



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Avaliação 3**

Processos Estocásticos (PRE029006)

**Rhenzo Hideki Silva Kajikawa**

20 de Setembro de 2023

# Sumário

<b>1. Comando da Avaliação .....</b>	<b>3</b>
1.1. Atenção .....	3
1.2. Instruções gerais: .....	3
1.3. Questão Sorteada .....	4
<b>2. Resolução .....</b>	<b>5</b>
2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$ .....	5
2.2. Determine o valor da constante $k$ .....	6
2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$ .....	6
2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$ .....	7
2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$ .....	7
2.6. Resolução da PDF marginal em $Y$ dado $X = 5$ .....	8
2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$ .....	9

# 1. Comando da Avaliação

## 1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

## 1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

### 1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com PDF conjunta constante (igual a  $k$ ) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo

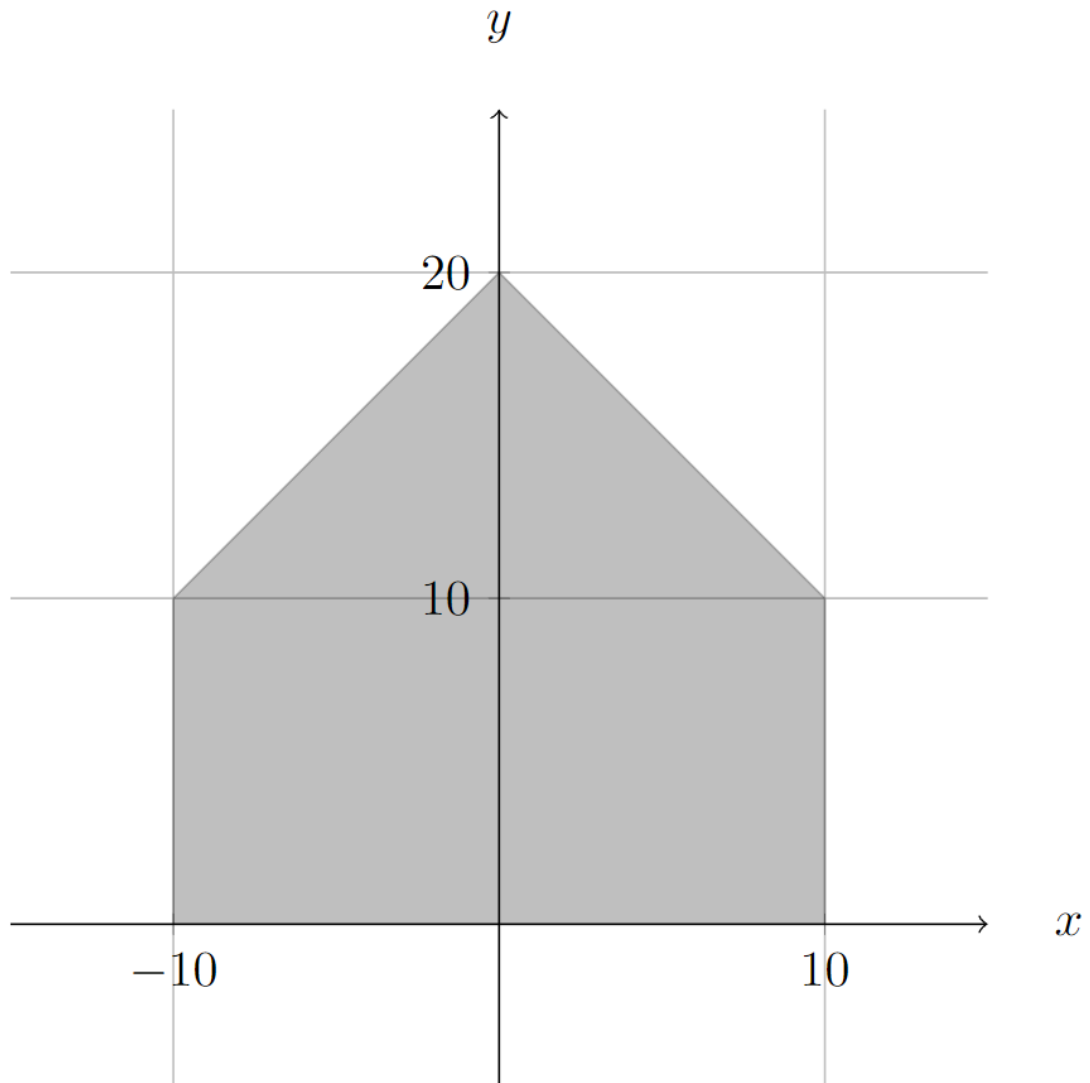


Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine  $\Pr[X \geq Y]$ .
- (c) Determine e esboce a PDF marginal em  $Y$ .
- (d) Determine e esboce a CDF marginal de  $Y$ .
- (e) Determine e esboce a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = 5$ .
- (f) Determine a covariância entre  $X$  e  $Y$ .

## 2. Resolução

### 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$

Temos:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\f_Y(y|X=x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\f_{x,y}(x,y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}\end{aligned}\tag{1}$$

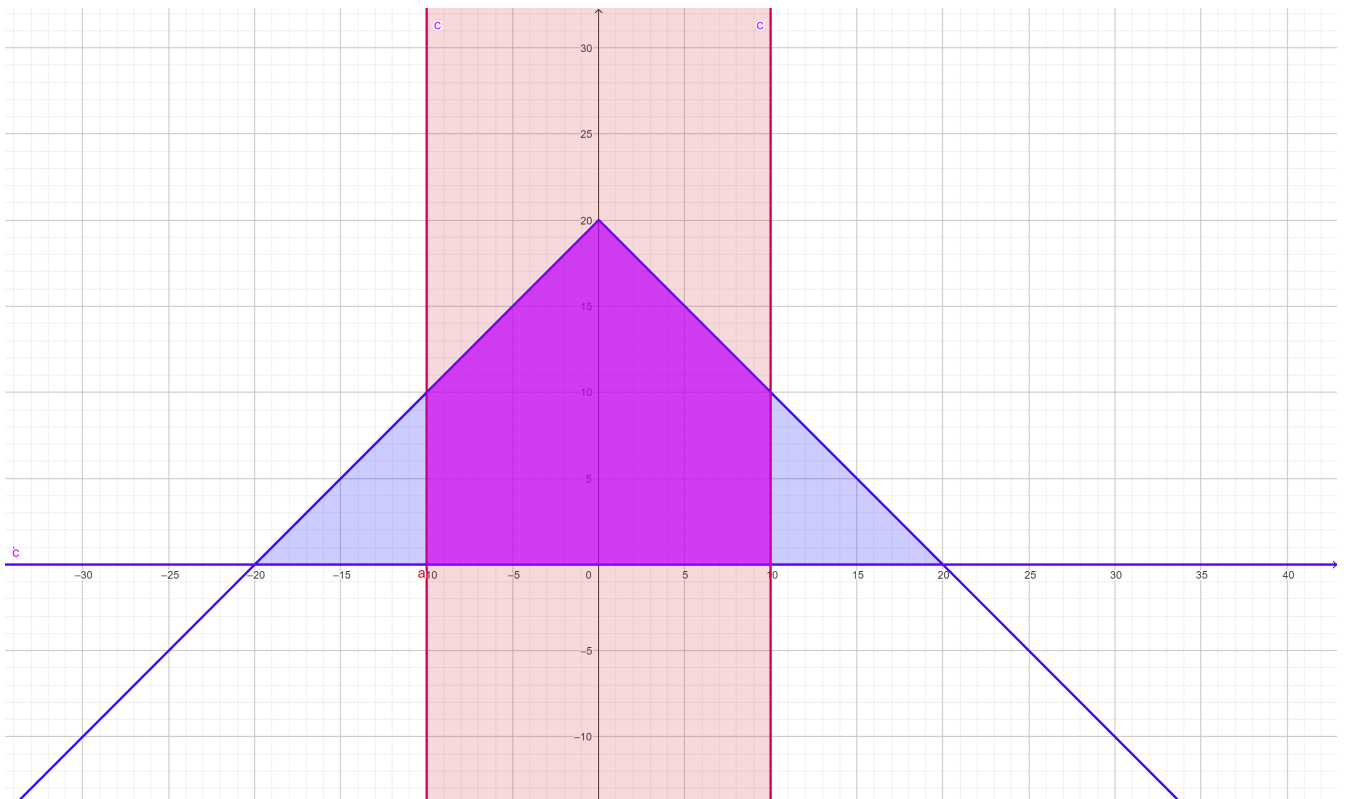


Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é  $f_X(x)$ , nela podemos ver o intervalo respeita  $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$ .

A função em azul é  $f_Y(y)$ , nela é possível ver que também respeita o calcula acima  $f_Y(y|X=x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$ .

Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta, fazendo a intersecção delas  $f_{x,y}(x,y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

## 2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$V_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \, dy \, dx =$$
$$k \int_{-10}^{10} 20 - |x| \, dx = 300k$$
(2)

Sabemos que:

$$V_{\text{total}} \cdot k = 1$$
$$300 \cdot k = 1$$
$$k = \frac{1}{300}$$
(3)

## 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a  $\Pr[X \geq Y]$  podemos criar uma reta  $d$  que respeita a seguinte condição  $d : X \geq Y$ , teremos uma reta como na figura a seguir:

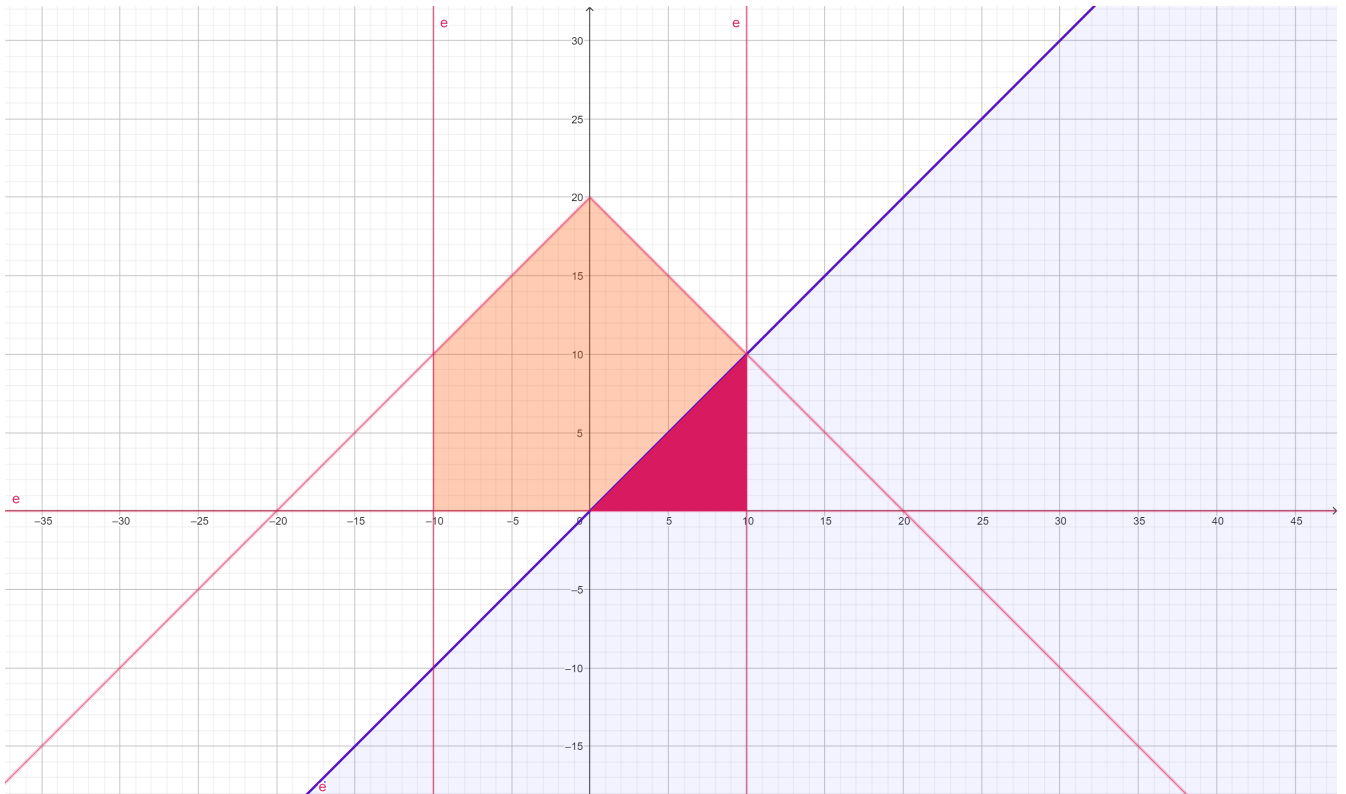


Figura 3: Ilustrando a intersecção de  $f_Y(y|X = x)$  e  $d$

A função em laranja é a  $f_Y(y|X = x)$  e a área em azul é  $d$ , a área em magenta é o que a questão quer  $\Pr[X \geq Y]$ . Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de  $\Pr[X \geq Y]$ ,

o coeficiente:

$$k = \frac{1}{300} \quad (4)$$

a área da base é:

$$A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \quad (5)$$

logo:

$$\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6} \quad (6)$$

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6} \quad (7)$$

## 2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$

para :

$$-\infty \leq y \leq 0 \quad (8)$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0 \quad (9)$$

para :

$$0 \leq y \leq 10 \quad (10)$$

$$f_y(y) = \int_{-10}^{10} \frac{1}{200} \, dx = \frac{1}{10} \quad (11)$$

para :

$$10 \leq y \leq 20 \quad (12)$$

$$f_y(y) = \int_{20+y}^{20+x} \frac{1}{100} \, dx = -\frac{x}{50} \quad (13)$$

## 2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$

para :

$$-\infty \leq y \leq 0 \quad (14)$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0 \quad (15)$$

para :

$$0 \leq y \leq 10 \quad (16)$$

$$f_y(y) = \int_{-10}^{10} \frac{y}{200} \, dx = \frac{y}{10} \quad (17)$$

para :

$$10 \leq y \leq 20 \quad (18)$$

$$f_y(y) = \int_{20+y}^{20+x} \frac{y}{100} \, dx = \frac{-x \cdot y}{50} + \frac{y}{10}$$

para :

$$20 \leq y \leq \infty \quad (19)$$

$$f_y(y) = 1 \quad (20)$$

## 2.6. Resolução da PDF marginal em $Y$ dado $X = 5$

para :

$$x = 5, 0 \leq y \leq 15 \quad (21)$$

$$f_x(5) = \int_0^{15} \frac{1}{300} \, dy = \frac{1}{20} = 0.05 \quad (22)$$

$$f_y(y \mid x = 5) = \frac{f_{x,y}(5, y)}{f_x(5)} \quad (23)$$

$$f_y(y \mid x = 5) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{15} \quad (24)$$



## 2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$

$$E[Y] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot y \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} y \, dy \, dx = \frac{70}{9} \approx 7.77778$$

$$E[X] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot x \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} x \, dy \, dx = 0 \quad (25)$$

$$E[XY] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot x \cdot y \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} x \cdot y \, dy \, dx = 0$$

$$\text{cov}[XY] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0 - 0 \cdot \frac{70}{9} = 0$$