محاسبات عددی

تمرین ۱ تئوری

پرهام رضایی 40010854 7

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{*}{=} 1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$* \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$\int ax^i \rightsquigarrow \frac{a x^{i+1}}{i+1}$$

انتگرال

$$\rightsquigarrow \tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

برای همگرایی مطلق تست نسبت داریم که (دقت کنید برای $|x|<1$ بالا به 0 میل می‌کند چون $\left(x^{2n+1} \to 0, \ \frac{1}{2n+1} \to 0 \right.$

$$\text{ratio} = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \left| \frac{-(2n+1)x^2}{2n+3} \right| = \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| x^2$$

$$1 > \text{ratio} \Rightarrow 1 > \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| x^2 \Rightarrow \sqrt{\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|} > |x|$$

داریم که کافیه

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{1}{1}\right|} = 1 \Rightarrow 1 > |x|$$

پس بازه همگرایی $x \in (-1,1)$ است.

مشابه 3 داریم که تابع alternating است و قدرمطلق جملات دارد کاهش می‌یابد در بازه تعریف‌شده و حد ∞ نیز 0 است (مخرج نامتناهی و صورت متناهی) پس خطای قطع در k از جمله بعد کمتره:

$$\left| \tan^{-1}(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1} \right| \le \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \right|$$

$$= \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \Rightarrow |R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right|$$

روش دوم این کران:

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+k^2}\,dk = \int_0^x \left(1-k^2+k^4-\dots+(-1)^{n-1}k^{2(n-1)} + \frac{(-1)^n k^{2n}}{1+k^2}\right) dk$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{k^{2n}}{1+k^2}\,dk$$

$1+t^2 \geq 1$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \right| = \underbrace{\left| \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \right|}_{\text{مقدار دقیق}} \leq \left| \int_0^x t^{2n}\,dt \right|$$

کران بالا می‌سازیم

$$= \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|$$

کران بالای خطا

مشابه روش اول

$$|x|<1 \Rightarrow \quad \leq \frac{1}{2n+1}$$

$a = \sin x \quad b = \cos x \quad c = \tan^{-1} \frac{2x}{\pi\sqrt{3}}$ ③

$$f(a,b,c) = \frac{4a^2 - b}{3c}$$

حال طبق اردر تابع چند آرگومانه داریم که $\Delta f(a,b,c) = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c\right|$

$$a: \sin x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \rightarrow \Delta a = |R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|$$

از فرمول، جمله بعدی ← alternating ↗

$$b: \cos x : \sum \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \rightarrow \Delta b = |R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|$$

$$c: \tan^{-1}\left(\frac{2x}{\pi\sqrt{3}}\right) \xrightarrow{\text{طبق سوال ۱}} |R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \Rightarrow \Delta c = \left|\frac{\left(\frac{2x}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right| = \left(\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$|\Delta f| = \left|\frac{8\sin x}{3\tan^{-1}\frac{2x}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \frac{x^{2n_a+1}}{(2n_a+1)!}\right| + \left|\frac{1}{3\tan^{-1}\frac{2x}{\pi\sqrt{3}}} \frac{x^{2n_b}}{(2n_b)!}\right| + \left|\frac{4\sin^2 x - \cos x}{3\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x}{\pi\sqrt{3}}\right)\right)^2} \left(\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2n_c+1} \frac{x^{2n_c+1}}{2n_c+1}\right|$$

max → 1

min → $\frac{\pi}{6}$

min → $|\cos\frac{\pi}{2}| = 0$

$\Rightarrow \quad c \to \frac{\pi}{6} \quad b \to 0 \quad a \to 1$

$$\Rightarrow |\Delta f| \leq \left|\underbrace{\frac{8\times 6}{3\pi}}_{\frac{16}{\pi}} \frac{x^{2n_a+1}}{(2n_a+1)!}\right| + \left|\underbrace{\frac{6}{3\pi}}_{\frac{2}{\pi}} \frac{x^{2n_b}}{(2n_b)!}\right| + \left|\underbrace{\frac{4\times 6^2}{3\pi^2}}_{\frac{48}{\pi^2}} \left(\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2n_c+1} \frac{x^{2n_c+1}}{2n_c+1}\right|$$

$x : \frac{5\pi}{6} \longrightarrow$ هر قدرمطلق ازها جمع اشتر مس

↓

هرکدام :

$$10^{-5} \geq \frac{16}{\pi} \frac{\left(\frac{5\pi}{6}\right)^{2n_a+1}}{(2n_a+1)!} \xrightarrow{\text{wolfram}} n_a \geq 7$$

$\text{error} = 7.244 \times 10^{-6}$

$$10^{-5} \geq \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{5\pi}{6}\right)^{2n_b}}{(2n_b)!} \Rightarrow n_b \geq 7$$

$\text{error} = 5.188 \times 10^{-6}$

$\xrightarrow{\text{sum}} \simeq 0.000012 > 10^{-5}$

$n_a = 8 \quad n_b = 7 \quad \xrightarrow{\text{sum} \sim} 7.39 \times 10^{-6}$

پس مراحل حتی 8 :

$$\rightarrow X = \frac{48}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2n_c+1} \frac{\left(\frac{5\pi}{6}\right)^{2n_c+1}}{2n_c+1} < 10^{-5} - 7.39 \times 10^{-6} \rightarrow n_c \geq 116$$

$116 + 8 + 7 = 131$ جمع.

$n_a = 7 \quad n_b = 8 \quad \xrightarrow{\text{sum}} 5.37 \times 10^{-6}$

$X \leq 10^{-5} - 5.37 \times 10^{-6} \Rightarrow n_c \geq 109 \longrightarrow$

$109 + 8 + 7 = 124$ جمع.

$\underrightarrow{n_a = 8 \quad n_b = 8} \quad \text{sum} \sim 3.3071 \times 10^{-7}$

$X \leq 10^{-5} - 3.3071 \times 10^{-7} \xrightarrow{\text{wolfram}} n_c \geq 102 \longrightarrow$

تعیین نشد با *

$102 + 8 + 8 = 118$ جمع.

کمترین

$$\star \; n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\Rightarrow$ تعدادها

sin	cos	$\tan^{-1}$
8	8	102

④ در روش اول بطور مستقیم و در روش دوم با بسط تیلور داده شده در سوال حل می‌کنم.

روش اول:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}$$

X مطلوب

پایه:

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = (x+2)^{-1} \qquad f^{[1]}(x) = -(x+2)^{-2}$$

گام:

$$\text{if } f^{[n-1]}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2+x)^{-n} \xrightarrow{\text{مشتق}} f^{[n]}(x) = -(-1)^{n-1}\,n\,(n-1)!\,(2+x)^{-(n+1)}$$

$$= (-1)^n\, n!\,(2+x)^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow f^{[n]}(x) = (-1)^n\, n!\,(x+2)^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(0)\,x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,(0+2)^{-(n+1)}\,x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots$$

$$* \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{2^{n+1}} \Big/ \frac{(-1)^n x^n}{2^n} \right| = \left| \frac{-x}{2} \right| = \left| \frac{x}{2} \right| < 1$$

$\Rightarrow |x| < 2$ طبق تست نسبت بازه همگرایی

روش دوم:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{2^{i+1}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots$$

جواب مشابه بخش قبل

⑤

الف)

حول x تیلور می‌نویسیم:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{[2]}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{[3]}(\varepsilon)h^3}{3!} \quad *$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + \frac{4f^{[2]}(x)h^2}{2!} + \frac{8f^{[3]}(\delta)h^3}{3!} \quad **$$

$$A = -f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x) \overset{*,**}{=} -\left(f(x) + 2f'(x)h + \frac{4f^{[2]}(x)h^2}{2!} + \frac{8f^{[3]}(\delta)h^3}{3!}\right)$$

$$+4\left(f(x) + f'(x)h + \frac{f^{[2]}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{[3]}(\varepsilon)h^3}{3!}\right) - 3f(x) =$$

$$-f(x) - 2f'(x)h - 2f''(x)h^2 - \frac{4}{3}f'''(\delta)h^3 + 4f(x) + 4f'(x)h + 2f''(x)h^2 + \frac{2}{3}f'''(\varepsilon)h^3 - 3f(x)$$

$$= 2hf'(x) - \frac{4}{3}f'''(\delta)h^3 + \frac{2}{3}f'''(\varepsilon)h^3$$

$$\frac{A}{2h} = f'(x) - \underbrace{\frac{2}{3}h^2\left(2f^{[3]}(\delta) - f^{[3]}(\varepsilon)\right)}_{h^2 O(C) = O(h^2)} \Rightarrow \frac{A}{2h} \approx f'(x)$$

با خطای $O(h^2)$

ب)

$$\text{تیلور مک‌لورن} \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!} \quad \text{خطا} \sim \frac{f^{(n+1)}(\mu)x^i}{i!}$$

$f(x) = \cos x \qquad f^{(1)}(x) = -\sin x \qquad f^{[2]}(x) = -\cos x \qquad f^{[3]}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(x) = \cos x$

می‌دانیم از بسط تیلور معادل cos برای $n=3$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{f^{[4]}(\mu)x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos\mu\, x^4}{4!}$$

$$\Rightarrow \cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{\cos\mu_h h^4}{4!} + \frac{1}{2}h^2 = 1 - \frac{\cos\mu_h h^4}{4!}$$

حال داریم که $\cos h + \frac{1}{2}h^2 \simeq 1$ با خطای $\frac{\cos \mu_h h^4}{4!}$

حال داریم که $-1 \leq \cos \mu_h \leq 1$ پس $|err| \leq \left| \frac{1 \times h^4}{4!} \right| = \frac{1}{24} h^4$

$$|err(h)| \leqslant \underbrace{c}_{\frac{1}{24}} h^4 \Rightarrow err(h) = O(h^4)$$

پس خطا از $O(h^4)$ است.

درونیابی خطی $(a, f(a)), (b, f(b))$

$a<b$

اثبات:

$$\Rightarrow E_1(x) = \frac{f^{2}(\mu_x)}{2!}(x-a)(x-b)$$

$$|E_1(x)| \le \max_{\mu}\left(\frac{f^{2}(\mu)}{2!}\right) \underbrace{\max_{x\in[a,b]} (x-a)(x-b)}$$

$\max_{\mu} = M$

$\frac{a+b}{2}$ ، max طبق مشتق ✱ $\frac{1}{4}(b-a)^2$

$$|E_1(x)| \le \frac{M}{2}\,\frac{1}{4}(b-a)^2 = \frac{M}{8}(b-a)^2$$

فاصله $h \Leftarrow b-a=h$

$\Delta a, \Delta b$ خطای هر یک

$$\Rightarrow |E_1(x)| \le \frac{M}{8}\left(b+\Delta b-(a+\Delta a)\right)^2$$

$$= \frac{M}{8}\left(h+(\Delta b-\Delta a)\right)^2$$

$$f(x)=e^{x} \Rightarrow f^{(2)}(x)=e^{x} \rightarrow \max_{x\le 1} |e^{x}| = e$$

$$\rightarrow |E_1(x)| \le \frac{e}{8}\left(h+(\Delta b-\Delta a)\right)^2$$

چون تا 8 رقم اعشار رند $10^{-8} > \Delta r \Leftarrow$

$\epsilon = 10^{-8}$

$$|E_1(x)| \le \frac{e}{8}(h+2\epsilon)^2$$

کافیست $\frac{e}{8}(h+2\epsilon)^2 \le 10^{-6} \Leftarrow$

$$h+2\epsilon \le \sqrt{\frac{8\times 10^{-6}}{e}} \Leftarrow h \le \sqrt{\frac{8\times10^{-6}}{e}} - 2\epsilon$$

بنابراین اندازه گام h حداکثر برابر است با:

$$\sqrt{\frac{8\times10^{-6}}{e}} - 2\times10^{-8} \simeq 0.0017155\text{1}$$

ادامه‌ی سوال ۵)

$$|q(\bar{x})| = \left|\left(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) - x_i\right)\left(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) - x_{i+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left|(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i+1})\right| = \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$(a-x)(a-y) \Rightarrow a^2 - ax - ay + xy$

ماکس $\bar{x}$ برابر $\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ است.

$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 : 2a - x - y = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = a$