1.1

First order equation : $\frac{dy}{dt} = ay + g(t)$ linear equation $\frac{dy}{dt} = f(y)$ non-linear equation. slope depends on y

Linear equation with a right hand side with an input an forcing term.

Linear means that we see y by itself.

Second order equation: $\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ $my'' + by' + ky = f(t)$

the interval of validity of equation 方程的有效区间.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - y &= x && \text{(first order)},\\
(x^2 - 5xy)dx + 7xy^2 dy &= 0 && \text{(first order)},\\
\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y &= 5x && \text{(second order)},\\
x^3y''' + 7xy^2 &= \cos x && \text{(third order)},\\
9x^3y^{(n)} + 3x^2y' + 7y &= e^x && \text{(n-th order)}.
\end{aligned}
$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.1.2}$$

where at least one of the functions y, y', ..., $y^{(n-1)}$ actually appears on the right when written in the form 1.1.2. Here are some examples:

Example 1.1.2

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - x^2y &= 0 && \text{(first order)},\\
\frac{dy}{dx} + 2xy^2 &= -2 && \text{(first order)},\\
\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y &= 2x && \text{(second order)},\\
xy''' + y^2 &= \sin x && \text{(third order)},\\
y^{(n)} + xy' + 3y &= x && \text{(n-th order)}.
\end{aligned}
$$

Although none of these equations is written as in Equation 1.1.2, all of them *can* be written in this form:

$$
\begin{aligned}
y' &= x^2y,\\
y' &= -2 - 2xy^2,\\
y'' &= 2x - 2y' - y,\\
y''' &= \frac{\sin x - y^2}{x},\\
y^{(n)} &= x - xy' - 3y.
\end{aligned}
$$

ODE的解是一个可微函数

Definition 1.1.3

A *solution* of a differential equation is a function that satisfies the differential equation on **some** open interval; thus, y is a solution of Equation 1.1.2 if y is n times differentiable and

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

for all x in some open interval (a, b). In this case, we also say that y *is a solution of Equation* 1.1.2 *on* (a, b).

Caution

A solution of a differential equation must be both continuous and differentiable on an open interval.

微分方程解的图像称为解曲线。更一般地说，曲线 C 被称为微分方程的积分曲线，如果每个图像是 C 的一段的函数 y=y(x) 都是该微分方程的解。因此，任何微分方程的解曲线都是积分曲线，但积分曲线不一定是解曲线（见例 6）。

✔ Example 1.1.3

Verify that

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \tag{1.1.3}$$

is a solution of

x^{-1}

$$xy' + y = x^2 \tag{1.1.4}$$

on $(0, \infty)$ and on $(-\infty, 0)$. 把y与y'代回方程看是否成立

$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}$$

Verify: $x\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} = x^2$

$$\frac{2x^2}{3} - \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{3} + \cancel{\frac{1}{x}} = x^2$$

$$x^2 = x^2$$

for all $x \neq 0$. Therefore y is a solution of Equation 1.1.4 on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$. However, y isn't a solution of the differential equation on any open interval that contains $x = 0$, since y is not defined at $x = 0$.

$xy' + y = x^2$

Figure 1.1.2 shows the graph of Equation 1.1.3. The part of the graph of Equation 1.1.3 on $(0, \infty)$ is a solution curve of Equation 1.1.4, as is the part of the graph on $(-\infty, 0)$.

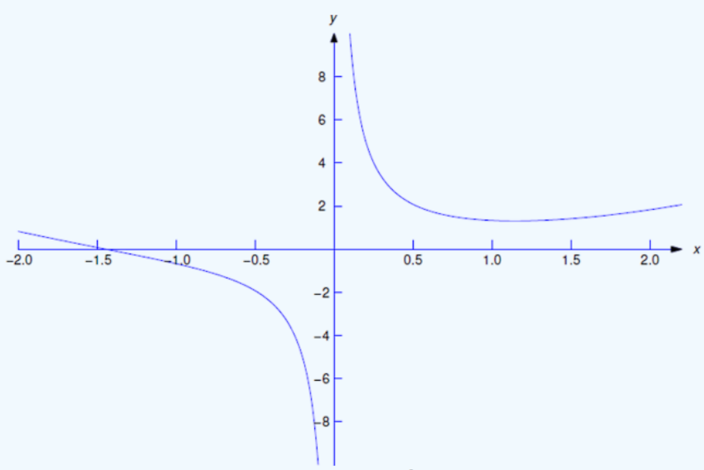


Figure 1.1.2 : $y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x}$

✔ Example 1.1.4

Show that if c_1 and c_2 are constants then

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 2x - 4 \tag{1.1.5}$$

is a solution of

$$y'' + 2y' + y = 2x \tag{1.1.6}$$

on $(-\infty, \infty)$.

$$y' = \left((c_1 + c_2 x)e^{-x}\right)' + (2x-4)' = \left(c_2(e^{-x}) + -e^{-x}(c_1 + c_2 x)\right) + 2$$

$$= -e^{-x}(c_1 + c_2 x - c_2) + 2$$

$$y'' = e^{-x}(c_1 + c_2 x - c_2) + c_2(-e^{-x}) + 2$$

$$= e^{-x}(C_1 + C_2 x - 2C_2) + 2$$

$\therefore y'' + 2y' + y = 2x$

$$[e^{-x}(C_1 + C_2 x - 2C_2)] + 2[-e^{-x}(C_1 + C_2 x - C_2) + 2] + [(C_1 + C_2 x)e^{-x} + 2x - 4] = 2x$$

$$e^{-x}(2C_1 + 2C_2 x - 2C_2) - 2e^{-x}(C_1 + C_2 x - C_2) + 2x = 2x$$

$$2x = 2x$$

1.1.5

Example 1.1.5

Contents

For example, $y = x^2$ satisfies

$$xy' + x^2 = 3x$$

if and only if $x = 0$ or $x = 1$, but it is not a solution of this differential equation because it does not satisfy the equation on an open interval.

1. 求导数：
对 $y = x^2$ 求导，得到 $y' = 2x$。
2. 代入微分方程：
将 $y = x^2$ 和 $y' = 2x$ 代入微分方程：

$$x(2x) + x^2 = 3x$$

简化得到：

$$2x^2 + x^2 = 3x \qquad 3x^2 = 3x$$

3. 进一步简化：
将方程两边同时除以3：

$$x^2 = x$$

这意味着：

$$x^2 - x = 0$$

因式分解得：

$$x(x-1) = 0$$

解得 $x = 0$ 或 $x = 1$。
4. 结论：
函数 $y = x^2$ 仅在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处满足这个微分方程，但在这些点周围的开区间内，函数并不能满足方程的要求，因此它不能被视为这个微分方程的一般解。

因此，虽然 $y = x^2$ 在特定的点上满足方程，但它并不是该微分方程在任意开区间内的解。

必须

在第二道题中，方程 $x^2+y^2=a^2$ 描述的是一个圆的几何图形，这个圆的方程本身并不是微分方程 $y'=-\frac{x}{y}$ 的解。

原因解释：

1. **几何方程 vs. 微分方程：**
   - 圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 是一个几何方程，它描述了平面上所有与原点距离为 a 的点的集合，也就是一个半径为 a 的圆。
   - 微分方程 $y'=-\frac{x}{y}$ 是一个关系式，描述了曲线在平面上每一点的斜率（导数）。求解这个微分方程意味着找出所有满足这个斜率条件的曲线。
2. **函数形式：**
   - 方程 $x^2+y^2=a^2$ 并没有明确地给出 y 作为 x 的函数，而是隐式地定义了 x 和 y 之间的关系。
   - 要验证某个曲线是否满足微分方程，我们通常需要明确地表示 y 作为 x 的函数，然后将这个函数及其导数代入微分方程中进行验证。
3. **解曲线的形成：**
   - 尽管 $x^2+y^2=a^2$ 并不是微分方程 $y'=-\frac{x}{y}$ 的解，但通过解这个微分方程，我们可以得到描述同一个圆的两个函数形式：

$$y_1=\sqrt{a^2-x^2} \qquad y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$$

   - 这两个函数分别描述了圆的上半部分和下半部分的曲线。
4. **关键点：**
   - 结论是，微分方程的解是一组曲线，而不是一个几何方程。尽管这些解曲线可能符合某些几何形状（如圆），但几何方程本身并不能作为微分方程的解。

因此，虽然圆方程描述的曲线确实是微分方程解的一部分，但圆的方程本身不能直接作为微分方程的解。这是因为微分方程解需要通过导数和函数形式来满足，而不是通过几何约束来满足。

$$x^2+y^2=a^2 \longrightarrow ? \quad y'=-\frac{x}{y}$$

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \qquad y'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -2x$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ex verify that $y = x^2 + \frac{c}{x^2}$ $(y = x^2 + cx^{-2})$

Part a is a solution to $xy' + 2y = 4x^2$

$$y' = 2x + -2cx^{-3}$$

$$x(2x - 2cx^{-3}) + 2\left(x^2 + \frac{c}{x^2}\right) = 4x^2$$

$$2x^2 \underline{- 2cx^{-2}} + 2x^2 \underline{+ \frac{2c}{x^2}} = 4x^2$$

$$4x^2 = 4x^2$$

Part B consider initial condition : $y(4) = 1$, find the constant c

Since $y = x^2 + \frac{c}{x^2}$

$$1 = 4^2 + \frac{c}{4^2}$$

$$-15 = \frac{c}{16}$$

$$-240 = c$$

$$7 = 36 + \frac{c}{36}$$

$$-29 = \frac{c}{36}$$

$$1044 = c$$

Free fall under Constant gravity.

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + V_0$，已知物体在

gravity　　initial velocity　　initial height

$v = \int -g \, dt = -gt + c$　　$v(0) = V_0$ as $t = 0$

$V_0 = -g(0) + c_1 \longrightarrow c_1 = V_0$

解答 a：构建数学模型

- 设定：设 $y(t)$ 为时间 t 时物体的高度。
- 物理原理：根据牛顿第二定律，物体的加速度是常数 g 并向下（负方向）。因此，物体的高度 y 满足二阶微分方程：

$$y'' = -g$$

这里，y'' 表示高度 y 对时间 t 的二阶导数，即加速度。

- 初值条件：假设在 $t = 0$ 时，物体的初始高度为 y_0，初始速度为 v_0，则初值条件为：

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

这里 $y'(t)$ 是高度 $y(t)$ 对时间 t 的一阶导数，即速度。

解答 b：求解微分方程

- 积分步骤：
  1. 对 $y'' = -g$ 进行第一次积分，得到速度 y'：

$$y' = -gt + c_1$$

其中 c_1 是积分常数。

  2. 对速度 y' 进行第二次积分，得到高度 y：

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

其中 c_2 是另一个积分常数。

- 利用初值条件确定积分常数：
  1. 代入初值 $y'(0) = v_0$：

$$v_0 = -g \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0$$

  2. 代入初值 $y(0) = y_0$：

$$y_0 = -\frac{g \cdot 0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = y_0$$

- 最终特解：

代入常数 c_1 和 c_2，得到初值问题的特解：

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0$$

这个方程描述了物体在任意时间 t 的高度 y。

2

结论：

- 通过这个过程，我们从物理原理出发，构建了物体运动的数学模型，并通过解二阶微分方程得到了物体在任意时间的高度表达式。这道题展示了如何将物理问题转化为数学问题，并使用微分方程求解。

be proportional to 与…成正比

For high speed motion through the air, air resistance is proportional to the fourth power of the instantaneous velocity "V"

Write a df eq of a falling body of mass "m"

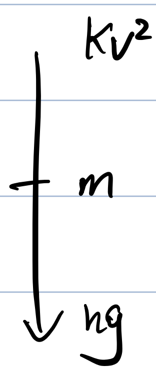
牛顿第二定律

① $F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$

② air resistance : kv^2

↓ constant

③ weight due to gravity : mg



$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^4$$

---

y''

determine these differential equations with initial conditions are guaranteed to have a solution or not. If it has a solution, we have to know if it's unique and on what interval these guarantees hold.

1.2 Existence and Uniqueness of Solutions.

有解

a. 如果函数 f 在一个开放矩形 R 上连续，且这个矩形包含点 (x_0, y_0)，那么初值问题：

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

在包含 x_0 的某个开放子区间 (a,b) 上至少有一个解。

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

解唯一

b. 如果 f 和 f_y (即 f 对 y 的偏导数) 在矩形 R 上都是连续的，那么方程 (1.2.1) 在包含 x_0 的某个开放子区间 (a,b) 上有唯一解。

这个定理阐述了两个重要的条件：第一部分是关于解的存在性，即在给定的条件下，初值问题有解；第二部分是关于解的唯一性，即在额外条件下，解是唯一的。这两个条件对于理解微分方程的解的行为非常重要，特别是在涉及到实际问题的数学建模中。

Linear differential Equation Form: $\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = q(x)$

ex1 Solve the initial value problem and give the interval of existence for the solution.

LINEAR

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad y(0) = -10$$

$$y = \int \frac{4}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx$$

$$y = 4 \cdot 3(x-1)^{\frac{1}{3}} + C$$

$$C = 2$$

$\therefore y = 12(x-1)^{\frac{1}{3}} + 2$

it's continuous everywhere on $(-\infty, \infty)$

differentiable on $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

initial condition: $x = 0$ is in $(-\infty, 1)$

So the solution satisfies the differential equation on just interval $(-\infty, 1)$

Since it can't jump across the place where the function is no longer differentiable.

方程形式：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

- $\frac{dy}{dx}$ 是关于 y 对 x 的导数。
- $P(x)$ 是一个关于 x 的函数，乘以 y。
- $f(x)$ 是关于 x 的非齐次项（即右侧项）。
- $y(x_0) = y_0$ 是初始条件，表明在 x_0 处，函数 y 的值为 y_0。

存在唯一解的条件：

1. 连续性要求：如果函数 $P(x)$ 和 $f(x)$ 在开区间 $a < x < b$ 上都是连续的，那么在这个区间内，每个 x 对应的方程存在唯一解。 ?
2. 初值包含在区间内：如果这个区间包含初值点 x_0，那么存在一个满足初值问题的唯一解。

额外说明：

- 这些条件保证了解的存在性和唯一性，但并未告诉我们如何找到这个解，也未说明解的具体形式。
- 初始值 y_0 不会改变区间的范围，但它会影响最终解的形式。
- 包含初值 x_0 的区间被称为"解的有效区间"。 internal of validity

如果一个微分方程不满足存在唯一解定理的条件，并不一定意味着解不唯一，而是意味着不能通过该定理保证唯一解的存在性。具体来说：

1. **定理的意义：**
   - 存在唯一解定理为我们提供了一个充要条件：如果函数 $P(x)$ 和 $f(x)$ 在给定区间上是连续的，那么在该区间内，微分方程一定有唯一解。
   - 反过来，如果 $P(x)$ 或 $f(x)$ 在某个区间内不连续，定理就不能保证在这个区间内存在唯一解。但这并不意味着唯一解不存在。

Find the intervals for which the DE has unique solutions. Then state the interval containing the initial condition.

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 4x^2 \quad ,y(1) = 2$$

①化简

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 4x$$

② find at where the $P(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = 4x$ are continuo

$x \neq 0$s, then find the intersection of those 2 intervals

$\therefore P(x)$ is continuous : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$q(x)$ is continuous : $(-\infty, \infty)$

$\therefore$ interval where DE have unique solution: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

this is the interval for which the original DE would have unique solution for all values x in the interval

interval contain the initial condition: $(0, \infty)$

Find the intervals for which the DE has unique solutions. Then state the interval containing the initial condition.

$$(x-3)\frac{dy}{dx} + \ln(x)\, y = 2x, \qquad y(1) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\ln(x)}{(x-3)}y = \frac{2x}{x-3}$$

$P(x) = \frac{\ln(x)}{(x-3)}$ $\quad x \neq 3, x \geq 0 \quad (0, 3) \cup (3, \infty)$

$q(x) = \frac{2x}{x-3}$ $\quad x \neq 3 \quad (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

DE unique solution: $(0, 3) \cup (3, \infty)$

interval containin the initial condition: $(0, 3)$

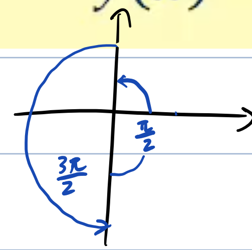
Find the intervals for which the DE has unique solutions.
Then state the interval containing the initial condition.

$$\frac{dy}{dx} + \tan(x)\, y = \sin(x), \qquad y(\pi) = 0$$

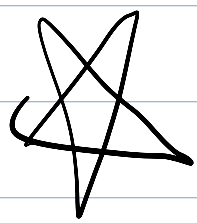
$P(x) = \tan x$ $\quad \tan x = \frac{y}{x}$ $\quad x \neq 0,$

$q(x) = \sin x$

continuous $(-\infty, \infty)$



$P(x)$ is continous $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \dots$



LINEAR

$(t^2-4)\frac{dy}{dt} = ty$, $\quad y(5) = 2$, $\quad y(-2) = 1$

$\frac{dy}{dt} - \frac{ty}{(t^2-4)} = 0$

$P(t) = \frac{ty}{(t^2-4)}$, $\quad t \neq \pm 2$, $\quad (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

$q(t) = 0$

No guarantee of any solution.

guaranteed the solution exists on at least $(2, \infty)$

Non-LINEAR

1. 关注 independant var 与 dependant var.

既然 $\frac{dy}{dt}$, y depen ☆
t indepen

第一步. 判断是否是 linear

$$(t^2-4)\frac{dy}{dt} = ty$$

Linear

the only thing that applies to the y are differentiation and multiplication by a function of the independent variable.

$$te^t\frac{dy}{dt} + \frac{\sqrt[3]{y}}{y+1} = 0$$

Non Linear diff

$y(1)=1$

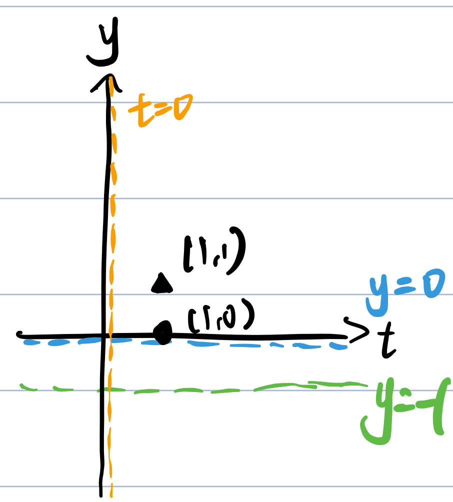
$y(1)=0$

① Existence: $\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{y+1}\cdot\frac{1}{te^t}}$

② Uniqueness: $\boxed{f_y = \frac{1}{te^t}\cdot\frac{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}(y+1)-\sqrt[3]{y}}{(y+1)^2}}$

continuous everywhere except $y=-1$, $t=0$, $y=0$

- ▲ $y(1)=1$ guaranteed a solution exists, and is unique near $(1,1)$
- ● $y(1)=0$ guaranteed a solution exists near $(1,0)$ not guarateed uniqueness



Point On Dash line

ex. The largest interval for which a solution is certain to exist.

$$(t^2-16)y' + ty = \frac{e^t}{t+8}$$

$$y' + \frac{ty}{t^2-16} = \frac{\frac{e^t}{t+8}}{t^2-16}$$

$$y' + \underbrace{\left(\frac{t}{t^2-16}\right)}_{P(t)} y = \underbrace{\frac{e^t}{(t+8)(t^2-16)}}_{q(t)}$$

find at where P(t) and q(t) are continuous.

① $P(t) = \left(\frac{t}{t^2-16}\right) = \frac{t}{(t-4)(t+4)}$

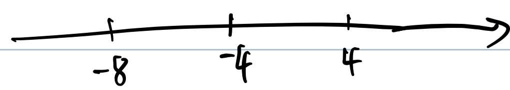
∴ continuous except at $t=4$ and $t=-4$

$(-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,\infty)$

② $q(t) = \frac{e^t}{(t+8)(t+4)(t-4)}$

∴ continuous except at $t=4, t=-4, t=-8$

$(-\infty,-8) \cup (-8,-4)$ . . . . .



$y(12) = -8$, $x=12 \in (4,\infty)$

$y(-8) = 0$, -8 is not included in the intersection

$y(-1) = 6$, $x=-1 \in (-4,4)$

---

ex. $\boxed{\begin{array}{c} te^t \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\sqrt[3]{y}}{y+1} = 0 \\ y(1)=1,\ y(1)=0 \end{array}}$

$te^t \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{y+1}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt[3]{y}}{(y+1)(te^t)}$

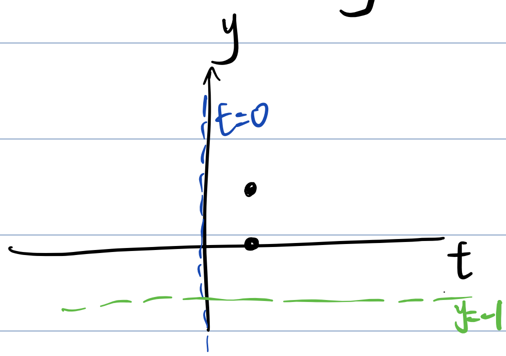
这个不符合 Linear differential equation 的形式

$\frac{dy}{dt}$ ...

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = q(x)}$$

$y=-1$ $t=0$

continuous at everywhere except at $y=-1$ and $t=0$



$$\overset{t}{y}(\overset{y}{1}) = 1, \quad \overset{t}{y}(\overset{y}{1}) = 0$$

这些点不能在蓝绿线上.

Since points $(1,1)$ and $(1,0)$ both lies in the interior region

where $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ is consistent.

Thus, we are guaranteed that the existence of a solution

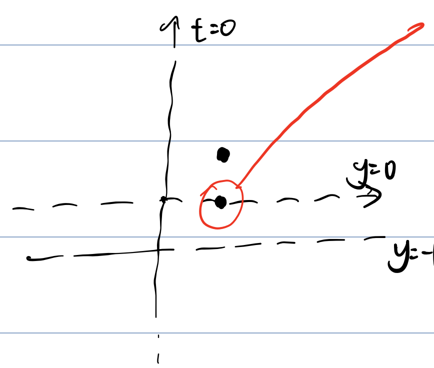
for $y(1)=1$ and $y(1)=0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{y+1}\cdot\left(\frac{1}{te^t}\right)$$

$$f_y = \frac{1}{te^t}\left[\frac{(y+1) - \cdots}{\cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{te^t}\left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]$$

$t=0$ $\quad$ $y=-1$



$(1,0) \longrightarrow x(1) = 0$

No, unique problem

Ex $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{5y-3}}{6t^2-1}$, $y(t_0) = y_0$

$f(t,y) = \frac{\sqrt[3]{5y-3}}{6t^2-1} = \frac{(5y-3)^{\frac{1}{3}}}{\underbrace{6t^2-1}_{=0}}$

$\therefore t = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

$f = \frac{1}{6t^2-1}(5y-3)^{\frac{1}{3}}$

$f_y = \frac{1}{6t^2-1} \cdot \frac{1}{3}(5y-3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5$

$= \frac{1}{6t^2-1} \cdot \frac{5}{3(5y-3)^{\frac{2}{3}}}$

$t = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $y = \frac{3}{5}$

如果不给 initial conditions 则不用画图