RflySim底层飞行控制算法开发系列课程

第八讲 滤波器设计实验

飞思实验室

大纲

1. 实验原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 小结

实验原理

□ 测量原理

三轴加速度计固连在多旋翼机体，其三轴与机体坐标系一致。因此，低频的俯仰角和滚转角观测量可以由加速度计测量值近似得到

$$\theta_{\mathrm{m}} = \arcsin\left(\frac{a_{x_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}}{g}\right)$$

$$\phi_{\mathrm{m}} = -\arcsin\left(\frac{a_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}}{g\cos\theta_{\mathrm{m}}}\right)$$

其中 ${}^{\mathrm{b}}\mathbf{a}_{\mathrm{m}} = [a_{x_{\mathrm{b}}\mathrm{m}} \quad a_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}} \quad a_{z_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}]^{\mathrm{T}}$ 表示加速度计测量值。

实验原理

□ 测量原理

同时还有两点需要注意：

（1）为了得到更加精确的角度信息，需要消除加速度计的慢时变漂移。

（2）如果机体振动很大，则$a_{x_b m}, a_{y_b m}$将被噪声严重污染，这样将进一步影响角度θ_m, ϕ_m的估计。因此机体的减振很重要。另外姿态变化率$\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$和角速度${}^b\boldsymbol{\omega}$有如下关系

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} \xrightarrow[\theta,\phi\text{很小可以转变为}]{\text{由于多旋翼工作过程中，}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

由此可知，俯仰角和横滚角可以由加速度计测量得到，漂移小，但噪声大。另一方面，姿态角也可以通过角速度积分得到，噪声小，但是漂移大。

实验原理

□ 线性互补滤波

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta\ \ s\ =\frac{1}{\tau s+1}\theta\ \ s\ +\frac{\tau s}{\tau s+1}\theta\ \ s$$

低通滤波器，$\tau\in\mathbb{R}_+$ 表示时间常数

高通滤波器 $\frac{\tau s}{\tau s+1}=1-\frac{1}{\tau s+1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

1）加速度计测量的俯仰角无漂移但噪声大，我们可以将测量到的俯仰角建模为

$$\theta_{\mathrm{m}}=\theta+n_{\theta}$$

其中 n_{θ} 表示高频噪声，θ 表示俯仰角真值。

2）陀螺仪的角速度测量会有漂移但噪声小，我们可以建模为

$$\frac{\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(s)}{s}=\theta(s)+c\frac{1}{s}$$

陀螺仪测量值

角速率积分的Laplace变换

常值漂移的Laplace变换

实验原理

□ 线性互补滤波

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta\ \ s = \frac{1}{\tau s+1}\theta\ \ s + \frac{\tau s}{\tau s+1}\theta\ \ s$$

低通滤波器，$\tau \in \mathbb{R}_+$
表示时间常数

高通滤波器
$\frac{\tau s}{\tau s+1} = 1 - \frac{1}{\tau s+1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

线性互补滤波的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s+1}\theta_{\mathrm{m}}(s) + \frac{\tau s}{\tau s+1}\left(\frac{1}{s}\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(s)\right)$$

加速度计测量
的俯仰角

陀螺仪的
角速度积分

实验原理

▢ 线性互补滤波

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导下线性互补滤波。俯仰角 θ 的拉氏变换可以表示为

$$\theta\ \ s\ =\frac{1}{\tau s+1}\theta\ \ s\ +\frac{\tau s}{\tau s+1}\theta\ \ s$$

低通滤波器，$\tau\in\mathbb{R}_+$ 表示时间常数

高通滤波器 $\frac{\tau s}{\tau s+1}=1-\frac{1}{\tau s+1}$

为了估计俯仰角，以上式子的 θ 需要用传感器信息替代。

线性互补滤波的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s)=\frac{1}{\tau s+1}\theta_{\mathrm{m}}(s)+\frac{\tau s}{\tau s+1}\left(\frac{1}{s}\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(s)\right) \Rightarrow \hat{\theta}(s)=\theta(s)+\boxed{\left[\frac{1}{\tau s+1}n_{\theta}(s)+\frac{\tau s}{\tau s+1}c\frac{1}{s}\right]} \Rightarrow \hat{\theta}(s)\approx\theta(s)$$

加速度计测量的俯仰角

陀螺仪的角速度积分

衰减为0

实验原理

□ 线性互补滤波

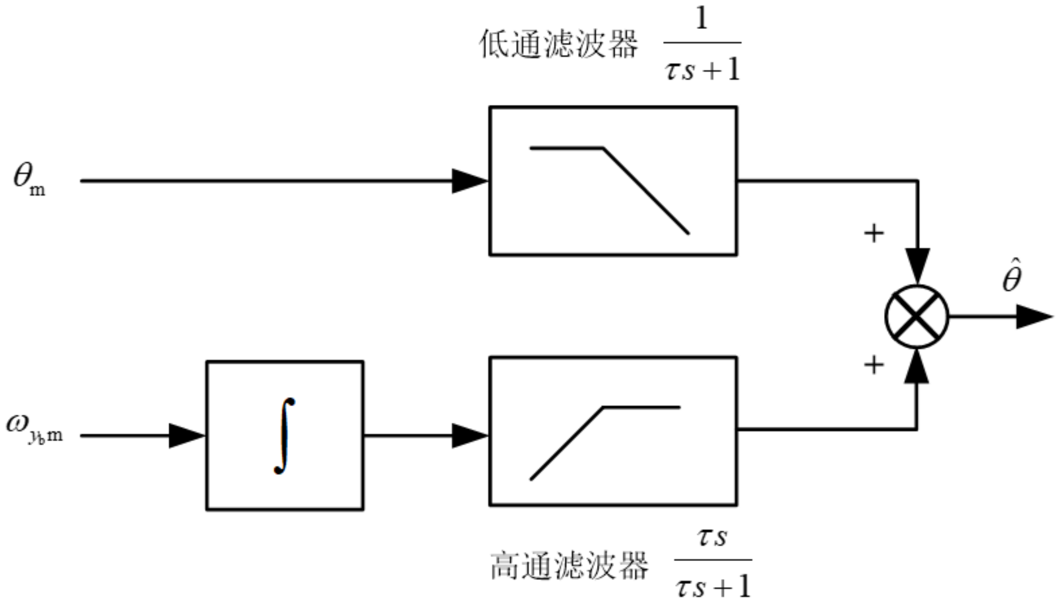


图. 互补滤波估计俯仰角流程图

低通滤波器将θ_{m}无漂移的优势保留下来，而高通滤波器将$\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(s)/s$噪声小的优势保留下来

为了计算机算法实现，需要对其进行离散化

$$\hat{\theta}(s)=\frac{1}{\tau s+1}\theta_{\mathrm{m}}(s)+\frac{\tau s}{\tau s+1}\left(\frac{1}{s}\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(s)\right)$$

通过一阶向后差分法，将 s 表示为

$$s=\left(1-z^{-1}\right)/T_{\mathrm{s}}$$

$T_{\mathrm{s}}\in\mathbb{R}_{+}$表示采样周期

进一步表示为

$$\hat{\theta}(z)=\frac{1}{\tau\frac{1-z^{-1}}{T_{\mathrm{s}}}+1}\theta_{\mathrm{m}}(z)+\frac{\tau}{\tau\frac{1-z^{-1}}{T_{\mathrm{s}}}+1}\omega_{y_{\mathrm{b}}\mathrm{m}}(z)$$

再把上式化为差分方程可以得到

$$\hat{\theta}(k)=\frac{\tau}{\tau+T_s}(\hat{\theta}(k-1)+T_s\omega_{y_bm}(k))+\frac{T_s}{\tau+T_s}\theta_m(k)$$

实验原理

□卡尔曼滤波

假设离散时间线性系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k,k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式中，过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$ 和观测噪声 $\mathbf{v}_k$ 的统计特性为

自相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{ww}}$

互相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{wv}}$

系统噪声方差阵 $\mathbf{Q}_k \geqslant \mathbf{0}_{n\times n}$

观测噪声方差阵 $\mathbf{R}_k > \mathbf{0}_{m\times m}$

Kronecker δ函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\ \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}_{n\times 1}, \mathrm{E}\ \mathbf{v}_k = \mathbf{0}_{m\times 1}, \mathbf{R}_{\mathbf{wv}}\ k, j = \mathbf{0}_{n\times m}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ww}}\ k, j = \mathrm{E}\ \mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}_k\delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, k = j \\ \mathbf{0}_{n\times n}, k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{vv}}\ k, j = \mathrm{E}\ \mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_k\delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, k = j \\ \mathbf{0}_{m\times m}, k \neq j \end{cases}$$

独立不相关

实验原理

□卡尔曼滤波

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k,k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

初始状态 $\mathbf{x}_0$ 的统计特性为

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right) = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathrm{cov}\left(\mathbf{x}_0\right) = \mathbf{P}_0$$

其中，$\mathrm{cov}(\cdot)$表示协方差

还假设状态的初始值 $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k$与 $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k, k \geq 1$，均不相关，并且噪声向量 $\mathbf{w}_{k-1}$与 $\mathbf{v}_k$ 也不相关，即有：

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}(0,k) = \mathrm{E}\left[\mathbf{x}_0\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{0}_{n\times n}$$
$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(0,k) = \mathrm{E}\left[\mathbf{x}_0\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{0}_{n\times m}$$
$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(k,j) = \mathrm{E}\left[\mathbf{u}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{0}_{n\times n}$$

独立不相关

实验原理

卡尔曼滤波算法总结

1. 步骤一：过程模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1},\ \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\ \ \mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{Q}_k$$

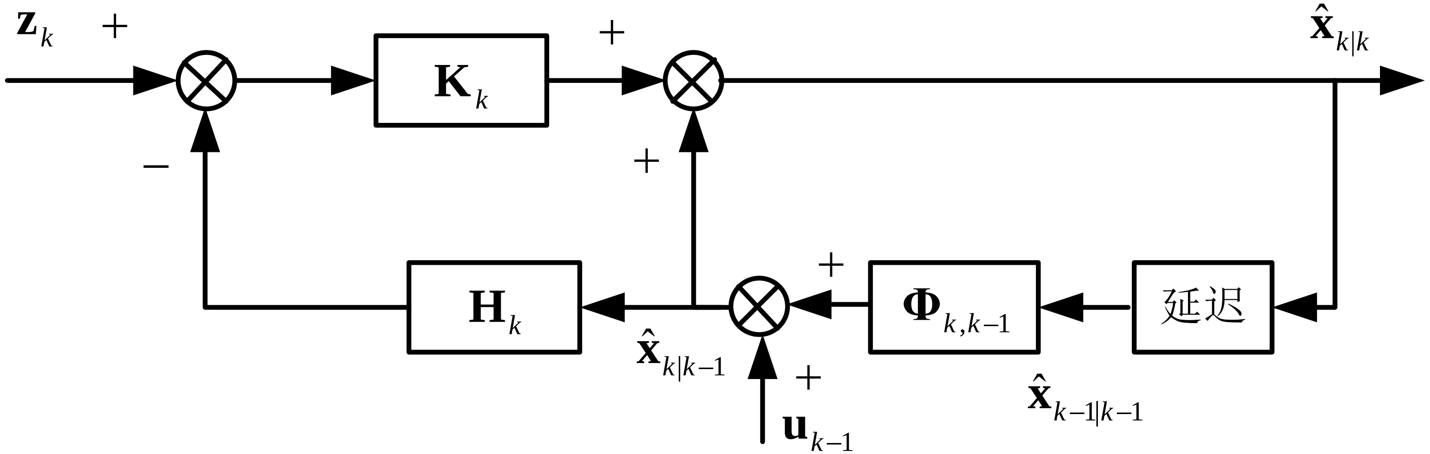
观测模型

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,\ \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}\ \ \mathbf{0}_{m\times 1}, \mathbf{R}_k$$

2. 步骤二：初始状态

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathrm{E}\ \ \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathrm{E}\left[\ \ \mathbf{x}_0 - \mathrm{E}\ \ \mathbf{x}_0\ \ \ \ \mathbf{x}_0 - \mathrm{E}\ \ \mathbf{x}_0\ \ ^{\mathrm{T}}\right]$$



实验原理

卡尔曼滤波算法总结

3. 步骤三：当$k=0$，取

$$\mathbf{P}_{0|0}=\mathbf{P}_0,\hat{\mathbf{x}}_{0|0}=\hat{\mathbf{x}}_0$$

4. 步骤四：$k=k+1$

5. 步骤五：状态估计预测

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{u}_{k-1}$$

6. 步骤六：误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1}=\mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

7. 步骤七：卡尔曼增益矩阵

$$\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

8. 步骤八：状态估计更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}+\mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k-\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}\right)$$

其中，$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}=\mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

9. 步骤九：误差协方差更新

$$\mathbf{P}_{k|k}=\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k|k-1}$$

10. 步骤十：返回步骤四

实验原理

□ 卡尔曼滤波

（1）卡尔曼滤波器在进行滤波器估计的同时还产生了误差协方差阵 $\mathbf{P}_{k|k}$ 它可以用于表征估计精度，同时也能用于传感器的健康评估。

（2）一般来说，采样周期合理情况下，连续系统可观，离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当，系统可能失去可控性及可观性。因此原则上应该检查离散化系统的可观性。

（3）$\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k$ 需要是非奇异的，否则 $\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k\right)^{-1}$ 无法实现。

（4）如果 $\left(\mathbf{\Phi}_{k,k-1},\mathbf{H}_k\right)$ 不可观，那么卡尔曼滤波器仍然可以运行，只不过不可观的模态没有进行修正，只是递推罢了。极端情况 $\mathbf{H}_k=\mathbf{0}_{m\times n}$，那么 $\mathbf{K}_k=\mathbf{0}_{n\times m}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\mathbf{\Phi}_{k,k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}+\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k}=\mathbf{\Phi}_{k,k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{\Gamma}_{k,k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}$$

实验原理

□扩展卡尔曼滤波

扩展卡尔曼滤波器算法的主要思想是忽略高阶项，对非线性函数进行线性化近似。通过对非线性函数的泰勒展开式进行一阶线性截断，从而将非线性问题转化为线性问题。由于线性化过程带来额外误差，扩展卡尔曼滤波器是一种次优滤波器。

实验原理

□扩展卡尔曼滤波

考虑非线性离散化模型为：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right)$$
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right)$$

式中，$\mathbf{w}_{k-1}$是系统噪声，$\mathbf{v}_k$是观测噪声，他们是互不相关的零均值高斯白噪声。且噪声方差阵分别为$\mathbf{Q}_k$和$\mathbf{R}_k$。

在扩展卡尔曼滤波中，通常将$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right)$和$\mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right)$分别进行泰勒级数展开。

忽略高阶项，泰勒级数展开形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right) &= \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{n\times1}\right) \\ &+ \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}} \left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}\right) \\ &+ \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}} \mathbf{w}_{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right) &= \mathbf{h}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}_{m\times1}\right) \\ &+ \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}} \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right) \\ &+ \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}} \mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

实验原理

□扩展卡尔曼滤波

为了简化扩展卡尔曼滤波算法的表达式，定义：

$$\mathbf{\Phi}_{k-1} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}}$$

$$\mathbf{H}_{k} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{k-1} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}}$$

$$\mathbf{u}'_{k-1} \triangleq \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{0}_{n\times1}\right)-\mathbf{\Phi}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{z}'_{k} \triangleq \mathbf{z}_{k}-\mathbf{h}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{0}_{m\times1}\right)+\mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{v}'_{k} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}}\mathbf{v}_{k}$$

$\xrightarrow{\text{模型简化为}}$

$$\mathbf{x}_{k}=\mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{u}'_{k-1}+\mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}'_{k-1}=\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{v}'_{k-1}$$

这里，$\mathbf{v}'_k$ 的统计特性为 $\mathrm{E}(\mathbf{v}'_k)=\mathbf{0}_{m\times1}$ 且

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}(k,j)\triangleq\mathrm{E}\left(\mathbf{v}'_k\mathbf{v}'^{\mathrm{T}}_j\right)=\begin{cases}\mathbf{R}'_k, k=j\\ \mathbf{0}_{m\times m}, k\neq j\end{cases}$$

其中

$$\mathbf{R}'_k \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}}\mathbf{R}_k\left(\left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}}\right)^{\mathrm{T}}$$

实验原理

□扩展卡尔曼滤波算法总结

1. 步骤一：过程模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right), \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{Q}_k\right)$$

观测模型

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right), \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathbf{R}_k\right)$$

2. 步骤二：初始状态

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{x}_0 - \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right)\right)\left(\mathbf{x}_0 - \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right)\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

实验原理

□扩展卡尔曼滤波算法总结

3. 步骤三：当$k=0$，取

$$\mathbf{P}_{0|0}=\mathbf{P}_0,\hat{\mathbf{x}}_{0|0}=\hat{\mathbf{x}}_0$$

4. 步骤四：$k=k+1$

5. 步骤五：状态估计预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}=\mathbf{f}\quad\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{0}_{n\times 1}$$

6. 步骤六：误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1}=\mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

7. 步骤七：卡尔曼增益矩阵

$$\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\quad\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k\quad{}^{-1}$$

8. 步骤八：状态估计更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}+\mathbf{K}_k\quad\mathbf{z}_k-\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$$

其中，$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}=\mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

9. 步骤九：误差协方差更新

$$\mathbf{P}_{k|k}=\quad\mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\quad\mathbf{P}_{k|k-1}$$

10. 步骤十：返回步骤四

实验原理

以上原理可以详细参考“Quan Quan. *Introduction to Multicopter Design and Control*. Springer, Singapore, 2017”或者“全权著. 杜光勋, 赵峙尧, 戴训华, 任锦瑞, 邓恒译. 《多旋翼飞行器设计与控制》, 电子工业出版社, 2018. ”的第8-9章。

基础实验

□ 实验目标

■ 已知

（1）硬件：Pixhawk自驾仪系统；

（2）软件：MATLAB 2017b或以上版本，PSP工具箱，实验指导包“RflySimAPIs\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.1”；

（下载地址：https://rflysim.com/course）

（3）在数据方面，若没有硬件，可以直接使用实验指导包“e4.1”中的数据。

■ 目标

利用数据采集模型和Pixhawk自驾仪采集加速度计和陀螺仪数据，按步骤完成互补滤波，处理所得数据并绘制相关姿态角数据图；与原数据解算的姿态角和Pixhawk自驾仪自带滤波器解算出的数据进行比较，以理解互补滤波器的优点。

基础实验

□ 滤波步骤

（1）步骤一：获取加速度计、陀螺仪以及三个姿态角的数据

1）硬件连接。将遥控器接收机和Pixhawk自驾仪连接好。如右图所示。

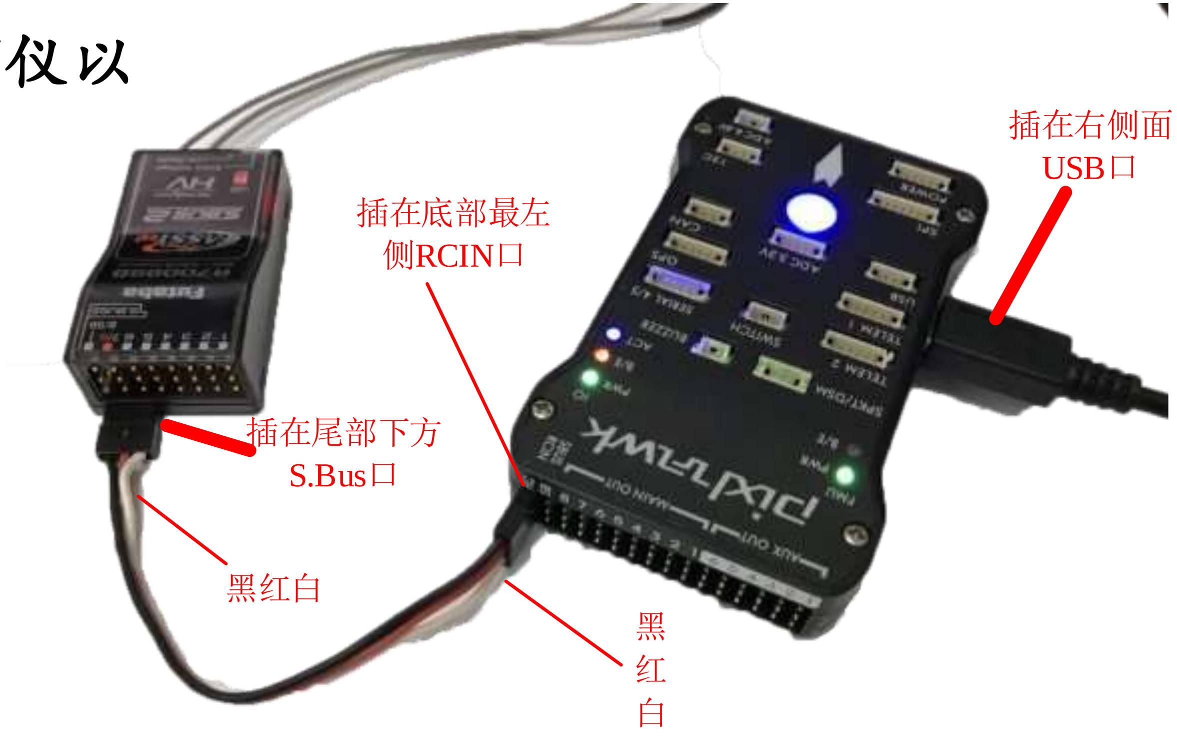


图. 硬件系统连接

基础实验

□ 滤波步骤

（1）步骤一：获取加速度计、陀螺仪以及三个姿态角的数据

2）打开数据采集模型。

打开”log_data.slx” 文件，如右图。该文件使用PSP工具箱的模块搭建，可以读取加速度、角速度、时间戳和飞控自带算法解算出的姿态角数据。我们可以使用遥控器控制开始写入数据以及停止写入数据，最终将数据存储到Pixhawk自驾仪的SD 中。

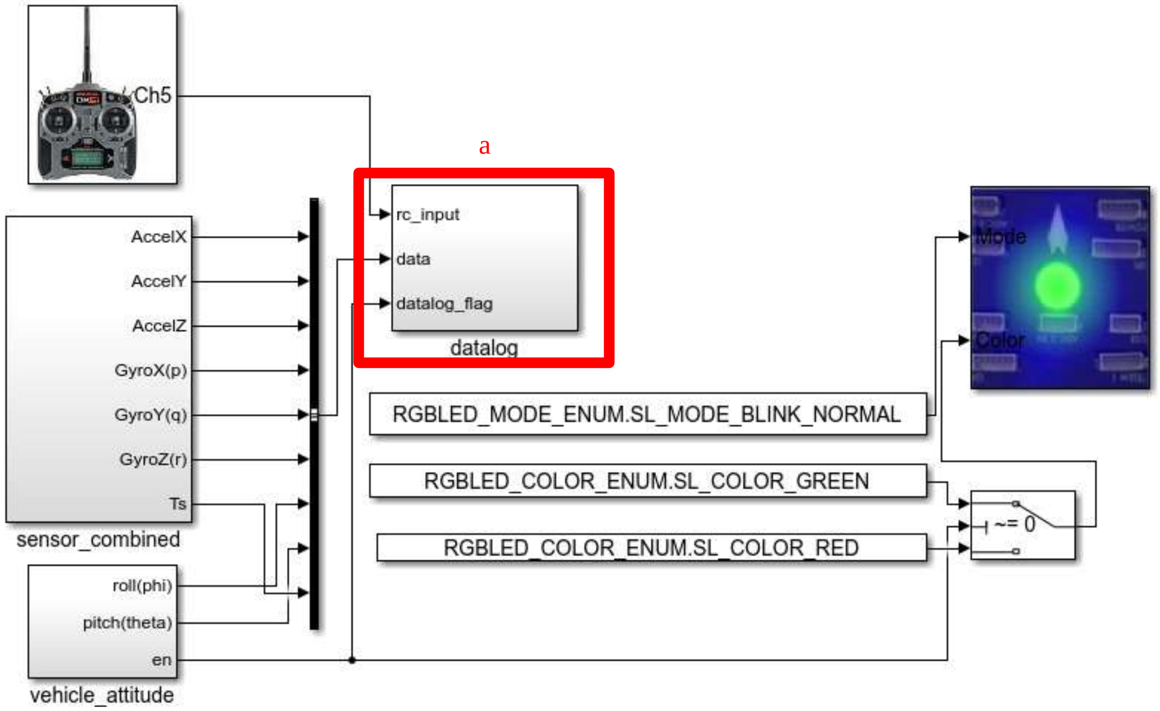
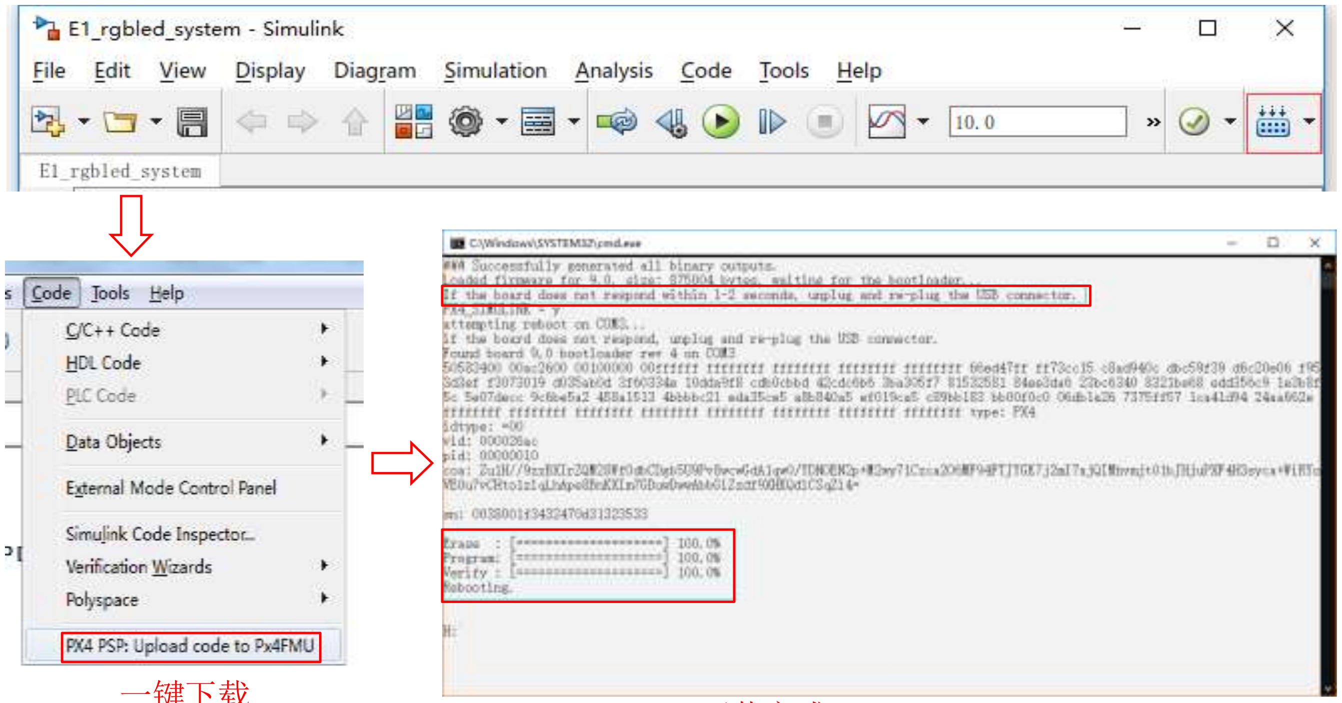


图. log_data.slx截图

基础实验

（1）步骤一：获取加速度计、陀螺仪以及三个姿态角的数据

3）编译并下载文件“log_data.slx”到Pixhawk 中。



一键编译

一键下载

下载完成

（1）步骤一：获取加速度计、陀螺仪以及三个姿态角的数据

4）采集数据。Pixhawk自驾仪的LED 指示灯变红意味着PX4 软件没有正常工作。因此，在连接好遥控器接收机和Pixhawk 自驾仪后，等待一会，直到自驾仪的指示灯变绿（如果自驾仪的指示灯没有变绿，请重新拔插自驾仪）。准备就绪后，将遥控器CH5 拨到最顶部，开始采集数据。手动转动自驾仪，在数据采集完成后将遥控器CH5 拨到最底部停止写数据到SD卡。

5）读取数据。将SD 卡取出，使用读卡器将文件“e4_A.bin”复制到实验代码目录“e4\e4.1”下。使用函数

[datapoints, numpoints] = px4_read_binary_file(‘e4_A.bin’)

解码数据，数据保存在“datapoints”中，数据个数保存在“numpoints”中。

基础实验

□ 滤波步骤

（2）步骤二：设计互补滤波器

1）互补滤波器可参考“Attitude_cf.m”文件，如右表所示。其中，“theta_am”和“phi_am”分别代表由加速度计计算出的俯仰角和滚转角；theta_cf”和“phi_cf”分别代表由互补滤波计算出来的俯仰角和滚转角。

```
function [ phi_cf, theta_cf ] = Attitude_cf(dt, z, phi_cf_k, theta_cf_k, tao)
%函数描述:
%  互补滤波姿态结算。
%输入:
%  dt: 时间间隔,单位：s
%  z: 三轴角陀螺仪和三轴加速度计测量值，[gx, gy, gz, ax, ay, az]',
%  单位：rad/s, m/s2
%  phi_cf_k, theta_cf_k: 上一时刻的角度值，单位：rad
%  tao: 滤波器系数
%输出:
%  phi_cf, theta_cf: 解算的姿态角，单位：rad

    gx = z(1); gy = z(2);
    ax = z(4); ay = z(5); az = z(6);

    %使用加速度计测量值计算姿态角
    g = sqrt(ax*ax + ay*ay + az*az);
    theta_am = asin(ax/g);
    phi_am = -asin(ay/(g*cos(theta_am)));

    %互补滤波
    theta_cf = tao/(tao + dt)*(theta_cf_k + gy*dt) + dt/(tao + dt)*theta_am;
    phi_cf = tao/(tao + dt)*(phi_cf_k + gx*dt) + dt/(tao + dt)*phi_am;
end
```

基础实验

□ 滤波步骤

（3）步骤三：分析滤波效果

1）这里已经采集好了两份传感器数据，其中“**e4_A.bin**”为手动转动**Pixhawk**自驾仪时采集的数据，“**logdata.mat**”为飞行器在实际飞行过程中采集的数据。

2）运行“**Attitude_estimator0.m**”文件，即可看到使用陀螺仪积分得到的姿态角对应“**gyro**”、直接使用加速度计数据计算的姿态角对应“**acc**”、使用互补滤波解算的姿态角对应“**cf**”和**PX4**自带算法解算的姿态角对应“**px4**”。

基础实验

■ 实验步骤

（3）步骤三：分析滤波效果

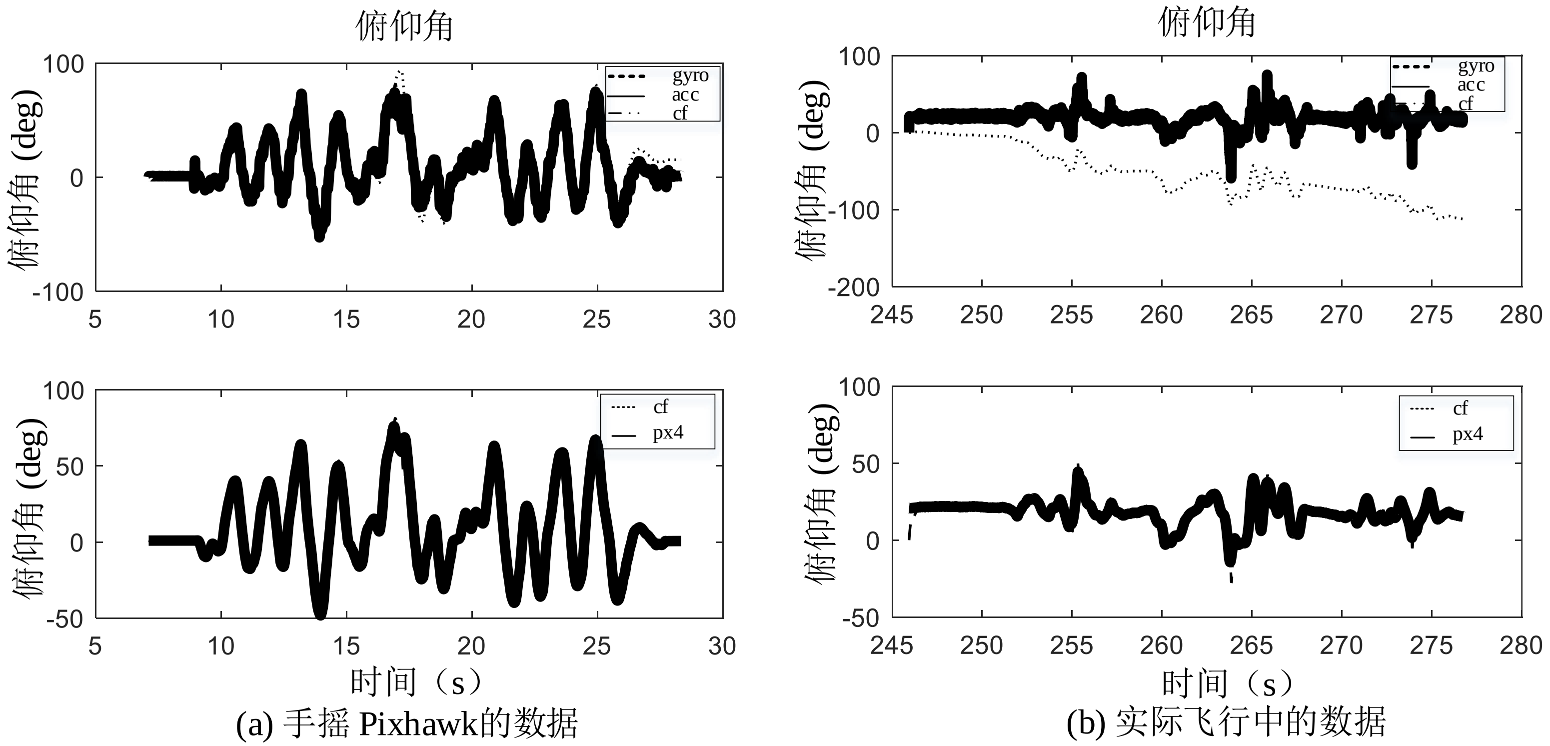


图. 互补滤波器实验结果

可以得到结论：1）直接对陀螺仪测量的角速度进行积分得到的姿态角有很大的累积误差，并且还有可能发散；2）根据来自加速度计的原始数据，计算得到的姿态角不会发散，但噪声最大且有明显的尖峰，尤其是使用实际飞行中的数据时；3）使用互补滤波器估计的姿态角是平滑的并且没有累积误差。

基础实验

□ 实验步骤

见“RflySim3D\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.1\readme.docx"

分析实验

实验目标

已知

基础实验采集的数据，实验指导包“RflySimAPIs\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.2”（下载地址：https://rflysim.com/course）；

目标

基于基础实验，将互补滤波器

$$\hat{\theta}(k)=\frac{\tau}{\tau+T_s}(\hat{\theta}(k-1)+T_s\omega_{y_b m}(k))+\frac{T_s}{\tau+T_s}\theta_m(k)$$

的参数 τ 值进行改变，对所给数据进行滤波，分析滤波器参数对滤波效果的影响。

分析实验

□ 实验分析

新建一个m文件，修改式

$$\hat{\theta}(k)=\frac{\tau}{\tau+T_s}(\hat{\theta}(k-1)+T_s\omega_{y_b m}(k))+\frac{T_s}{\tau+T_s}\theta_m(k)$$

里面的τ 值，对比不同参数下滤波效果，如右表所示，在MATLAB中运行“Attitude_cf_tao.m”，执行文件得到τ 分别为0.01，0.1，1时的滤波效果。

```
%参数tao对滤波效果的影响
clear;
load logdata
n = length(ax); %采集数据个数
Ts = zeros(1,n); %时间间隔
Ts(1) = 0.004;
for k =1:n-1
  Ts(k+1) = (timestamp(k + 1) - timestamp(k))*0.000001;
end
```

```
theta_cf = zeros(1, n); %互补滤波得到的滚转角（对应theta）
phi_cf = zeros(1, n); %互补滤波得到的俯仰角（对应phi）
tao = 0.001;

for i = 1 : 3
    tao = tao*10;
    for k = 2 : n
        g = sqrt(ax(k)*ax(k) + ay(k)*ay(k) + az(k)*az(k));
        theta_am = asin(ax(k)/g);
        phi_am = -asin(ay(k)/(g*cos(theta_am)));

        theta_cf(i, k) = tao/(tao + Ts(k))*(theta_cf(i, k - 1) + gy(k)*Ts(k))
+ Ts(k)/(tao + Ts(k))*theta_am;
        phi_cf(i,k) = tao/(tao + Ts(k))*(phi_cf(i, k-  1) + gx(k)*Ts(k)) +
Ts(k)/(tao + Ts(k))*phi_am;
    end
end
```

飞思实验室

分析实验

分析步骤

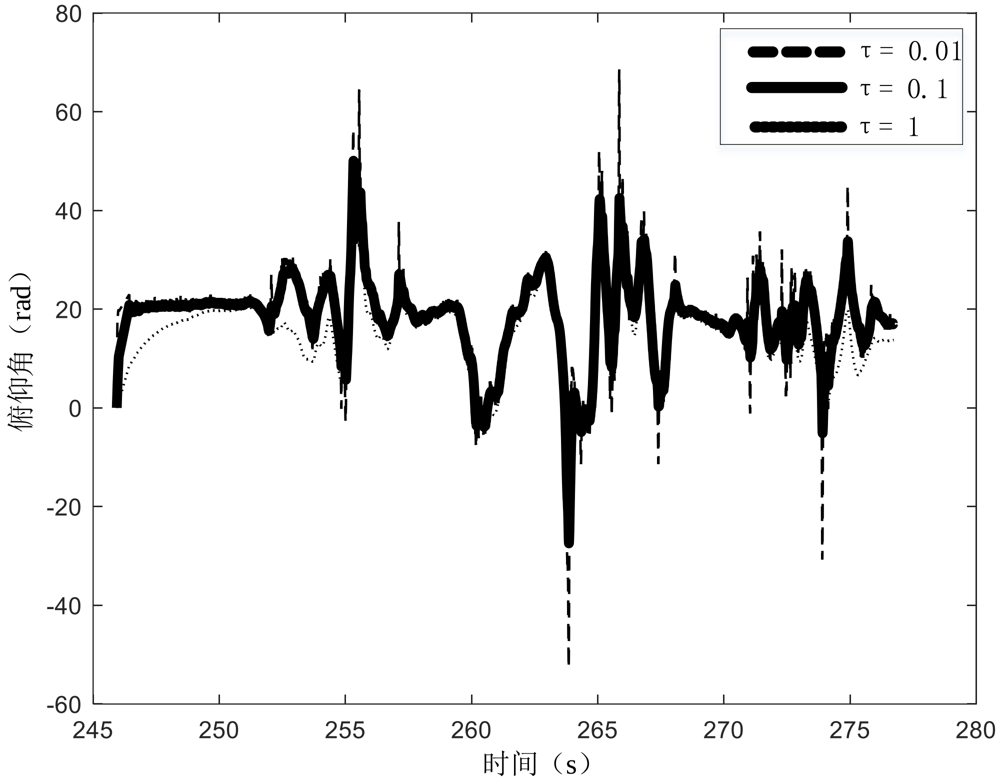


图. 参数 τ对互补滤波的影响

可以看到参数τ越大，对高频噪声的滤波作用越明显。当τ很大时

$$\frac{\tau}{\tau+T_s}\approx 1,\frac{T_s}{\tau+T_s}\approx 0$$

互补滤波器变为

$$\begin{cases}\hat{\theta}(k)\approx\hat{\theta}(k-1)+T_s\omega_{y_b\mathrm{m}}(k)\\ \hat{\phi}(k)\approx\hat{\phi}(k-1)+T_s\omega_{x_b\mathrm{m}}(k)\end{cases}$$

相当于加速度计不起作用，只使用陀螺仪的积分值。因此，要合理选择参数τ的值。

分析实验

□ 实验步骤

见 “RflySim3D\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.2\readme.docx"

设计实验

□ 实验目标

■ 已知

（1）硬件：Pixhawk自驾仪系统；

（2）软件：MATLAB 2017b或以上版本，PSP工具箱，实验指导包“RflySimAPIs\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.3”（下载地址：https://rflysim.com/course）；

（3）在数据方面，若没有硬件，可以直接使用实验指导包“e4.3”中的数据“logdata.mat”。

■ 目标

理解卡尔曼滤波原理，并设计卡尔曼滤波器实现滤波器功能。进一步，处理加速度和角速度数据，并绘制出相关姿态角数据图，与原数据解算的姿态角和Pixhawk自驾仪自带滤波器解算出的数据作比较，以加深对卡尔曼滤波器的理解。

☐ 实验设计

（1）步骤一：用于姿态估计的卡尔曼滤波器

$$\dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e \left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_\times \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_e^b = -\left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_\times \mathbf{R}_e^b$$

过程模型

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第三列提出来得到}} \dot{\mathbf{x}} = -\left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_\times \mathbf{x}$$

加速度观测量可表示为

$${}^b\mathbf{a}_m = -g\mathbf{x} + \mathbf{n}_a \leftarrow \text{观测模型}$$

其中 $\mathbf{n}_a \in \mathbb{R}^3$ 是噪声。

进一步，考虑陀螺仪的漂移和噪声，滤波器的过程模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = -\left[{}^b\boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_g - \mathbf{w}_g \right]_\times \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{w}_{\mathbf{b}_g} \end{cases}$$

设计步骤

（2）步骤二：卡尔曼滤波器设计

为了在计算机上运行卡尔曼滤波器，使用一阶差分对前述式子进行离散化得

■ 过程模型

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k-1} + \mathbf{w}_{b_g,k-1} T_s \\ (\mathbf{I}_3 - [{}^b\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \mathbf{b}_{g,k-1} - \mathbf{w}_{g,k-1}]_\times T_s)\mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k-1} \\ (\mathbf{I} - [{}^b\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \mathbf{b}_{g,k-1}]_\times T)\mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{b_g,k-1} T_s \\ [\mathbf{w}_{g,k-1}]_\times T_s)\mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}$$

■ 观测模型

$${}^b\mathbf{a}_{m,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -g\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \mathbf{n}_{a,k}$$

设计实验

设计步骤

（2）步骤二：卡尔曼滤波器设计

对过程模型使用泰勒级数展开，就可以进一步得到卡尔曼滤波器所需要的信息：

转态转移阵
$$\mathbf{\Phi}_{\text{k-1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}\\ -[\mathbf{x}_{\text{k-1}}]_\times T_s & (\mathbf{I}_3-[{}^{\text{b}}\boldsymbol{\omega}_{\text{m,k}}-\mathbf{b}_{g,k-1}]_\times T_s)\end{bmatrix}$$

噪声驱动阵
$$\mathbf{\Gamma}_{k-1}=\begin{bmatrix}T_s*\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}\\ 0 & -[\mathbf{x}_{\text{k-1}}]_\times T_s\end{bmatrix}$$

量测阵
$$\mathbf{H}_{\text{k}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \text{-g}\mathbf{I}_3\end{bmatrix}$$

设计实验

◻ 设计步骤

(3) 步骤三：卡尔曼滤波步骤

1) 状态估计预测

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{g,k-1} \\ (\mathbf{I}_3 - [{}^{b}\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \mathbf{b}_{g,k-1}]_\times T_s)\mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}$$

计算状态转移矩阵和噪声驱动矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ -[\,\mathbf{x}_{k-1}\,]_\times T_s & (\mathbf{I}_3 - [{}^{b}\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \mathbf{b}_{g,k-1}]_\times T_s) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k-1} = \begin{bmatrix} T_s\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & -[\,\mathbf{x}_{k-1}\,]_\times T_s \end{bmatrix}$$

其中，${}^{b}\boldsymbol{\omega}_{m,k}$为当前陀螺仪测量值，$\mathbf{x}_{k-1}$为上一时刻的状态估计值。

设计实验

设计步骤

（3）步骤三：卡尔曼滤波步骤

2）协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

其中$\mathbf{Q}_{k-1}$为系统噪声方差。

3）卡尔曼增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

其中 $\mathbf{R}_k$为观测噪声方差。

设计实验

设计步骤

（3）步骤三：卡尔曼滤波步骤

4）状态更新估计

$$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{g,k}\\ \mathbf{x}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{g,k-1}\\ \mathbf{x}_{k-1}\end{bmatrix}+\mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k-\mathbf{H}_k\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{g,k-1}\\ \mathbf{x}_{k-1}\end{bmatrix}\right)$$

其中 $\mathbf{z}_k$为加速度计测量值。

5）误差协方差更新

$$\mathbf{P}_{k|k}=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k|k-1}$$

设计实验

设计步骤

卡尔曼滤波器实现见文件“Attitude_ekf.m”，其主要部分如下表

```
function [ x_aposteriori, P_aposteriori, roll, pitch] =
 Attitude_ekf( dt, z, q, r, x_aposteriori_k, P_aposteriori_k)
%函数描述:
% 状态估计的拓展卡尔曼滤波方法
%输入:
% dt: 更新周期
% z: 测量值
% q:系统噪声，r:测量噪声
% x_aposteriori_k: 上一时刻的状态估计
% P_aposteriori_k: 上一时刻估计协方差
%输出:
% x_aposteriori: 当前时刻的状态估计
% P_aposteriori: 当前时刻的估计协方差
% roll,pitch: 欧拉角，单位: rad

w_m = z(1:3); %角速度测量值
a_m = z(4:6); %加速度测量值
```

```
g = norm(a_m,2); %重力加速度
% w_x_=[ 0,-(wz-bzg, wy-byg;
%       wz-bzg, 0 ,-(wx-bxg);
%       -(wy-byg), wx-bxg, 0];
w_x_ = [0, -(w_m(3) - x_aposteriori_k(3)), w_m(2) -x_aposteriori_k(2);
     w_m(3) - x_aposteriori_k(3), 0, -(w_m(1) - x_aposteriori_k(1));
     -(w_m(2) - x_aposteriori_k(2)), w_m(1) - x_aposteriori_k(1), 0];

bCn = eye(3, 3) - w_x_*dt;

% 预测
% 更新先验状态矩阵
x_apriori = zeros(1, 6);
x_apriori(1: 3) = x_aposteriori_k(1 : 3); %角速度漂移
x_apriori(4 : 6) = bCn*x_aposteriori_k(4 : 6); %加速度归一化值

%[x]x
x_aposteriori_k_x = [0, -x_aposteriori_k(6), x_aposteriori_k(5);
                  x_aposteriori_k(6), 0, -x_aposteriori_k(4);
                  -x_aposteriori_k(5), x_aposteriori_k(4), 0];
% 更新状态转移矩阵
PHI = [eye(3, 3), zeros(3, 3);
       -x_aposteriori_k_x*dt, bCn];
```

飞思实验室

设计实验

```
GAMMA = [eye(3, 3)*dt, zeros(3, 3); % 噪声驱动阵
      zeros(3, 3), -x_aposteriori_k_x*dt];

Q = [eye(3, 3)*q(1), zeros(3, 3);
   zeros(3, 3), eye(3, 3)*q(2)];
% 预测误差协方差矩阵
 P_apriori = PHI*P_aposteriori_k*PHI' + GAMMA*Q*GAMMA';
% 更新
R = eye(3, 3)*r(1);
H_k = [zeros(3, 3), -g*eye(3, 3)];
%卡尔曼增益
K_k = (P_apriori*H_k')/(H_k*P_apriori*H_k' + R);
% 状态估计矩阵
x_aposteriori = x_apriori' + K_k*(a_m - H_k*x_apriori');
% 估计误差协方差
P_aposteriori = (eye(6, 6) - K_k*H_k)*P_apriori;
% 计算滚转角和俯仰角，分别对应roll,pitch
k = x_aposteriori(4 : 6) /norm(x_aposteriori(4 : 6), 2);

roll = atan2(k(2), k(3));   % 滚转角
pitch = -asin(k(1));     %俯仰角
end
```

设计实验

□ 实验步骤

见“RflySim3D\Exp02_FlightControl\e4-FilterDesign\e4.3\readme.docx"

小结

(1) 为得到准确的姿态角数据，使用互补滤波算法对陀螺仪和加速度计的数据进行融合。这种算法相当于对陀螺仪数据做高通滤波，而对加速度计数据做低通滤波。这样可以有效消除陀螺仪和加速度计的测量噪声，将两者数据进行互补。

(2) 互补滤波算法中对陀螺仪和加速度计数据的使用是通过参数τ来控制的，改变τ值大小会影响互补滤波效果。当τ值很大时，加速度计所起的作用很小，主要使用陀螺仪的值，而当τ值很小时，陀螺仪所起的作用很小，主要使用加速度计的值。

(3) 设计出卡尔曼滤波器，建立过程模型和观测模型。实验结果表明，卡尔曼滤波器的滤波效果要比互补滤波好，另一方面与Pixhawk自驾仪中自带的滤波算法比较接近。

如有疑问，请到https://doc.rflysim.com查询更多信息。

谢 谢！