

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

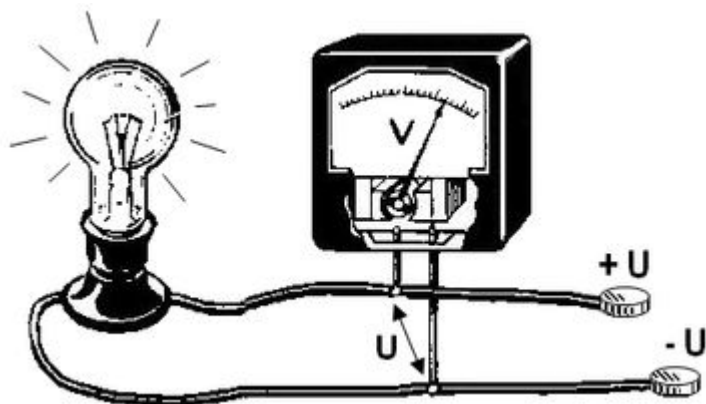
Лекция 6

A series of horizontal lines in teal and white colors, located on the right side of the slide, extending from the left edge of the slide.

Лекция 6

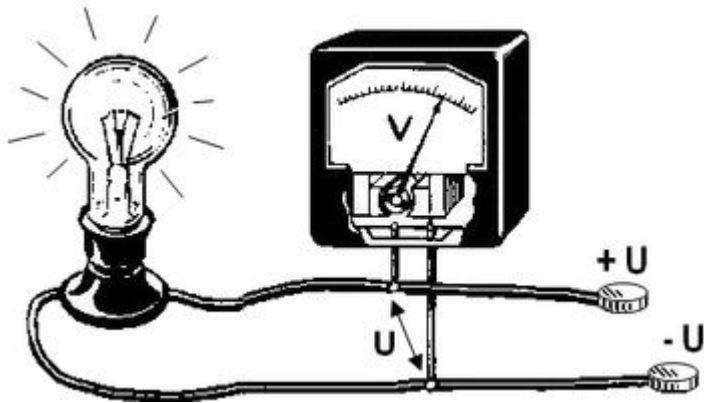
- Введение поправок
- Суммирование систематических погрешностей
 - Суммирование в предположении равномерного распределения слагаемых
 - Метод перебора вариантов
- Суммирование систематической и случайной погрешности

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром



$$U_V = U$$

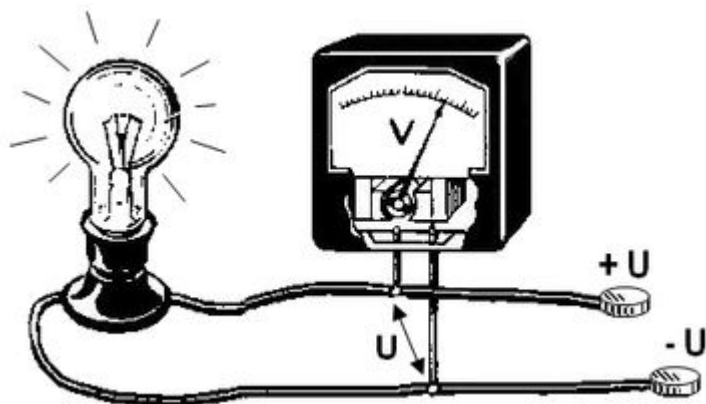
Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром



~~$$U_V = U$$~~

$$U_V = \frac{R_V}{R + R_V} U$$

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром

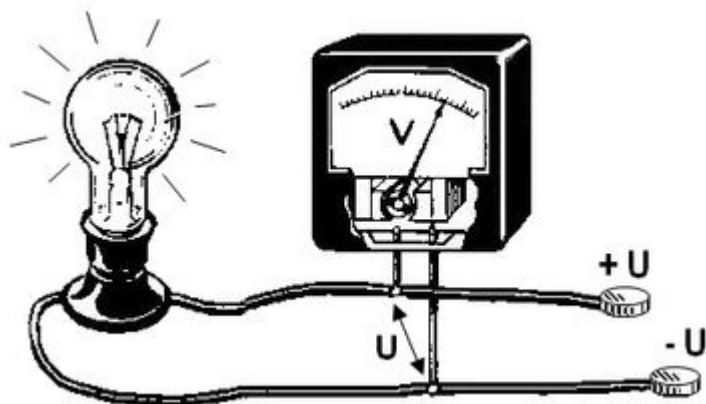


~~$$U_V = U$$~~

$$U_V = \frac{R_V}{R + R_V} U$$

методическая погрешность

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром



~~$$U_V = U$$~~

$$U_V = \frac{R_V}{R + R_V} U$$

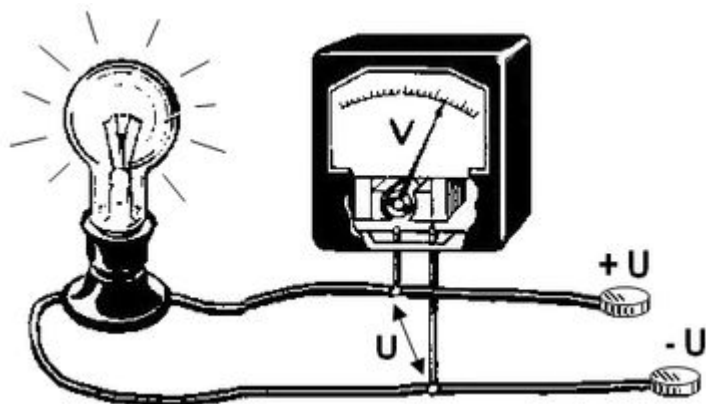
Относительная погрешность

$$\delta_V = \frac{U_V - U}{U} = -\frac{R}{R + R_V}$$

Поправка

$$\Delta U_V = -\delta_V = \frac{R}{R + R_V}$$

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром

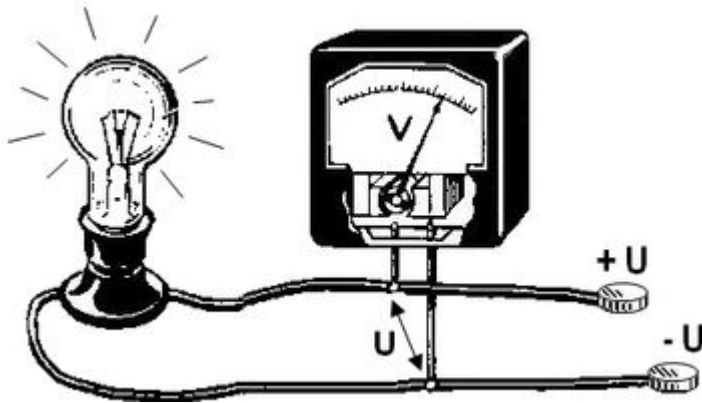


$$U_V = 12,35 \text{ В}$$

$$R_V = 5 \text{ кОм}$$

$$R = 60 \text{ Ом}$$

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром



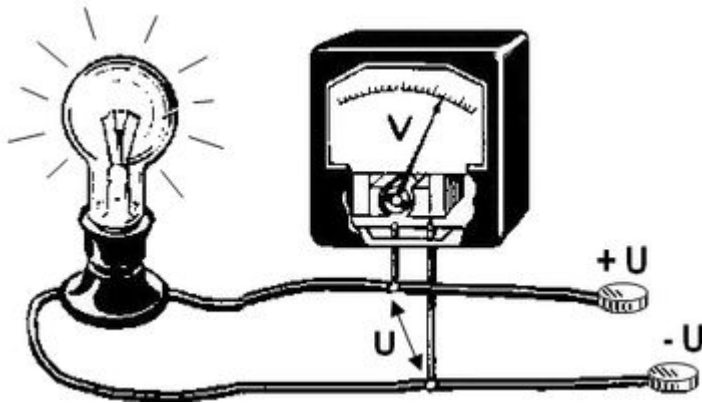
$$U_V = 12,35 \text{ В}$$

$$R_V = 5 \text{ кОм}$$

$$R = 60 \text{ Ом}$$

$$\Delta U_V = -\delta_V = \frac{R}{R + R_V} = \frac{60}{5060} = 0,012 = 1,2\%$$

Введение поправок. Измерение напряжения вольтметром



$$U_V = 12,35 \text{ В}$$

$$R_V = 5 \text{ кОм}$$

$$R = 60 \text{ Ом}$$

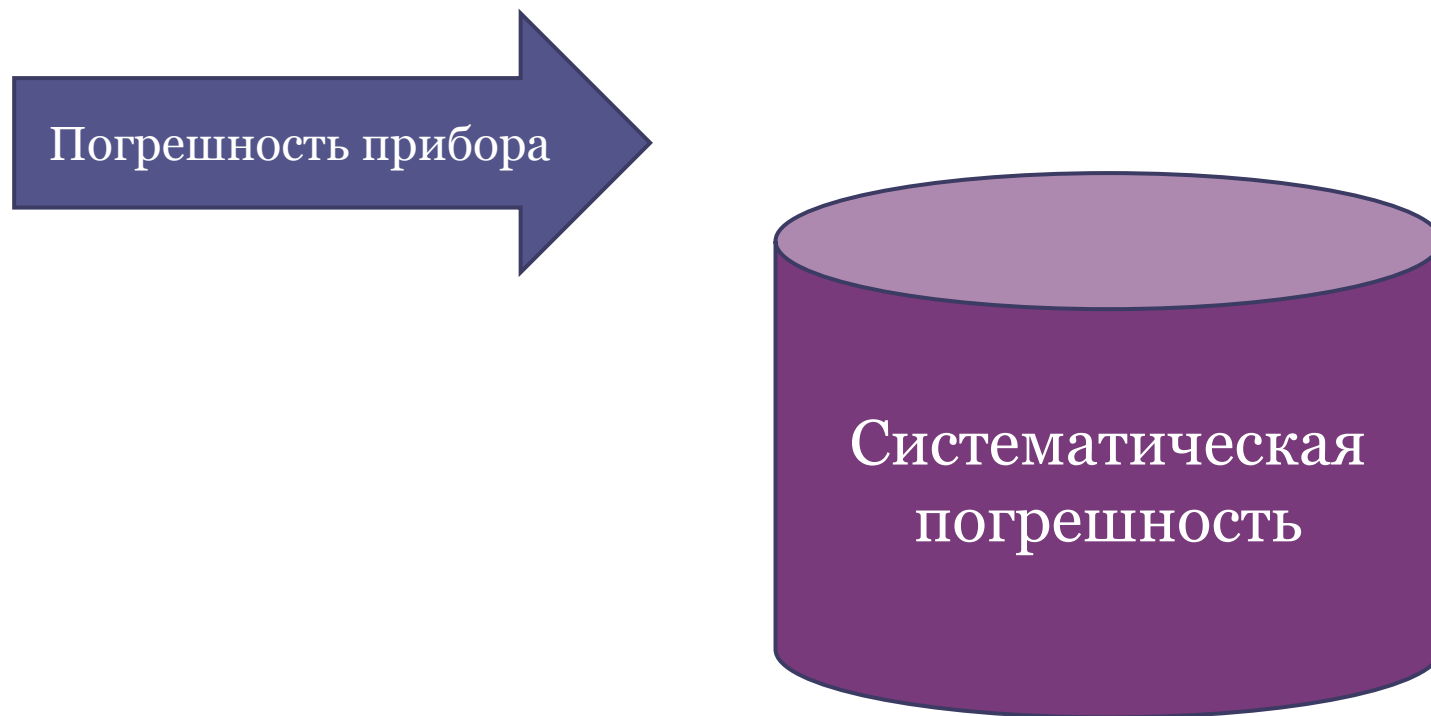
$$\Delta U_V = -\delta_V = \frac{R}{R + R_V} = \frac{60}{5060} = 0,012 = 1,2\%$$

$$U = U_V + \Delta U_V = 12,35 \cdot (1 + 0,012) = 12,50 \text{ В}$$

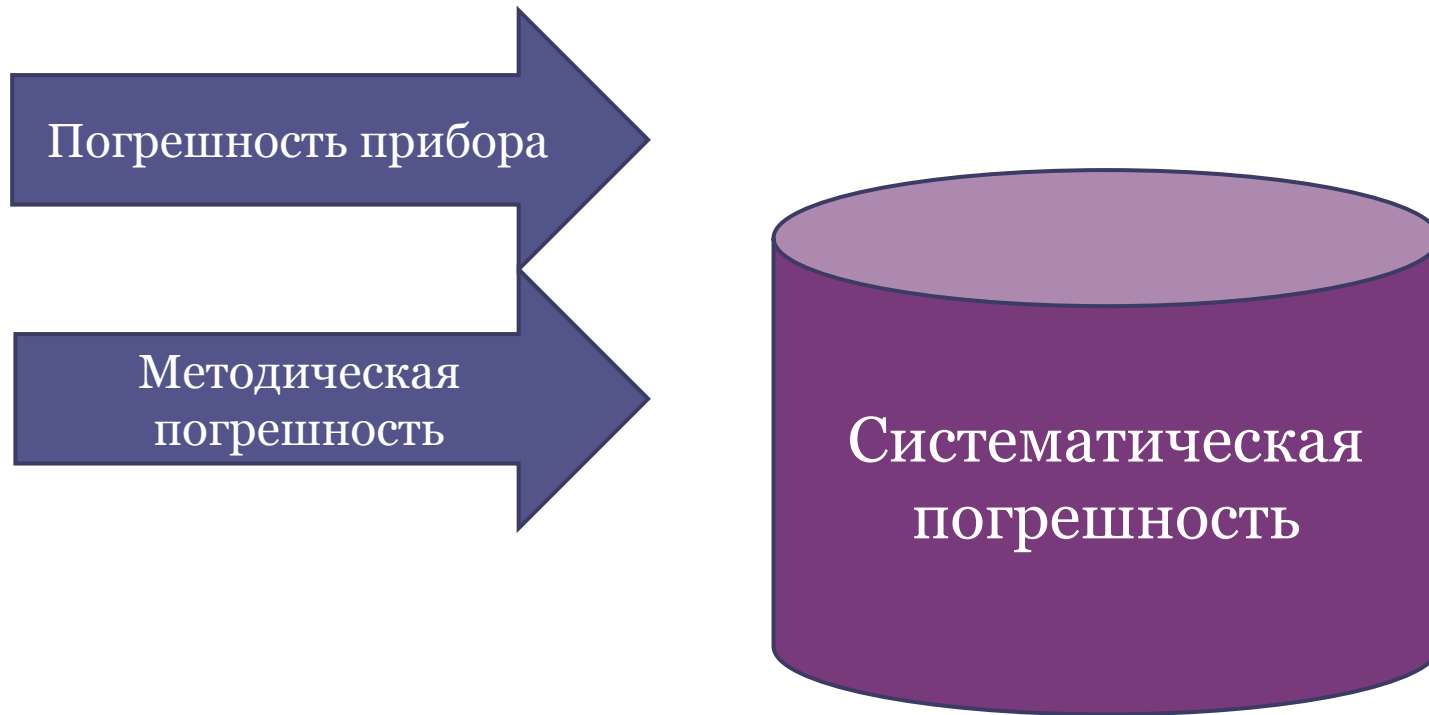
Суммирование погрешностей



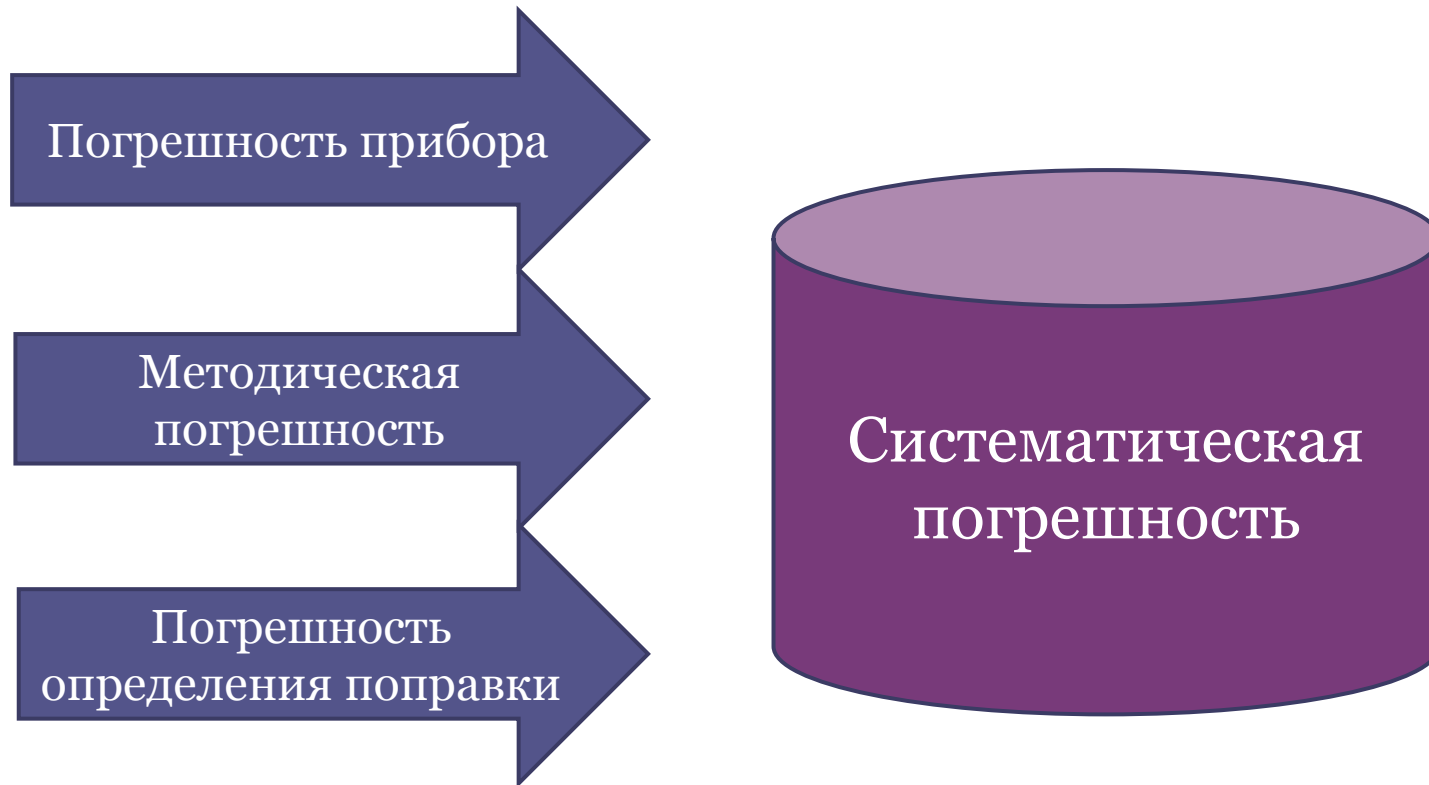
Суммирование погрешностей



Суммирование погрешностей



Суммирование погрешностей



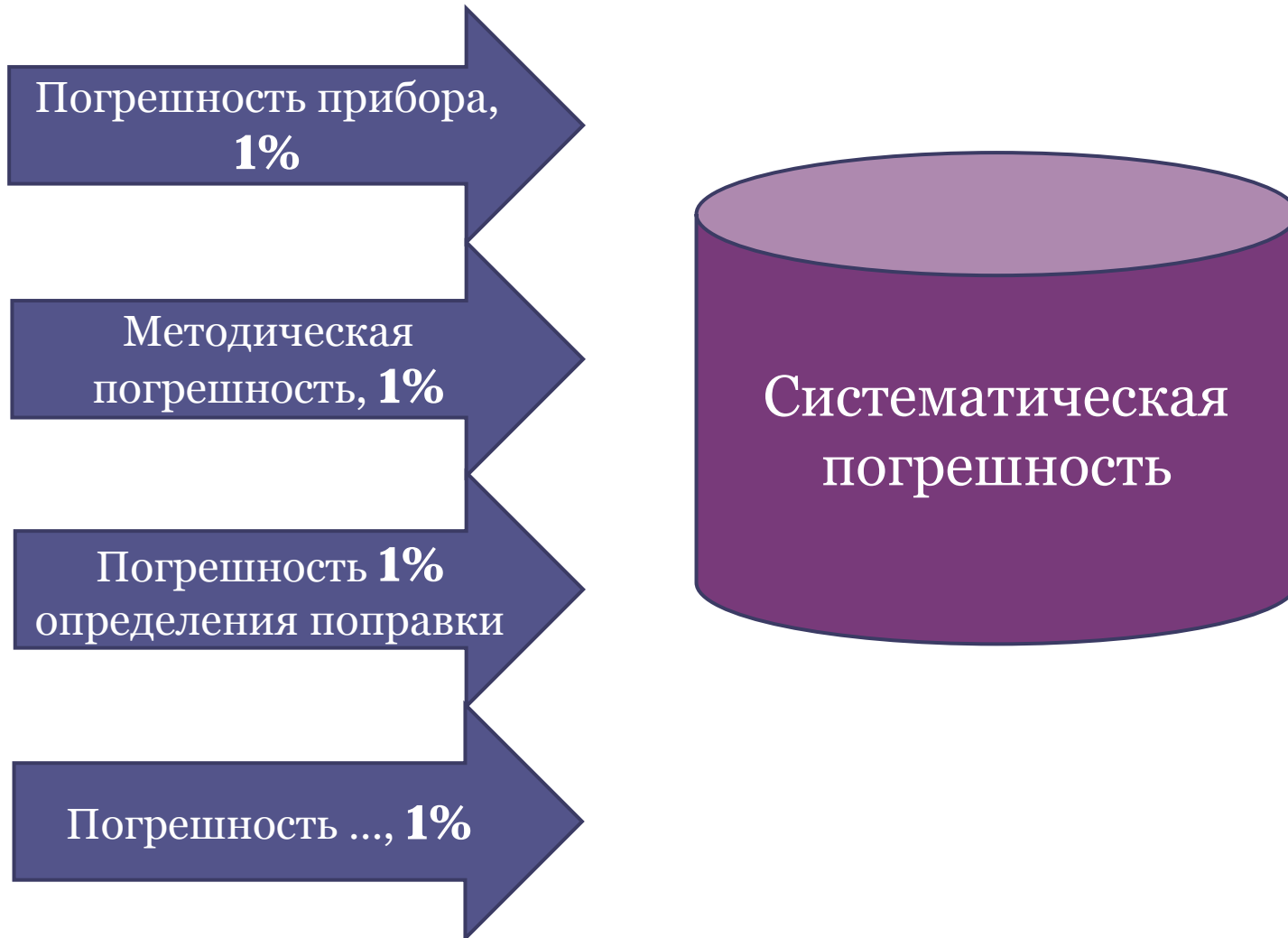
Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности



Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности



Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности



Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности

$$\vartheta_j, |\vartheta_j| \leq \theta_j, j = 1 \dots m$$

Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности

$$\vartheta_j, |\vartheta_j| \leq \theta_j, j = 1 \dots m$$

Суммарная погрешность

$$\vartheta = \sum_{j=1}^m \vartheta_j$$

Задача: найти границы суммарной погрешности

Суммирование погрешностей

Элементарные систематические погрешности

$$\vartheta_j, |\vartheta_j| \leq \theta_j, j = 1 \dots m$$

Суммарная погрешность

$$\vartheta = \sum_{j=1}^m \vartheta_j$$

Задача: найти границы суммарной погрешности

$$\theta = \sum_{j=1}^m \theta_j \text{ — завышенная оценка}$$

Суммирование погрешностей

Пусть

$$\theta_j = \frac{1}{2}, j = 1 \dots m$$

Плотность вероятности

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^{n-1} - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^{n-1} \right. \\ \left. + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^{n-1} - \dots \right]$$

Суммирование погрешностей

Пусть

$$\theta_j = \frac{1}{2}, j = 1 \dots m$$

Плотность вероятности

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^{n-1} - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^{n-1} \right. \\ \left. + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^{n-1} - \dots \right]$$

> 0

Суммирование погрешностей

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^{n-1} - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^{n-1} \right. \\ \left. + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^{n-1} - \dots \right]$$

$n = 2, \quad \vartheta \in (-1, 1):$

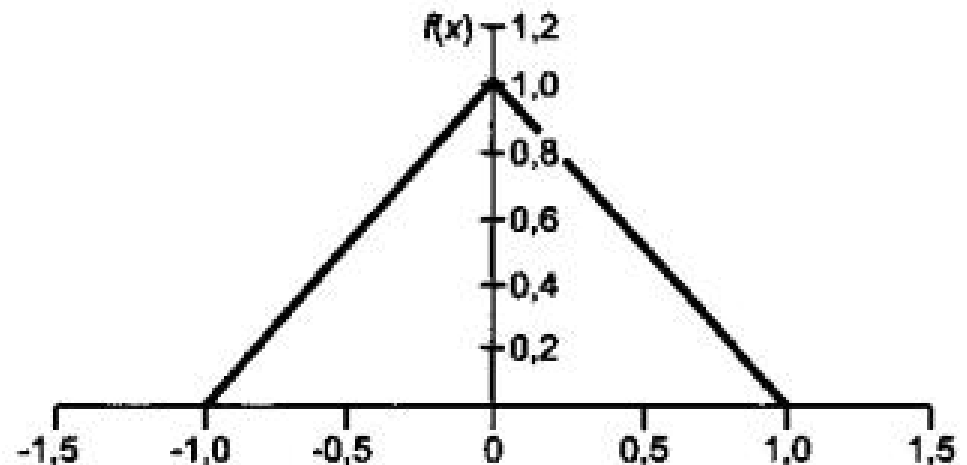
Суммирование погрешностей

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^{n-1} - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^{n-1} + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^{n-1} - \dots \right]$$

$$n = 2, \quad \vartheta \in (-1, 1):$$

$$\begin{aligned} f_2(\vartheta) &= [(\vartheta + 1) - 2] \\ &= [\vartheta - 1], \vartheta > 0 \end{aligned}$$

$$f_2(\vartheta) = [\vartheta + 1], \vartheta < 0$$



Суммирование погрешностей

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^{n-1} - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^{n-1} \right. \\ \left. + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^{n-1} - \dots \right]$$

$$F_n(\vartheta) = \frac{1}{n!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^n - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^n \right. \\ \left. + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^n - \dots \right]$$

Суммирование погрешностей

$$F_n(\vartheta) = \frac{1}{n!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^n - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^n + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^n - \right]$$

Очень сложно!

Ищем границы θ : $P(|\vartheta| \leq \theta) = \alpha$

Из симметрии распределения:

$$P \left[\vartheta \in \left(-\vartheta_{\frac{1+\alpha}{2}}, \vartheta_{\frac{1+\alpha}{2}} \right) \right] = \alpha$$

$$\vartheta_{\frac{1+\alpha}{2}} = \theta$$

Суммирование погрешностей

$$F_n(\vartheta) = \frac{1}{n!} \left[\left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^n - C_n^1 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 1 \right)^n + C_n^2 \left(\vartheta + \frac{n}{2} - 2 \right)^n - \right]$$

Рассмотрим интервал $\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1 \right)$:

$$F_n(\vartheta) = \frac{1}{n!} \left(\vartheta + \frac{n}{2} \right)^n$$

$$F_n(-\theta) = \frac{1}{n!} \left(-\theta + \frac{n}{2} \right)^n = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \longrightarrow \quad \theta(\alpha, n)$$

Суммирование погрешностей

$$F_n(-\theta) = \frac{1}{n!} \left(-\theta + \frac{n}{2} \right)^n = 1 - \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \theta(\alpha, n)$$

Хочется представить в виде

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^n (\theta_i)^2}$$

Суммирование погрешностей

$$F_n(-\theta) = \frac{1}{n!} \left(-\theta + \frac{n}{2} \right)^n = 1 - \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \theta(\alpha, n)$$

Хочется представить в виде

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^n (\theta_i)^2}$$

Для $\theta_i = \frac{1}{2}$

$$\theta = \frac{k\sqrt{n}}{2} \Rightarrow k = \frac{2\theta}{\sqrt{n}}$$

Суммирование погрешностей

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^n (\theta_i)^2}$$

Значения коэффициента k в зависимости от числа слагаемых и доверительной вероятности

Число слагаемых n	Значения коэффициента k при доверительной вероятности α			
	0,90	0,95	0,99	0,9973
2	0,97	1,10	1,27	1,34
3	0,96	1,12	1,37	1,50
4	*	1,12	1,41	1,58
5	*	*	1,42	1,61
6	*	*	*	1,64
...
∞	0,95	1,13	1,49	1,73

Примечание. Для граф таблицы, отмеченных звездочкой, коэффициент k не вычисляется, так как θ при данном n выходит за пределы крайнего интервала.

Суммирование погрешностей

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^n (\theta_i)^2}$$

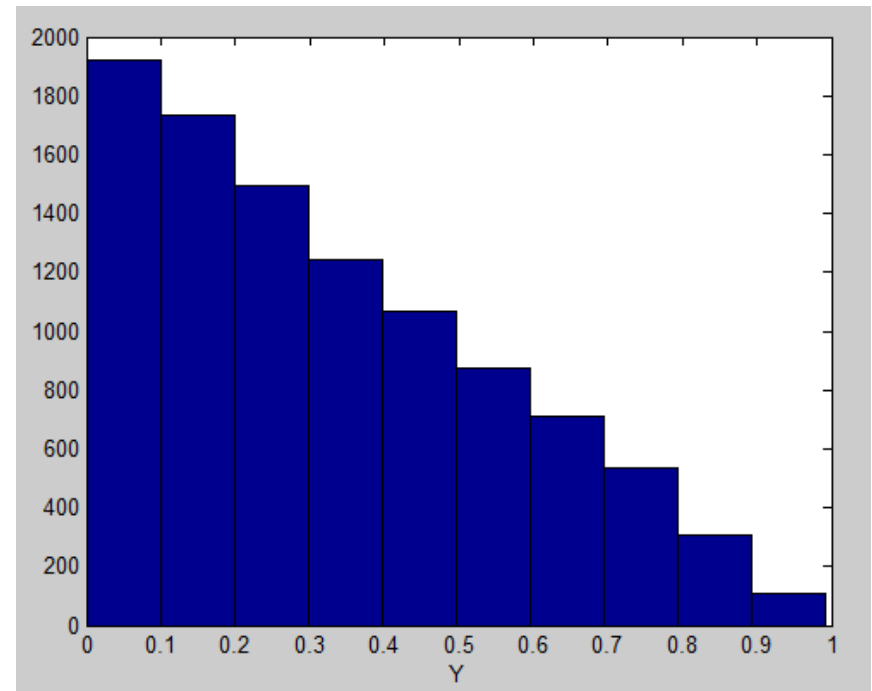
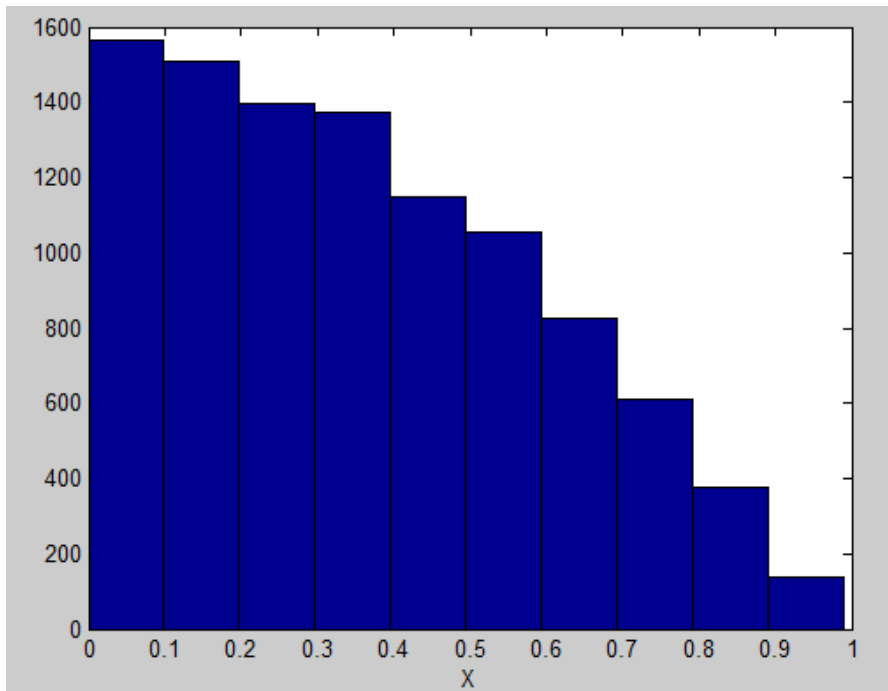
Значения коэффициента k в зависимости от числа слагаемых и доверительной вероятности

Число слагаемых n	Значения коэффициента k при доверительной вероятности α			
	0,90	0,95	0,99	0,9973
2	0,97	1,10	1,27	1,34
3	0,96	1,12	1,37	1,50
4	*	1,12	1,41	1,58
5	*	*	1,42	1,61
6	*	*	*	1,64
...
∞	0,95	1,13	1,49	1,73

α	...	0,90	0,95	0,98	0,99
k	...	0,95	1,1	1,3	1,4

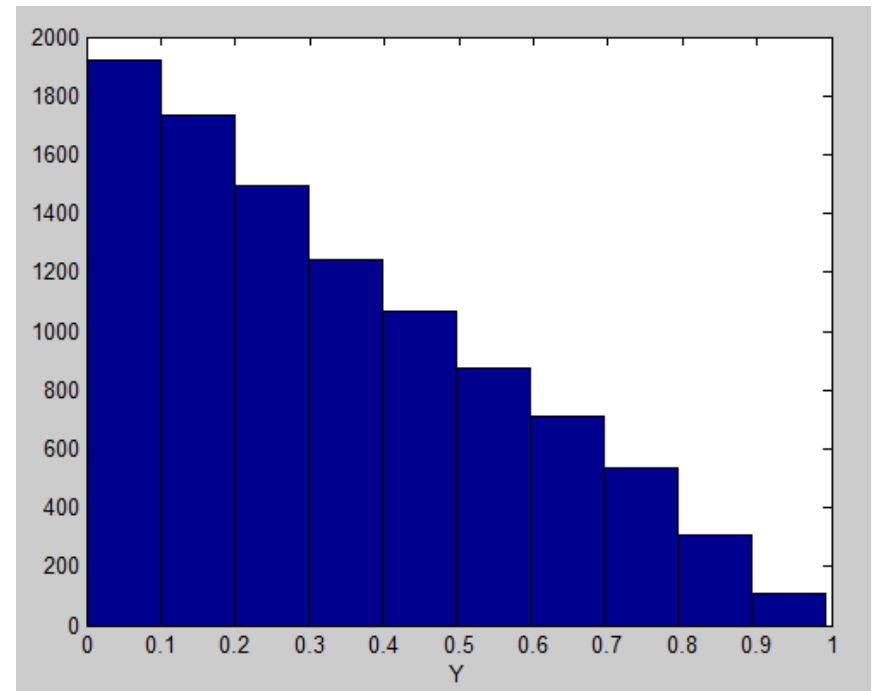
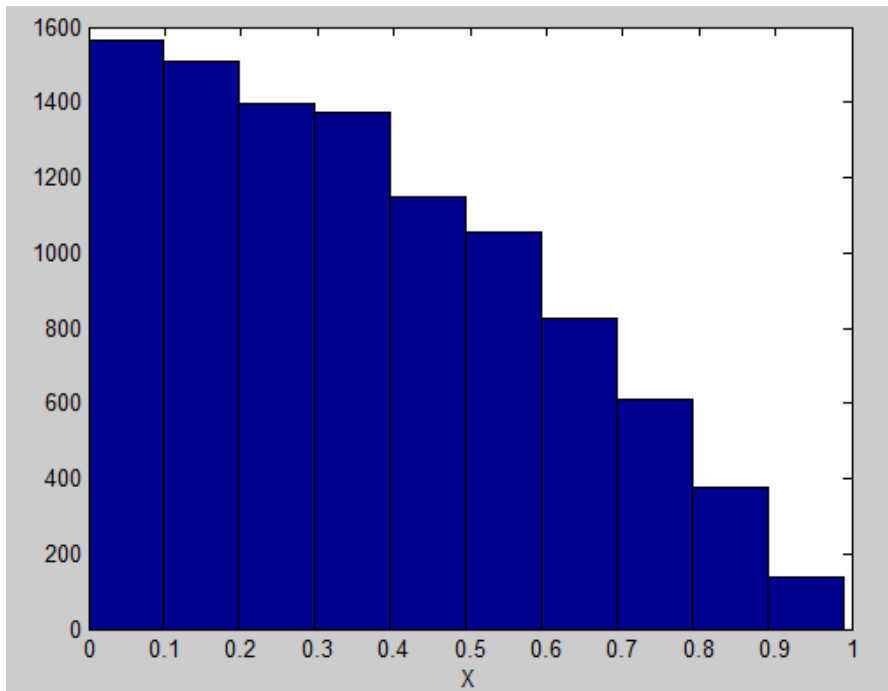
Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Закон распределения элементарных систематических погрешностей не всегда известен



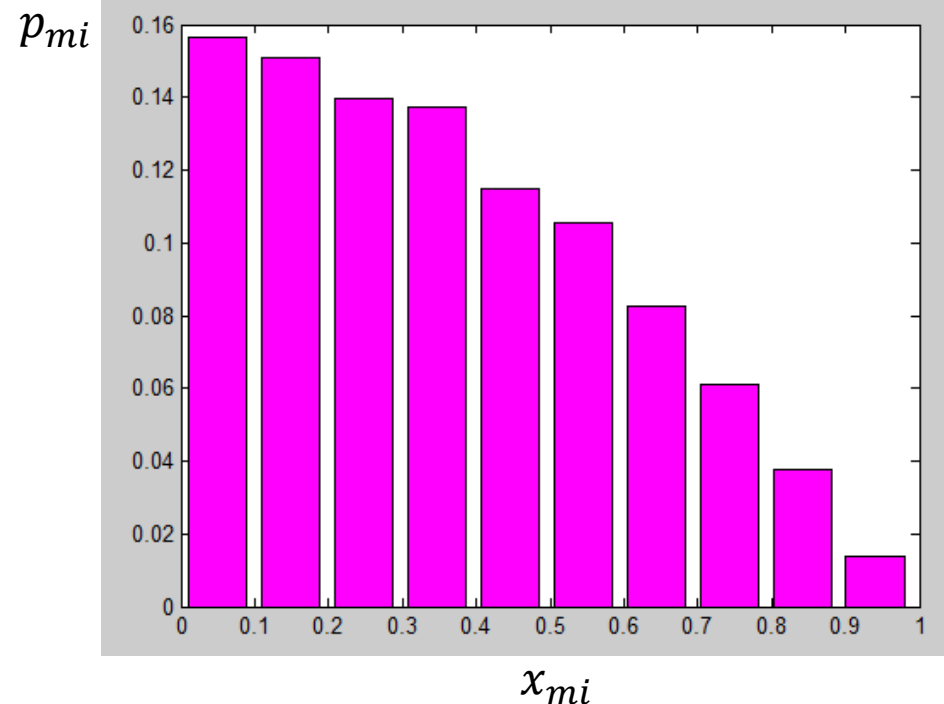
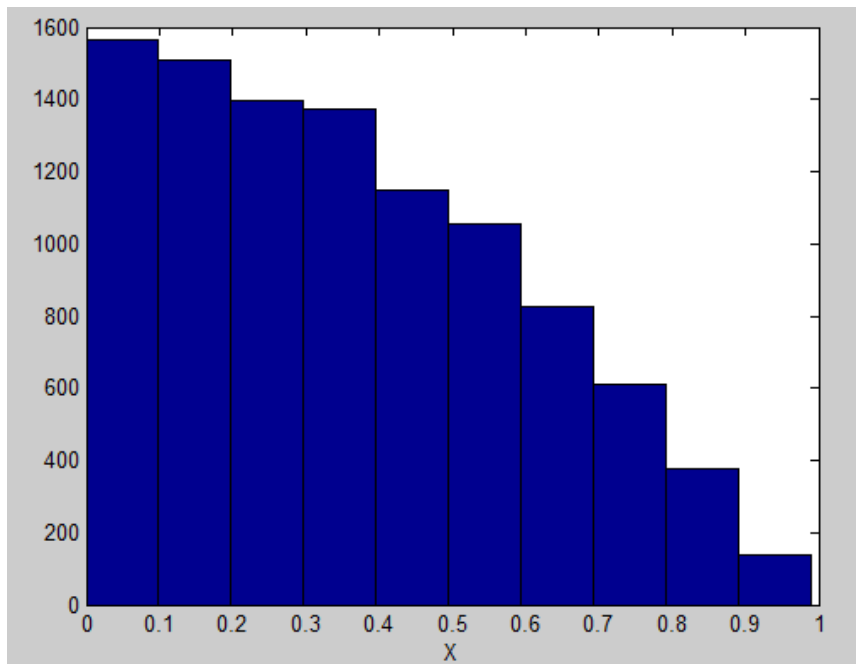
Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Задача: построить функцию распределения для величины $z=x+y$, $F(z)$



Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Перейдем к серединам интервалов x_{mi}
и вероятности попадания в каждый интервал p_{xi}



Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Переберем все возможные суммы

$$z_k = x_{mi} + y_{mj}, i = 1 \dots I, j = 1 \dots J, k = 1 \dots I + J$$

и найдем вероятности их реализации

$$p_{zk} = p_{xi} \cdot p_{yj}$$

Упорядочим z_k : $z_{k-1} \leq z_k \leq z_{k+1}$
(при этом запомнив соответствующие вероятности)

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Строим функцию распределения

$$F(z_1) = p_{z_1}$$

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

Строим функцию распределения

$$F(z_1) = p_{z_1}$$

$$F(z_2) = p_{z_1} + p_{z_2} = F(z_1) + p_{z_2}$$

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

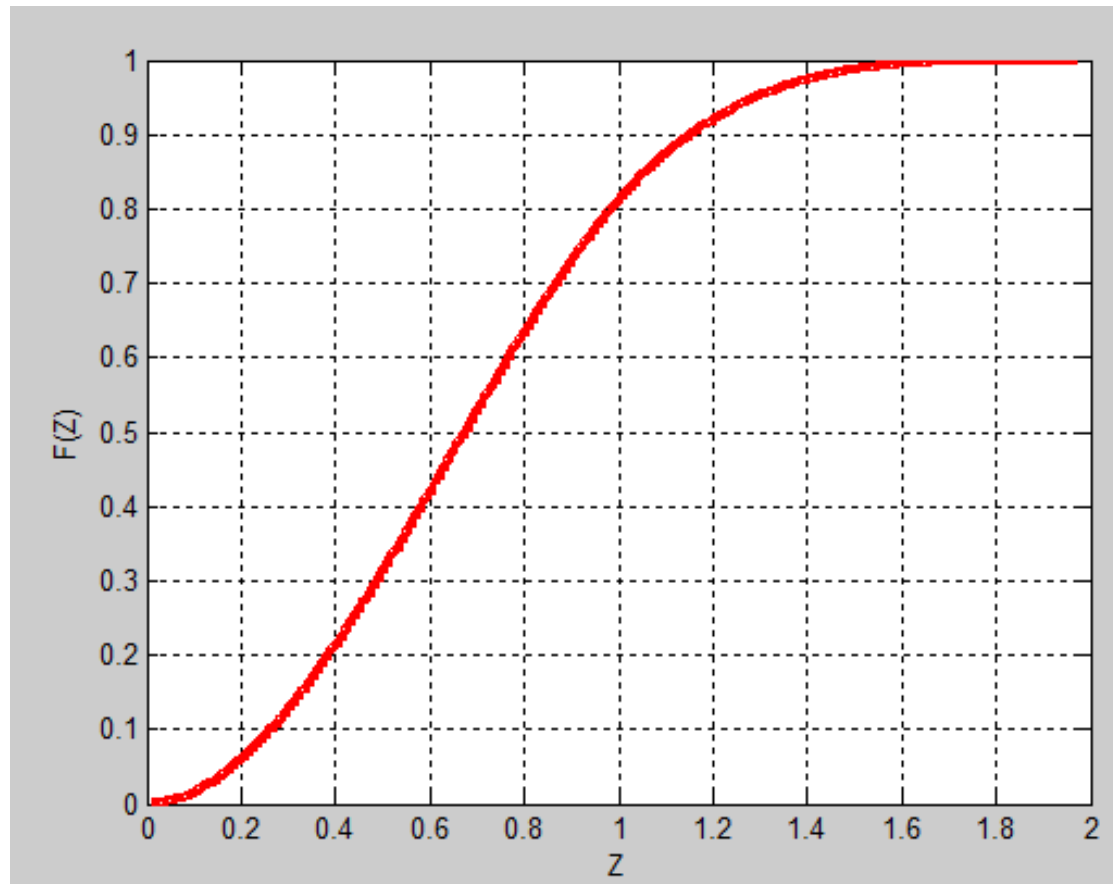
Строим функцию распределения

$$F(z_1) = p_{z_1}$$

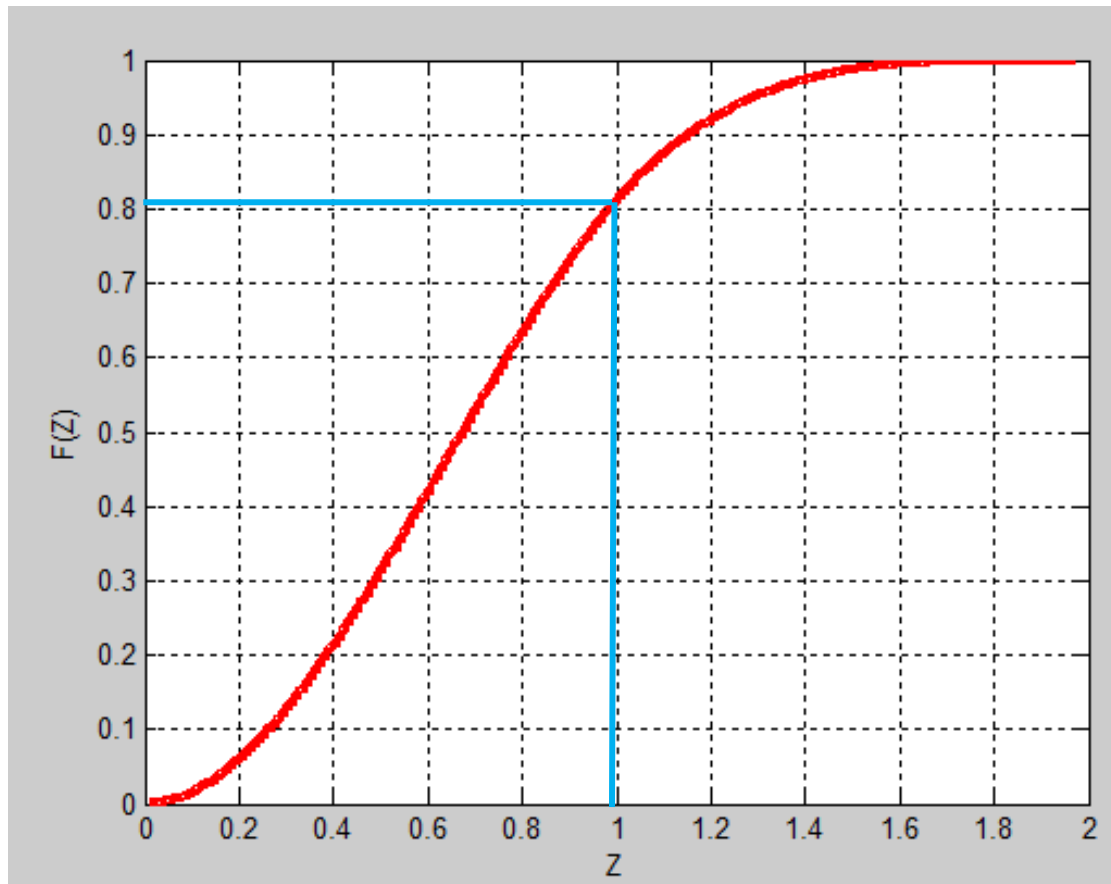
$$F(z_2) = p_{z_1} + p_{z_2} = F(z_1) + p_{z_2}$$

$$F(z_k) = F(z_{k-1}) + p_{z_k}$$

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов

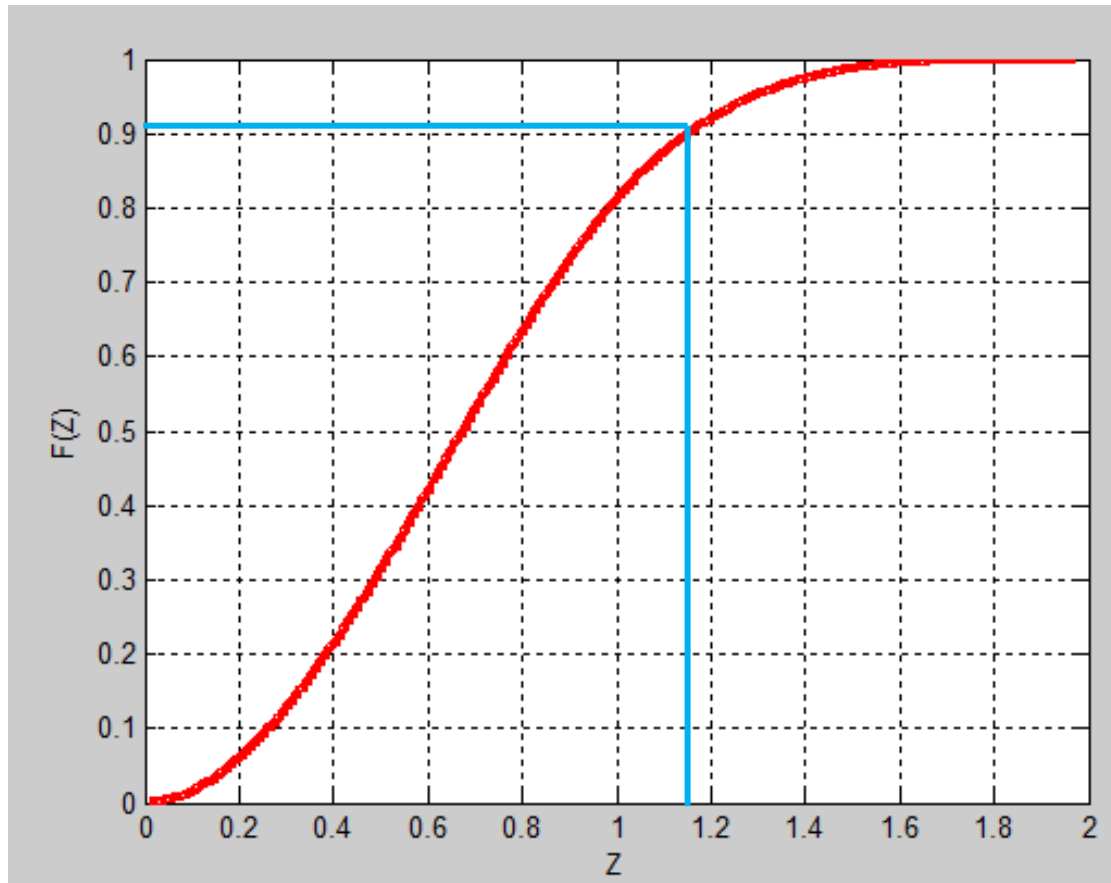


Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов



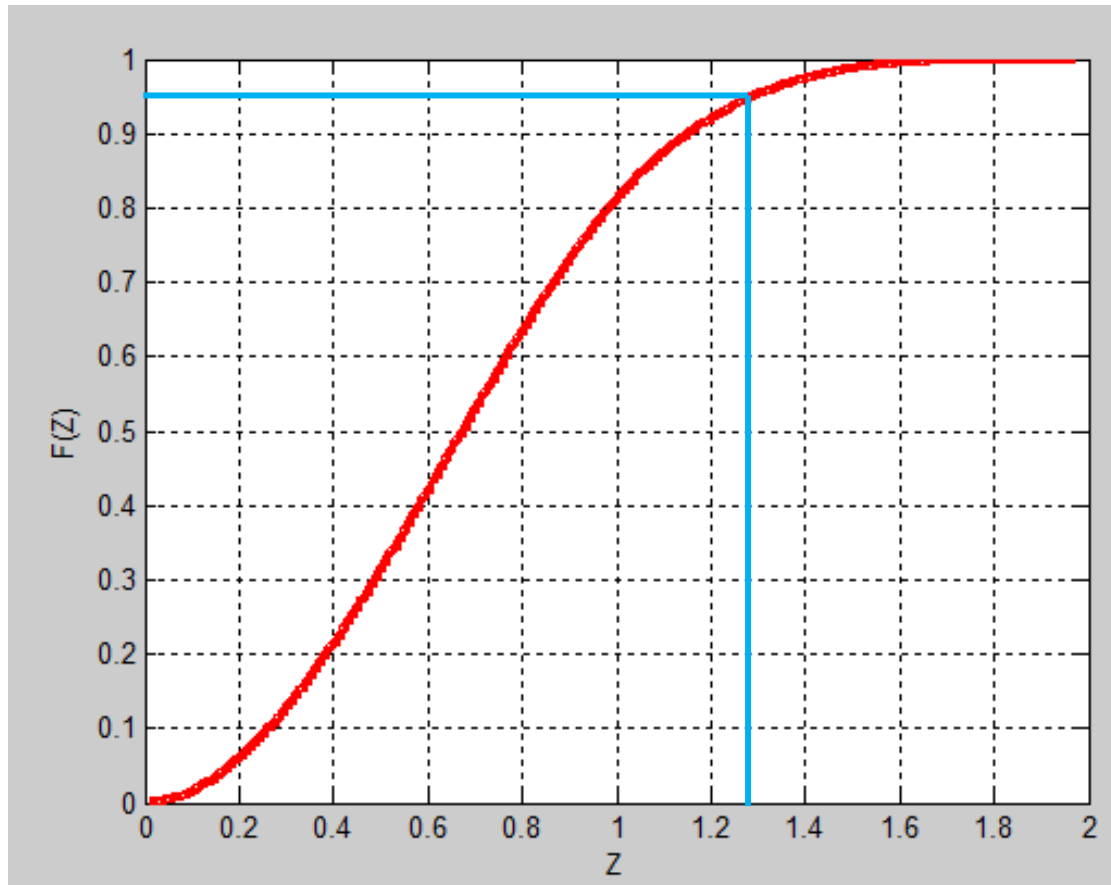
$$F(1) = 0.8$$

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов



$$F(1.15) = 0.9$$

Суммирование погрешностей. Метод перебора вариантов



$$F(1.28) = 0.95$$

Суммирование систематической и случайной погрешностей

Систематическая погрешность θ

Случайная погрешность $t_q S_{\bar{x}}$

$$\Delta = \theta + t_q S_{\bar{x}}$$

Суммирование систематической и случайной погрешностей

Систематическая погрешность θ

Случайная погрешность $t_q S_{\bar{x}}$

$$\Delta = \theta + t_q S_{\bar{x}}$$

завышенная оценка!!!

Суммирование систематической и случайной погрешностей

Систематическая погрешность θ ,
состоит из m элементарных погрешностей

$$S_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m (\theta_i)^2}$$

$$t_{\theta} = \frac{\theta}{S_{\theta}}$$

Случайная погрешность $t_q S_{\bar{x}}$

СКО общей погрешности $S_{\Sigma} = \sqrt{(S_{\theta})^2 + (S_{\bar{x}})^2}$

$$t_{\Sigma} = t_q \frac{S_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}} + S_{\theta}} + t_{\theta} \frac{S_{\theta}}{S_{\bar{x}} + S_{\theta}} = \frac{t_q S_{\bar{x}} + \theta}{S_{\bar{x}} + S_{\theta}} \quad \Delta = t_{\Sigma} S_{\Sigma}$$