INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 3
Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A aaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outroos materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser jutificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquiv **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Devará ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apensa na área sombreada da figura abaixo

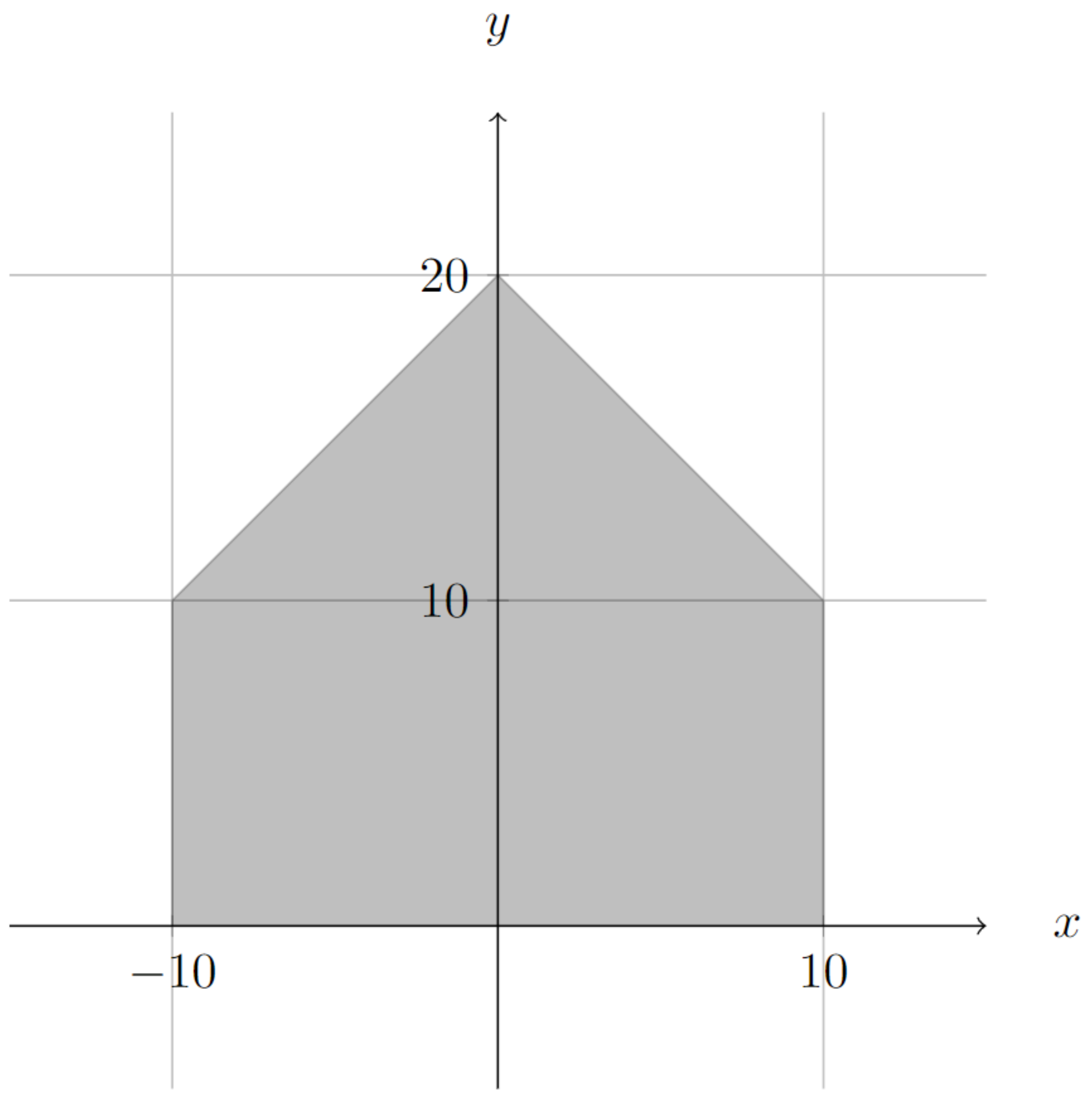

Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

(a) Determine o valor da constante k .
(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.
(c) Determine e esboce a PDF marginal em Y.
(d) Determine e esboce a CDF marginal de Y.
(e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado $X = 5$.
(f) Determine a covariância entre X e Y.

2. Resolução

2.1. Determinando a PDF conjunta X e Y

Temos:

$$X \sim \text{Unif}([-10, 10])$$

$$Y | X = x \sim \text{Unif}([0, x])$$

Portanto:

$$\begin{gathered} f_X(x) = 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\ f_Y(y|X = x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\ f_{x, y}(x, y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)} \end{gathered} \quad (1)$$

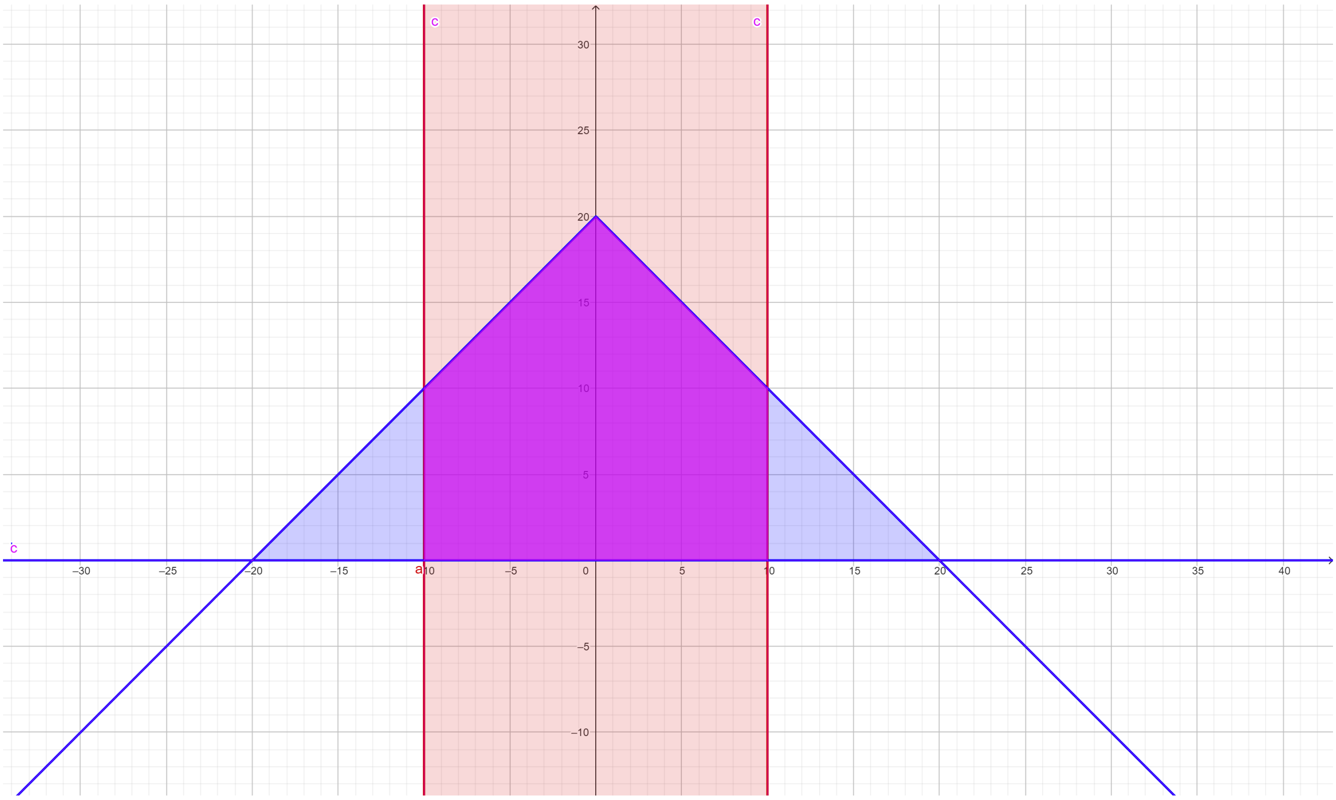

Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é $f_X(x)$, nela podemos ver o intervalo respeita $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$.
A função em azul é $f_Y(y)$, nela é possível ver que também respeita o calcula acima $f_Y(y|X = x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$.
Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta , fazendo a intersecção delas $f_{x, y}(x, y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$A_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_{0}^{20-|x|} 1 \, dy \, dx = \int_{-10}^{10} 20 - |x| \, dx = 300 \tag{2}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} A \cdot k &= 1 \\ 300 \cdot k &= 1 \\ k &= \frac{1}{300} \end{aligned} \tag{3}$$

2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a $\Pr[X \geq Y]$ podemos criar uma reta d que respeita a seguinte condição $d : X \geq Y$, teremos uma reta como na figura a seguir:

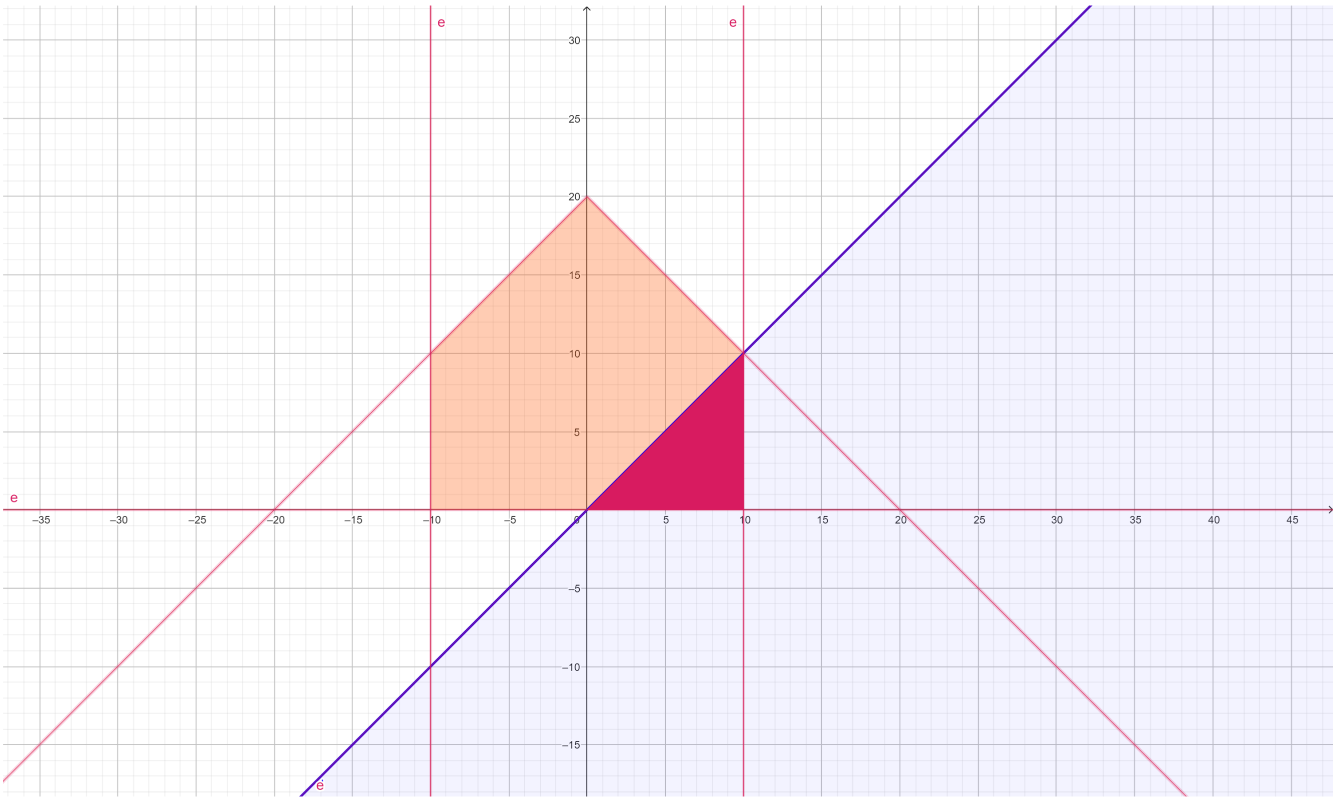

Figura 3: Ilustrando a intersecção de $f_Y(y|X = x)$ e d

A função em laranja é a $f_Y(y|X = x)$ e a area em azul é d , a area em magenta é o que a questão quer $\Pr[X \geq Y]$ Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de $\Pr[X \geq Y]$, o coeficiente $k = \frac{1}{300}$

a área é $A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

logo $\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6}$

$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6}$

2.4. Resolução da PDF marginal em Y

$f_{Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X, Y(x, y) \, \mathrm{d}x$

2.5. Resolução da CDF marginal de Y

2.6. Resolução da PDF condicional de Y dado $X = 5$

2.7. Resolução da covariância entre X e Y