SERIE 7
CORREZIONI

Esercizio 1

$\det(A) = \underline{\underline{-2}}$

$\det(B) = 1 - \log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1 - \frac{\cancel{\log b}}{\cancel{\log a}} \cdot \frac{\cancel{\log a}}{\cancel{\log b}} = \underline{\underline{0}}$

$\det(C) = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = \underline{\underline{1}}$

$\det(D) \overset{\text{Sarrus}}{=} \underline{\underline{-4a^3}}$

$\det(E) = \underline{\underline{0}}$ siccome $III^c = 2II^c + 2I^c$ ossia colonne linearmente dipendenti

$\det(F) = \underline{\underline{0}}$ seconda riga pari a 0

$$\det(G) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -16 & 6 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} sinxcosx & vcosxcosy & -vsinxsiny \\ sinxsiny & vcosxsiny & vsinxcosy \\ cosx & -vsinx & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia A una matrice di tipo 7×7 con $\det(A) = 3$

1. Calcola $\det(A^T)$ e $\det(2A)$
2. Determina $\det(B)$, in modo che valga $\det(AB) = -27$

Esercizio 3

Dimostra la regola di Sarrus utilizzando il Teorema di Laplace

$\boxed{\textbf{Esercizio 4}}$

Dimostra che il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

è uguale a $\sum_{i=0}^{4} a_1 \cdot x^{4-i}$.

$\boxed{\textbf{Esercizio 5}}$

Il determinante Δ_n di Vandermonde per le incognite $x_1, \ldots, x_n$ è definito come segue:

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dalla definizione sopra è ovvio che vale $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = x_2 - x_1$.

1. Calcola Δ_3 e Δ_4
2. Dimostra per induzione completa che $\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

$\boxed{\text{Aiuto}}$

- Per la base d'induzione utilizza il fatto che il "prodotto vuoto" $\Delta_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i)$ è uguale a 1 per definizione
- per il passo d'induzione utilizza opportune operazioni elementari sulle colonne.

$\boxed{\textbf{Esercizio 6}}$

Considera i due punti <u>distinti</u> $v := (v_1, v_2)$ e $w := (w_1, w_3)$ di $\mathbb{R}^2$ e la retta $L \subset \mathbb{R}^2$ passante per v e w.
Dimostra che allora vale:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}$$

<u>AIUTO:</u> Mostra che l'insieme L definito sopra è equivalente alla forma parametrica di tale retta in $\mathbb{R}^2$