



多旋翼飞行器设计与控制

第八讲 可观性和卡尔曼滤波器

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



北航可靠飞行控制研究组
BUAA Reliable Flight Control Group



东方智慧



盲人摸象



核心问题

什么是可观性？ 如何设计卡尔曼滤波器？



大纲

1. 可观性
2. 卡尔曼滤波
3. 多速率采样卡尔曼滤波
4. 扩展卡尔曼滤波
5. 本讲小结



可观性

可观性就是回答“状态的变化能否由输出反映出来”

中医“望闻问切”
是否能瞧病？



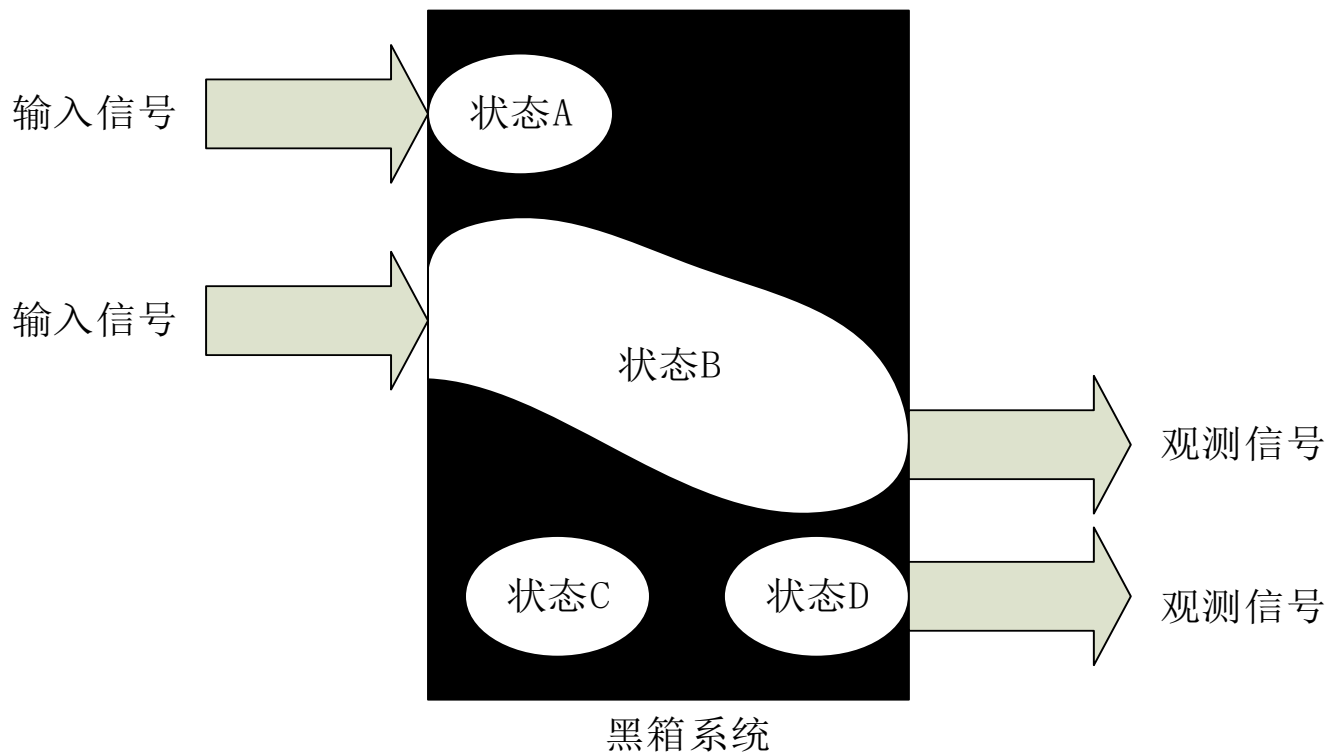
网络大数据作为输出，能否观测
更有价值信息？



三个关键词：动态系统、状态、输出



可观性



直观地，状态A和状态C是不可观的



可观性

□ 连续线性系统

(1) 定义

考虑如下连续线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

定义1. 如果在有限时间间隔 $t_0 \leq t \leq t_f$ 内, 根据输出值 $\mathbf{y}(t)$ 和输入值 $\mathbf{u}(t)$, 能够确定系统的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 的每一个分量, 那么称此系统是完全可以观的, 简称可观测。

三个关键词: 动态系统、状态、输出



可观性

□ 连续线性系统

(2) 直观解释

由系统方程可知

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{u} \Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}$$

⋮

$$\mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_v \mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

为什么不多求
几阶导数？如：

$$\mathbf{O}'_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_v \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \end{bmatrix}$$



可观性

□ 连续线性系统

为什么不多求几阶导数？如： $\mathbf{O}'_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_v \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \end{bmatrix}$

根据凯利-哈密尔顿定理

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A}^n = \alpha_0 \mathbf{C}^T + \alpha_1 \mathbf{C}^T \mathbf{A} + \cdots + \alpha_n \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1}$$

因此可观性矩阵的秩并不会增加

所以只求到 (n-1) 阶导数



可观性

□ 连续线性系统

(3) 定理

进一步

利用此方程可以通过历史观测值 y 逆向唯一求解出状态 x

$\text{rank } \mathbf{O}_v = n$ \Rightarrow $\mathbf{x} = \mathbf{O}_v^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} u \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} u^{(k)} \end{bmatrix}$

定理1. 系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} \end{cases}$ 可观测的充分必要条件 $\text{rank } \mathbf{O}_v = n$ 。



可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

例1. 给出两个传感器**GPS**和**加速度计**，那么哪一个能够稳定地估计出一维运动小车的速度？

• **GPS**。为了简化起见，我们用GPS观测位置，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^T} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}$$

$y=x$ ，故位置状态 x 可通过输出 y 直接求导得到，需要估计的是速度状态 v

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可观！
能够稳定地
估计小车的速度

其中 $x, v \in \mathbb{R}$ 分别表示位置和速度, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ 表示已知统计特性的噪声。



可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

- **加速度计**。为了简化起见，用加速度计估计速度，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^T} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**不可观！
不能够稳定地
估计小车的速度**

其中 $v, a \in \mathbb{R}$ 分别表示速度和加速度， $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ 表示已知统计特性的噪声。

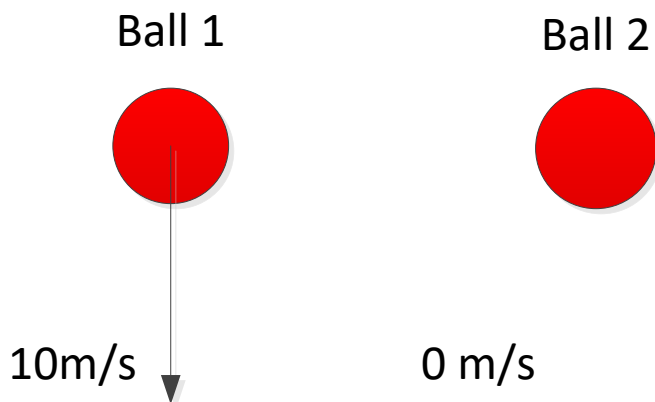


可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

- 加速度计。



两个自由落体的小球
加速度一样，但是初
始速度不一样。无法从
输出（加速度），观测出
小球初始速度（状态）。
不可观。



可观性

□ 离散线性系统

(1) 定义

对于连续线性系统，可以通过采样周期 T_s 精确地将连续系统转化成离散系统。将连续系统模型转换成如下离散采样线性系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

其中 $\Phi = e^{A T_s}$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'_{k-1}$, $t \in [(k-1)T_s, kT_s]$, $\mathbf{u}_{k-1} = \int_0^{T_s} e^{A s} \mathbf{B} ds \cdot \mathbf{u}'_{k-1}$

定义2. 如果在有限时间间隔 NT_s 内，根据输出值 \mathbf{y}_k 和外界输入值 \mathbf{u}_k ，能够确定系统的初始状态 \mathbf{x}_0 的每一个分量，那么称此系统是完全可以的，简称**可观测**。



可观性

□ 离散线性系统

(2) 直观解释

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 \Rightarrow \mathbf{y}_2 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 - \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi^2 \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}^T \Phi^{n-1-k} \mathbf{u}_k &= \mathbf{C}^T \Phi^n \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \Phi^{n-2-k} \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

(3) 定理

定理2. 系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

可观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} = n$$



卡尔曼滤波器

□ 概述

卡尔曼滤波器是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1) 无偏性：即估计值的期望等于状态的真值；

若 $E(\hat{g}) = g$ ，那么意味着 \hat{g} 是参数 g 的无偏估计，否则为有偏估计，其中 $E(\cdot)$ 表示期望。

2) 估计的方差最小；

若 $D(\hat{g}) = E\left((\hat{g} - g)^2\right)$ ，如果对于任意一个估计 \tilde{g} ，我们有 $D(\hat{g}) \leq D(\tilde{g})$ ，那么称 \hat{g} 为最小方差估计，其中 $D(\cdot)$ 表示方差。

3) 实时性。



卡尔曼滤波器

□ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式中，过程噪声 \mathbf{w}_{k-1} 和观测噪声 \mathbf{v}_k 的统计特性为

自相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$

互相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$

系统噪声方差阵 $\mathbf{Q}_k \geq 0$

观测噪声方差阵 $\mathbf{R}_k > 0$

克罗内克 δ 函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$E(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{0}, E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}(k, j) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(k, j) = E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(k, j) = E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

独立不相关



卡尔曼滤波器

□ 模型描述

初始状态 \mathbf{x}_0 的统计特性为

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_0 \quad \text{其中, cov}(\cdot) \text{表示协方差}$$

还假设状态的初始值 $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k$ 与 $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k, k \geq 1$, 均不相关, 并且噪声向量 \mathbf{w}_{k-1} 与 \mathbf{v}_k 也不相关, 即有:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(k, j) = E(\mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{0}$$

独立不相关



卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

目的：假设滤波器形式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{K}''_k \mathbf{u}_{k-1}$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 是 \mathbf{x}_{k-1} 的最优线性估计（**最小方差无偏估计**）。求

$$\mathbf{K}'_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}''_k$$

使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 \mathbf{x}_k 的最优线性估计。



卡尔曼滤波器

□ 卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求 K'_k, K''_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的无偏估计

因为 $\tilde{x}_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k|k} = & \underbrace{(\Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} - K'_k)}_{\text{red line}} x_{k-1} + K'_k (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) \\ & + (\Gamma_{k-1} - K_k H_k \Gamma_{k-1}) w_{k-1} + \underbrace{(\mathbf{I}_n - K_k H_k - K''_k)}_{\text{red line}} u_{k-1} - K_k v_k\end{aligned}$$

又因为要求 $E(\tilde{x}_{k|k}) = 0$ ，又已知 $E(\tilde{x}_{k-1|k-1}) = 0, E(v_k) = 0, E(w_{k-1}) = 0$

不能要求 $E(x_{k-1}) = 0, E(u_{k-1}) = 0$ ，那么只能让

$$\Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} - K'_k = \mathbf{0}_{n \times n}$$

$$\mathbf{I}_n - K_k H_k - K''_k = \mathbf{0}_{n \times n}$$

$$K'_k = \Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1}$$

$$K''_k = \mathbf{I}_n - K_k H_k$$



卡尔曼滤波器

□ 卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求 K'_k, K''_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的无偏估计

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} - K'_k &= 0_{n \times n} \\ I_n - K_k H_k - K''_k &= 0_{n \times n} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} K'_k &= \Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} \\ K''_k &= I_n - K_k H_k \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1})$$



$$\begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{更新值} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{预测值} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{卡尔曼} \\ \text{增益} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{新息} \\ \text{矢量} \end{bmatrix}$$

物理意义？

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + u_{k-1} \\ \hat{z}_{k|k-1} &= H_k \hat{x}_{k|k-1} \end{aligned}$$





卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

第二步：求 \mathbf{K}_k 使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 \mathbf{x}_k 的**最小方差估计**

也就是求解优化问题

$$\min_{\mathbf{K}_k} \text{tr} \mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} E \left(\text{tr} \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \right) \right)$$

这里 $\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$

其中 $\mathbf{P}_{k|k-1} = E \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T \right)$

进一步可以得到 **当作已知**

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$



卡尔曼滤波器

□ 卡尔曼滤波器推导思路

第二步：求 K_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的**最小方差估计**

也就是求解优化问题

$$\min_{K_k} \text{tr} P_{k|k} = \min_{K_k} E \left(\text{tr} \left(\tilde{x}_{k|k} \tilde{x}_{k|k}^T \right) \right)$$

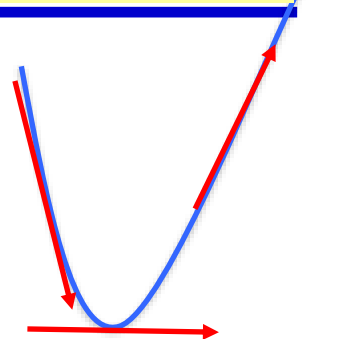
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial K_k} \text{tr} (P_{k|k}) = -2P_{k|k-1}^T H_k^T + 2K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k) = 0_{n \times m}$$

$$\Rightarrow K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

$H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ 正定矩阵

$$\Rightarrow P_{k|k} = (I_n - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

一般极值在导数为零处求得



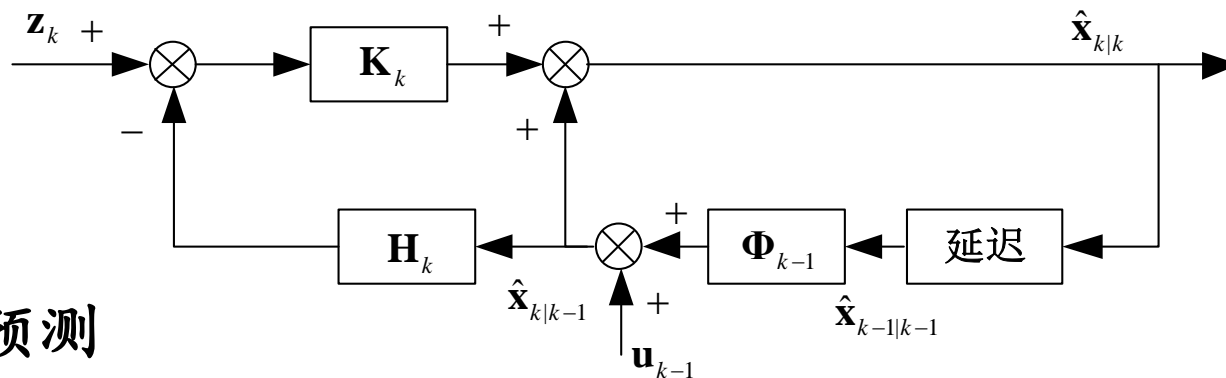
$$\frac{d}{dA} \text{tr} (ABA^T) = 2AB$$

其中 $B = B^T$, B 是对称阵.



卡尔曼滤波器

□ 卡尔曼滤波器算法总结



1. 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

2. 误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

3. 卡尔曼滤波器增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

4. 状态估计校正

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})$$

$$\text{其中 } \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

5. 误差协方差估计校正

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$



卡尔曼滤波器

□ 其他说明

(1) 一般来说，采样周期合理情况下，连续系统可观，离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当，系统可能失去可控性及可观性。

(2) 卡尔曼滤波器是一种最优的观测器，观测增益 K_k 是时变的。

(3) $H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ 需要是非奇异的，否则 $K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$ 无法实现。

(4) 如果 (Φ_{k-1}, H_k) 不可观，那么卡尔曼滤波器仍然可以运行，只不过不可观的模态没有进行修正，只是递推罢了。极端情况 $H_k = 0$ ，那么 $K_k = 0$ 整个系统完全不可观，那么

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$



多速率卡尔曼滤波器

□ 模型

考虑一类多速率采样的线性离散系统：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

其中：状态和噪声的定义与前面相同，不同在于传感器观测。假设系统基本采样周期为 T_0 ，两种不同传感器的采样周期分别为 $T_i (i=1,2)$ ，且 $T_i (i=1,2)$ 为 T_0 的整数倍，即 $T_i = n_i T_0, n_i \in \mathbb{N}$ 。它们测量矩阵为 $\mathbf{H}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ ，噪声方差阵 $\mathbf{R}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ （非奇异）， $i=1,2$ 。令 αT_0 表示各观测数据的采样周期的最小公倍数。当没有观测量时，我们认为 $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ ，为了保证算法不发生奇异问题，方差阵设置为单位阵（只要不是0的常数阵都可以）。



多速率卡尔曼滤波器

□ 模型改进

最终，观测阵 \mathbf{H}_k 以及观测噪声方差阵 \mathbf{R}_k 均以 αT_0 为周期变化，即

$$\mathbf{H}_k = \begin{cases} \mathbf{H}_{ik}, & \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \text{ \& } \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1k} \\ \mathbf{H}_{2k} \end{bmatrix}, & \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{0}, & \text{else} \end{cases} \quad \mathbf{R}_k = \begin{cases} \mathbf{R}_{ik}, & \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \text{ \& } \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \text{diag}(\mathbf{R}_{1k}, \mathbf{R}_{2k}), & \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{I}, & \text{else} \end{cases}$$

其中，表达式 $\text{mod}(a, b)$ 是求余数操作，即 a 除以 b 之后的余数

在整个过程中，观测阵 \mathbf{H}_k 、观测噪声方差阵 \mathbf{R}_k 和观测量 \mathbf{z}_k 的维数在不断的变化，而 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 会根据每一步的信息更新而更新。它的推导过程就与经典的卡尔曼滤波器就相同了。



扩展卡尔曼滤波器

□ 模型描述

假设非线性离散系统模型如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}$$

将非线性函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 围绕(k-1)次滤波值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 展开成Taylor级数的形式，并忽略二次以上的高阶项，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \mathbf{w}_{k-1}\end{aligned}$$



扩展卡尔曼滤波器

□ 模型描述

类似地，非线性函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 在 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 处的线性化值为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{v}_k$$



扩展卡尔曼滤波器

□ 模型描述

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}'_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}'_k$$

其中 \mathbf{v}'_k 的统计特性为 $E(\mathbf{v}'_k) = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}(k, j) = E(\mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_j^T) = \begin{cases} \mathbf{R}'_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}'_k = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_k \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \right)^T$$

其中：

$$\Phi_{k-1} \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n \times 1}}$$

$$\mathbf{H}_k \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m \times 1}}$$

$$\Gamma_{k-1} \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n \times 1}}$$

$$\mathbf{u}'_k \triangleq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{n \times 1}) - \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k \triangleq \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}_{m \times 1}) + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{v}'_k \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m \times 1}} \mathbf{v}_k$$



本讲小结

- 实际中我们如何选取传感器和如何布置传感器等大部分是靠经验，没有实际的理论来支持。从理论上可以进行可观度（Degree of Observability）的研究，即可观测的程度方面的研究。
- 在Kalman滤波方面的研究可以考虑更加实际的情况，比如：对于维数较高的模型减少计算量，减少对噪声特性的依赖，减少延迟等等。



资源

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: dai@buaa.edu.cn



致谢

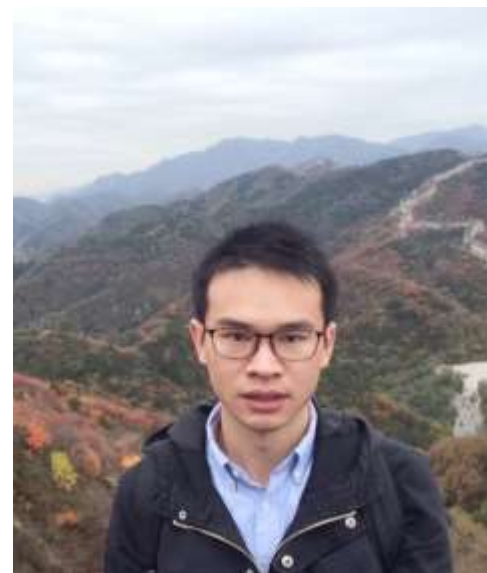
感谢控制组同学



郭正龙



邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



谢谢！