محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۱**

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ **موعد تحویل: ۸ آبان**

سوال ۱. بسط تیلور تابع $tan^{-1}(x)$ را حول $x. = 0$ بیابید. شما باید جمله کلی برای $P_n(x)$ پیدا کنید، بازه همگرایی آن را مشخص کنید و حد بالای مناسبی برای $|R_n(x)|$ برحسب n ارائه دهید. (فرض کنید که می‌دانید که این تابع روی اعداد حقیقی تحلیلی است)

سوال ۲. فرض کنید می‌خواهیم تابع $f(x)$ را با استفاده از سری مک‌لورن توابع $sin(x)$، $cos(x)$ و $tan^{-1}(x)$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ حساب کنیم. محاسبه کنید که هر کدام از این سه سری را حداقل باید تا چه مرتبه ای بسط دهیم تا خطایِ کلِ محاسبه‌یِ مقدارِ تابع روی کل بازه، از 10^{-5} کمتر شود.

$$f(x) = \frac{4sin^2(x) - cos(x)}{3tan^{-1}(\frac{2x}{\pi\sqrt{3}})}$$

سوال ۳. بسط تیلور تابع زیر را تا چه مرتبه ای حساب کنیم که خطای محاسبه در $x = \frac{\pi}{3}$ کمتر از 10^{-5} شود؟

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

پاسخ:

راه مستقیم و قابل قبول این است که مرتبا مشتق تابع را در یک نقطه غیر صفر حساب کنیم و بسط تیلور و خطای آن را حساب کنیم. راه ساده تر این است که از بسط مک‌لورن تابع سینوس استفاده کنیم:

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

حال با توجه به اینکه سری داده شده alternating است و قدر مطلق هر جمله آن کمتر از جمله قبل است و در حد بینهایت k تمام جملات به صفر میل میکنند (سرعت رشد مخرج به صورت فاکتوریل و سرعت رشد صورت به صورت نمایی است) پس خطای قطع سری در هر k از جمله بعدی کمتر است. به عبارت دیگر:

$$\left|\frac{sin(x)}{x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right| \leq \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!}\right|$$

$$\frac{(\frac{\pi}{3})^{2n+2}}{(\frac{2n+3}{e})^{2n+3}} \leq 10^{-5}$$

$$\frac{e}{2n+3}(\frac{e\pi}{3(2n+3)})^{2n+2} \leq 10^{-5}$$

$$n = ۴ \Rightarrow \frac{۲/۷}{۱۱}\left(\frac{۸/۵۴}{۳۳}\right)^{۱۰} \leq ۱۰^{-۵}$$

سوال ۴. می‌دانیم که فرمول کلی سری مکلورن به شکل

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^{۲} - x^{۳} + ...$$

می‌باشد. بنابراین، سری مکلورن $\frac{۱}{۲+x}$ را پیدا کنید.

سوال ۵.

الف

برای یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f، با استفاده از فرمول‌های تقریب مرکزی، معادله زیر را نشان دهید:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+۲h) + ۴f(x+h) - ۳f(x)}{۲h}$$

و بررسی کنید که خطای تقریب از مرتبه $O(h^{۲})$ است.

ب

با توجه به توسعه سری تیلور برای تابع کوسینوس، تایید کنید:

$$\cos(h) + \frac{۱}{۲}h^{۲} \approx ۱$$

و نشان دهید که این تقریب یک خطای از مرتبه $O(h^{۴})$ دارد.

سوال ۶. فرض کنید یک جدول باید برای تابع $f(x) = e^{x}$ آماده شود، برای حالتی که x در بازه [۰، ۱] است. فرض کنید تعداد اعشاراتی که باید برای هر ورودی آمده باشد، $d \geq ۸$ است، یعنی هر مقدار حداقل به هشت رقم اعشار نمایش داده می‌شود. همچنین تفاوت بین مقادیر x مجاور، یعنی اندازه گام، h است. اندازه گام h چقدر باید باشد تا تضمین شود که درون‌یابی خطی، خطای مطلق حداکثر $۱۰^{-۶}$ برای همه مقادیر x در بازه [۰، ۱] دارد؟

موفق باشید.