تمرین چهارم تشریحی

محاسبات عددی

پرهام رضایی

400108547

1

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\quad a = 1 \quad b = 2$ الف)

$f(a) = -5 \quad f(b) = 14$

1 گام: $p_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = 1.5^3 + 4 \times 1.5^2 - 10 = 2.375 \rightsquigarrow \text{sign}(f(\frac{3}{2})) = -\text{sign}(f(a)) \Rightarrow$ بازه $[\overset{a}{1}, \overset{b}{\tfrac{3}{2}}]$

2 گام: $P_2 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = 1.25 \quad f(a) = -5 \quad f(b) = 2.375$

$f(P_2) = 1.25^3 + 4 \times 1.25^2 - 10 = -1.796875$

$\text{sign } f(p_2) \neq \text{sign } f(b) \Rightarrow a, b = 1.25, 1.5$

3 گام: $P_3 = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375 \quad f(P_3) = 1.375^3 + 4 \times 1.375^2 - 10 = 0.162109375$

$\text{sign } f(p_3) \neq \text{sign } f(a) \Rightarrow a, b = 1.25, 1.375$

4 گام: $P_4 = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125 \quad \begin{matrix} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix} \quad f(1.3125) = 1.3125^3 + 4 \times 1.3125^2 - 10$

$\approx -0.8483886 < 0$

$\Rightarrow \text{sign } f(b) \neq \text{sign } f(p_4) \Rightarrow a, b = 1.3125, 1.375$

5 گام: $P_5 = \frac{1.3125 + 1.375}{2} = 1.34375 \quad \begin{matrix} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix} \quad f(P_5) = 1.34375^3 + 4 \times 1.34375^2 - 10$

$\Rightarrow \text{sign } f(b) \neq \text{sign } f(p_5) \Rightarrow a, b = 1.34375, 1.375 \quad \approx -0.350982 < 0$

6 گام: $P_6 = \frac{1.34375 + 1.375}{2} = 1.359375 \quad \begin{matrix} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix} \quad f(P_6) \approx -0.0964 < 0$

$\Rightarrow \text{sign } f(p_6) \neq \text{sign}(f(b)) \Rightarrow a = 1.359375 \quad b = 1.375$

گام ۷ : $P_7 = \frac{1.359375 + 1.375}{2} = 1.3671875$ $\quad f(a)<0,\ f(b)>0 \quad f(P_7) \approx 0.0323$

$\Rightarrow \text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(P_7) \Rightarrow a = 1.359375 \quad b = 1.3671875$

تخمین این مرحله : 1.3671875

* یک مرحله دیگر می‌رفتیم میانگین a,b یعنی 1.359375 می‌شد.

ب)

اگر ابتدا a,b داشته باشیم با f علامت مختلف هر مرحله بازه $\frac{1}{2}$ می‌شود

پس کافی است برای اطمینان از دقت 10^{-2} یعنی خطا $< 10^{-2}$ ، $\frac{|b-a|}{2^k} < 10^{-2}$ بشود که k تعداد مراحل است.

$f(x) = x - e^{-x}$

داریم که $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ $\quad f(0) = 0 - e^0 = -1$ پس علامت مختلف داشتیم. حال

$10^{-2} > \frac{b-a}{2^k} \Rightarrow 10^{-2} > \frac{1-0}{2^k} \Rightarrow 2^k > 100 \Rightarrow k > \log 100 \xRightarrow{k\ \text{صحیح}} k \geq 7$

پس 7 مرحله الگوریتم را اجرا می‌کنیم

* اعداد f را با تخمین حساب کردم چون فقط علامتش مهمه

	a	b	p (میانگین)	f(a)	f(b)	f(p)	بازه جدید
1	0	1	0.5	-1	0.6321	-0.1065	[P,b]
2	0.5	1	0.75	-0.1065	0.6321	0.2776	[a,P]
3	0.5	0.75	0.625	-0.1065	0.2776	0.0897	[a,P]
4	0.5	0.625	0.5625	-0.1065	0.0897	-0.0072	[P,b]
5	0.5625	0.625	0.59375	-0.0072	0.0897	0.0414	[a,P]
6	0.5625	0.59375	0.578125	-0.0072	0.04149	0.0171	[a,P]
7	0.5625	0.578125	0.5703125	-0.0072	0.0171	0.0049	[a,P]
	0.5625	0.5703125	0.56640625	-0.0072	0.0049	-0.0011	[a,P]

$\rightsquigarrow$ پاسخ: $P = 0.5703125$

دقت 10^{-2} است چرا که می‌دانیم ریشه در بازه $R \in [0.5625, 0.5703125]$ است

پس $|R-P|$ حداکثر اندازه نصف اندازه بازه است

P وسط بازه

$$\Leftrightarrow \frac{0.5703125 - 0.5625}{2} \simeq 0.0039 < 10^{-2}$$

نیوتن: $\sqrt[3]{48}$ ریشه x^3-48 است

$f(x)=x^3-48 \qquad f'(x)=3x^2$

* می‌دانیم $27<48<64 \Rightarrow 3<\sqrt[3]{48}<4$

$$\Rightarrow x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^3-48}{3x_i^2}$$

با ۴ شروع می‌کنیم و

iteration		x^3-48	$3x^2$	
i	x	$f(x)$	$f'(x)$	$x-\frac{x^3-48}{3x^2}$
1	4	16	48	$3.\overline{6}$
2	$3.\overline{6}$	1.2962	$40.\overline{3}$	3.63452
3	3.63452	0.0113	39.6293	3.6342412
4	3.6342412	8.91103e-7	39.623127	3.6342411
5	3.6342411	~0	39.6231269	3.6342411

عدد کانورج تا ۴ رقم اعشار

عدد دقیق تا ۱۴ رقم اعشار کانورج کرد.

* عملاً از گام 5 جدول f صفر شده بود اگر فقط ترشلد 10^{-4} بزاریم.

در واقع اگر تا ۴ رقم اعشار بگیریم بعد ۳ گام کانورج کردیم.

روش نقطه ثابت :

باید $g(x)=x$ انتخاب کنیم که $g:[a,b]\to[a,b]$ و $\exists k\in\mathbb{R}^+ \; g'(x)\le k<1 \quad \forall x\in(a,b)$

مثال یک g : $g(x)=\dfrac{48-x^3+30x}{30}$

$g(x)=x \Rightarrow \dfrac{48-x^3}{30}=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{48}\,*$

در این صورت داریم که $g:[3,4]\to[3,4]$ همچنین $g'(x)=\dfrac{-3x^2+30}{30}$

x^2 صعودی در $x>0$

$\Rightarrow \dfrac{-18}{30}=\dfrac{30-48}{30}<g'(x)<\dfrac{30-27}{30}=\dfrac{3}{30} \Rightarrow \underset{x\in(3,4)}{|g'(x)|}\le\dfrac{18}{30}<1$

حال با الگوریتم داریم که $x_0=4$

گام	x	$g(x)$
1	4	$3.4\overline{6}$
2	3.46	3.6779
3	3.6779	3.6195
4	3.6195	3.6388
5	3.6388	3.6327
6	3.6327	3.6347
7	3.6347	3.6340
8	3.6340	3.6342
9	3.6342	3.6342

بعد از 8 گام تا 4 رقم تغییری نداشت ⟵

مثال دوم g: $g(x) = \frac{2x^3+48}{3x^2}$. این g هم $g'(x) \le k < 1$ و $g:[3,4] \to [3,4]$

است.

$* \; g(x) = x \Rightarrow \frac{2x^3+48}{3x^2} = x \Rightarrow 2x^3+48-3x^3=0$

دوباره الگوریتم را اجرا می‌کنیم $\Rightarrow x^3 = 48 \Rightarrow x = \sqrt[3]{48}$

گام	x	$g(x)$
1	4	$3.\overline{6}$
2	$3.\overline{6}$	3.6345
3	3.6345	3.6342
4	3.6342	3.6342

اگر تا ۴ رقم اعشار بخواهیم مثل نیوتون بعد 3 گام به مقدار تابع خروج رسیدیم.

* دقت کنید که عبارت بالا $g(x) = \frac{2x^3+48}{3x^2} = x - \frac{x^3-48}{3x^2} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

دلیل یکسان شدن آن است که اساساً نیوتون در اینجا حالت خاصی از روش نقطه ثابت بود چرا که تابع نیوتون در خاصیت‌های لازم برای g نقطه ثابت صدق می‌کرد.

مقایسه: همانطور که مشاهده کرد روش نقطه ثابت نیازمند تعداد ایتریشن‌های بیشتری برای کانورج کردن است معمولاً. همچنین برخلاف نیوتون که برای تابع f, f' را داریم برای نقطه ثابت روش‌های انتخاب g مختلف داریم. البته در محاسبه یک مقدار مثل $\sqrt[3]{48}$ هردو این ویژگی را دارند.

بنابراین توقع داریم در اینجا با انتخاب g درست تعداد گام‌ها کم شه ولی در کل نیوتون قوی‌تره چون این شرایط بازه مشتق نقطه ثابت رو نیاز نداره، حساسیت نقطه اولیه هم کمتره.

روش نیوتون : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x_n) = x_n^2 - a \qquad f'(x_n) = 2x_n$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \left(\frac{x_n}{2} - \frac{a}{2x_n}\right) = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

این عبارت که حالت ساده‌ای از مرحله نیوتون رفسون در الگوریتم

ریشه یابی Heron استفاده می‌شود. [نام دیگر آن Babylonian Method است.]

این الگوریتم می‌گوید که برای $S \in \mathbb{R}^+$ ، تخمین اولیه $x_0 > 0$ با الگوریتم ایتریتیو

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n}\right)$$

داریم که $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{S}$

دلیل کار کردن این الگوریتم : اگر تخمین الان x باشه و ϵ ارورمان باشه ← $S = (x+\epsilon)^2$

$$\Rightarrow S = (x+\epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 \rightarrow \epsilon = \frac{S - x^2}{2x+\epsilon} \approx \frac{S-x^2}{2x}$$ (چون $\epsilon \ll x$)

$$\Rightarrow x + \epsilon \approx x + \frac{S-x^2}{2x} = \frac{S+x^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{S}{x}\right) = x$$ جدید من

سوال 5

روش ژاکوبی :

داریم که : $x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)}\right) + b_i \right] \qquad i = 1, \dots, n$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5.51}\left(20 - 0.86 x_2^k - 0.22 x_3^k\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8.86}\left(29.3 - 0.76 x_1^k - 1.42 x_3^k\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5.13}\left(22 - 0.03 x_1^k - 0.58 x_2^k\right)$$

$x^i = [x_1^i \;\; x_2^i \;\; x_3^i]$

x مرحله i

(منظور توان نیست)

تا 4 رقم اعشار نوشتم :

$$x^0 = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$x^1 = [3.6297 \quad 3.3069 \quad 4.2884]$$

$$x^2 = [2.9423 \quad 2.3083 \quad 3.8933]$$

$$x^3 = [3.1140 \quad 2.4306 \quad 4.0103]$$

$$x^4 = [3.0902 \quad 2.3971 \quad 3.9954]$$

$$x^5 = [3.0960 \quad 2.4015 \quad 3.9994]$$

دقت 10^{-2} و 5 مرحله

روش گاوس- سیدل :

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^k) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{k-1}) + b_i\right]$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5.51}\left(20 - 0.86x_2^k - 0.22x_3^k\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8.86}\left(29.3 - 0.76x_1^{k+1} - 1.42x_3^k\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5.13}\left(22 - 0.03x_1^{k+1} - 0.58x_2^{k+1}\right)$$

$x^i = [x_1^i \quad x_2^i \quad x_3^i]$

x مرحله i

$x^0 = [0, 0, 0]$

$x^1 = [3.6297 \quad 2.9956 \quad 3.9285]$

$x^2 = [3.0063 \quad 2.4195 \quad 3.9973]$

$x^3 = [3.0925 \quad 2.4010 \quad 3.9989]$ $\rightsquigarrow$ دقت 10^{-2}

$x^4 = [3.0963 \quad 2.4006 \quad 3.9989]$

$x^5 = [3.0964 \quad 2.4005 \quad 3.9989]$ $\rightsquigarrow$ 5 مرحله

$x^* = [3.0954165 \quad 2.40055514 \quad 3.99898938]$ $\leftarrow$ * پاسخ دقیق محاسبه inv

$Ax=b \rightarrow x=A^{-1}b$

سوال ۶

روند حذف گاوسی تبدیل ماتریس به وارون را انجام می‌دهیم و چون
فقط λe_i ها دترمینان را λ برابر و جابجایی‌ها دترمینان را -1 برابر می‌کنند
با این احتساب دترمینان را حساب می‌کنیم.
دترمینان را با d نمایش می‌دهیم:

$$A=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4&4&1&0&1&0&0&0\\ 2&3&0&2&0&1&0&0\\ 2&0&3&1&0&0&1&0\\ 2&1&3&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\frac{1}{4}d_0} \left[\begin{array}{cccccccc} 1&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0&0&0\\ 2&3&0&2&0&1&0&0\\ 2&0&3&1&0&0&1&0\\ 2&1&3&3&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A_{i\neq 1}-a_{i1}A_1} \left[\begin{array}{cccccccc} 1&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&-2&\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&1&0\\ 0&-1&\frac{5}{2}&3&-\frac{1}{2}&0&0&1 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{i\neq 2}-a_{i2}A_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1&0&\frac{3}{4}&-2&\frac{3}{4}&-1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&0&\frac{3}{2}&5&-\frac{3}{2}&2&1&0\\ 0&0&2&5&-1&1&0&1 \end{array}\right] \underset{\frac{2}{3}d_1}{\overset{A_3\times\frac{2}{3}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccccccc} 1&0&\frac{3}{4}&-2&\frac{3}{4}&-1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&0&1&\frac{10}{3}&-1&\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&0\\ 0&0&2&5&-1&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A_{i\neq 3}-a_{i3}A_3} \left[\begin{array}{cccccccc} 1&0&0&-\frac{9}{2}&\frac{3}{2}&-2&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&\frac{11}{3}&-1&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&1&\frac{10}{3}&-1&\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&0\\ 0&0&0&-\frac{5}{3}&1&-\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}&1 \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{5}d_2}{\overset{A_4\times-\frac{3}{5}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccccccc} 1&0&0&-\frac{9}{2}&\frac{3}{2}&-2&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&\frac{11}{3}&-1&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&1&\frac{10}{3}&-1&\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&0\\ 0&0&0&1&-\frac{3}{5}&1&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$A_{i\neq 4} - a_{i4}A_{4}$
$\sim$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{5}{2} & \frac{31}{10} & -\frac{27}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & -2 & -\frac{13}{3} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{5}{2} & \frac{31}{10} & -\frac{27}{10} \\ \frac{6}{5} & -2 & -\frac{13}{3} & \frac{11}{5} \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

چک با ماشین حساب $\longrightarrow A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

در مراحل تبدیل $A \rightsquigarrow I$ ما دترمینان را ضریب $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$ کردیم
طبق تغییرات λA_i ها بنابراین

$$\det(A) \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \det(I) = 1 \Rightarrow$$

$$\det(A) = \frac{\cancelto{2}{4}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{-5}{\cancel{3}} = -10$$