



多旋翼飞行器设计与控制

第七讲 传感器标定和测量模型

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学





前言

如何进行传感器标定以及传感器以及传
感器测量模型是什么？





大纲

1. 三轴加速度计
2. 三轴陀螺仪
3. 三轴磁力计
4. 超声波测距仪
5. 气压计
6. 二维激光测距雷达
7. 全球定位系统（GPS模块）
8. 摄像机
9. 本讲小结





1. 三轴加速度计

□ 基本原理

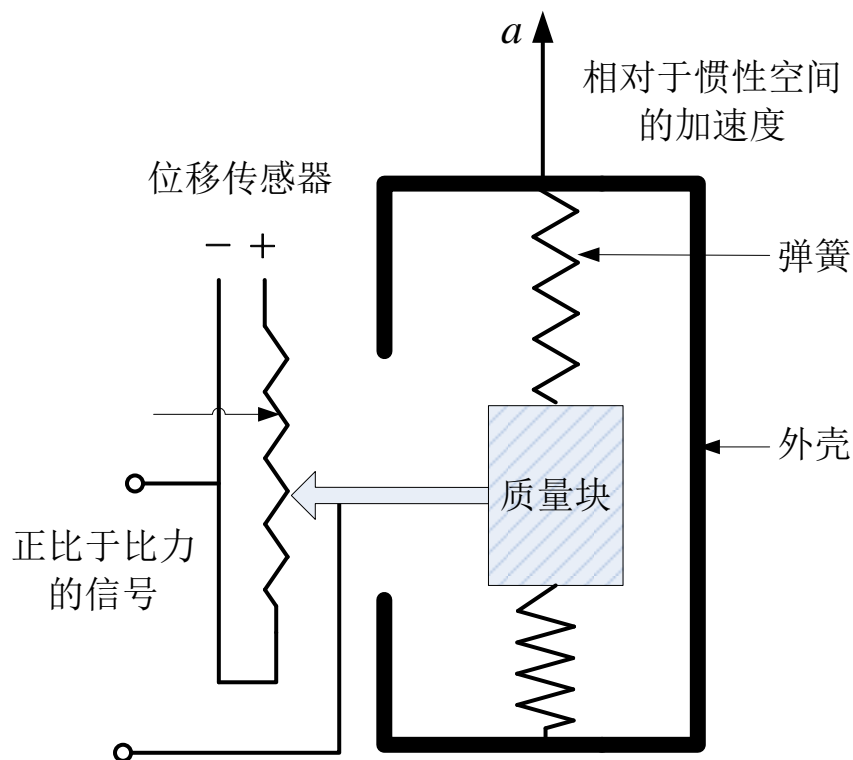


图7.1、测量比力的加速度计

三轴加速度计是一种惯性传感器，能够测量物体的**比力**，即去掉重力后的整体加速度或者单位质量上作用的非引力。当加速度计保持静止时，加速度计能够感知重力加速度，而整体加速度为零。在自由落体运动中，整体加速度就是重力加速度，但加速度计内部处于失重状态，而此时三轴加速度计输出为零。



1. 三轴加速度计

□ 基本原理

三轴加速度计的原理能够用来测量角度。直观地，如图所示，弹簧压缩量由加速度计与地面的角度决定。比力能够通过弹簧压缩长度来测量。因此在没有外力作用的情况下，加速度计能够精确地测量俯仰角和滚转角，且没有累积误差。

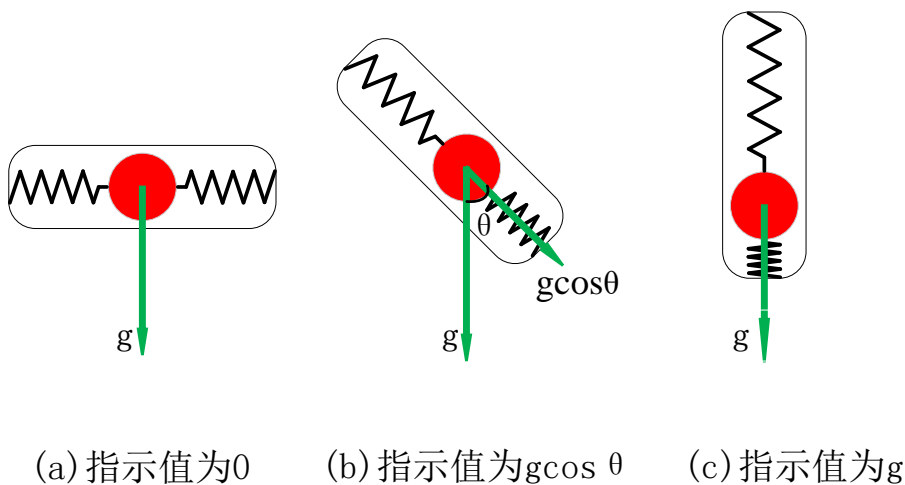
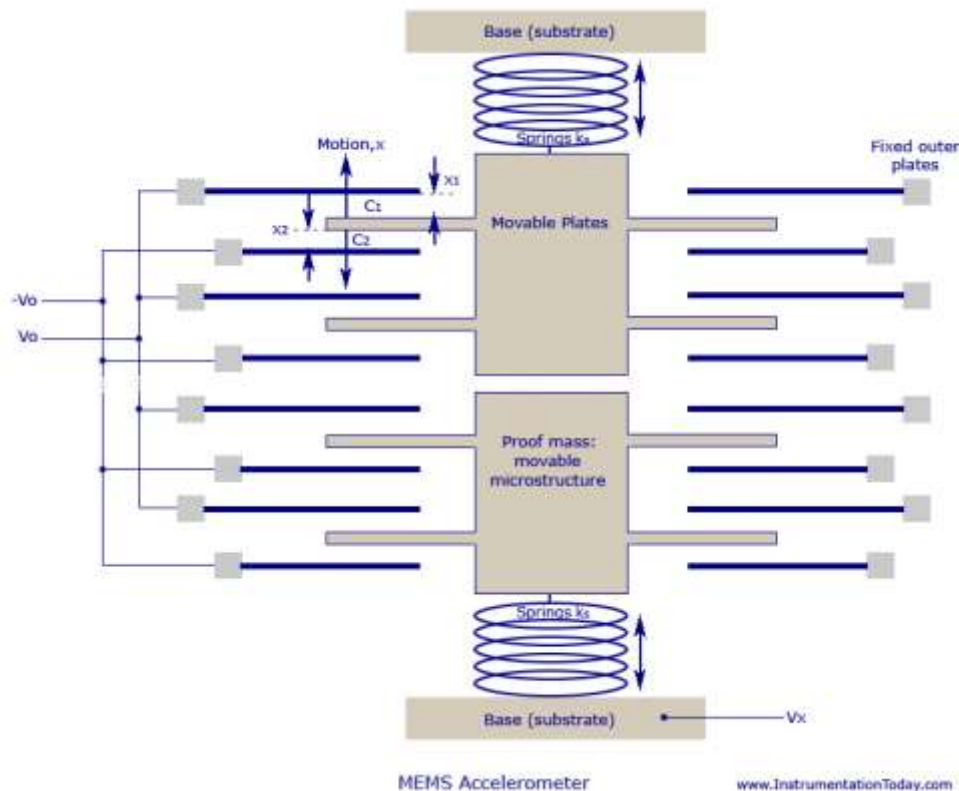
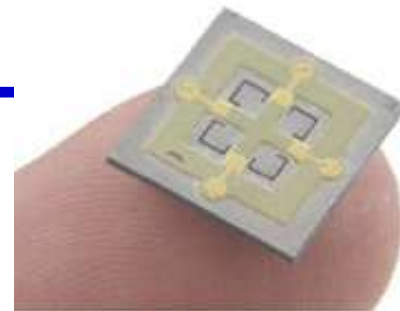


图7.2 加速度计测量原理



1. 三轴加速度计

□ 基本原理



MEMS三轴加速度计是采用压阻式、压电式和电容式工作原理，产生的比力（压力或者位移）分别正比于电阻、电压和电容的变化。这些变化可以通过相应的放大和滤波电路进行采集。该传感器的缺点是受振动影响较大。

图7.3 MEMS加速度计测量原理



1. 三轴加速度计

□ 校正

(1) 校正

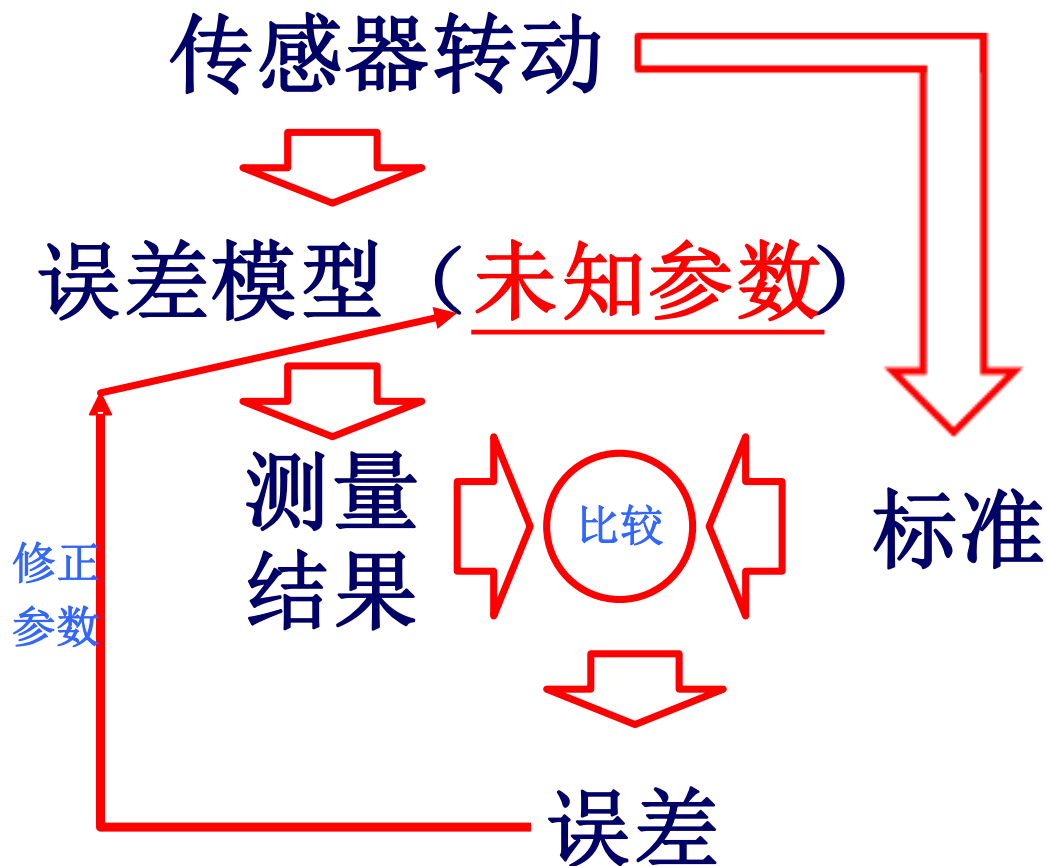


图7.4 加速度计校正原理

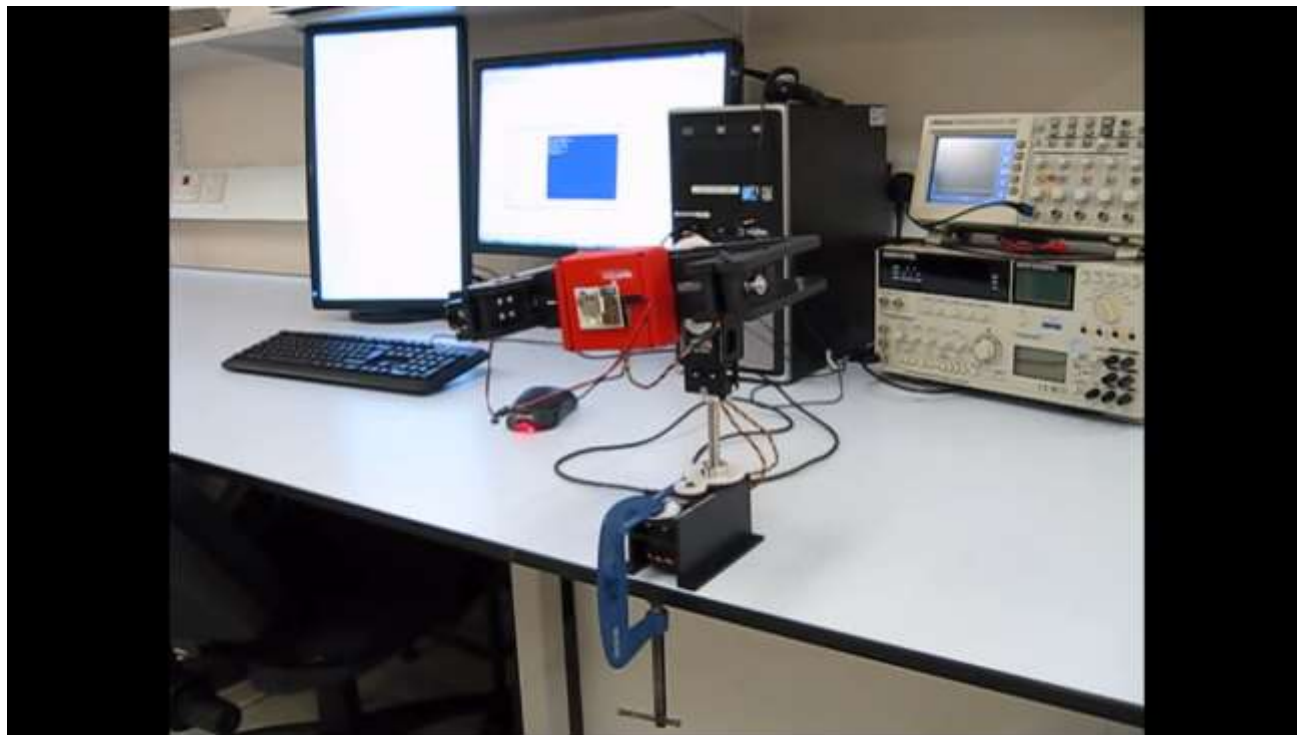


1. 三轴加速度计

□ 校正

(2) 自动校正

- 一般校正：需要外部标定设备，麻烦但精确
- 自动校正：不需要外部标定设备，简单，精度略微差



视频1 Accelerometer, magnetometer & gyroscope calibration
<https://youtu.be/XqQCbkncVYI>



1. 三轴加速度计

□ 自动校正

(1) 误差模型

三轴加速度计在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差。因此，需要建立标定前和标定后的三轴加速度的关系。误差模型如下

$${}^b\mathbf{a}_m = \mathbf{T}_a \mathbf{K}_a ({}^b\mathbf{a}'_m + \mathbf{b}'_a)$$

标定后三轴加速度值

微小旋转

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_a & -\Delta\theta_a \\ -\Delta\psi_a & 1 & \Delta\phi_a \\ \Delta\theta_a & -\Delta\phi_a & 1 \end{bmatrix}$$

尺度因子

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} s_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & s_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & s_{az} \end{bmatrix}$$

标定前三轴加速度值

偏移

$$\mathbf{b}'_a = \begin{bmatrix} b'_{ax} \\ b'_{ay} \\ b'_{az} \end{bmatrix}$$



1. 三轴加速度计

□ 自动校正

(2) 校正方法

为了校正加速度计的测量值，我们需要估计下列未知参数

$$\Theta_a = [\Delta\psi_a \quad \Delta\theta_a \quad \Delta\phi_a \quad s_{ax} \quad s_{ay} \quad s_{az} \quad b'_{ax} \quad b'_{ay} \quad b'_{az}]^T$$

定义了下面的函数

$${}^b\mathbf{a}_m = \mathbf{h}_a(\Theta_a, {}^b\mathbf{a}'_m) = \mathbf{T}_a \mathbf{K}_a ({}^b\mathbf{a}'_m + \mathbf{b}'_a)$$

原理：“无论加速度计放置的角度如何变化，其比力的模长始终是常值，即当地重力加速度”

根据这个原理，我们有

$$\Theta_a^* = \arg \min_{\Theta_a} \sum_{k=1}^M \left(\|\mathbf{h}_a(\Theta_a, {}^b\mathbf{a}'_{m,k})\| - g \right)^2$$

$\arg \min \{ \}$ 表示使目标函数取最小值时的变量值



1. 三轴加速度计

□ 自动校正

(3) 校正实验

数据来源：PIXHAWK飞控板的IMU,通过串口解析Mavlink协议采集数据
校正结果：

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0.0093 & -0.0136 \\ -0.0093 & 1 & 0.0265 \\ 0.0136 & -0.0265 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} 1.0203 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0201 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0201 \end{bmatrix}, \mathbf{b}'_a = 10^{-5} \begin{bmatrix} -2.755 \\ 1.565 \\ -9.942 \end{bmatrix}$$

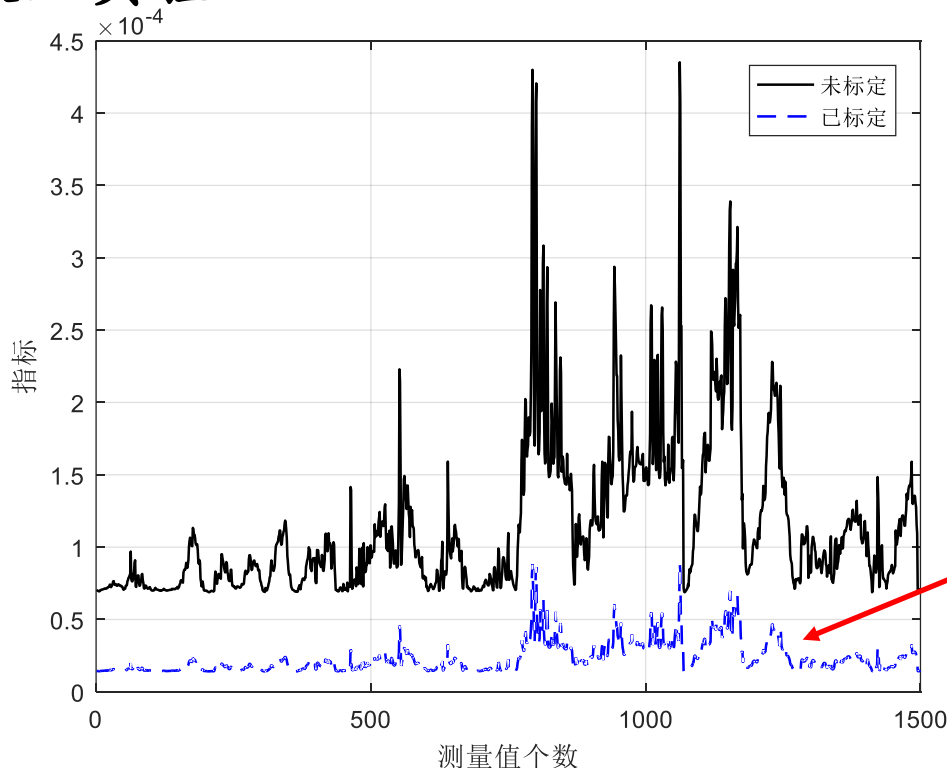


1. 三轴加速度计

□ 自动校正

$$\text{Dist} = \left(\left\| \mathbf{h}_a \left(\Theta_a, {}^b \mathbf{a}'_{m,k} \right) \right\| - g \right)^2$$

(3) 校正实验



校正后误差
变小，达到目的

图7.5 加速度校正误差



1. 三轴加速度计

□ 测量模型

加速度计固联在机体轴上，测量的是三个机体轴方向上的比力，因此记为 ${}^b\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^b\mathbf{a}_m = {}^b\mathbf{a} + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a$$

校正后测量的比力 真实的加速度 漂移 高斯白噪声

漂移量 \mathbf{b}_a 又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{b_a}$$

其中 $\mathbf{n}_{b_a} \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。

由于大多数MEMS传感器均是以半导体材料作为基础加工的，而半导体对温度很敏感，再加上其他的一些安装，电路设计等影响因素，**零点漂移和温度漂移是不可避免。**



2. 三轴陀螺仪

□ 基本原理

科里奥利力：

当一个质点相对于惯性系做直线运动时，因为质点自身惯性，它相对于旋转体系，其轨迹是一条曲线。立足于旋转体系，我们认为有一个力驱使质点运动轨迹形成曲线。科氏力就是对这种偏移的一种描述，表示为

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2m^b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

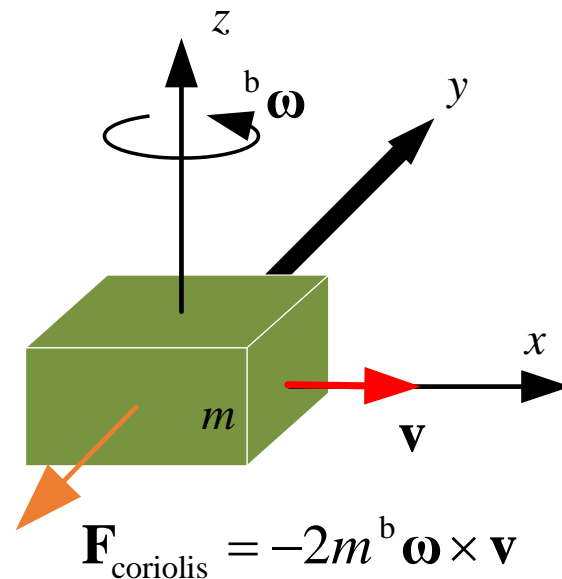
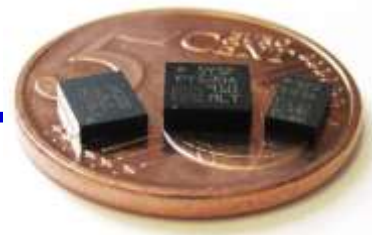


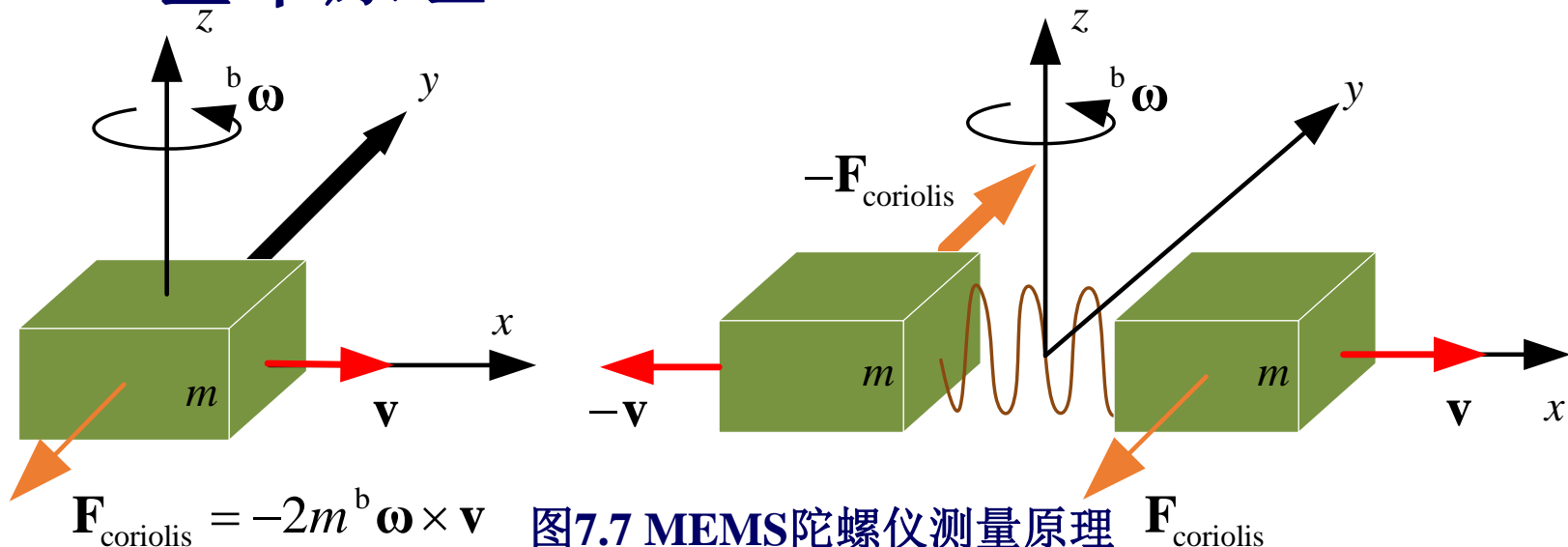
图7.6 科里奥利力示意图



2. 三轴陀螺仪



□ 基本原理



- 在陀螺仪中，两个质量块运动速度方向相反，而大小相同。它们产生的科氏力相反，从而压迫两块对应的电容板移动，产生电容差分变化。**电容的变化正比于旋转角速度**。这就是基本原理。
- 纯加速度并不能使陀螺仪产生读数。这是因为纯加速度变化只能导致两个质量块朝相同方向移动，不会带来电容的差分变化。



2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

(1) 误差模型

三轴陀螺仪在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差。因此，需要建立标定前和标定后的三轴角速度的关系。误差模型如下

$${}^b\omega_m = T_g K_g ({}^b\omega'_m + b'_g)$$

标定后三轴角速度 $T_g = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_g & -\Delta\theta_g \\ -\Delta\psi_g & 1 & \Delta\phi_g \\ \Delta\theta_g & -\Delta\phi_g & 1 \end{bmatrix}$ 微小旋转

$K_g = \begin{bmatrix} s_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{gz} \end{bmatrix}$ 尺度因子

标定前三轴角速度 $b'_g = \begin{bmatrix} b'_{gx} \\ b'_{gy} \\ b'_{gz} \end{bmatrix}$ 偏移



2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

(2) 校正方法

原理：“角速度积分得到的角度与标定过的加速度计估计得到的角度进行比较，来标定未知参数”

为了校正陀螺仪测量量，我们定义了一个操作 Ψ ，如下

$$\mathbf{q}'_{a,k+1} = \Psi(\Theta_g, \omega'_{m,k:k+1}, \mathbf{q}_{a,k})$$

递推后得到的四元数

陀螺仪未知参数

陀螺仪读数序列

校正加速度计求得的四元数，
偏航角假设为0

第五讲“四元数变化率与机体角速度的关系”
+龙格库塔法

其中

$$\Theta_g = [\Delta\psi_g \quad \Delta\theta_g \quad \Delta\phi_g \quad s_{gx} \quad s_{gy} \quad s_{gz} \quad b'_{gx} \quad b'_{gy} \quad b'_{gz}]^T$$



2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

这个实现可以利用四元数变化率与机体角速度的关系模型

$$\dot{\mathbf{q}}_e^b(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b\boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b\boldsymbol{\omega} & -[{}^b\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(t)$$

并用龙格库塔法积分实现，得到递推后得到的加速度

$$\mathbf{q}'_{a,k} \xrightarrow{\text{递推后得到的加速度}} \mathbf{a}'_{k+1} = \begin{bmatrix} a'_{x_b,k+1} \\ a'_{y_b,k+1} \\ a'_{z_b,k+1} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \cos \phi' \end{bmatrix}$$



2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

(2) 校正方法

原理：我们希望通过积分得到的角度与加速度测量的角度尽量相同

$$\mathbf{a}'_k = \mathbf{h}_g \left(\Theta_g, {}^b\omega'_{m,k-1:k}, {}^b\mathbf{a}_{m,k-1} \right)$$

其中函数 h_g 的作用是根据上一次的比力和角速度信息来估计当前比力。其标定原理进一步表示为：期望估计值 \mathbf{a}'_k 尽可能地与标定后的加速度计测量值 ${}^b\mathbf{a}_{m,k}$ 接近。根据这个原理，给出以下优化问题

$$\Theta_g^* = \arg \min_{\Theta_g} \sum_{k=1}^M \left(\mathbf{h}_g \left(\Theta_g, {}^b\omega'_{m,k-1:k}, {}^b\mathbf{a}_{m,k-1} \right) - {}^b\mathbf{a}_{m,k} \right)^2$$

递推后得到
的加速度函数



2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

(3) 校正实验

数据来源：PIXHAWK飞控板的IMU, 通过串口解析Mavlink协议采集数据, 还有经过校正的加速度数据

校正结果:

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0.1001 & -0.1090 \\ -0.1001 & 1 & 0.1002 \\ 0.1090 & -0.1002 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}'_g = \begin{bmatrix} 0.2001 \\ 0.2002 \\ 0.2004 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

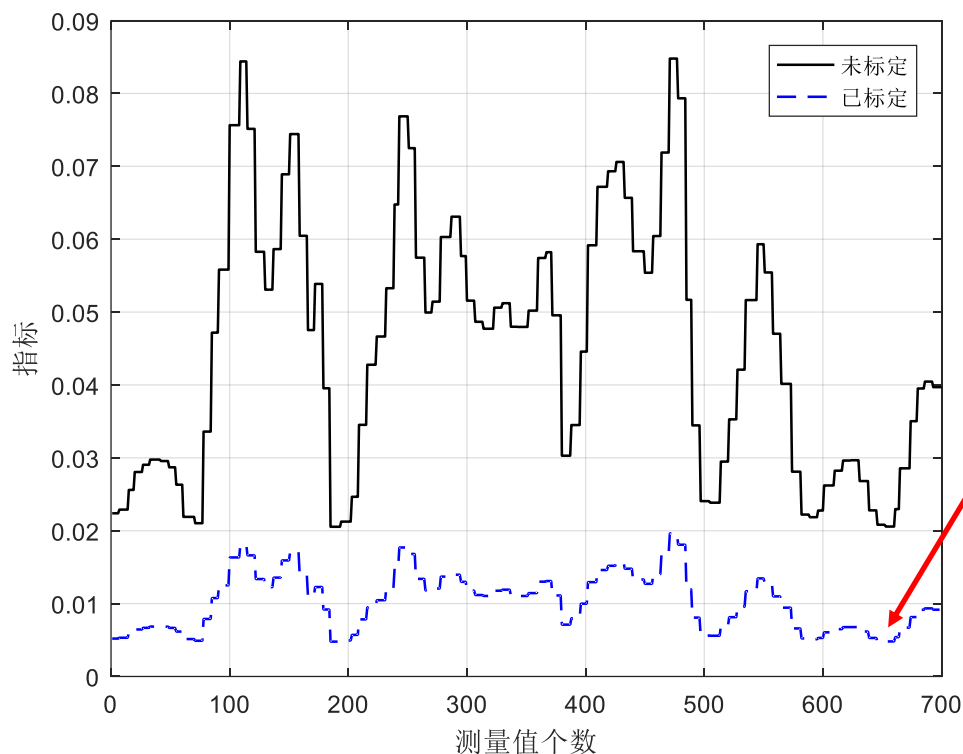


2. 三轴陀螺仪

□ 自动校正

$$\text{Dist}_g \triangleq \left(\mathbf{h}_g \left(\Theta_g, {}^b\omega'_{m,k-1:k}, {}^b\mathbf{a}_{m,k-1} \right) - {}^b\mathbf{a}_{m,k} \right)^2$$

(3) 校正实验



校正后误差
变小，达到目的

图7.8 陀螺仪校正误差



2. 三轴陀螺仪

□ 测量模型

陀螺仪也是固联在机体轴上，测量的是三个机体轴方向上的角速度，因此记为 ${}^b\omega_m \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^b\omega_m = {}^b\omega + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g$$

↑ ↑ ↑ ↑
校正后 真实的 漂移 白噪声
测量的 角速度
角速度

进一步，漂移量又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{b_g}$$

其中 $\mathbf{n}_g \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。



3. 三轴磁力计

□ 基本原理

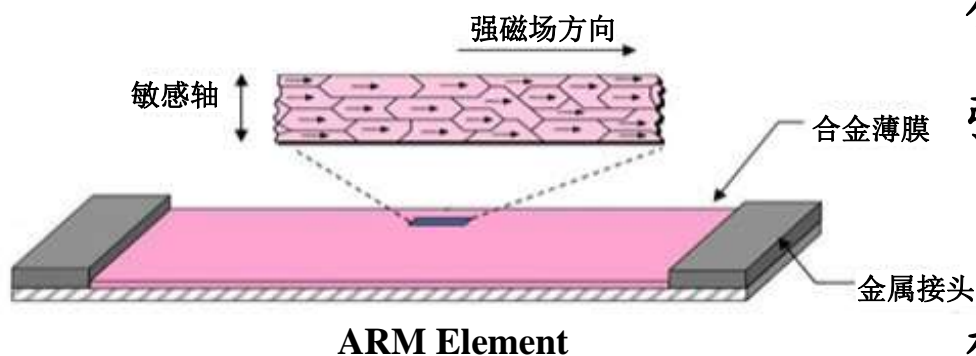


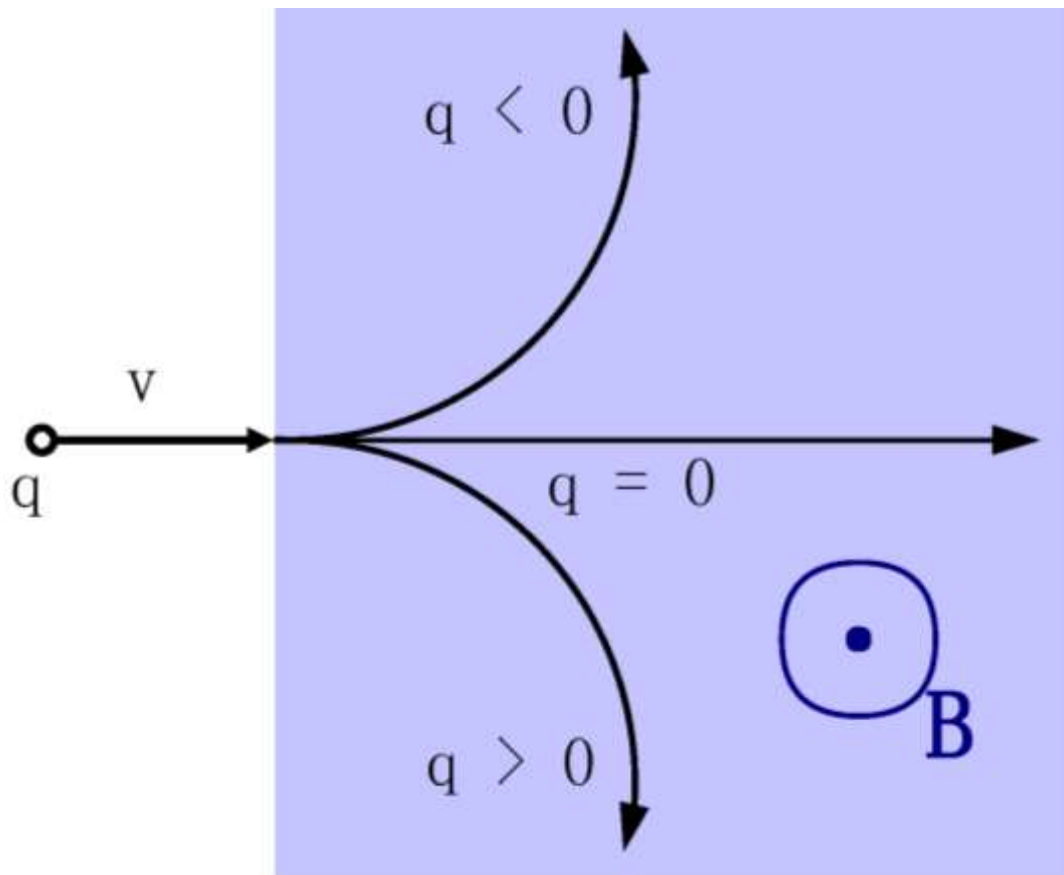
图7.9 磁阻传感器电阻值

该磁力仪是采用三个互相垂直的磁阻传感器，每个轴向上的传感器检测在该方向上的地磁场强度。

一种方式是采用具有晶体结构的合金材料。它们对外界的磁场很敏感，磁场的强弱变化会导致磁阻传感器电阻值发生变化。



3. 三轴磁力计



- 另外三轴磁力计还可以采用洛伦兹力原理，电流流过磁场产生力，从而驱动电容等变化。

图7.10 洛伦兹力原理

磁场方向 \mathbf{B} 表示由屏幕内指向外， q 表示带电粒子



3. 三轴磁力计

□ 自动校正

(1) 误差模型

三轴磁力计在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差，不仅如此周边的原件（飞控芯片，供电电路，电机）也会对其产生影响。误差模型如下

$${}^b\mathbf{m}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{K}_m ({}^b\mathbf{m}'_m + \mathbf{b}'_m)$$

标定后
三轴磁感
应强度值

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_m & -\Delta\theta_m \\ -\Delta\psi_m & 1 & \Delta\phi_m \\ \Delta\theta_m & -\Delta\phi_m & 1 \end{bmatrix}$$

微小旋转

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} s_{mx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{my} & 0 \\ 0 & 0 & s_{mz} \end{bmatrix}$$

尺度因子

标定前
三轴磁感
应强度值

$$\mathbf{b}'_m = \begin{bmatrix} b'_{mx} \\ b'_{my} \\ b'_{mz} \end{bmatrix}$$

偏移



3. 三轴磁力计

□ 自动校正

(2) 校正方法

原理: 在一个地点, 无论磁力计位置如何放置, 它的真实的磁场的感应场的大小是常量, 即 $\|{}^b\mathbf{m}_{m,k}\|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, M$ 。

为了校正三维磁力计模型, 我们需要估计下列未知参数

$$\Theta_m \triangleq [\Delta\psi_m \quad \Delta\theta_m \quad \Delta\phi_m \quad s_{mx} \quad s_{my} \quad s_{mz} \quad b'_{mx} \quad b'_{my} \quad b'_{mz}]^T$$

我们定义了下面的函数:

$$\mathbf{h}_m(\Theta_m, {}^b\mathbf{m}'_m) \triangleq \mathbf{T}_m \mathbf{K}_m ({}^b\mathbf{m}'_m + \mathbf{b}'_m)$$

根据这个原理, 我们有

$$\Theta_m^* = \arg \min_{\Theta_m} \sum_{k=1}^M \left(\|\mathbf{h}_m(\Theta_m, {}^b\mathbf{m}'_{m,k})\| - 1 \right)^2$$



3. 三轴磁力计

□ 自动校正

(3) 校正实验

校正结果:

数据来源:

PIXHAWK飞控板的

IMU,通过串口解析

Mavlink协议采集数据

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & -0.0026 & 0.0516 \\ 0.0026 & 1 & -0.0156 \\ -0.0516 & 0.0156 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_m = \begin{bmatrix} -0.3223 \\ -0.1280 \\ 0.1589 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

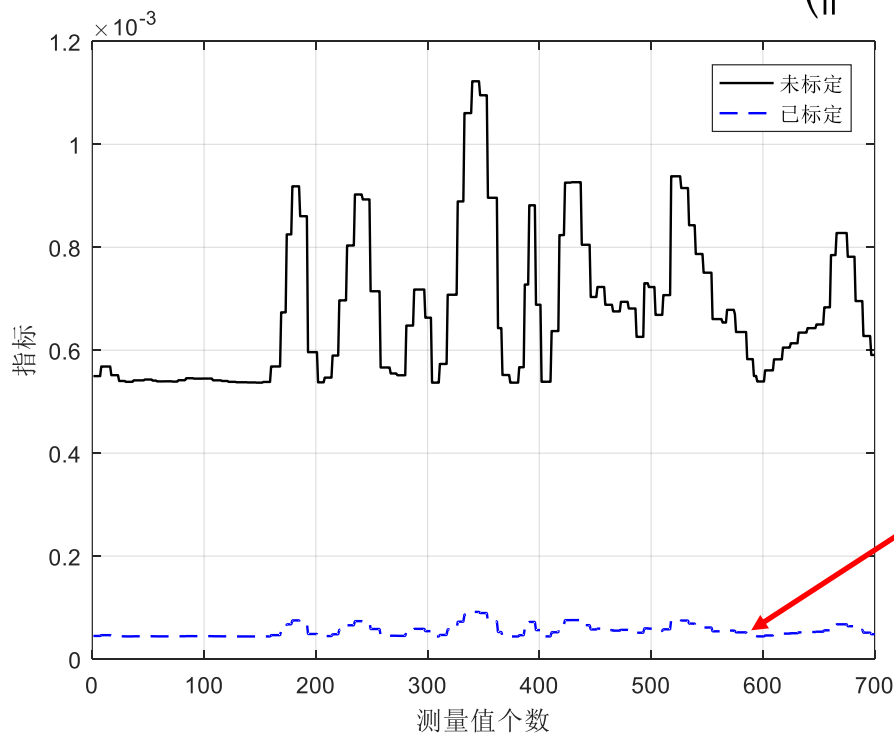


3. 三轴磁力计

□ 自动校正

(3) 校正实验

$$\text{Dist}_m \triangleq \left(\left\| \mathbf{h}_m \left(\Theta_m, {}^b \mathbf{m}'_{m,k} \right) \right\| - 1 \right)^2$$



校正后误差
变小，达到目的

图7.11 磁力计校正误差



3. 三轴磁力计

□ 测量模型

三维磁力计固联在机体轴上，测量的是机体坐标系的三个方向上的磁场矢量，记为 ${}^b\mathbf{m}_m \in \mathbb{R}^3$ 。它们可以表示为

$${}^b\mathbf{m}_m = \mathbf{R}_e^b \cdot {}^e\mathbf{m} + \mathbf{b}_m + \mathbf{n}_m$$

校正后测量的磁场矢量 旋转矩阵 真实的磁场矢量 漂移 白噪声

进一步，漂移量 $\mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^3$ 又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_m = \mathbf{n}_{b_m}$$

其中 $\mathbf{n}_{b_m} \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。



4. 超声波测距仪

□ 基本原理

超声波是指振动频率大于20kHz的声波，其每秒的振动次数很高，超出了人耳听觉的上限，被称为超声波。它方向性好，穿透能力强，广泛应用于测距和测速等方面。因此，要计算超声波发生器与被测物体的距离 d ，只要计算出从发出超声波信号到接收到返回信号的时间 Δt ，声速为 v ，则 $d = v\Delta t/2$ ，可以得出超声波发生器与被测物体的距离。





4. 超声波测距仪

□ 基本原理

超声波测距仪也存在一些不足。首先，它的测量范围小。其次，如图所示，柔软的物体或者与传感器处于特定角度的物体可能反射的声波较少，甚至没有反射波。



图7.13 超声波测距失效情形



4. 超声波测距仪

□ 校正

这些量是位置控制需要的观测值，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，这些传感器所产生的偏差可以通过多旋翼飞行在线进行校正。

□ 测量模型

超声波传感器一般用于测相对高度，位于多旋翼正下方。如果传感器测得距离为 $d_{\text{SONAR}} \in \mathbb{R}_+$ ，那么飞行器离地高为

$$d_{\text{SONAR}} = -\frac{1}{\cos \theta \cos \phi} p_{z_e} + n_{d_{\text{SONAR}}}$$

其中： $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ 表示俯仰角和滚转角， $n_{d_{\text{SONAR}}} \in \mathbb{R}$ 表示高斯白噪声。如果采用的超声波传感器也含有漂移，也可以将模型如前面传感器模型一样进行扩展。



5. 气压计

□ 基本原理

多旋翼多采用压电式气压计，气压计也是一种压力传感器，新一代的气压计既可以测量气压和高度，又可以测量温度。大气压随高度的增加而减小，气压计正是通过测量大气压来估计高度。因为大气压分布不是均匀的而且气压计对气流的影响很敏感（**有风情况测量不准**），因此气压计只能得到飞行高度的近似值。

□ 校正

这些量是位置控制需要的观测值，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，这些传感器所产生的偏差可以通过多旋翼飞行在线进行校正。



5. 气压计

□ 测量模型

气压计用于测绝对高度，进一步得到相对高度

$$d_{\text{BARO}} = -p_{z_e} + b_{d_{\text{BARO}}} + n_{d_{\text{BARO}}}$$

↑ ↑ ↑ ↑

测量的 真实 漂移 白噪声
高度 高度

进一步，漂移量 $b_{d_{\text{BARO}}} \in \mathbb{R}$ 又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{b}_{d_{\text{BARO}}} = n_{b_{d_{\text{BARO}}}}$$

其中 $n_{b_{d_{\text{BARO}}}} \in \mathbb{R}$ 表示为高斯白噪声。



6. 二维激光测距仪

□ 基本原理

二维激光测距仪是利用时间飞行原理来测量距离的一种仪器，激光扫描测量系统基于激光测距原理。通过旋转的光学部件发射形成二维的扫描面，以实现区域扫描及轮廓测量功能。二维激光测距仪可以实现360度一定范围内的激光测距扫描，产生所在空间的平面点云地图信息用于地图测绘、机器人定位导航、物体/环境建模等应用。

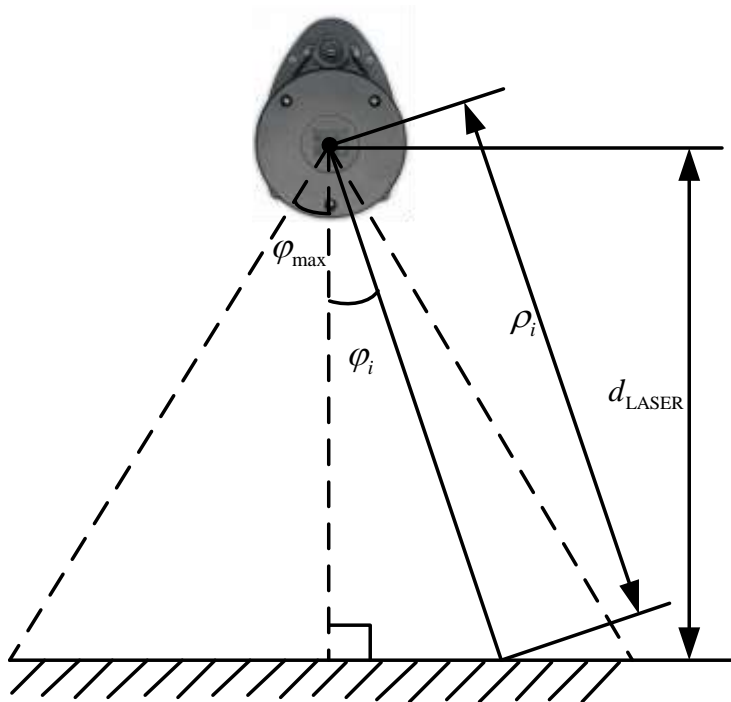
□ 校正

因为激光扫描测距仪一般用于测高或者避障，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，一般可以认为出产的传感器已经足够精确。



6. 二维激光测距仪

□ 测量模型



激光扫描测距雷达到平面的高度模型如下

$$d_{\text{laser}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \rho_i \cos \varphi_i = \frac{-1}{\cos \theta \cos \phi} p_{z_e} + n_{d_{\text{laser}}}$$

其中： $\rho_i \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi_i \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$ 为测距仪测得的距离值和当前扫描时刻的角度值， M 为采样点个数， θ, ϕ 表示俯仰角和滚转角， $n_{d_{\text{laser}}} \in \mathbb{R}$ 表示高斯白噪声。

图7.14 激光扫描测距雷达工作原理



6. 二维激光测距仪

□ 补充知识（LiDAR）

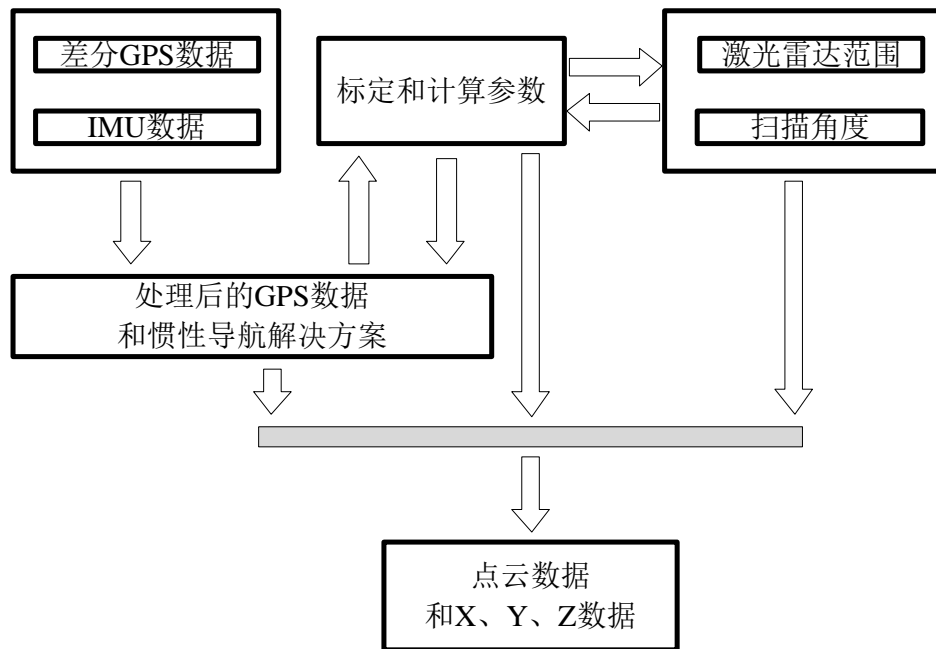


图7.15 LiDAR生成点云原理图

集LiDAR、GPS和IMU为一体的设备可以生成点云图。点云图数据中含有空间三维信息和激光强度信息。应用分类技术在这些原始数字表面模型中移除建筑物、人造物、覆盖植物等测点，即可获得数字高程模型，并同时得到地面覆盖物的高度。



6. 二维激光测距仪

□ 补充知识（LiDAR）



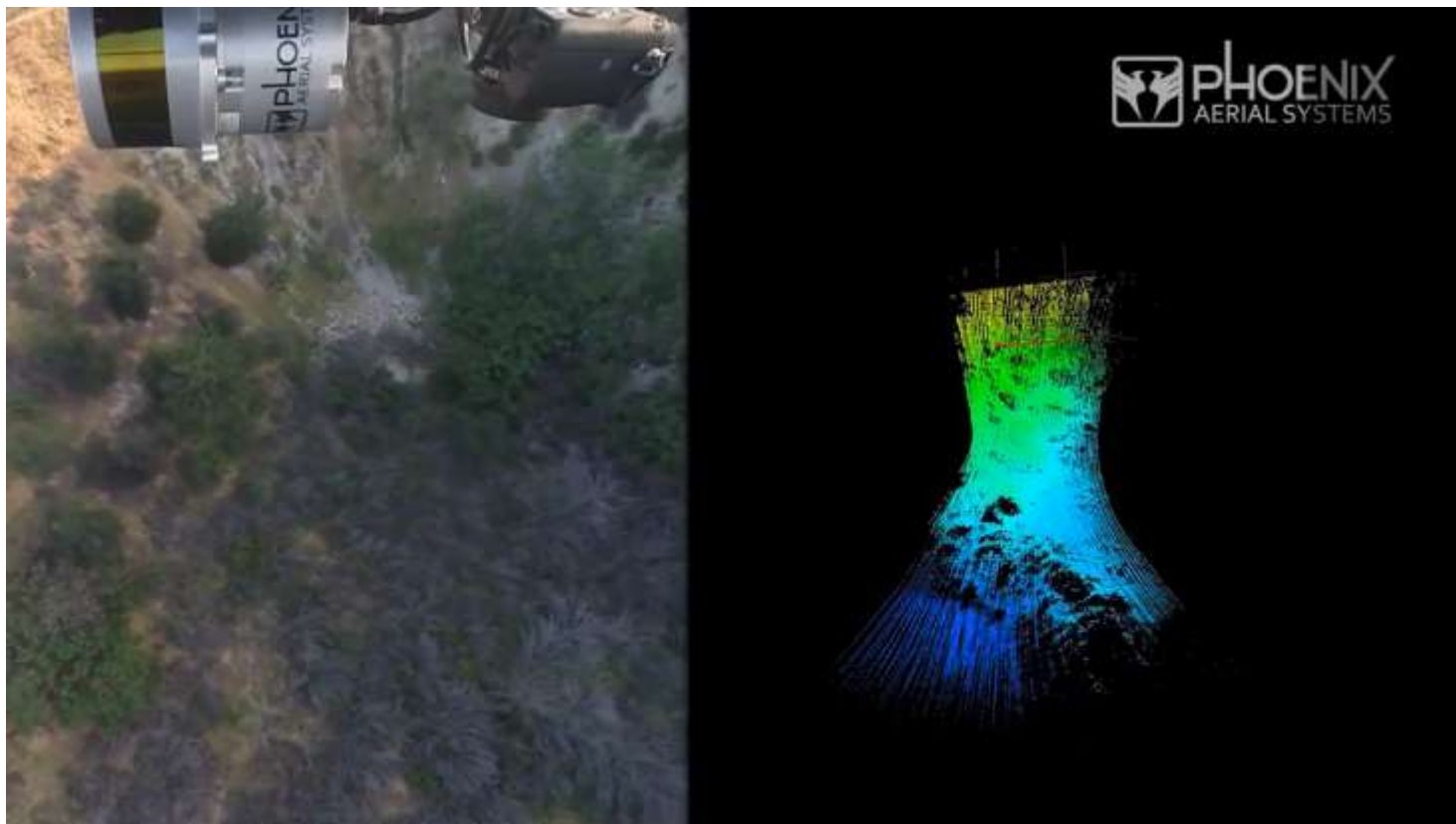
图7.16 Velodyne公司的LiDAR及
装载LIDAR系统的多旋翼

LiDAR的性能指标包括：重量、范围、功率、水平视场角、垂直视场角、每秒扫描点数、扫描频率、辨识精度、通道数（一个激光发射器和一个激光接收器为一个通道）。以Velodyne公司的VLP-16为例，它重0.83kg，扫描范围100m、8W、水平扫描角度是 360° 、垂直方向为 $\pm 15^\circ$ 、每秒扫描点数300000点，扫描频率5-20Hz、辨识精度 $\pm 3\text{cm}$ 、16个通道数。由于LiDAR的小型化，使其得以在多旋翼上施展拳脚，如左图所示。



6. 二维激光测距仪

□ 补充知识（LiDAR）



视频2 Phoenix Aerial AL3-16 UAV LiDAR Mapping System Overview, https://youtu.be/BhHro_rcgHo



7. 全球定位系统（GPS）

- 全球定位系统由许多卫星组成，位置已知。基本原理是测GPS接收机到卫星的距离，然后通过解方程确定GPS接收机的位置。
- 对C/A码测得的伪距称为C/A码伪距，精度约为20米左右，对P码测得的伪距称为P码伪距，精度约为2米左右。考虑电离层、对流层和钟差影响，伪距定位基本观测方程为

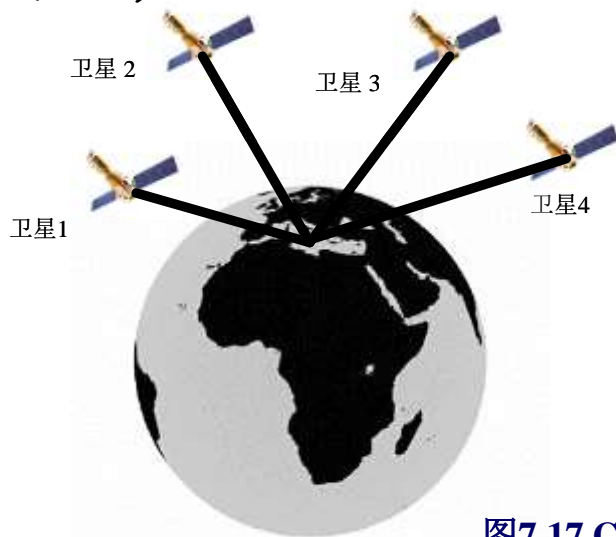


图7.17 GPS卫星示意图



7. 全球定位系统（GPS）

□ 基本原理

$$\rho = \rho' + c(\delta_t + \delta_T) + \delta_I$$

Diagram illustrating the GPS basic principle equation:

- ρ : 真实距离 (True Distance)
- ρ' : 伪距 (Pseudorange)
- c : 光速 (Speed of Light)
- δ_t : 卫星钟误差改正数 (Satellite Clock Error Correction)
- δ_T : 接收机时钟相对于GPS时间的误差改正数 (Receiver Clock Error Correction relative to GPS time)
- δ_I : 延迟改正数 (Delay Correction)

接收机钟差是未知数，其产生是因为GPS 接收机一般采用高精度的石英钟，接收机的钟面时与GPS 标准时之间的差异称为接收机钟差。



7. 全球定位系统（GPS）

□ 基本原理

令卫星的坐标为 $\mathbf{p}_{s,k} \in \mathbb{R}^3, k=1, \dots, n_s$ 而用户接收机的位置坐标为 $\mathbf{p}_r \in \mathbb{R}^3$ 。可以得到

$$\|\mathbf{p}_{s,k} - \mathbf{p}_r\| - \delta_I = \rho'_k + c(\delta_{t,k} + \delta_T), k=1, \dots, n_s$$

共4个未知数。因此，最少需要4颗卫星，才能够对用户接收机进行定位。



7. 全球定位系统（GPS）

□ 差分GPS基本原理

差分GPS(DGPS)主要是通过消除误差公共项来改善定位性能。DGPS系统由**基准站**、**数据链**和**用户**三部分构成，它要求有高质量的GPS基准接收机放在已知坐标的基准站上，基准站估算每个卫星的**测距误差分量**，并对每颗卫星可视范围内的卫星形成**校正值**，将该校正值或者原始观测值，通过数据链发送给所有的DGPS用户。



7. 全球定位系统（GPS）

□ 测量模型

GPS接收机放在多旋翼飞行器上，用于测量在地球固连坐标系的位置 ${}^e\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^e\mathbf{p}_{\text{GPS}} = {}^e\mathbf{p} + \mathbf{b}_p + \mathbf{n}_p$$

测量到的位置信号 真实位置信号 漂移 噪声

进一步，漂移量 \mathbf{b}_p 又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_p = \mathbf{n}_{b_p}$$

其中 $\mathbf{n}_{b_p} \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。一般的GPS和差分GPS都可以采用上面的模型，不同的是它们的精度不同，体现在漂移和噪声参数上，还有它们的频率不同。



8. 摄像机

□ 基本原理

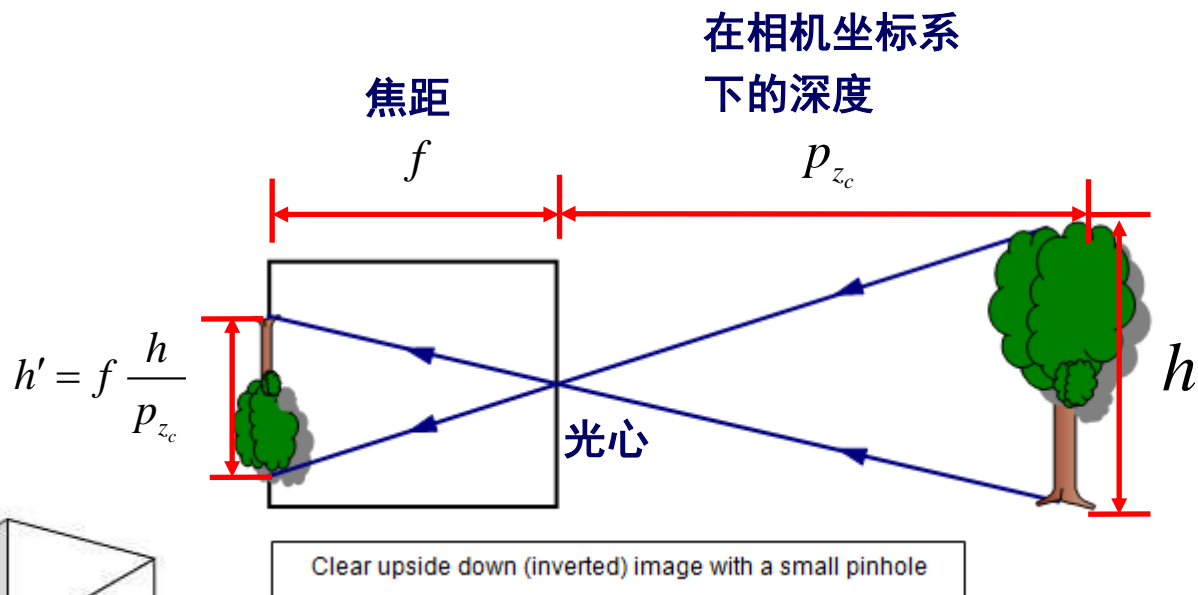
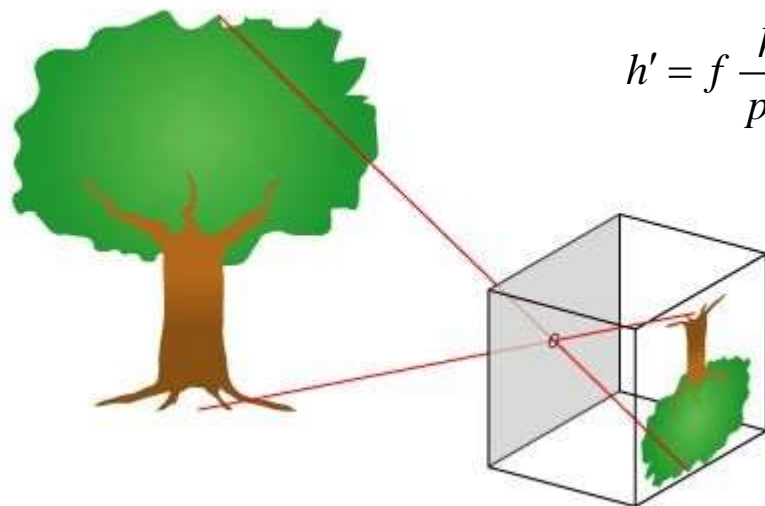


图7.18 针孔摄像机成像模型示意图



8. 摄像机

□ 基本原理

在机器视觉中，摄像机通过成像透镜将三维场景投影到二维像平面的投影关系即为成像模型，摄像机成像模型将三维空间中的点与图像平面中的点对应起来。为了研究的方便，空间中任一点P在图像中的成像位置可以用**针孔成像模型**近似表示，这种关系也称为**中心摄影或透视投影模型**。



8. 摄像机

□ 基本原理

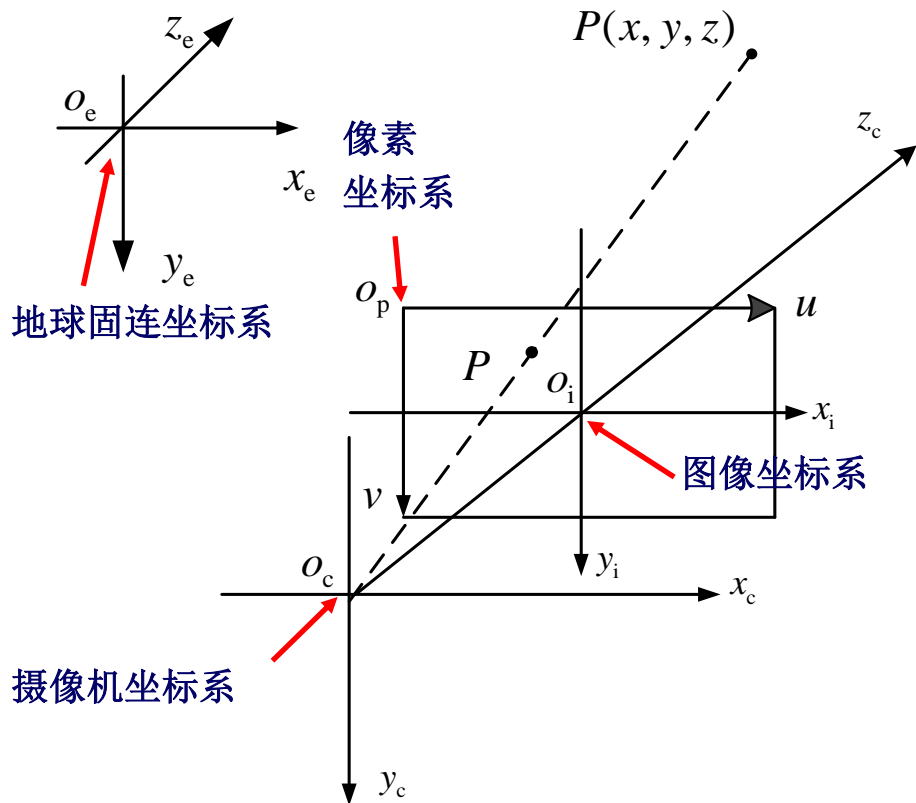


图7.19 摄像机成像模型



8. 摄像机

□ 测量模型

(1) 地球固连坐标系到摄像机坐标系的变换

$$\begin{bmatrix} P_{x_c} \\ P_{y_c} \\ P_{z_c} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{旋转} & \text{三维} \\ \text{矩阵} & \text{平移} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{R}_e^c & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_2} \begin{bmatrix} P_{x_e} \\ P_{y_e} \\ P_{z_e} \\ 1 \end{bmatrix}$$



8. 摄像机

□ 测量模型

(2) 摄像机坐标系到图像坐标系的变换

$$\begin{cases} P_{x_i} = \frac{fP_{x_c}}{P_{z_c}} \\ P_{y_i} = \frac{fP_{y_c}}{P_{z_c}} \end{cases} \Rightarrow s \begin{bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{P} \\ \text{毫米}}} \begin{bmatrix} P_{x_c} \\ P_{y_c} \\ P_{z_c} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{P_{x_i}}{dX} + u_0 \\ v = \frac{P_{y_i}}{dY} + v_0 \end{cases} \quad \substack{\text{像素}}{}$$



8. 摄像机

□ 内部参数校正工具箱

工具箱	描述	网址
Computer Vision System Toolbox	Matlab R2012a以及更高版本自带的工具箱自带工具箱。采用棋盘格作为靶标，可以对一般相机进行标定。	http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html
Camera Calibration Toolbox for Matlab	采用棋盘格作为靶标，可以对传统相机进行标定。	http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/
Camera Calibration Toolbox for Generic Lenses	可以对传统相机和全方位相机，比如：鱼眼相机和折反射相机，进行标定。采用平面靶标。	http://www.ee.oulu.fi/~jkannala/calibration/calibration.html
The DLR Camera Calibration Toolbox	标定过程全自动，可以处理标定物不完全在图像内的情况。采用平面靶标，亚像素提取精度。	http://dlr.de/rmc/rm/en/desktopdefault.aspx/tabid-3925/6084_read-9201/
Fully automatic camera and hand to eye calibration	二合一的工具箱。一部分为全自动标定，第二部分是机器人手眼标定（Hand-Eye Calibration）	http://www.vision.ee.ethz.ch/software/calibration_toolbox/calibration_toolbox.php
Camera Calibration Tools	相机可以直接连到电脑进行标定	http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/Dan.Stoyanov/calib/
Omnidirectional Calibration Toolbox	可以用于标定双曲（Hyperbolic），抛物线（Parabolic），折叠镜（Folded Mirror），球面（Spherical）和大广角（Wide-angle）相机。	http://www.robots.ox.ac.uk/~cmey/Toolbox.html
Camera Calibration Toolbox for Generic Multiple Cameras	采用一维标定杆，可以对传统、大广角和鱼眼相机进行内外参标定	http://quanquan.buaa.edu.cn/CalibrationToolbox.html



9. 本讲小结

- 本节课主要给出了三轴加速度计，三轴陀螺仪和三轴磁力计的自动标定的原理和方法。因为无需额外的设备，因此这些方法也**比较实用**。
- 本节课的校正方法属于传感器内部参数标定，还有传感器外部参数标定可以进一步研究。这是因为我们认为传感器的坐标系原点就是多旋翼的机体系原点，坐标系的轴也是与多旋翼的机体系轴一致的。然而，**由于安装的问题，不可能将传感器都置于多旋翼的中心或重心**。



资源

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: dai@buaa.edu.cn



致谢

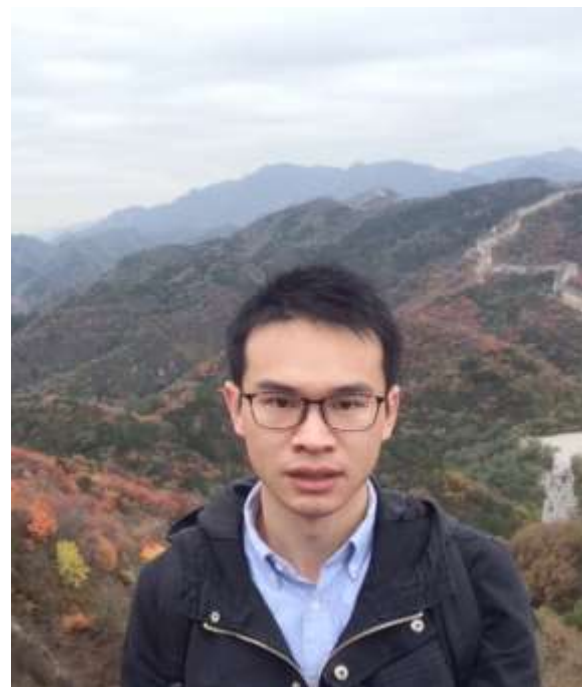
感谢控制组同学



傅嘉宁



邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



谢谢！