INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Avaliação 1

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

15 de Setembro de 2023

1. Comandos da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada.
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB.

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nehnum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares , livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscrito digitalizado (ex: foto) ou de documento digitado.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**

1.3. Questão Sorteada

9. Considere uma variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for 1 ou 2, então X ~ Unif({1,2,3,4}).
- Se o resultado for 3, Então X = 3.
- Se o resultado for 4, 5 ou 6, então Unif([1,4]).

(a) Determine e esboce a PDF de X

(b) Determine e esboce a CDF de X

(c) Determine a média de X

(d) Determine Pr[X > 3]

2. Resolução

Temos que:

- Se o U = 1 ou U = 2, então X ~ Unif({1,2,3,4}).
- Se o U = 3, Então X = 3.
- Se o U = 4, U = 5 ou U = 6, então Unif([1,4]).

2.1. Resolução da PDF

Então pelo teorama da probabilidade total:

$$f_{X(x)} = f_{X(x|1 \leq U \leq 2)} \Pr[1 \leq U \leq 2] + f_{X(x|U=3)} \Pr[U = 3] + f_{X(x|4 \leq U \leq 6)} \Pr[4 \leq U \leq 6]$$

$$f_{X(x|1 \leq U \leq 2)} \to \text{Unif}(\{1,2,3,4\})$$

$$f_{X(x|U=3)} \to 1$$

$$f_{X(x|4 \leq U \leq 6)} \to \text{Unif}([1,4])$$

$$f_{X(x)} = (\delta(x-1) + \delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta(x-4))\frac{1}{4}\frac{2}{6} + \delta(x-3)\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{3}{6}[1 \leq x \leq 4]$$

$$f_{X(x)} = \frac{\delta(x-1)}{12} + \frac{\delta(x-2)}{12} + \frac{\delta(x-3)}{4} + \frac{\delta(x-4)}{12} + \frac{[1 \leq x \leq 4]}{6}$$

2.2. Resolução da CDF

- Caso x < 1

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{x} 0 \text{ du} = 0$

- Caso x = 1

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} = \frac{1}{12}$

- Caso 1 < x < 2

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{x} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} = \frac{1}{12} + \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = \frac{x}{6} - \frac{1}{12}$

- Caso x = 2

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{2-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{2-}^{2+} \left(\frac{\delta(x-2)}{12}\right) \text{ du} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

- Caso 2 < x < 3

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{2-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{2-}^{2+} \left(\frac{\delta(x-2)}{12}\right) \text{ du} + \int_{2+}^{x} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du}$
$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{x}{6} - \frac{2}{6} = \frac{x}{6}$

- Caso x = 3

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{2-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{2-}^{2+} \left(\frac{\delta(x-2)}{12}\right) \text{ du} + \int_{2+}^{3-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du}$
$+ \int_{3-}^{3+} \left(\frac{\delta(x-3)}{4}\right) \text{ du} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- Caso 3 < x < 4

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{2-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{2-}^{2+} \left(\frac{\delta(x-2)}{12}\right) \text{ du} + \int_{2+}^{3-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du}$
$+ \int_{3-}^{3+} \left(\frac{\delta(x-3)}{4}\right) \text{ du} + \int_{3+}^{x} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{3}{6} = \frac{x}{6} + \frac{1}{4}$

- Caso x = 4

$f_{X(x)} = \int_{-\infty}^{1-} 0 \text{ du} + \int_{1-}^{1+} \left(\frac{\delta(x-1)}{12}\right) \text{ du} + \int_{1+}^{2-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{2-}^{2+} \left(\frac{\delta(x-2)}{12}\right) \text{ du} + \int_{2+}^{3-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du}$
$+ \int_{3-}^{3+} \left(\frac{\delta(x-3)}{4}\right) \text{ du} + \int_{3+}^{4-} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ du} + \int_{4-}^{4+} \left(\frac{\delta(x-4)}{12}\right) \text{ du} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$

2.3. Valor Esperado

Valor esperado: Solução pelo teorema da probabilidade total:

$$E[x] = E[X|1 \leq U \leq 2] \Pr[1 \leq U \leq 2] + E[x|U = 3] \Pr[U = 3]$$
$$+E[x|4 \leq U \leq 6] \Pr[4 \leq U \leq 6]$$

$$E[x] = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)\frac{2}{6} + \frac{1}{3} + \frac{4+1}{2}\frac{3}{6}$$

$$E[x] = \frac{9}{4} = 2.25$$

2.4. Probabilidade Pr[X>3]

Sabemos através da CDF que até x = 3 temos 3/4 do total

Então:

$$\Pr[X > 3] = 1 - \mathrm{CDF}[3]$$

$$\Pr[X > 3] = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\Pr[X > 3] = \frac{1}{4} = 0.25$$