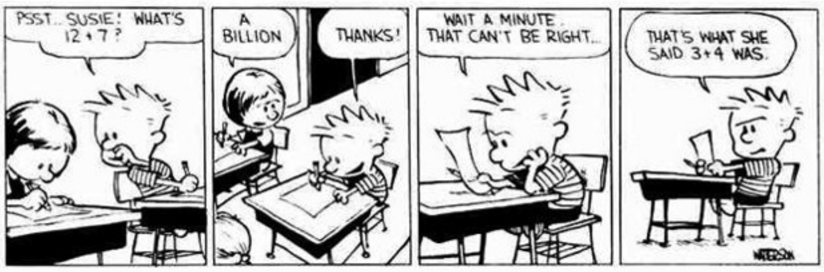
SERIE 7



Esercizio 1

Calcola il determinante delle seguenti matrici il più velocemente possibile:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a+2 \\ 2 & a & 2a+4 \\ 3 & a & 2a+6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -16 & 6 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} sinxcosx & vcosxcosy & -vsinxsiny \\ sinxsiny & vcosxsiny & vsinxcosy \\ cosx & -vsinx & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia A una matrice di tipo 7×7 con $\det(A) = 3$

1. Calcola $\det(A^T)$ e $\det(2A)$
2. Determina $\det(B)$, in modo che valga $\det(AB) = -27$

Esercizio 3

Dimostra la regola di Sarrus utilizzando il Teorema di Laplace

Esercizio 4

Dimostra che il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

è uguale a $\sum_{i=0}^{4} a_1 \cdot x^{4-i}$.

Esercizio 5

Il determinante Δ_n di Vandermonde per le incognite $x_1, \ldots, x_n$ è definito come segue:

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dalla definizione sopra è ovvio che vale $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = x_2 - x_1$.

1. Calcola Δ_3 e Δ_4
2. Dimostra per induzione completa che $\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Aiuto

- Per la base d'induzione utilizza il fatto che il "prodotto vuoto" $\Delta_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i)$ è uguale a 1 per definizione
- per il passo d'induzione utilizza opportune operazioni elementari sulle colonne.

Esercizio 6

Considera i due punti distinti $v := (v_1, v_2)$ e $w := (w_1, w_3)$ di $\mathbb{R}^2$ e la retta $L \subset \mathbb{R}^2$ passante per v e w.
Dimostra che allora vale:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}$$

AIUTO: Mostra che l'insieme L definito sopra è equivalente alla forma parametrica di tale retta in $\mathbb{R}^2$