Alg-2

💡 x, y, z are distinct integers. Prove $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ is divisible by $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Solution:

set

$a=x-y$, $b=y-z$, $z-x=-(a+b)$

$a^5+b^5-(a+b)^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)-(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=(a+b)(-5a^3b-5a^2b^2-5ab^3)=5ab(a+b)(-a^2-ab-b^2)$

https://artofproblemsolving.com/community/q1h1575487p9695453

https://artofproblemsolving.com/community/q1h1575487p9695453

💡 $(2+\sqrt{3})^n=5042+b\sqrt{3}$ such that n is natural and b is an integer. Find b.

Solution:

Notice $(2-\sqrt{3})^n=5042-b\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(5042+b\sqrt{3})(5042-b\sqrt{3}) \implies [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^n=(5042^2-3b^2)$

so $(4-3)^n=5042^2-3b^2 \implies 1=25421764-3b^2 \implies b^2=8473921 \implies b=2911$

https://artofproblemsolving.com/community/q2h72293p419115

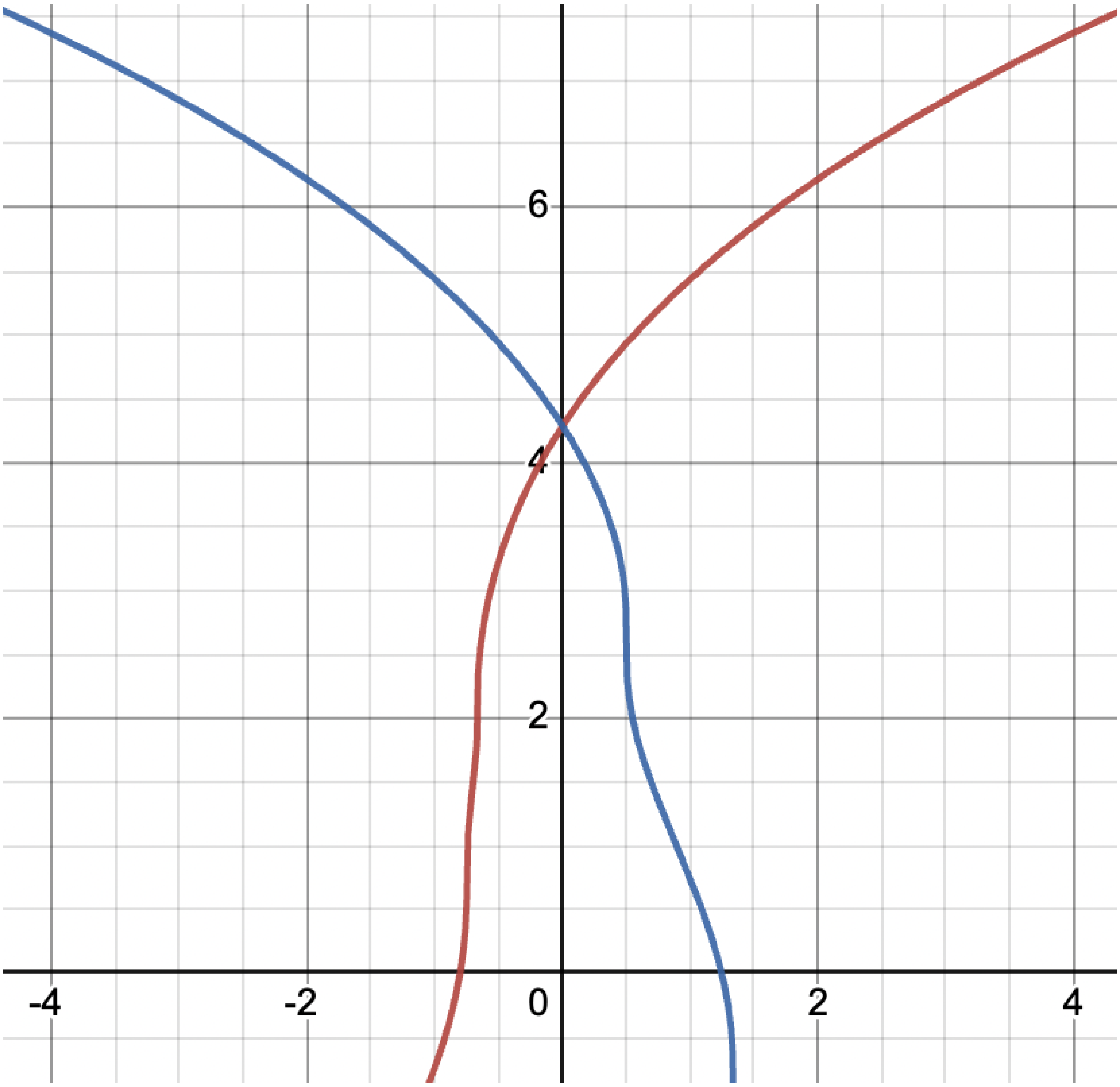
https://artofproblemsolving.com/community/q2h72293p419115

💡 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. k is an odd natural number. Solve the equation for x: $\sqrt[k]{a+bx} + \sqrt[k]{b+cx} + \sqrt[k]{c+ax} = \sqrt[k]{b-ax} + \sqrt[k]{c-bx} + \sqrt[k]{a-cx}$

Solution:

$x = 0$ is a solution.

LHS is increasing. RHS is decreasing… so there are no more solutions… sample :



💡 $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ and $abc = 1$. Find a, b, c

Solution:

$c = \frac{1}{ab} \implies a + b + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab \implies (a-1)(b-a)(ab-1) = 0 \implies$ at least one of a, b, c are 1.

[I said by mistake that a,b,c = 1]

https://artofproblemsolving.com/community/q3h1681076p10717542

https://artofproblemsolving.com/community/q3h1681076p10717542

💡 Find maximum $x > 1$ that $\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

Solution:

set $\frac{x^2}{x-1} = a,\ \sqrt{x-1} = b,\ \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = c$

becomes the previous problem… check a or b or c = 1 and find the max x…

💡 a, b are natural numbers. Prove $\frac{ab(a^2+b^2)}{a+b} \geq \sqrt[a+b]{a^{3b}b^{3a}}$

Solution:

AM.GM : $a * b^3 + b * a^3 \geq (a+b)\sqrt[a+b]{(b^3)^a(a^3)^b}$

💡 $a \in \mathbb{R}^+$ s.t $a \geq 3$. find the minimum of $S = a + \frac{1}{a}$

Solution:

اثبات نادرست:

$$S=a+\frac{۱}{a}\geq ۲\sqrt{a.\frac{۱}{a}}=۲\ \Rightarrow\ \min S=۲$$

علت: طبق حالت تساوی در نامساوی حسابی هندسی، $S=۲\ \Leftrightarrow\ a=\frac{۱}{a}$ که در نتیجه $a=۱$
باید باشد و چون در فرض ما $a\geq ۳$ است پس حالت $S=۲$ رخ نخواهد داد.
تلاش برای حدس زدن کم‌ترین مقدار ممکن S:

a	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	$\cdots$	۳۰
$\frac{۱}{a}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۱}$	$\cdots$	$\frac{۱}{۳۰}$
S	$۳+\frac{۱}{۳}$	$۴+\frac{۱}{۴}$	$۵+\frac{۱}{۵}$	$۶+\frac{۱}{۶}$	$۷+\frac{۱}{۷}$	$۸+\frac{۱}{۸}$	$۹+\frac{۱}{۹}$	$۱۰+\frac{۱}{۱۰}$	$۱۱+\frac{۱}{۱۱}$	$\cdots$	$۳۰+\frac{۱}{۳۰}$

از مشاهده‌ی جدول حدس می‌زنیم، کم‌ترین مقدار ممکن برای S در حالتی است که $a=۳$ باشد و
در نتیجه $\min S=۳+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$ باشد.
حال با توجه به این‌که در نامساوی حسابی ـ هندسی، حالت تساوی زمانی است که همه‌ی متغیرها
برابر باشند، برای این‌که در $a=۳$، کم‌ترین مقدار S به‌دست بیاید، باید در نامساوی‌هایی که به کار می‌گیریم،

$a=۳$ حالت تساوی تمام این نامساوی‌ها باشد. بنابراین نمی‌توانیم، نامساوی حسابی ـ هندسی را برای
a و $\frac{۱}{a}$ به کار بگیریم زیرا $\frac{۱}{۳}\neq ۳$. برای رفع این مشکل ضرایبی را به متغیرها نسبت می‌دهیم. در این‌جا
باید ضریب α را طوری تعیین کنیم که بتوانیم برای $(\alpha a,\frac{۱}{a})$ نامساوی حسابی هندسی بزنیم.

$$\alpha a=\frac{۱}{a}\overset{a=۳}{\Rightarrow}\alpha=\frac{۱}{۹}$$

حال S را با توجه به ضریبی که به‌دست آوردیم، بازنویسی می‌کنیم:

i. $S=a+\frac{1}{a}=(\frac{1}{9}\times a+\frac{1}{a}+\frac{8}{9}\times a)$

ii. $\frac{1}{9}a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{1}{9}\times a\times\frac{1}{a}}=\frac{2}{3}$

iii. $a\geq 3\implies\frac{8}{9}\times a\geq\frac{8}{3}$

i,ii,iii $\implies S\geq\frac{10}{3}$

for $a=3$ $S=\frac{10}{3}\implies$ it is in fact the minimum.

💡 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ s.t $a+b+c \leq \dfrac{3}{2}$. find the minimum of $S = a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

حل نادرست:

$$S = a+b+c+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} \geq ۶\sqrt[۶]{abc.\frac{۱}{a}.\frac{۱}{b}.\frac{۱}{c}} = ۶ \Rightarrow \min S = ۶$$

علت:

حالت تساوی : $a=b=c=\dfrac{۱}{a}=\dfrac{۱}{b}=\dfrac{۱}{c} \Rightarrow a=b=c=۱$

$\Rightarrow a+b+c > \dfrac{۳}{۲}$ تناقض

حدس می‌زنیم حالت مینیمم برای $a=b=c=\dfrac{۱}{۲}$ باشد.

$$\begin{cases} a=b=c=\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۱}{\alpha a}=\dfrac{۱}{\alpha b}=\dfrac{۱}{\alpha c}=\dfrac{۲}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{\alpha}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=۴$$

$$\Rightarrow S = a+b+c+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$$

$$= (a+b+c+\frac{۱}{۴a}+\frac{۱}{۴b}+\frac{۱}{۴c})+\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})$$

$$\begin{cases} a+b+c+\dfrac{۱}{۴a}+\dfrac{۱}{۴b}+\dfrac{۱}{۴c} \geq ۶\sqrt[۶]{abc.\dfrac{۱}{۴a}.\dfrac{۱}{۴b}.\dfrac{۱}{۴c}} = ۳ \\ \dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{b}+\dfrac{۱}{c} \geq ۳ \times \sqrt[۳]{\dfrac{۱}{a}.\dfrac{۱}{b}.\dfrac{۱}{c}} = \dfrac{۳}{\sqrt[۳]{abc}} \geq \dfrac{۳}{\frac{a+b+c}{۳}} \geq \dfrac{۳}{\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}} = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \geq ۳+\frac{۳}{۴}\times ۶ = \frac{۱۵}{۲}$$

برای $a=b=c=\dfrac{۱}{۲}$ نیز مقدار S برابر $\dfrac{۱۵}{۲}$ خواهد شد. پس جواب مسئله $\dfrac{۱۵}{۲}$ است.

Math Message Boards FAQ & Community Help | AoPS

Math texts, online classes, and more for students in grades 5-12.

https://artofproblemsolving.com/community/q3h555202p3226172