ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Лекция 3

Лекция 3

- Проверка гипотез
- Проверка нормальности распределения результатов наблюдений

Проверка гипотез. Этапы

1. Формулировка основной гипотезы H_0 и конкурирующей гипотезы H_1.
2. Задание уровня значимости α, на котором в дальнейшем и будет сделан вывод о справедливости гипотезы.
3. Расчёт статистики ϕ критерия такой, что:
   - её величина зависит от исходной выборки
   - сама статистика ϕ должна подчиняться какому-то известному закону распределения
   - по её значению можно делать выводы об истинности гипотезы H_0
4. Построение критической области.
5. Вывод об истинности гипотезы. Решение об отвержении (или принятии) выдвинутой гипотезы H_0.

Нулевая гипотеза H_0

Нулевая гипотеза – это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияние фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик и т.п.

Например, $\mu_1 = \mu_2$

Уровень значимости. Критическая область

Уровень значимости α — это такое (достаточно малое) значение вероятности события, при котором событие уже можно считать неслучайным.

$$\alpha=0.01,\ 0.02,\ 0.05$$

При попадании статистики критерия ϕ в критическую область, нулевая гипотеза отклоняется.

Виды критической области

Левосторонняя критическая область

$$(-\infty, \phi_\alpha)$$

где

$$P(\phi < \phi_\alpha) = \alpha$$

Виды критической области

Правосторонняя критическая область

$$(\phi_{1-\alpha}, \infty)$$

где

$$P(\phi < \phi_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

Виды критической области

Двусторонняя критическая область

$$\left(-\infty, \phi_{\alpha/2}\right) \cup \left(\phi_{1-\alpha/2}, \infty\right)$$

где

$$P\left(\phi < \phi_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}, P\left(\phi < \phi_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

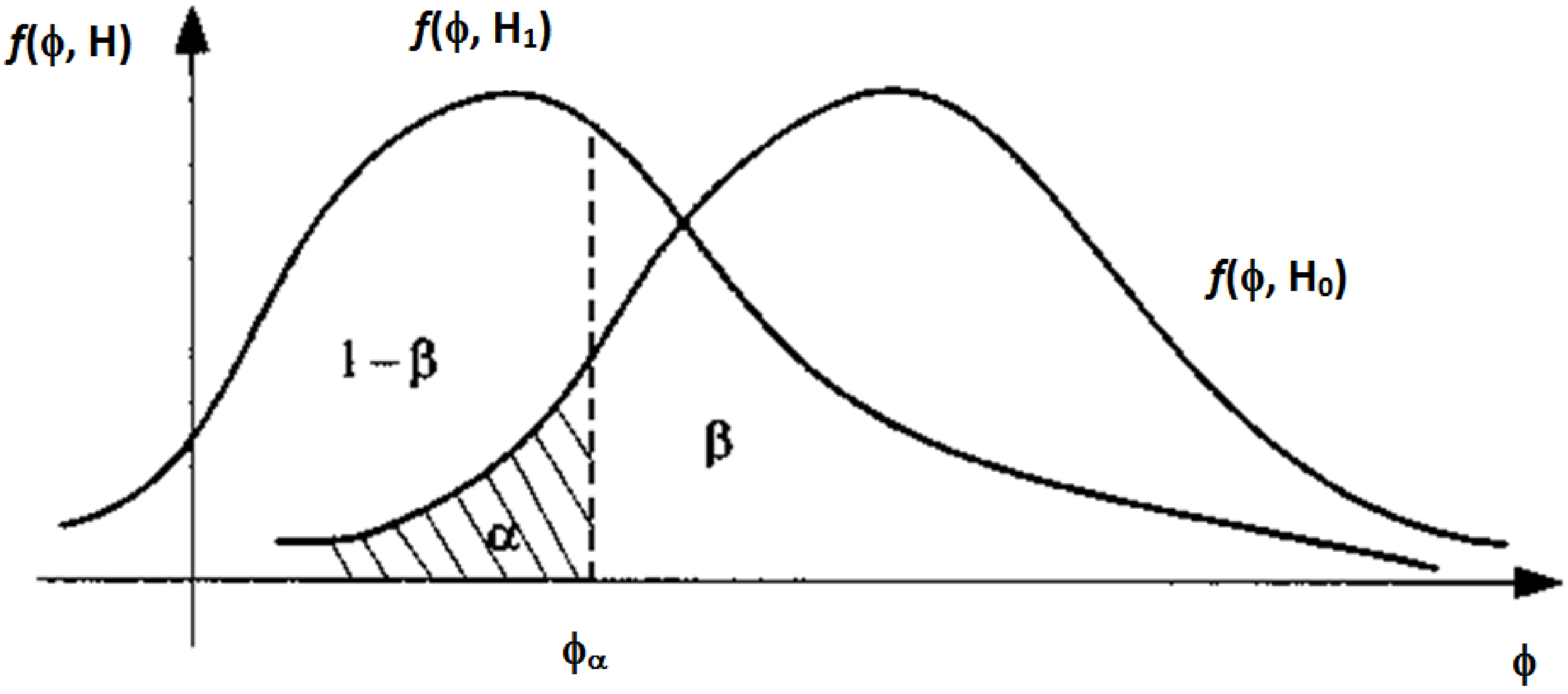
Уровень значимости. Мощность критерия

Уровень значимости α — это такое (достаточно малое) значение вероятности события, при котором событие уже можно считать неслучайным.

Уровень значимости α — вероятность отклонить нулевую гипотезу H_0, когда на самом деле она верна.

Мощность критерия $1-\beta$ — вероятность отклонить гипотезу H_0, если на самом деле верна альтернативная гипотеза H_1.

Уровень значимости. Мощность критерия



Проверка гипотез. Ошибки первого и второго рода

Ошибки при проверке гипотез

	Решение	
	Принять H_0	Принять H_1
Справедлива H_0	Правильное с вероятностью $1 - \alpha$	Ошибочное с вероятностью α
Справедлива H_1	Ошибочное с вероятностью β	Правильное с вероятностью $1 - \beta$

Проверка гипотез. Ошибки первого и второго рода

Ошибки при проверке гипотез

	Решение	
	Принять H_0	Принять H_1
Справедлива H_0	Правильное с вероятностью $1-\alpha$	Ошибочное с вероятностью α
Справедлива H_1	Ошибочное с вероятностью β	Правильное с вероятностью $1-\beta$

Ошибка первого рода

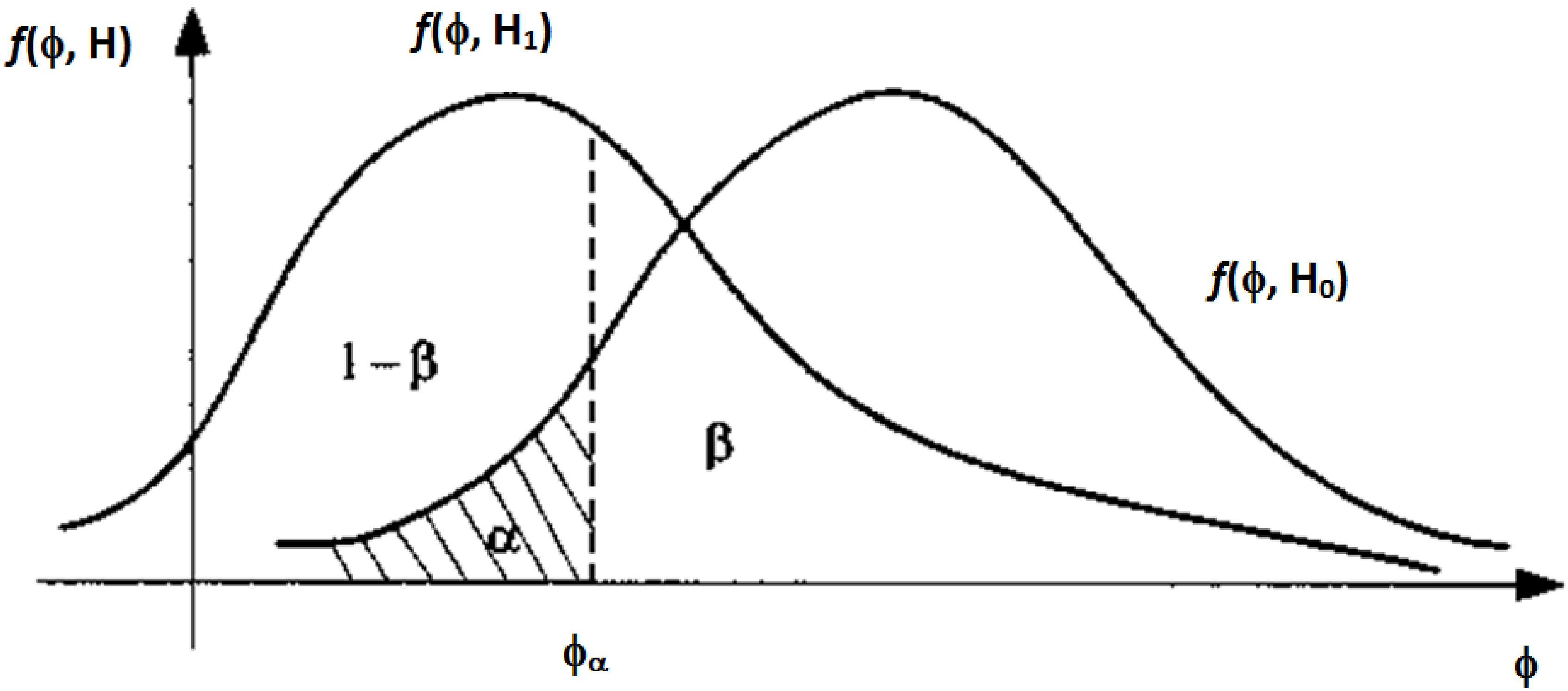
Проверка гипотез. Ошибки первого и второго рода

Ошибки при проверке гипотез

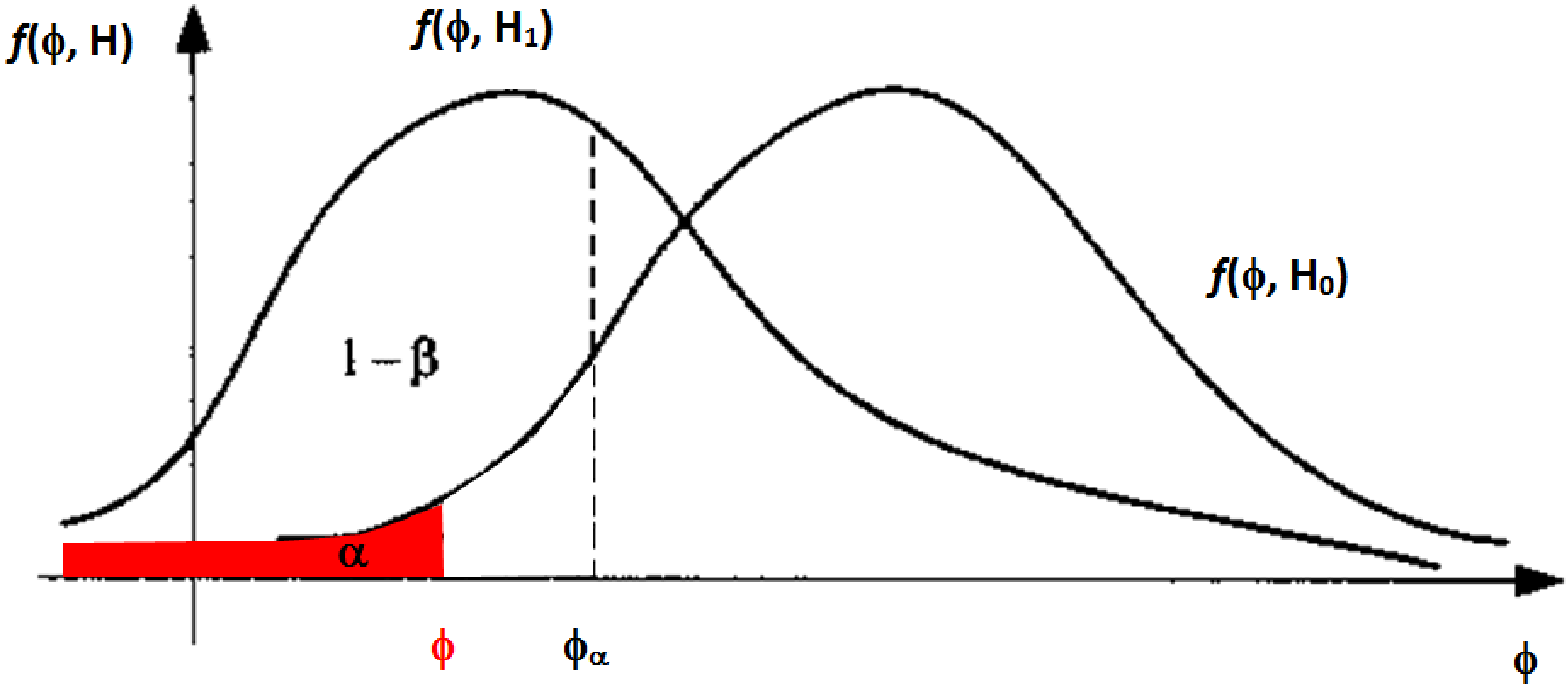
	Решение	
	Принять H_0	Принять H_1
Справедлива H_0	Правильное с вероятностью $1 - \alpha$	Ошибочное с вероятностью α
Справедлива H_1	Ошибочное с вероятностью β	Правильное с вероятностью $1 - \beta$

Ошибка второго рода

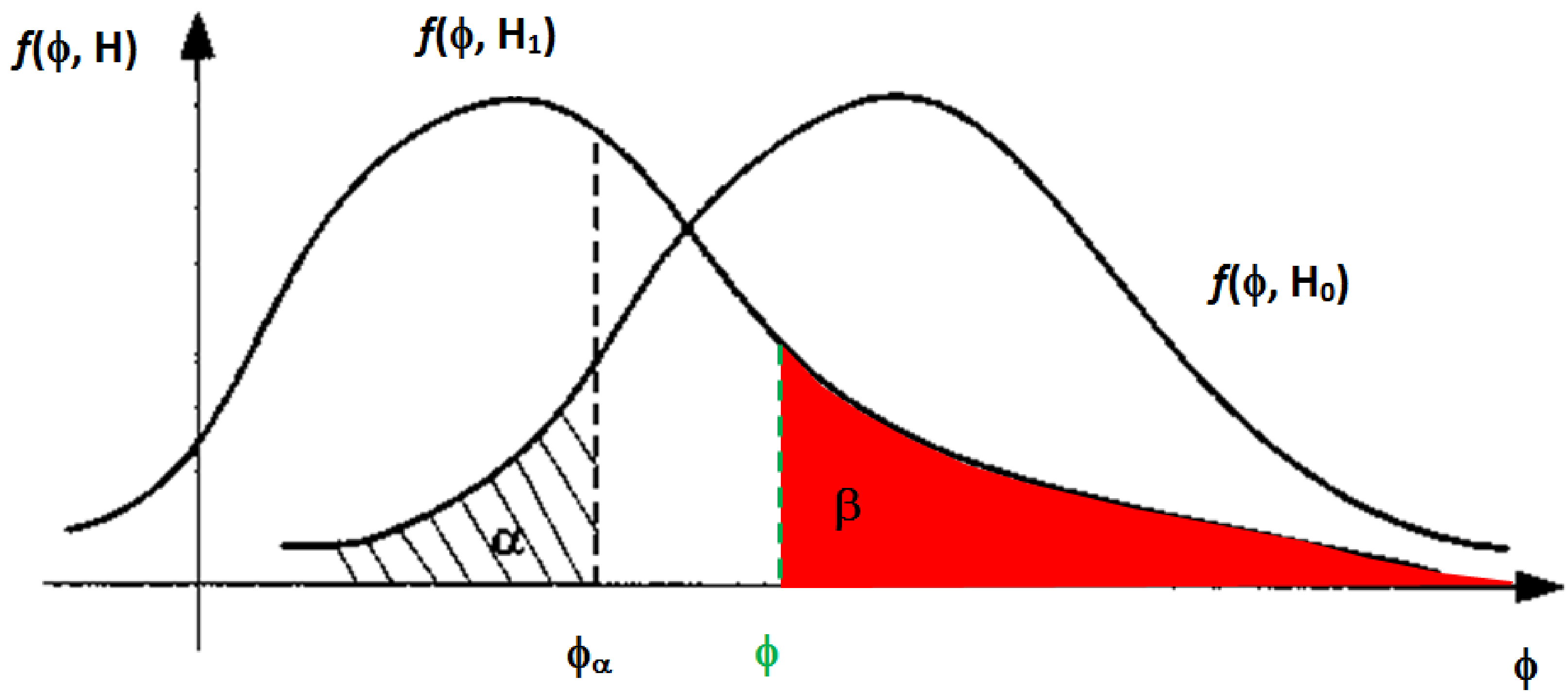
Ошибки первого и второго рода



Ошибки первого рода

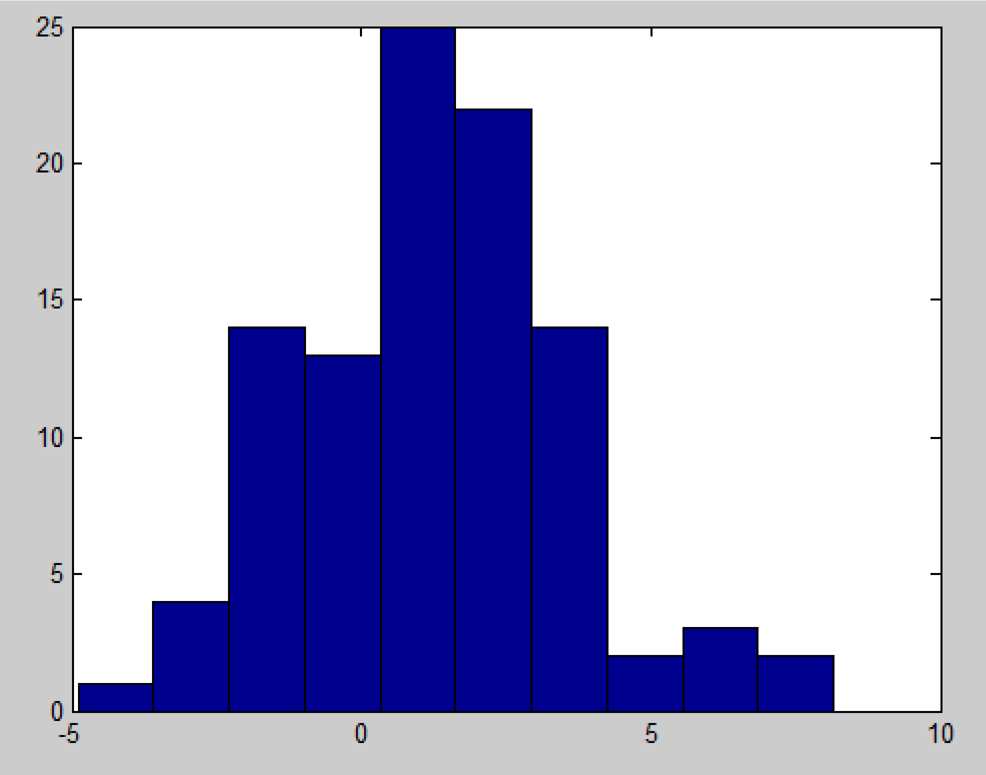


Ошибки второго рода



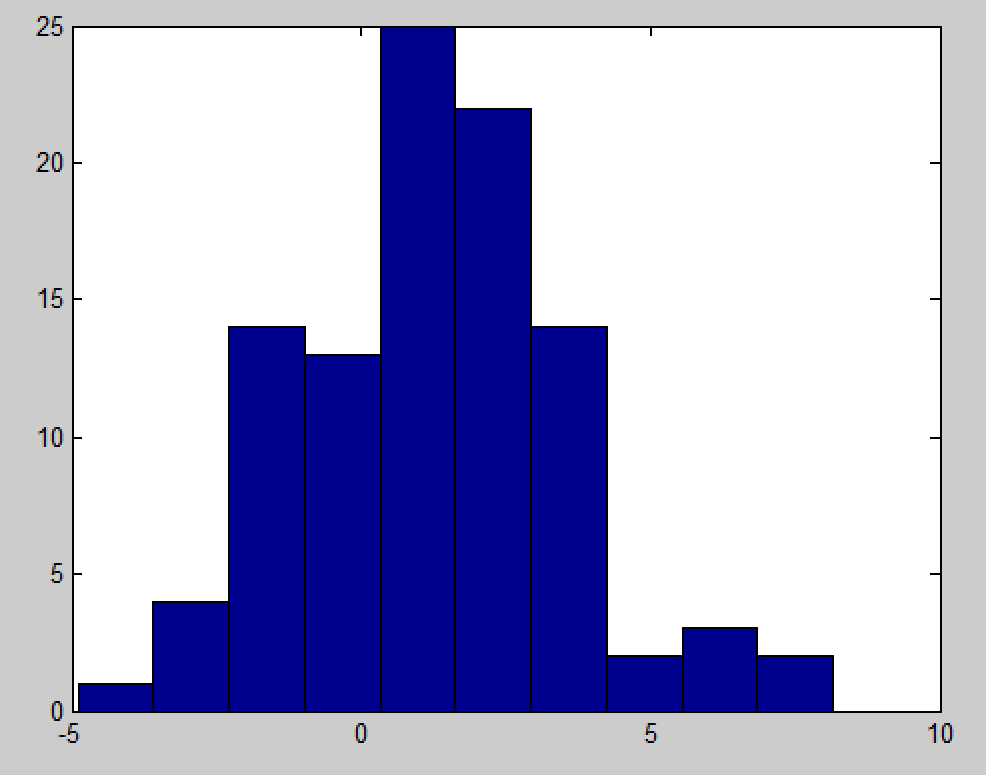
Проверка нормальности распределения

$$\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$$



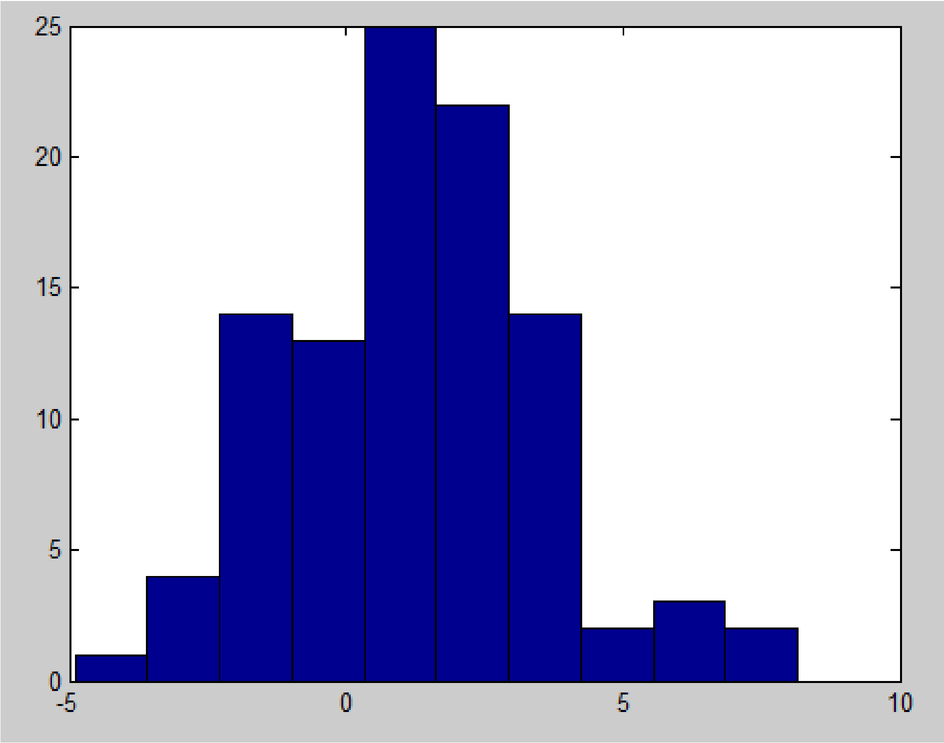
Проверка нормальности распределения

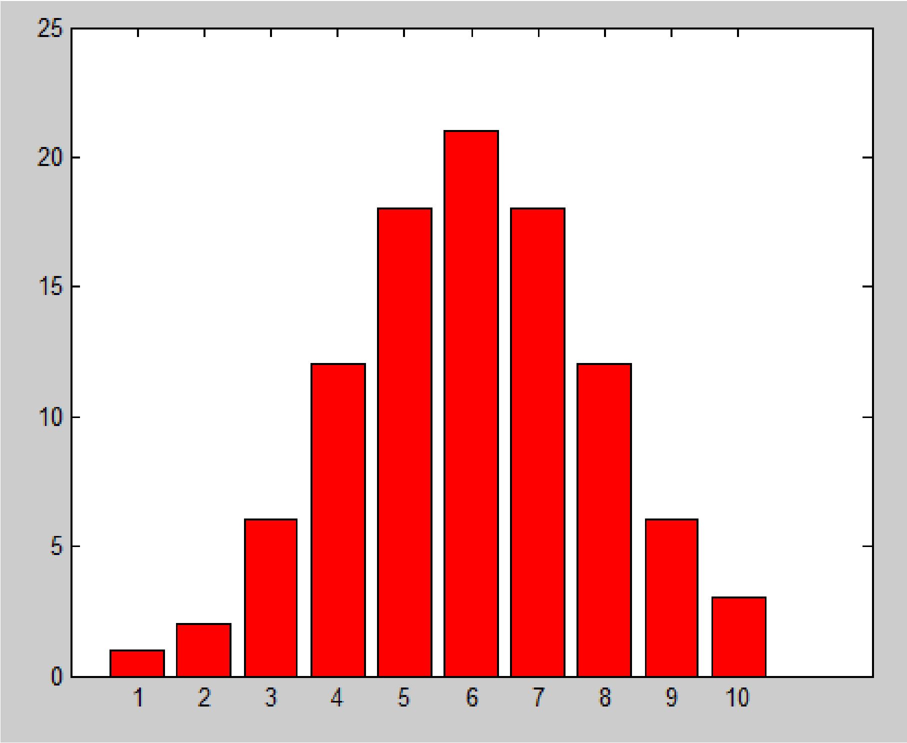
$$\{x_1, x_2 \dots x_n\}$$



H_0 - распределение результатов подчиняется нормальному закону

Проверка нормальности распределения





$$\{N_1, N_2 \dots N_k\}$$

$$\{\nu_1, \nu_2 \dots \nu_k\}$$

Критерий согласия χ^2 (Пирсона)

Если верна гипотеза H_0, то статистика

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - N_i)^2}{N_i}$$

имеет распределение χ^2 при $n \to \infty$

Критерий согласия χ^2 (Пирсона)

- Делаем оценку математического ожидания и дисперсии на основании выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Разбиваем всю область на *k* интервалов
- Строим случайную величину

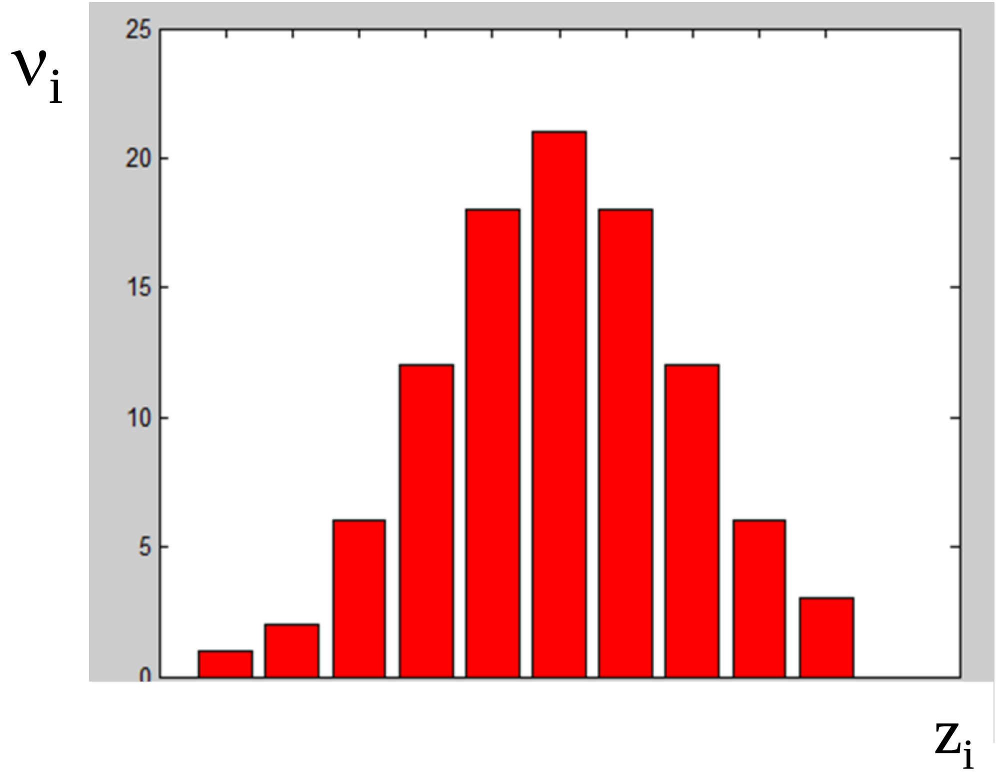
$$z_i = \frac{x_{0i} - \bar{x}}{S}$$

Критерий согласия χ^2 (Пирсона)

- Находим **теоретическую частоту попаданий** в каждый интервал ν_i

$$\nu_i = n \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_i} f(z)dz$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$



Критерий согласия χ^2 (Пирсона)

Вычисляем критерий согласия

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - N_i)^2}{N_i}$$

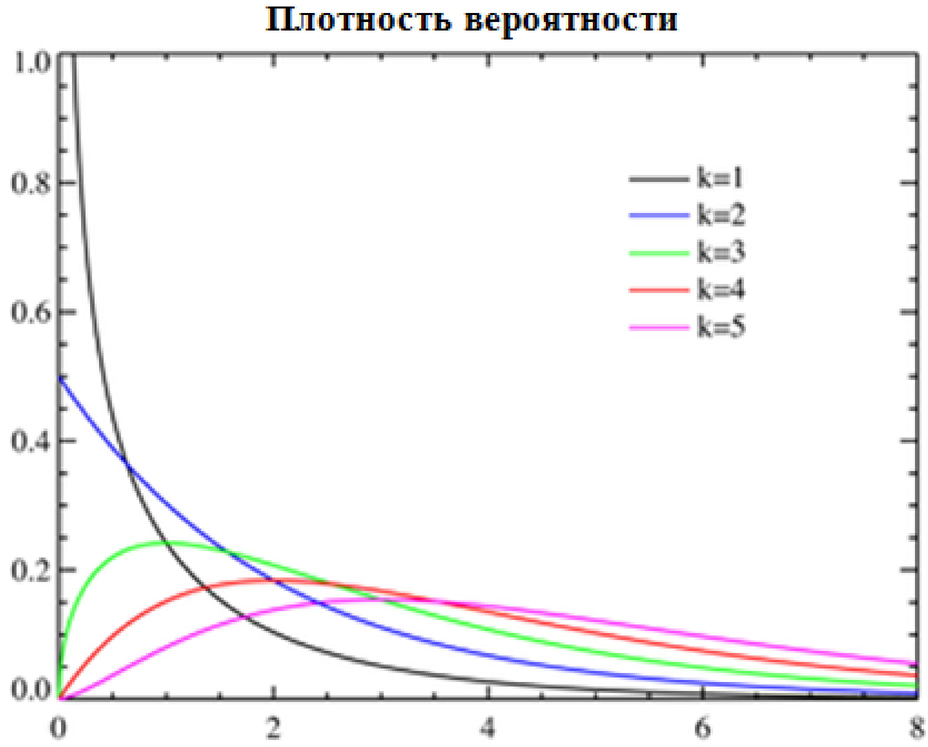
Число степеней свободы k-3

$\rho(X) > \rho(k,\alpha)$ –

H_0 отвергаем !

$\rho(X) < \rho(k,\alpha)$ –

H_0 принимаем!



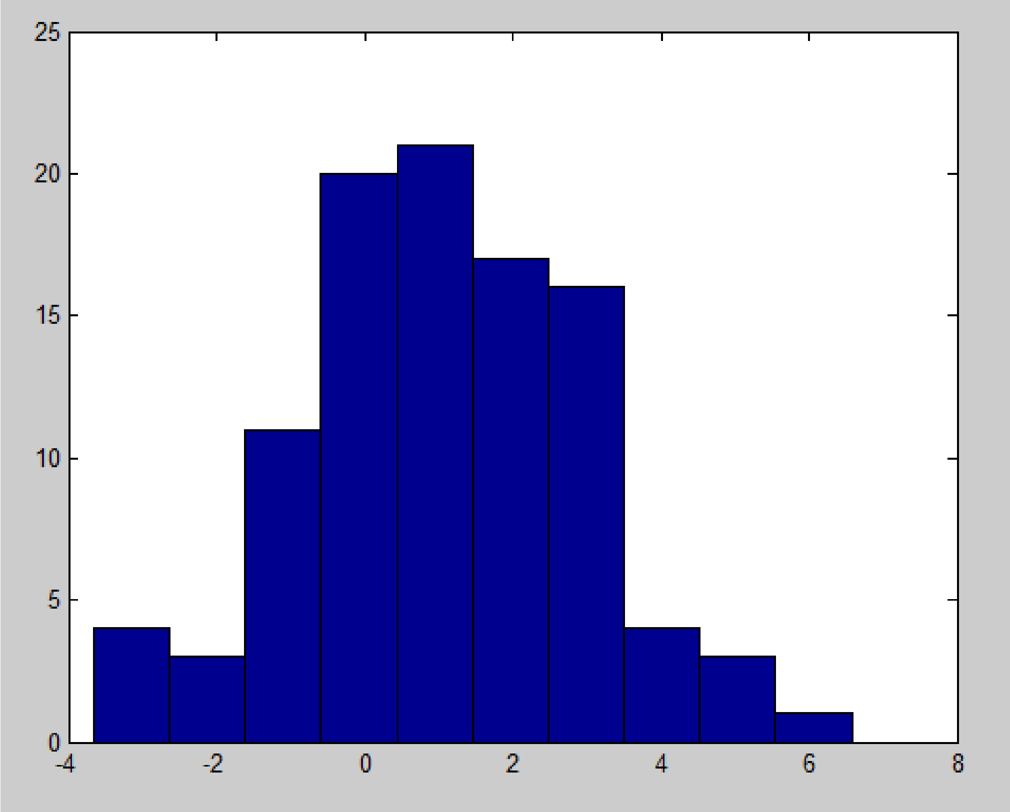
Проверка нормальности распределения. Пример

$$\{x_1, x_2 \dots x_n\}$$

$$\bar{x} = 1.09$$

$$S = 2.35$$

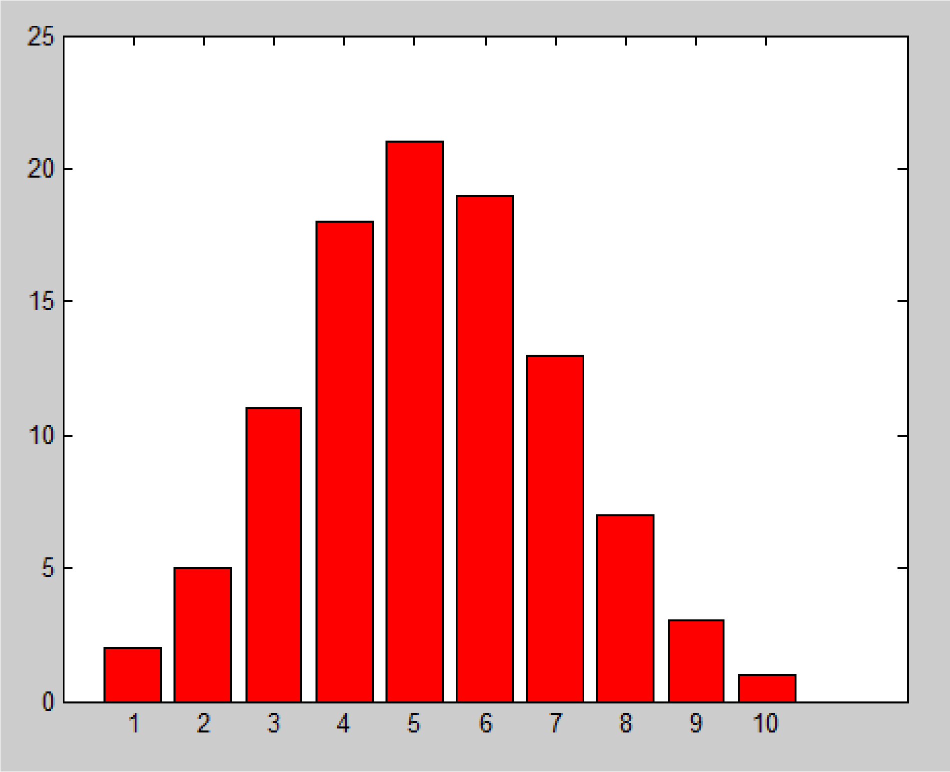
10 интервалов



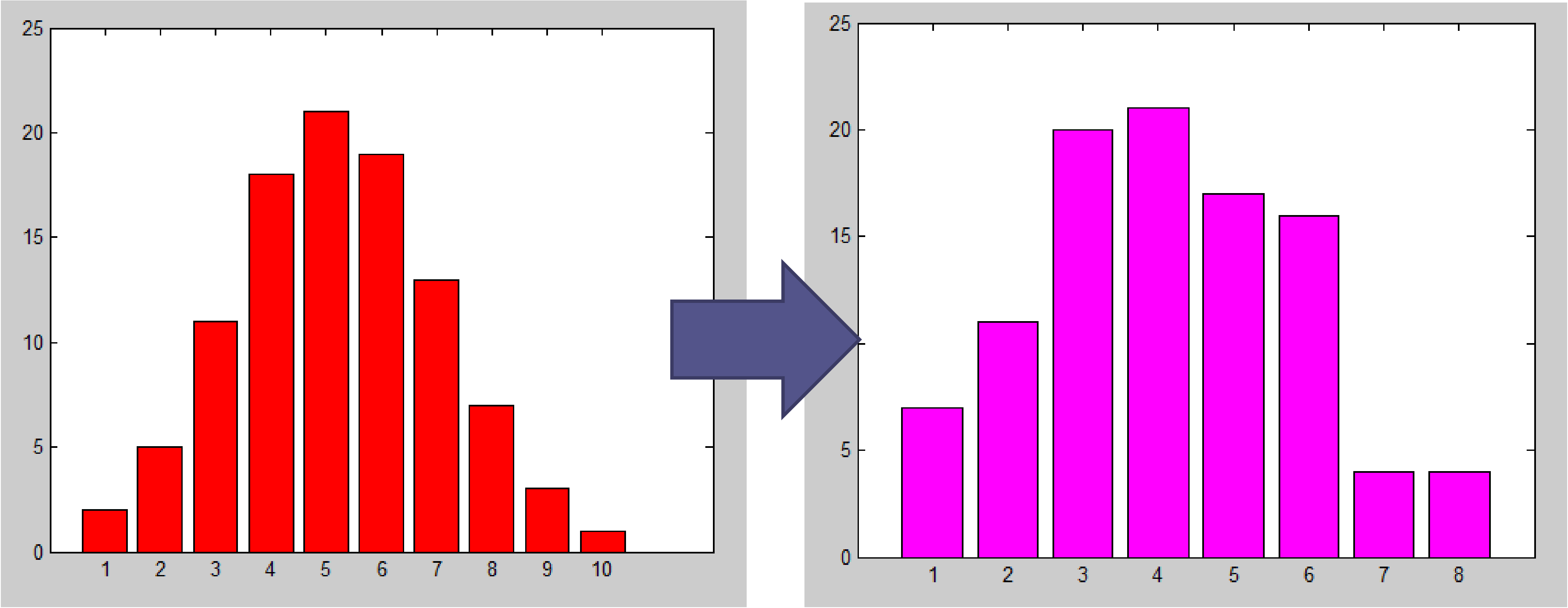
Проверка нормальности распределения. Пример

$$\nu_i = n \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_i} f(z)dz$$

Если в интервал теоретически попадает меньше 5-ти значений, этот интервал объединяют с соседним



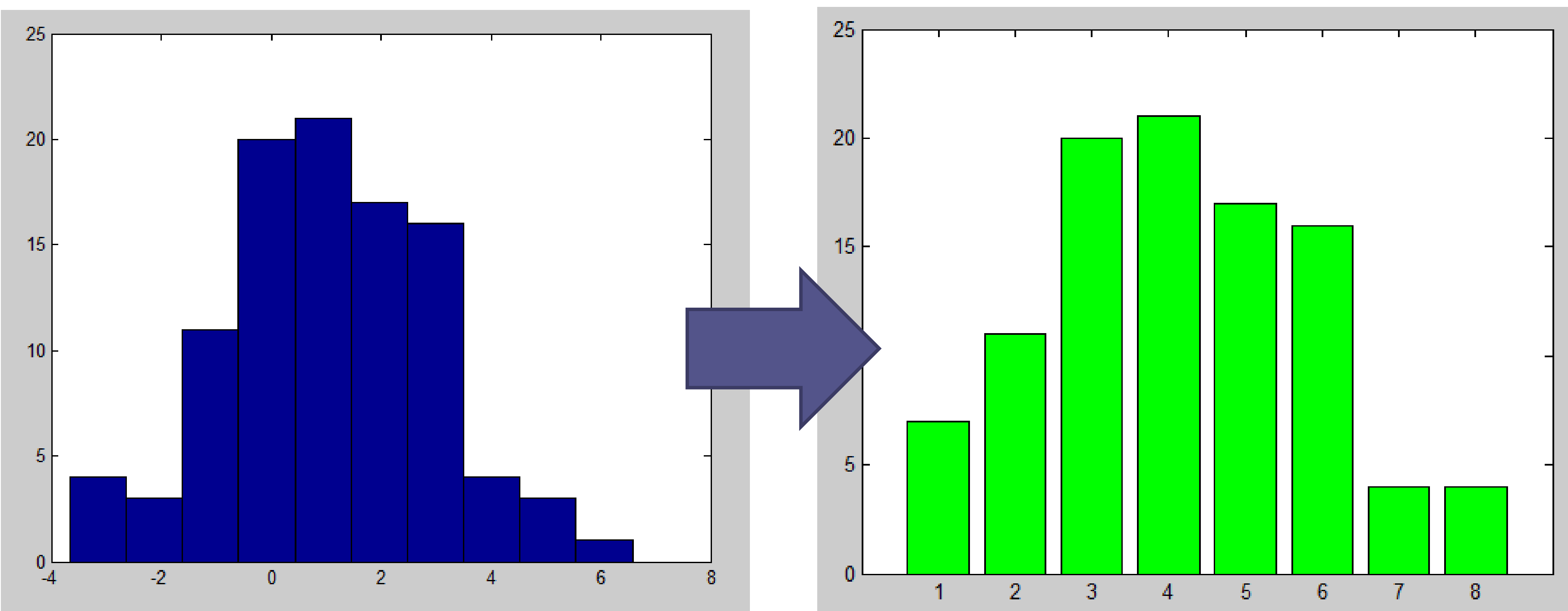
Проверка нормальности распределения. Пример



Число интервалов уменьшилось, k=8

Проверка нормальности распределения. Пример

То же самое делаем в экспериментальной гистограмме



Проверка нормальности распределения. Пример

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{8} \frac{(\nu_i - N_i)^2}{N_i} = 5.22$$

Число степеней свободы k-3=5, уровень значимости α=0.05

k	Уровень значимости α, %				
	20	10	5	1	0.5
4	5.989	7.779	9.488	13.277	14.860
5	7.289	9.236	11.070	15.086	16.750
6	8.558	10.645	12.592	16.812	18.548

$\rho(X) < \rho(k, \alpha)$ – H_0 принимаем !