدهد.

بسط هرکدام را بجز $f(x_0)$ تیلور درجه چهارم می‌نویسیم.

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_{0,x_0})$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_{1,x_0})$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_{2,x_0})$$

$$f(x_0+3h) = f(x_0) + 3hf'(x_0) + \frac{9h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{27h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{81h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \frac{243h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_{3,x_0})$$

حال می‌خواستم که اشتراک:
$$\begin{bmatrix} a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0-h) \\ f(x_0) \\ f(x_0+h) \\ f(x_0+2h) \\ f(x_0+3h) \end{bmatrix} = f'(x_0)$$

بشود. ماتریس ضرایب را برحسب ضرایب مشتق‌ها که در بالا بدست آوردیم می‌نویسیم،

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^T \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f & f' & f^{(2)} & f^{(3)} & f^{(4)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} \\ 1 & 2h & \frac{4h^2}{2!} & \frac{8h^3}{3!} & \frac{16h^4}{4!} \\ 1 & 3h & \frac{9h^2}{2!} & \frac{27h^3}{3!} & \frac{81h^4}{4!} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f(x_0-h) \\ f(x_0) \\ f(x_0+h) \\ f(x_0+2h) \\ f(x_0+3h) \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تا فقط $f'(x_0)$ بدهد.

$$\Rightarrow [a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 1 & 2 & \frac{4}{2} & \frac{8}{3!} & \frac{16}{4!} \\ 1 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{27}{3!} & \frac{81}{4!} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^4 \end{bmatrix}}_{H} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

$$\Rightarrow [a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3] = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]\, H^{-1} A^{-1}$$

$$[0\ 1\ 0\ 0\ 0] \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{h} & & & \\ & & \frac{1}{h^2} & & \\ & & & \frac{1}{h^3} & \\ & & & & \frac{1}{h^4} \end{bmatrix}}^{H^{-1}} A^{-1} = [0\ \tfrac{1}{h}\ 0\ 0\ 0]\, A^{-1} = \frac{1}{h}[0\ 1\ 0\ 0\ 0]\, A^{-1}$$

ضرب کردم

$$= \frac{1}{h}[-0.25\quad -0.8\bar{3}\quad 1.5\quad -0.5\quad 0.08\bar{3}]$$

$$\Rightarrow a_{-1} = -\frac{1}{4h} \qquad a_0 = \frac{-5}{6h} \qquad a_1 = \frac{3}{2h} \qquad a_2 = \frac{-1}{2h} \qquad a_3 = \frac{1}{12h}$$

ضرایب رو درج کردم که صحیح صحیح شد.

$$\Rightarrow \text{مقدار}: a_{-1} f(x_0-h) + a_0 f(x_0) + a_1 f(x_0+h) + a_2 f(x_0+2h) + a_3 f(x_0+3h)$$

$$\text{error} = a_{-1}\left(\frac{-h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_{0,x_0})\right) + a_1\left(\frac{h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_{1,x_0})\right) + a_2\left(\frac{32h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_{2,x_0})\right) + a_3\left(\frac{243h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_{3,x_0})\right)$$

$$a_i = \frac{O(1)}{h} \Rightarrow \text{error} = \frac{O(1)\, h^5\, O(1)}{h} \times 4 = O\left(\frac{h^5}{h}\right) = O(h^4)$$

$$f'(x_0)= -\frac{1}{4h}f(x_0-h)-\frac{5}{6h}f(x_0)+\frac{3}{2h}f(x_0+h)-\frac{1}{2h}f(x_0+2h)+\frac{1}{12h}f(x_0+3h)+O(h^4)$$

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0-h)-10f(x_0)+18f(x_0+h)-6f(x_0+2h)+f(x_0+3h)}{12h}+O(h^4)$$

علامت درست نیست در جمله خطا

از اردر $O(h^4)$ است. چون عبارات تیلور کم می‌شن - یه عبارت با قدر مطلق $O(h^4)$ است ولی می‌تونه ± باشه بر حسب $f^{(5)}(\xi)$ها.

ب)

$h=0.1 \Rightarrow \quad x_0-h=1-0.1=0.9 \quad x_0+h=1+0.1=1.1$

$x_0+2h=1+0.2=1.2 \quad x_0+3h=1+3\times0.1=1.3$

$$f'(\overset{x_0}{1})= -\frac{1}{0.4}f(0.9)-\frac{5}{0.6}f(1)+\frac{3}{0.2}f(1.1)-\frac{1}{0.2}f(1.2)+\frac{1}{1.2}f(1.3)-O(10^{-4})$$

$$\simeq \frac{-\sin 0.9\cos 0.9}{0.4}-\frac{5\sin 1\cos 1}{0.6}+\frac{3\sin 1.1\cos 1.1}{0.2}-\frac{\sin 1.2\cos 1.2}{0.2}+\frac{\sin 1.3\cos 1.3}{1.2}$$

$\simeq -0.416192 \simeq -0.4161$

$\rightarrow$ با احتساب خطا که از اردر 10^{-4} $\Rightarrow \simeq -0.416$

مقدار واقعی:

$(\sin x\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

$\Rightarrow f'(1)=1-2\sin^2 1\simeq -0.416146$

فرم کلی : $f'(x_j) = f(x_0)\left(\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right) + f(x_1)\left(\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right) + f(x_2)\left(\frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)$

$$+ \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{k=2} (x_j - x_k)$$

$x_0 - h, x_0, x_0 + h$

→ Three point Midpoint : $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$

الف)

حال با خطا محاسبه f ها داریم که $\hat{f}(x)$ مقدار محاسبه شده f است.

$$f(x) = \hat{f}(x) + e(x)$$

مقدار واقعی ، مقدار محاسبه‌شده ، خطا

$$\Rightarrow \text{Error} = f'(x_0) - \frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - e(x_0+h) - (f(x_0-h) - e(x_0-h))}{2h}$$

$$= f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h} =$$

$$-\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_{x_0}) + \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h}$$

$\Rightarrow$ تخمین $= \frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0-h)}{2h}$ ارور : $-\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_{x_0}) + \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h}$

حال با فرض کران بالا ها

$$\sup_{x \in (x_0-h, x_0+h)} f^{(3)}(x) = M$$

$$|e(x_0 \pm h)| \leq \delta$$

δ کم

$$\Rightarrow |Error| = \left| \frac{-h^2}{6} f^{[3]}(\xi_{x_0}) + \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h} \right| \leq$$

$$\left| \frac{h^2}{6} f^{[3]}(\xi_{x_0}) \right| + \frac{|e(x_0+h) - e(x_0-h)|}{|2h|} \leq \frac{h^2}{6} \left| f^{[3]}(\xi_{x_0}) \right| +$$

$$\frac{|e(x_0+h)| + |e(x_0-h)|}{|2h|} \leq \frac{h^2}{6} M + \frac{2\delta}{|2h|} \underset{h>0}{=} \frac{Mh^2}{6} + \frac{\delta}{h}$$

حال برای ادامه δ را داریم که $\delta = \sup_x |e(x)|$ وگرنه رفتار e می‌تواند
موجب عدم امکان استدلال در تغییرات خطا شود.

ب)

h خیلی بزرگ باشد:

$$\frac{Mh^2}{6} >> \frac{\delta}{h} \Leftrightarrow h^3 >> \frac{6\delta}{M} \Leftrightarrow h >> \sqrt[3]{\frac{6\delta}{M}}$$

یعنی اندازه خطای $\frac{Mh^2}{6}$ نسبت به $\frac{\delta}{h}$ خیلی بیشتر است و ارور غالب است پس
می‌توان از خطای اندازه گیری ($\frac{\delta}{h}$) چشم پوشی کرد.

h خیلی کوچک باشد: با کوچک شدن h، $\frac{Mh^2}{6}$ کم شده و $\frac{\delta}{h}$ زیاد می‌شود

$$\frac{\delta}{h} >> \frac{Mh^2}{6} \Leftrightarrow \frac{6\delta}{M} >> h^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{6\delta}{M}} >> h$$

یعنی h خیلی کوچک شود جمله $\frac{\delta}{h}$ dominate می‌کنه خطا رو و می‌شه خطامون

را با صرفاً فضای اندازه‌گیری تخمین خوبی بزنیم. (مثلاً در تخمین $\sin(x)$ اگر از 10^{-6} کمتر شه

می‌شه چنین کاری کرد)

ج)

می‌خواهیم ارورمان کمینه شود =>

$$\frac{d}{dh}\left[\frac{Mh^2}{6}+\frac{\delta}{h}\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{2Mh}{6}-\frac{\delta}{h^2}=0 \Rightarrow \frac{Mh}{3}=\frac{\delta}{h^2} \Rightarrow h^3=\frac{3\delta}{M}$$

$$\Rightarrow h=\left(\frac{3\delta}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$$

این مقدار بهینه است.

مثال: حال برای حالت تخمین $\sin x$ برای مثال داریم که $f'''(x)=-\cos(x)$ ($\sin(x)$)

و اگر تخمین حول 0.9 باشد و بازه [0.8, 1] را در نظر بگیریم:

$$|f'''(x)| \leq \cos 0.8 \approx 0.69671$$

حال در کامپیوتر 64 بیتی داریم $\delta \simeq 2.22\times 10^{-16}$

$$\Rightarrow h=\left(\frac{3\delta}{M}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{3\times 2.22\times 10^{-16}}{0.69671}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0.0000098515$$

از لحاظ مثال عددی هم محاسبه کنیم عملی حدود بازه 10^{-6} تا 10^{-5} بهینه است که با این

مقدار مطابقت دارد.

* در واقعیت چون معمولاً خبر از مشتق‌های تابع نداریم نمی‌توانیم h ایده‌آل و ایده‌آلی

بدست بیاریم ولی حداقل متوجه شدیم که از بالا گرفتیم این بود که با کم کردن h لزوماً نشانه

بهبود تخمین نخواهیم بود، unstable است متوجه چون طبق بالا truncation ارور را کم کردیم roundoff ارور زیاد شد.