Υπολογιστική Γεωμετρία & Εφαρμογές 3Δ Μοντελοποίησης Εργαστήριο 2

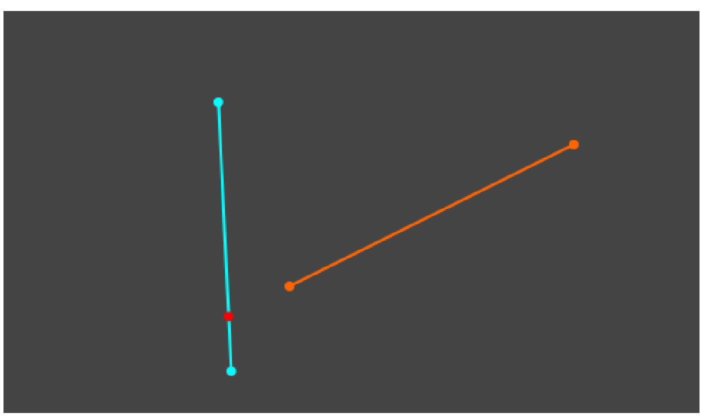
Γιώργος Μπολάτογλου

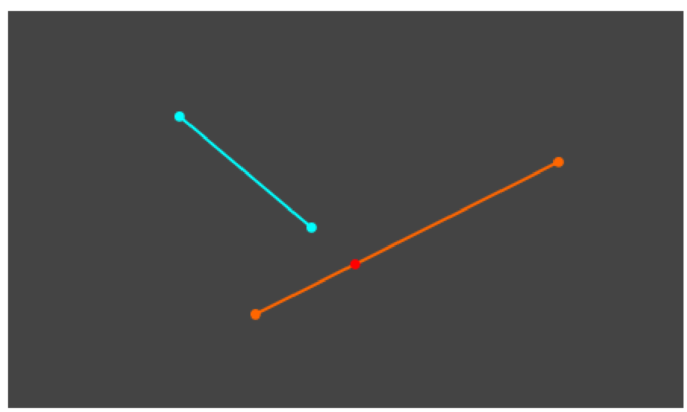
Αρ. Μητρώου: 228424

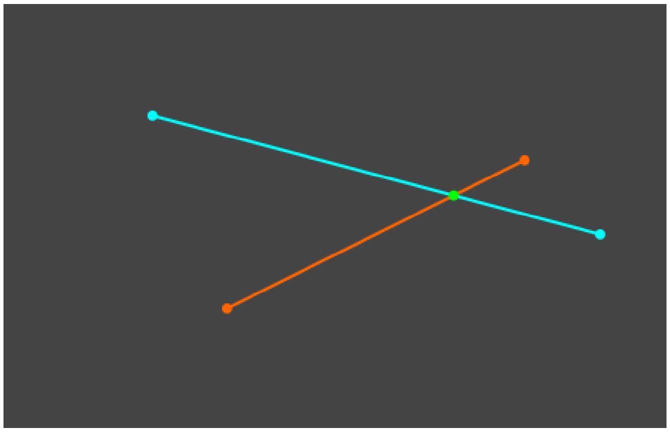
Task 1

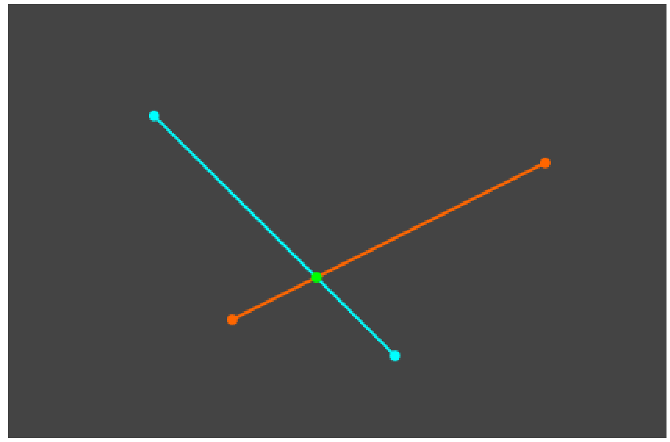
Καλούμαστε να βρούμε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες και να το απεικονίσουμε με διαφορετικό χρώμα αν αποτελεί και σημείο τομής των δύο ευθυγράμμων τμημάτων.

Εφόσον έχουμε τα αρχικά και τελικά σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων βρίσκουμε τις ευθείες στις οποίες αντιστοιχούν σύμφωνα με την γνωστή εξίσωση $(y-y1)=((y1-y2)/(x1-x2))*(x-x1)$, όπου (x1,y1) και (x2,y2) τα αρχικά και τελικά σημεία του κάθε ευθύγραμμου τμήματος. Στην συνέχεια τις εξισώνουμε και βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών. Τώρα για να εντοπίσουμε αν το σημείο τομής τους αντιστοιχεί και στο σημείο τομής των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων πρέπει να ισχύει για το κάθε ένα: Η τετμημένη του σημείου τομής να είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη τετμημένη των x1 και x2 και αντίστοιχα μικρότερη από την μέγιστη τετμημένη τους.



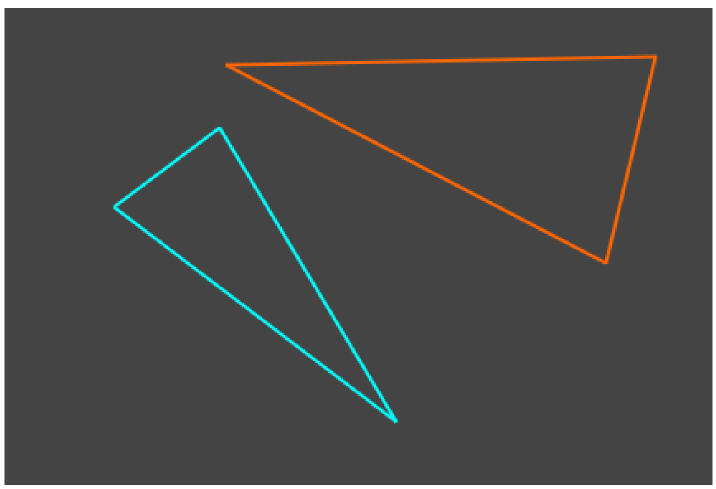




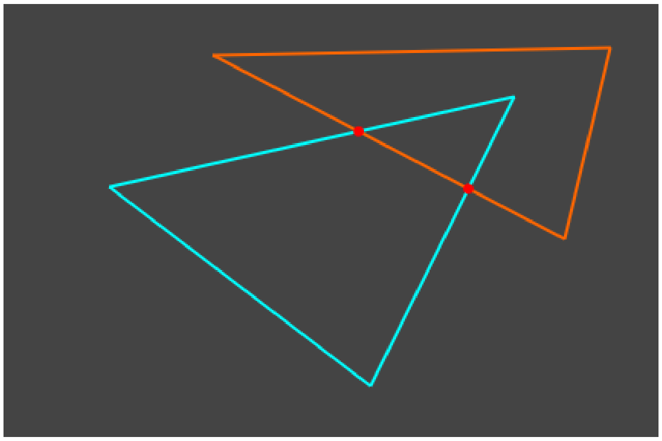
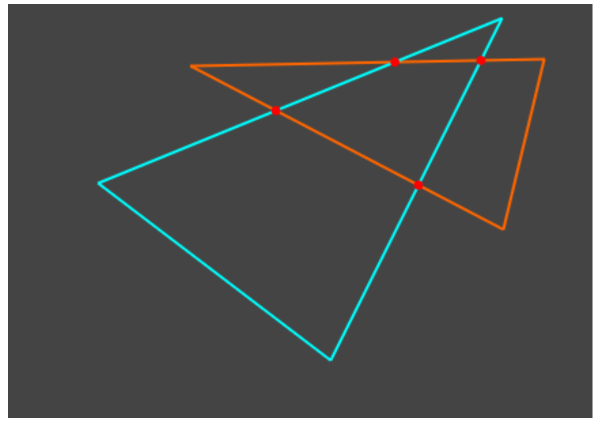
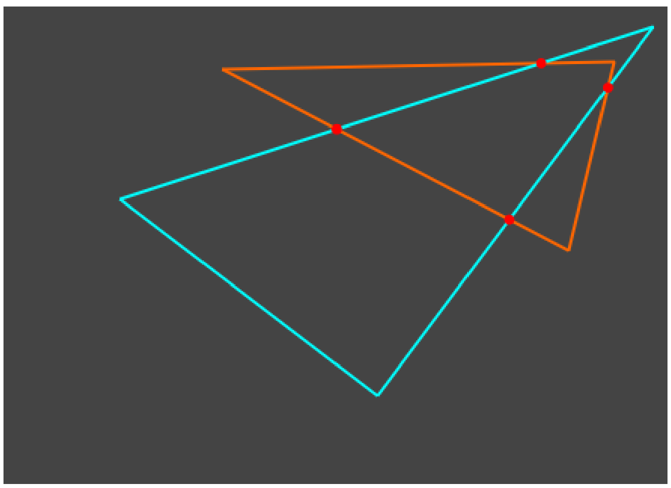
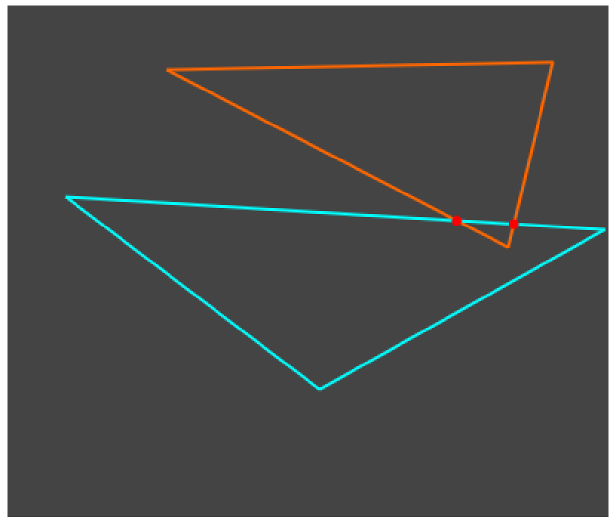


Task 2

Καλούμαστε να βρούμε τα σημεία τομείς των δύο τριγώνων και να τα απεικονίσουμε.

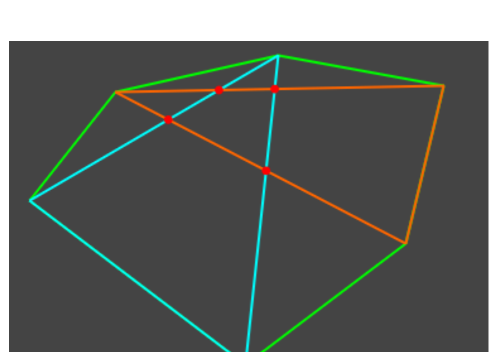


Ουσιαστικά το πρόβλημα αναγάγετε σε πρόβλημα εύρεσης σημείων τομής ευθυγράμμων τμημάτων μιας και το κάθε τρίγωνο αποτελείται από τρία. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω έλεγχο που χρησιμοποιήθηκε στο Task 1 επιλύουμε και το συγκεκριμένο ζήτημα. Μόνο που τώρα πρέπει να κάνουμε τον έλεγχο για την κάθε μία από τις δύο γραμμές του μπλε τριγώνου που δημιουργούμε με το κλικ του ποντικιού με κάθε μία από τις τρεις γραμμές του πορτοκαλί τριγώνου. Αρχικά βρίσκουμε λοιπόν το κάθε ένα σημείο τομής και στην συνέχεια αν αποτελεί σημείο του ευθύγραμμου τμήματος το απεικονίζουμε, όπως φαίνεται για διάφορες περιπτώσεις παρακάτω.

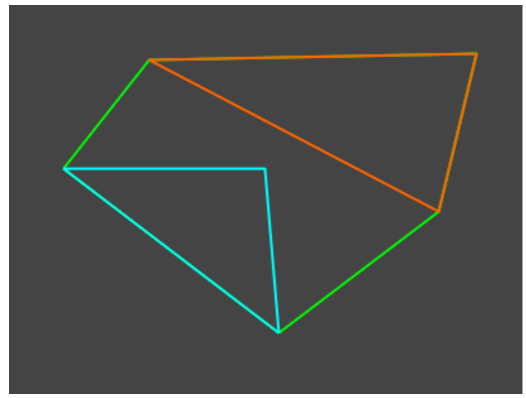





Βρείτε το convex hull της ένωσης των 2 τριγώνων $C(A \cup B)$ και απεικονίστε την διαφορά του από την ένωση των τριγώνων $C(A \cup B) - A \cup B$ υπολογίζοντας τα διάφορα τρίγωνα/πολύγωνα από τα οποία αποτελείται. Τα πολύγωνα διαφοράς του convex hull από την ένωση των τριγώνων στην περίπτωση μη- επικάλυψης των τριγώνων θα τα απεικονίσετε κάνοντας μια «έμμεση» τριγωνοποίηση τους, βρίσκοντας δηλαδή τα τρίγωνα που τα συνθέτουν.

Αρχικά, δημιουργούμε το convex hull των σημείων των γωνιών των τριγώνων, έτσι ώστε να αποκτήσουμε μια καλύτερη αντίληψη του προβλήματος και την δυνατότητα να εξάγουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις δημιουργίας κυρτού πολυγώνου με «έμμεση» τριγωνοποίηση των συγκεκριμένων τριγώνων.



Ανάλογα λοιπόν με το που γίνεται το click θα δημιουργηθεί και ένα διαφορετικό σχήμα, αποτελούμενο ανάλογα την περίπτωση από διαφορετικό αριθμό τριγώνων. Θα χρησιμοποιήσουμε έναν έλεγχο για να προσδιορίσουμε το σχήμα του πολυγώνου αλλά και τα επιμέρους τρίγωνα από τα οποία αποτελείται ανάλογα με το που βρίσκεται το σημείο που γίνεται το click και δημιουργείται το μπλε τρίγωνο. Αυτό θα το πετύχουμε κάνοντας τους εξής δύο ελέγχους:

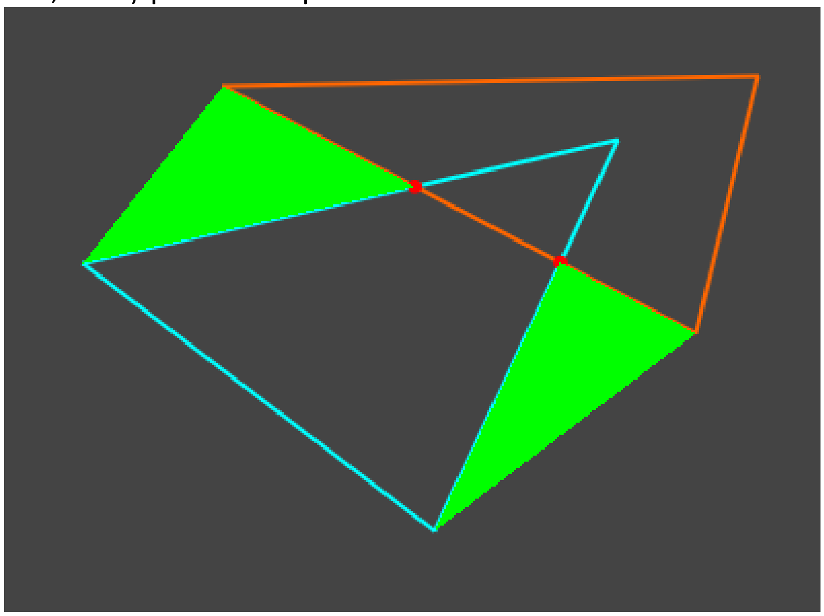


1. Αν βρίσκεται αριστερά ή δεξιά από τα 5 κυρίαρχα και σταθερά ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος, τα οποία φαίνονται στην διπλανή φωτογραφία. Αυτά είναι και οι τρεις πλευρές του πορτοκαλί τριγώνου, η βάση του μπλε τριγώνου και τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα ακριανά σημεία της βάσης του μπλε με τα δύο της βάσης του πορτοκαλί(πράσινα ευθύγραμμα τμήματα). Θέτουμε μια αυθαίρετη φορά του κάθε διανύσματος που έχει αρχικό και τελικό σημείο τα αντίστοιχα του κάθε ενός από τα 5 ευθύγραμμα τμήματα (έστω AB ένα από αυτά). Έπειτα, χρησιμοποιούμε την ορίζουσα των δύο διανυσμάτων AB και AP, όπου P το σημείο που κάναμε κλικ, η οποία υπολογίζεται ως εξής:
   $$\det(AB,AP)= (Bx-Ax)(Py-Ay)-(By-Ay)(Px-Ax)$$
   Αν $\det(AB,AP)>0$ τότε το διάνυσμα AP βρίσκεται αριστερά του AB και συνεπώς το σημείο P αριστερά του ευθυγράμμου AB. Αλλιώς αν $\det(AB,AP)<0$ τότε το διάνυσμα AP βρίσκεται δεξιά του AB.

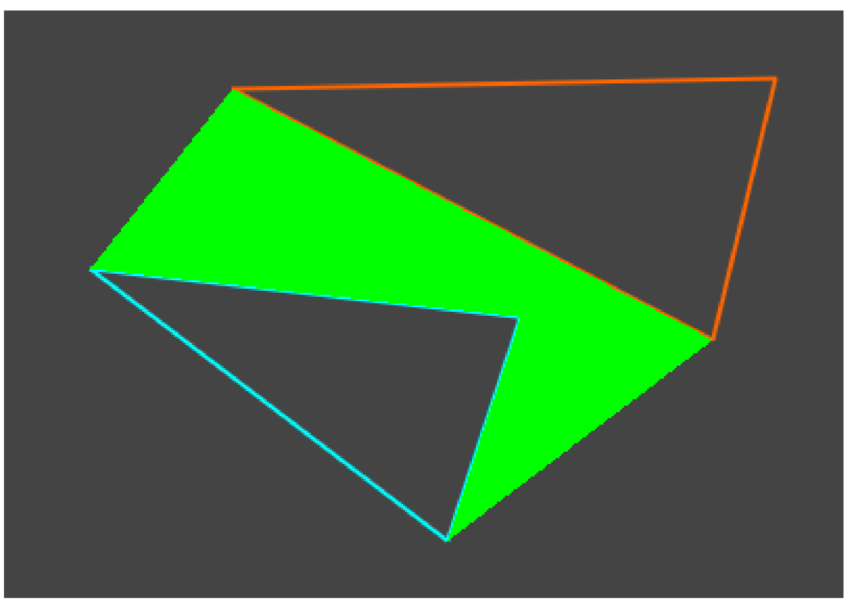
1. Αν υπάρχουν σημεία τομής μεταξύ των τριγώνων. Αν ναι, πόσα και σε ποιες πλευρές. Αυτό τον έλεγχο τον έχουμε υλοποιήσει ήδη παραπάνω, που ελέγχαμε αν τα σημεία τομής των ευθειών των τριγώνων είναι και σημεία τομής των ευθυγράμμων τμημάτων.

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να βρούμε κάθε πιθανή περίπτωση και να δημιουργήσουμε κατάλληλα τα τρίγωνα από τα οποία αποτελείται το κυρτό πολύγωνο. Παρακάτω αναλύονται μερικές περιπτώσεις(P το σημείο που κάνουμε κλικ).

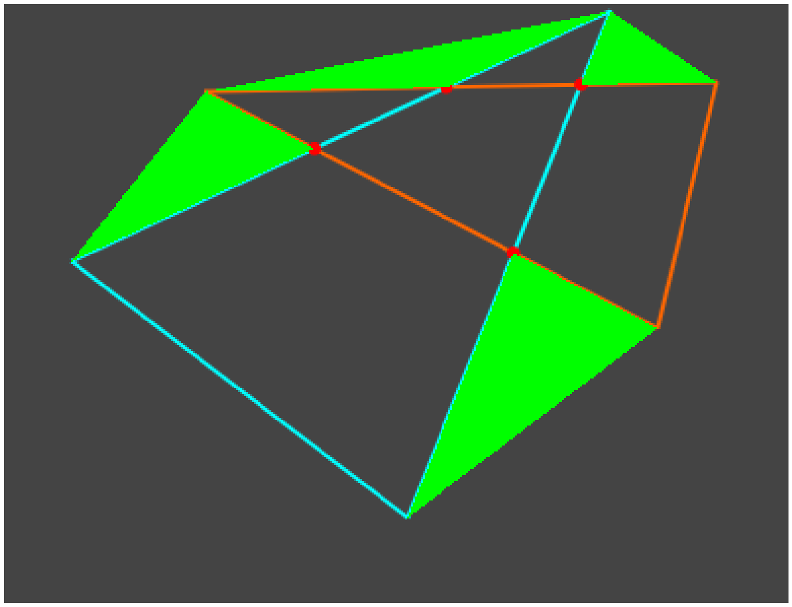
- Το σημείο P βρίσκεται μέσα στο πορτοκαλί τρίγωνο, δηλαδή η ορίζουσα του διανύσματος που δημιουργείται μεταξύ του σημείου P και του κάθε αρχικού σημείου της κάθε πλευράς του τριγώνου με το διάνυσμα που συμπίπτει με το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκεται δεξιά και από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα (όσο αφορά το πορτοκαλί τρίγωνο έχουμε ορίσει ωρολογιακή φορά), δηλαδή μέσα στο τρίγωνο. Επομένως δημιουργούμε τα δύο τρίγωνα που συμπληρώνουν το κυρτό πολύγωνο χρησιμοποιώντας και τα δύο σημεία τομείς του γαλάζιου τριγώνου με την βάση του μπλε, όπως φαίνεται παρακάτω.



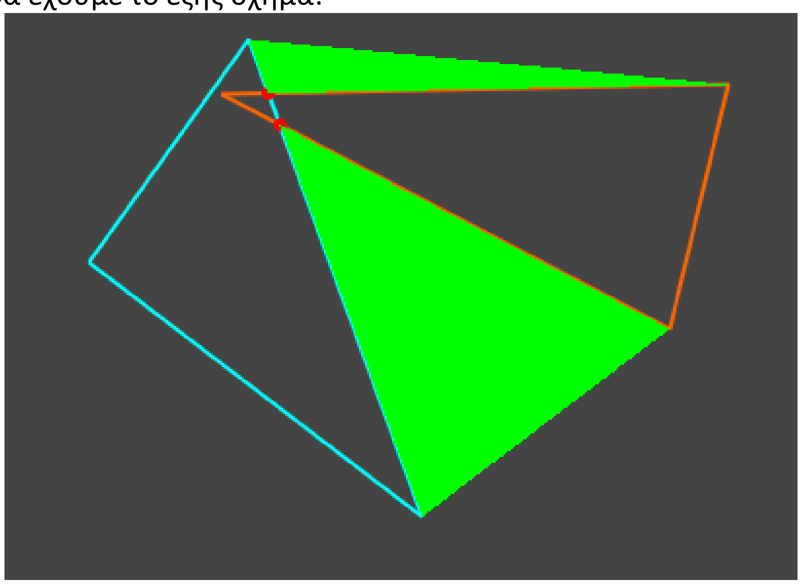
- Το P βρίσκεται μέσα στο τετράπλευρο που δημιουργεί η βάση του γαλάζιου τριγώνου, η βάση του πορτοκαλί και τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που τις ενώνουν. Πάλι με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε αν είναι αριστερά (η δεξιά ανάλογα την φορά που έχουμε ορίσει) της κάθε μίας ευθείας.



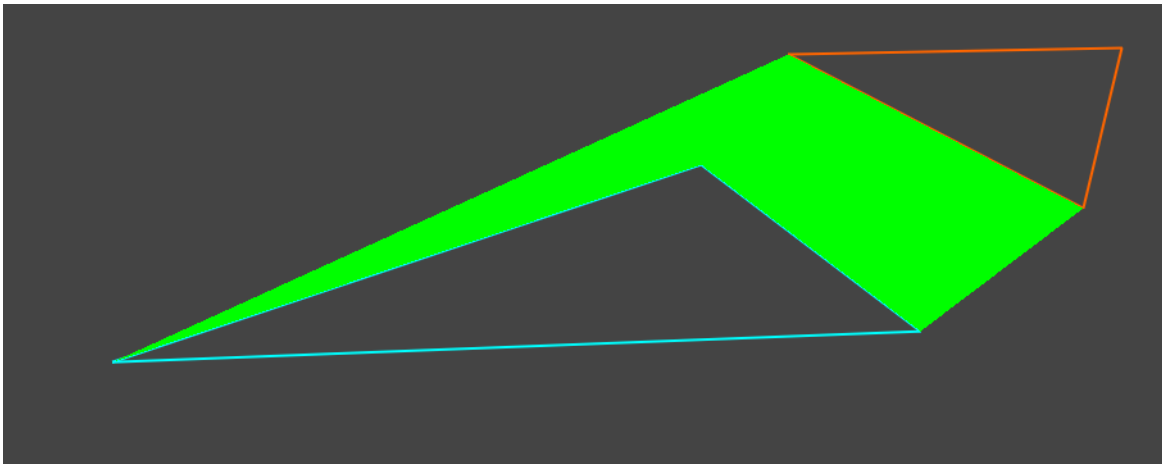
- Το P βρίσκεται πάνω από την πάνω πλευρά του πορτοκαλί τριγώνου και αριστερά από την δεξιά του. Βέβαια τώρα θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε και το αν το γαλάζιο τρίγωνο τέμνεται δύο και μόνο δύο φορές με την συγκεκριμένη πλευρά.

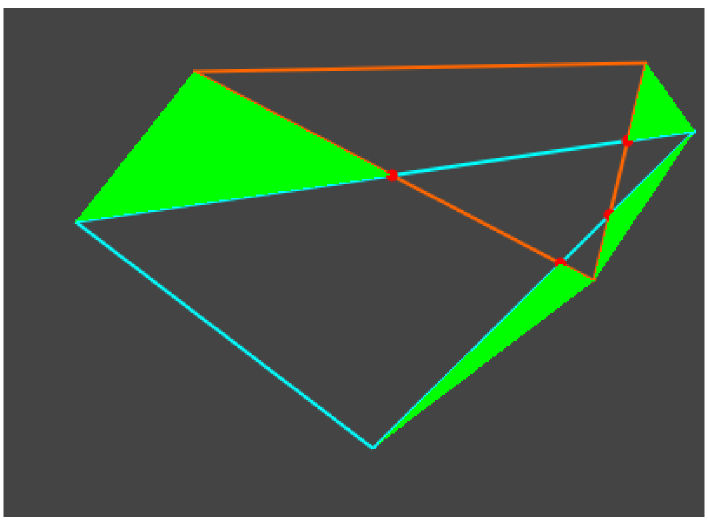


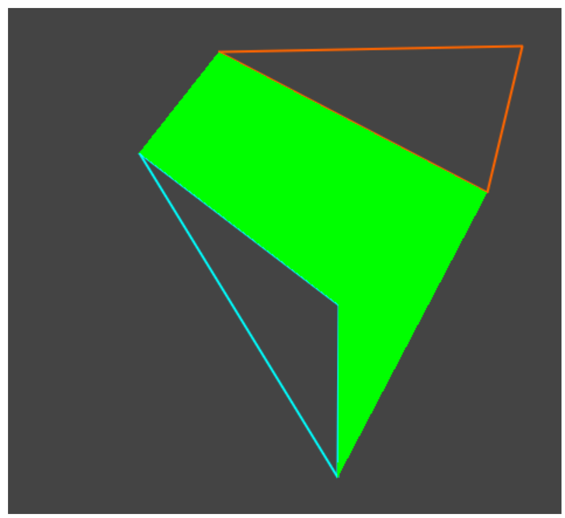
- Αν τέμνεται για παράδειγμα μόνο μία φορά και μάλιστα μόνο η δεξιά του πλευρά έχουμε το εξής σχήμα:

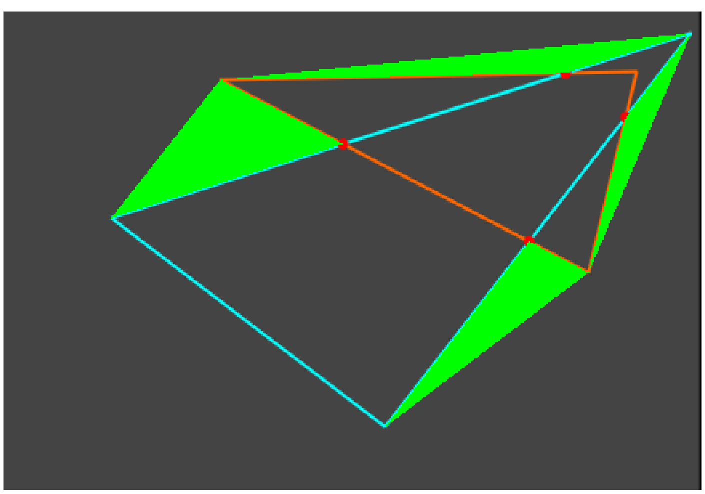


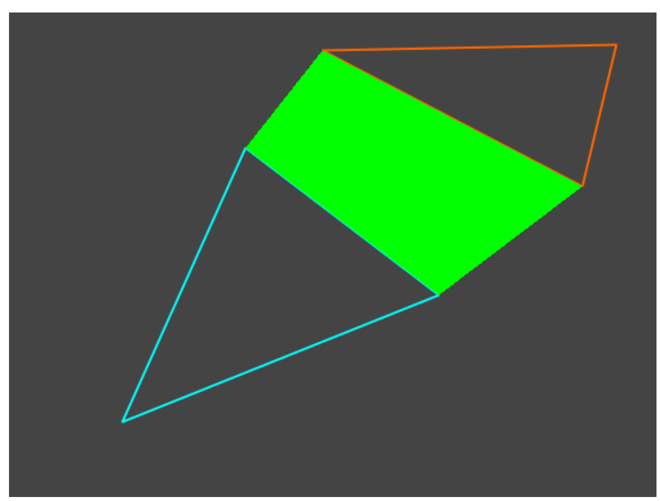
Με την ίδια λογική βγαίνουν και όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις, κάποιες από τις οποίες απεικονίζονται παρακάτω.



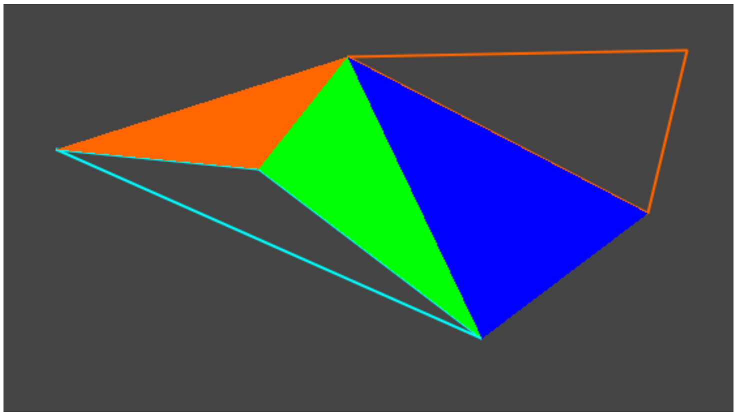


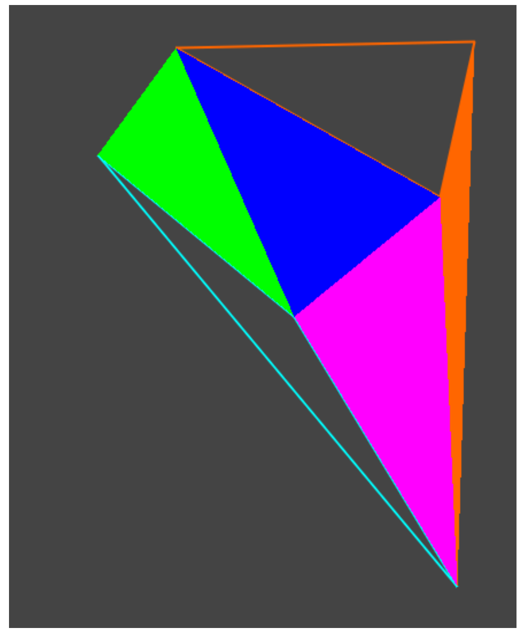


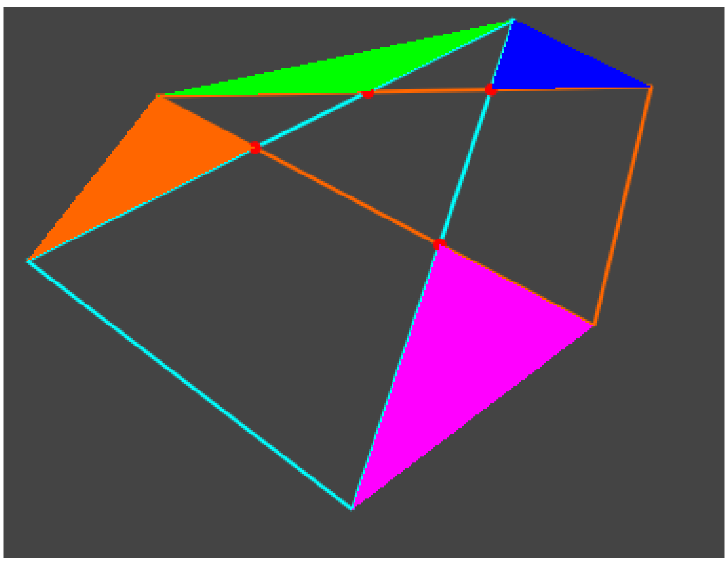




Τέλος παρουσιάζονται τα διαφορετικά τρίγωνα που δημιουργήσαμε για την ολοκλήρωση του κυρτού πολυγώνου. Η απεικόνιση τους γίνεται με διαφορετικό χρώμα για να γίνει πιο κατανοητό το πως δημιουργούνται στις διάφορες περιπτώσεις.

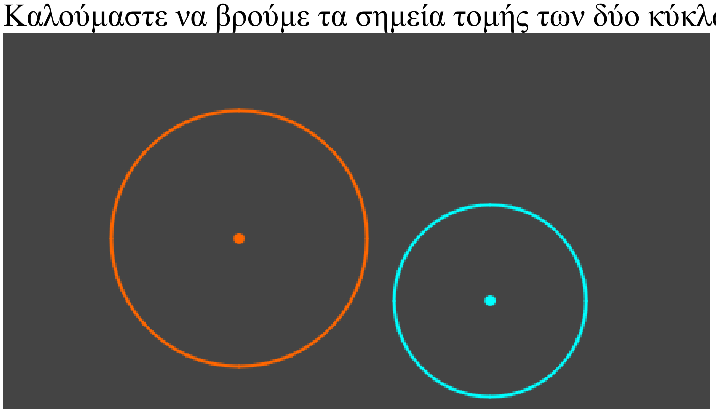




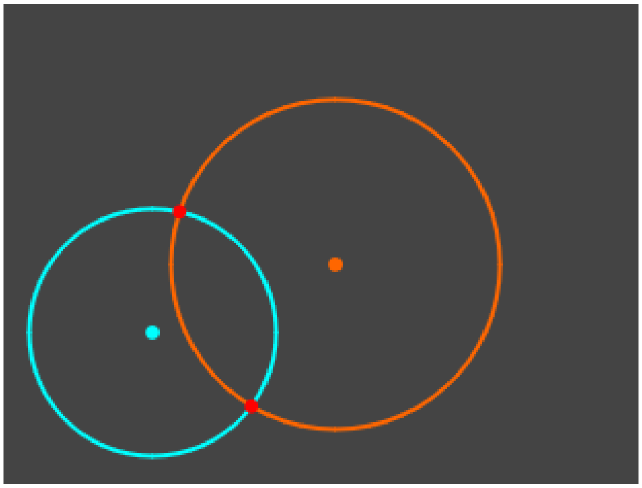


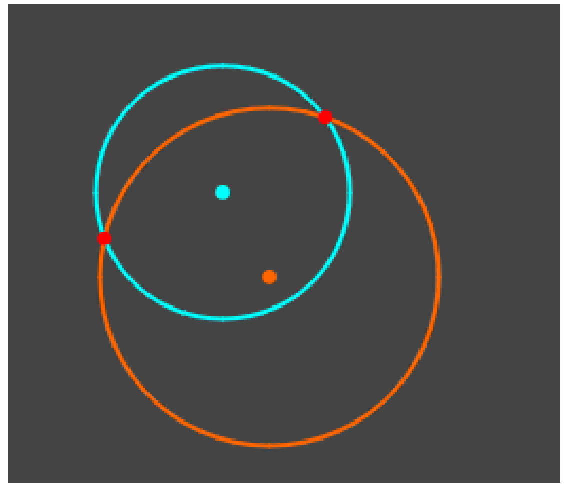
Task 3

Καλούμαστε να βρούμε τα σημεία τομής των δύο κύκλων.



Εφόσον έχουμε τα σημεία των κέντρων(x1,y1 και x2,y2) και την τιμή της ακτίνας(r1 και r2) του κάθε κύκλου βρίσκουμε τα σημεία τομής τους εξισώνοντας τις $(x - x1)^2 + (y - y1)^2 = r1^2$ και $(x - x2)^2 + (y - y2)^2 = r2^2$.





Βρείτε και απεικονίστε το σκιαγραφημένο πολύγωνο που αντιπροσωπεύει την τομή των 2 κύκλων. Πρέπει να δειγματοληπτήσετε τους 2 κύκλους για να εξάγετε τα σημεία που σχηματίζουν το πολύγωνο τομής.

Αρχικά, δειγματοληπτούμε ως προς x τον γαλάζιο κύκλο, ο οποίος μετακινείται με το ποντίκι. Κάθε στιγμή βρίσκουμε όλες τις πιθανές τιμές από το x2-r2 έως το x2+r2 με κάποιο πολύ μικρό βήμα. Ανάλογα την επιθυμητή ακρίβεια, δηλαδή το πόσο θέλουμε το πολύγωνο που θα δημιουργήσουμε να προσεγγίσει όσο καλύτερα γίνεται την τομή των δύο κύκλων, θα έχουμε και τον αντίστοιχο αριθμό δειγμάτων και το step της δειγματοληψίας.
Στην συνέχεια, βρίσκουμε και τις αντίστοιχες τιμές του y για την κάθε τιμή του x που δειγματοληπτήσαμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κύκλου $(x - x2)^2 + (y - y2)^2 = r1^2$, έτσι ώστε να προσδιορίσουμε όλα τα σημεία του «μισού» πολυγώνου που θα δημιουργηθεί. Τέλος παίρνουμε ΜΟΝΟ τα σημεία που βρίσκονται εντός του πορτοκαλί κύκλου, δηλαδή η ευκλείδεια απόστασή τους από το κέντρο του είναι μικρότερη από r1. Αυτά είναι και τα σημεία του μισού πολυγώνου που αποθηκεύουμε.
Κάνουμε ακριβώς τα ίδια και για τον άλλο κύκλο, απλά τώρα παίρνουμε τα σημεία του που η ευκλείδεια απόστασή τους από το κέντρο του γαλάζιου είναι μικρότερη από r2, τα οποία και αποθηκεύουμε.
Τέλος, δημιουργούμε το πολύγωνο με όλα τα σημεία που έχουμε αποθηκεύσει.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιούμε 400 δείγματα, από τα οποία βέβαια ανάλογα με το που βρίσκεται ο γαλάζιος κύκλος αποθηκεύονται και αναπαρίστανται στο πολύγωνο λιγότερα.