محاسبات عددی

تمرین ۵

برهان غنای

400108547

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Ax=b$$

$$\det A = 2((-1)-(-1)) + -6(0-1) + 1(1-0) = 6+1 = 7$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{7} = \frac{2\times0 + 1\times(6+1)}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{7} = \frac{2\times1 + 1\times(-1)}{7} = \frac{1}{7}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{7} = \frac{2\times(-1) + 1\times(2+6)}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

الف)

$$4X_1 + X_2 - 2X_3 = 4$$
$$-X_1 + 4X_2 - X_3 = 0$$
$$X_1 - X_2 + 4X_3 = 0$$

$\rightarrow$

$$X_1^{k+1} = -\frac{1}{4}X_2^k + \frac{1}{2}X_3^k + 1$$
$$X_2^{k+1} = \frac{1}{4}X_1^k + \frac{1}{4}X_3^k$$
$$X_3^{k+1} = -\frac{1}{4}X_1^k + \frac{1}{4}X_2^k$$

$\Big\} f$

$$X^0 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$f \downarrow$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{f}$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{f}$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.5625 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

ب)

$$X_1^{k+1} = -\frac{1}{4}X_2^k + \frac{1}{2}X_3^k + 1$$
$$X_2^{k+1} = \frac{1}{4}X_1^{k+1} + \frac{1}{4}X_3^k$$
$$X_3^{k+1} = -\frac{1}{4}X_1^{k+1} + \frac{1}{4}X_2^{k+1}$$

$\Big\} g$

$$X^0 = \begin{bmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{g}$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 0.8125 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{g}$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1.34375 \\ 0.5390625 \\ 0.79882812 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{g}$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1.26464844 \\ 0.51586914 \\ 0.81280518 \end{bmatrix}$$

ج)

ابتدا جواب معادله را بدست می‌آوریم.

$$Ax=b \implies x=A^{\dagger}b$$

$$A^{\dagger} \simeq \begin{bmatrix} 0.2173913 & -0.02898551 & 0.10144928 \\ 0.04347826 & 0.26086957 & 0.08695652 \\ -0.04347826 & 0.07246377 & 0.24637681 \end{bmatrix}$$

$$x^{*}=A^{\dagger}b = \begin{bmatrix} 1.27536232 \\ 0.52173913 \\ 0.8115942 \end{bmatrix}$$

نقاب‌راين

$$\underset{\text{نقطه‌ی شروع}}{X} - X^{*} = \begin{bmatrix} -0.01071388 \\ -0.0058699 \\ 0.0121097 \end{bmatrix} \rightarrow \|X_{Jacobi} - X^{*}\|_{2} \simeq 0.0122764$$

$$\underset{\text{نقطه‌ی آغازی}}{X} - X^{*} = \begin{bmatrix} -0.02536232 \\ 0.0467608 \\ 0.0615942 \end{bmatrix} \rightarrow \|X_{Jacobi} - X^{*}\|_{2} \simeq 0.07809$$

پس گاوس سیدل تقریب بهتری ازجواب ارائه داده است.

الف)

$$x = 4 + 2y \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x^{k+1} = 4 + y^k \\ y^{k+1} = 3 - 2x^{k+1} \end{array} \right\} g$$

$$y = 3 - 2x$$

$$z^i = \begin{bmatrix} x^i \\ y^i \end{bmatrix}$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{g} \quad z^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow z^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow z^3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \end{bmatrix} \rightarrow z^4 = \begin{bmatrix} -11 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow z^5 = \begin{bmatrix} 29 \\ -55 \end{bmatrix} \rightarrow z^6 = \begin{bmatrix} -51 \\ 105 \end{bmatrix} \qquad \text{واگرا} \quad \text{همگرا نیست}$$

ب)

$$x = \frac{3}{2} - \frac{y}{2} \longrightarrow \quad x^{k+1} = \frac{3}{2} - \frac{y^k}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - 2 \qquad\qquad y^{k+1} = \frac{x^{k+1}}{2} - 2$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z^1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.25 \end{bmatrix} \rightarrow z^2 = \begin{bmatrix} 1.9687 \\ -1.0156 \end{bmatrix} \rightarrow z^3 = \begin{bmatrix} 2.0078 \\ -0.99609 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow z^4 = \begin{bmatrix} 1.9980 \\ -1.0009 \end{bmatrix} \rightarrow z^5 = \begin{bmatrix} 2.0004 \\ -0.9997 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow z^{13} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$$

تا ۴ رقم بامعنا

یعنی به $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ همگرا می شود

$$x = 2$$
$$y = -1$$

ج) برای همگرا کردن گوس سایدل ماتریس A مان باید یا مثبت معین (متقارن) باشد ، و یا strictly or irreducibly diagonally dominant یعنی در هر سطر اندازه عنصر قطر از جمع قدر مطلق بقیه بیشتر باشد .

در الف داریم که
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نخستا جم قطری dominant نست $\Leftarrow$ $a_{12} = |-2| < |1| = a_{11}$ و متقارن هم نست.

در ب:

همینا جم قطری غالب $\Rightarrow$ $|2| > |1|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$|-2| > |1|$

پس ب با می‌دانیم همگرا می‌شود ولی چون ماتریس A الف نه متقارن مثبت معین است و نه قطری غالب پس نمی‌توانیم همگرایی را دانستیم.

$y(0) = 5 \qquad y' = 3e^x + x^2 - 4$

$\dfrac{dy}{dx} = 3e^x + x^2 - 4 \implies dy = (3e^x + x^2 - 4)\,dx \implies$

$\displaystyle\int_0^{y(t)} dy = \int_0^t 3e^x + x^2 - 4\,dx \implies y(t) = \left[3e^x + \dfrac{x^3}{3} - 4x\right]_0^t + \theta$

$\implies y(t) = 3e^t + \dfrac{t^3}{3} - 4t - (3\times 1 + 0 - 0) + \theta = 3e^t + \dfrac{t^3}{3} - 4t + \theta$

$t = 0 : \quad 5 = y(0) = 3e^0 + 0 - 0 + \theta = 3 + \theta \implies 5 = 3 + \theta \implies \theta = 2$

$\rightsquigarrow \quad y(x) = 3e^x + \dfrac{x^3}{3} - 4x + 2$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)) \qquad : \text{روش آپ رونگه کتا} \text{ مرتبه دوم}$$

$$X_0 = 0 \qquad y_0 = -1 \qquad h = 0.1 \qquad\qquad y' = f(x,y) = -2x - y$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

نمونه از (رلت) RU :
$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_{\frac{1}{2}})$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2$$

اینجا میشود midpoint

با انتخاب $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \delta_2 = h$: میشود modified Euler

کل روابط
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))]$$

$$\text{مقدار } = \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

کم معادله جواب X هرها نقشه نزول (O)از اساس .

مرحله ۱ :
$$k_1 = 0.1 (-2x - y) = 0.1$$
$$k_2 = 0.1 (-2(x + 0.05) - y - \frac{k_1}{2}) = 0.085$$

$\overset{-1 + k_2}{\Longrightarrow}$ $X \simeq 0.1$
    $y = -0.915$

مرحله ۲ :
$$k_1 = 0.1 (-2x - y) = 0.0715$$
$$k_2 = 0.1 (-2(x + 0.05) - y - \frac{k_1}{2}) = 0.0579$$

$\overset{-0.915 + k_2}{\Longrightarrow}$ $X \simeq 0.2$
    $y = -0.8571$

مرحله ۳ :
$$k_1 = 0.1 (-2x - y) = 0.0457$$
$$k_2 = 0.1 (-2(x + 0.05) - y - \frac{k_1}{2}) = 0.0334$$

$\overset{-0.8571 + k_2}{\Longrightarrow}$ $X \simeq 0.3$
    $y = -0.8237$

مرحله ۱ :
$$k_1 = 0.1 (-2x - y) = 0.0224$$
$$k_2 = 0.1 (-2(x + 0.05) - y - \frac{k_1}{2}) = 0.0112$$

$\overset{-0.8237 + k_2}{\Longrightarrow}$ $X \simeq 0.4$
    $y = -0.8124$

$k_1 = 0.1 (-2x - y) = 0.0012$ $\quad\quad\quad$ $\sim 0.8124 + k_2$

$k_2 = 0.1 (-2(x + 0.05) - y - \frac{k_1}{2}) = -0.0088$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x \approx 0.5$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $y = -0.8213$

$\longrightarrow$ $\quad\quad$ $y(0.5) \sim -0.8213$