



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Avaliação 3**

Processos Estocásticos (PRE029006)

**Rhenzo Hideki Silva Kajikawa**

20 de Setembro de 2023

# Sumário

<b>1. Comando da Avaliação .....</b>	<b>3</b>
1.1. Atenção .....	3
1.2. Instruções gerais: .....	3
1.3. Questão Sorteada .....	4
<b>2. Resolução .....</b>	<b>5</b>
2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$ .....	5
2.2. Determine o valor da constante $k$ .....	6
2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$ .....	6
2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$ .....	7
2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$ .....	7
2.6. Resolução da PDF marginal em $Y$ dado $X = 5$ .....	8
2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$ .....	8

# 1. Comando da Avaliação

## 1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

## 1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

### 1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com PDF conjunta constante (igual a  $k$ ) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo

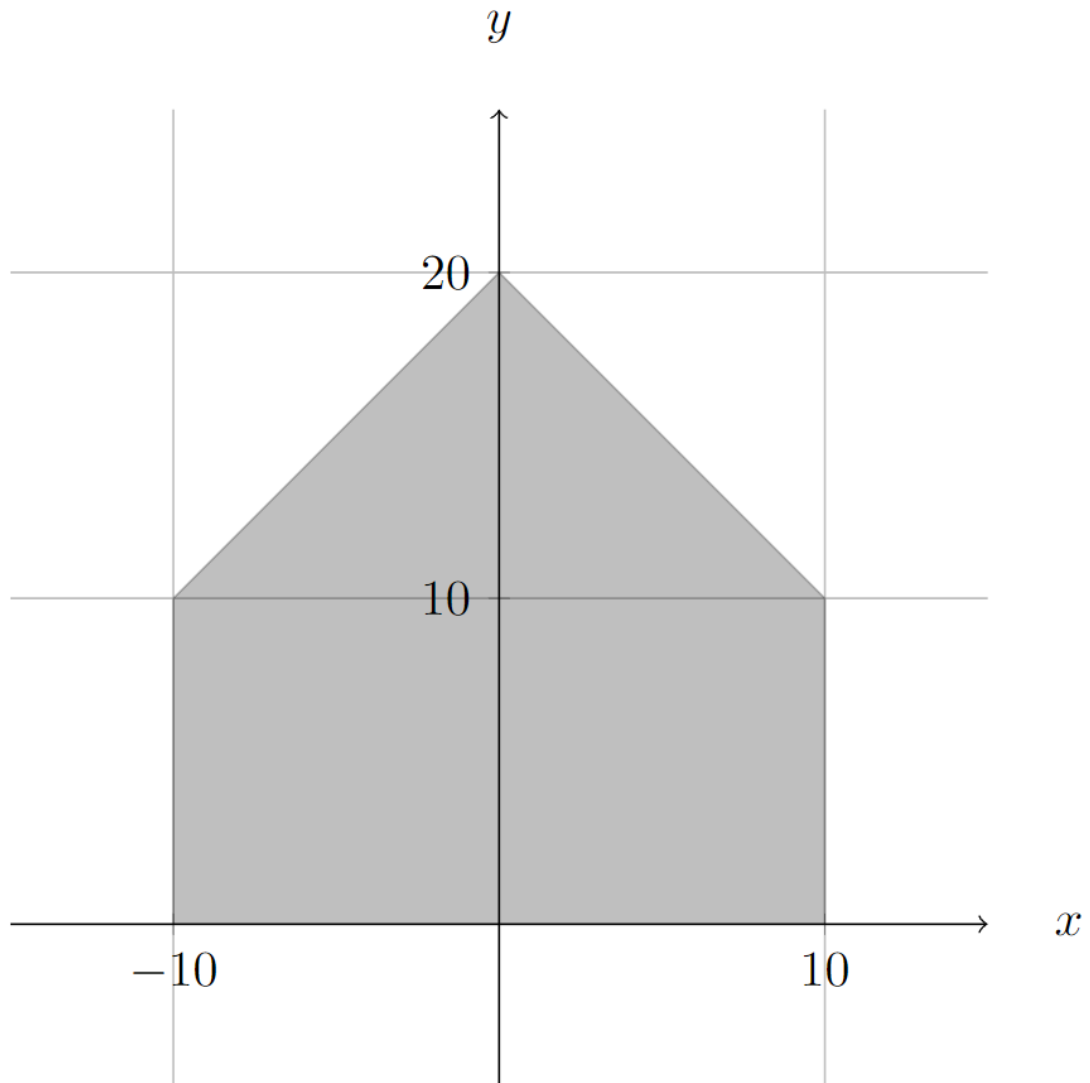


Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine  $\Pr[X \geq Y]$ .
- (c) Determine e esboce a PDF marginal em  $Y$ .
- (d) Determine e esboce a CDF marginal de  $Y$ .
- (e) Determine e esboce a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = 5$ .
- (f) Determine a covariância entre  $X$  e  $Y$ .

## 2. Resolução

### 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$

Temos:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\f_Y(y|X=x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\f_{x,y}(x,y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}\end{aligned}\tag{1}$$

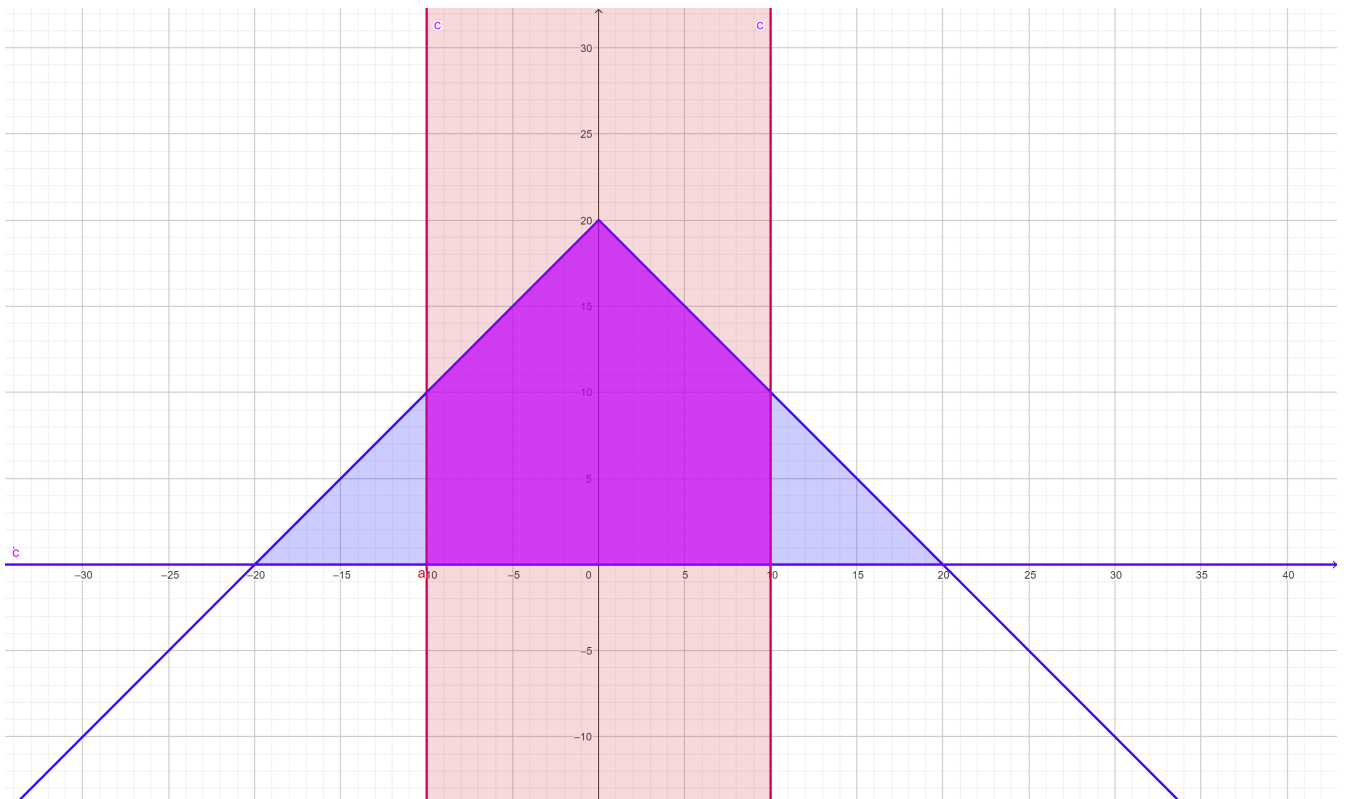


Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é  $f_X(x)$ , nela podemos ver o intervalo respeita  $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$ .

A função em azul é  $f_Y(y)$ , nela é possível ver que também respeita o calcula acima  $f_Y(y|X=x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$ .

Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta, fazendo a intersecção delas  $f_{x,y}(x,y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

## 2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$V_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \, dy \, dx = \quad (2)$$

$$k \int_{-10}^{10} 20 - |x| \, dx = 300k$$

Sabemos que:

$$V_{\text{total}} \cdot k = 1$$

$$300 \cdot k = 1$$

$$k = \frac{1}{300} \quad (3)$$

## 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a  $\Pr[X \geq Y]$  podemos criar uma reta  $d$  que respeita a seguinte condição  $d : X \geq Y$ , teremos uma reta como na figura a seguir:

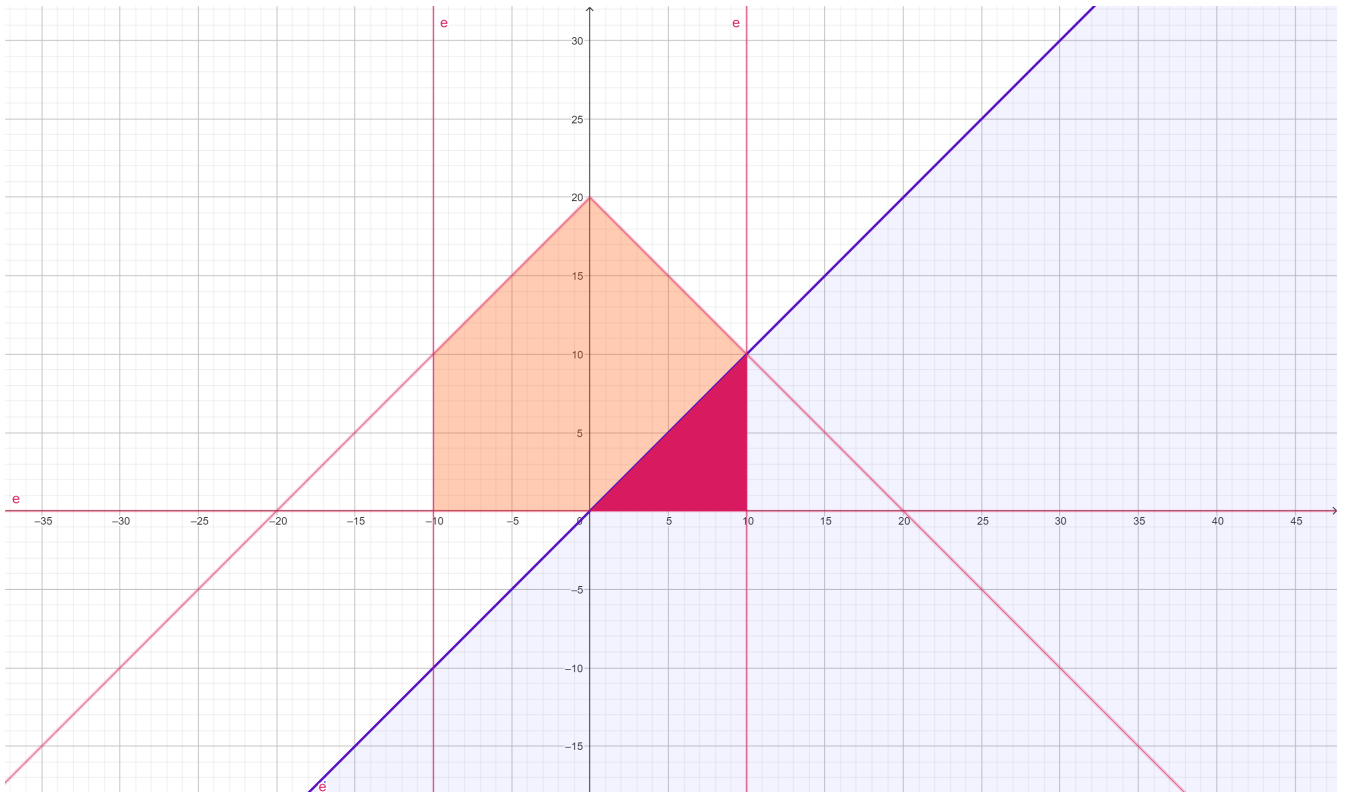


Figura 3: Ilustrando a intersecção de  $f_Y(y|X = x)$  e  $d$

A função em laranja é a  $f_Y(y|X = x)$  e a área em azul é  $d$ , a área em magenta é o que a questão quer  $\Pr[X \geq Y]$ . Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de  $\Pr[X \geq Y]$ ,

o coeficiente:

$$k = \frac{1}{300} \quad (4)$$

a área da base é:

$$A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \quad (5)$$

logo:

$$\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6} \quad (6)$$

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6} \quad (7)$$

## 2.4. Resolução da PDF marginal em Y

Assumindo que  $x \leq 0$

Caso  $0 < y \leq 10$

$$\int_0^{10} \frac{10}{300} \times dy = \frac{1}{3} \quad (8)$$

Caso  $10 < y \leq 20$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{300} \times (20 - y) dy = \frac{1}{6} \quad (9)$$

Assumindo que  $x \geq 0$

Caso  $0 < y \leq 10$

$$\int_0^{10} \frac{10}{300} \times dy = -\frac{1}{3} \quad (10)$$

Caso  $10 < y \leq 20$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{300} \times (20 - y) dy = -\frac{1}{6} \quad (11)$$

## 2.5. Resolução da CDF marginal de Y

Caso

$$y < 0 \quad (12)$$

$y = 0$  Caso  $0 < y < 10$

$$\int_0^y 2 \times \frac{10}{300} d = \frac{y}{15} \quad (13)$$

Caso  $0 < y \leq 10$

$$\int_0^{10-} 2 \times \frac{10}{300} dy + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300} dy = \frac{10}{15} \quad (14)$$

logo:  $10 < y \leq 20$

$$\int_0^{10-} 2 \times \frac{10}{300} dy + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300} dy + \int_{10}^y 2 \times \frac{20-y}{300} dy$$

$$dy = -\frac{y^2}{300} + \frac{2y}{15} - 1 + \frac{10}{15} \quad (15)$$

logo:

$$20 < y \quad (16)$$

$$\int_0^{10-} 2 \times \frac{10}{300} dy + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300} dy + \int_{10}^{20} 2 \times \frac{20-y}{300} dy$$

$$dy = 1 \quad (17)$$

## 2.6. Resolução da PDF marginal em $Y$ dado $X = 5$

para :

$$x = 5, 0 \leq y \leq 15 \quad (18)$$

$$f_x(5) = \int_0^{15} \frac{1}{300} dy = \frac{1}{20} = 0.05 \quad (19)$$

$$f_y(y | x = 5) = \frac{f_{x,y}(5, y)}{f_x(5)} \quad (20)$$

$$f_y(y | x = 5) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{15} \quad (21)$$

$$f_y(y | x = 5) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{15}, 0 \leq y \leq 15, \quad (22)$$

$$0, c.c.$$

## 2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$



$$E[Y] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot y \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} y \, dy \, dx = \frac{70}{9} \approx 7.77778$$

$$E[X] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot x \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} x \, dy \, dx = 0 \quad (23)$$

$$E[XY] = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot x \cdot y \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} x \cdot y \, dy \, dx = 0$$

$$\text{cov}[XY] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0 - 0 \cdot \frac{70}{9} = 0$$