



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 3

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

Sumário

1. Comando da Avaliação	3
1.1. Atenção	3
1.2. Instruções gerais:	3
1.3. Questão Sorteada	4
2. Resolução	5
2.1. Determinando a PDF conjunta X e Y	5
2.2. Determine o valor da constante k	6
2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$	6
2.4. Resolução da PDF marginal em Y	7
2.5. Resolução da CDF marginal de Y	7
2.6. Resolução da PDF condicional de Y dado $X = 5$	7
2.7. Resolução da covariância entre X e Y	7

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo

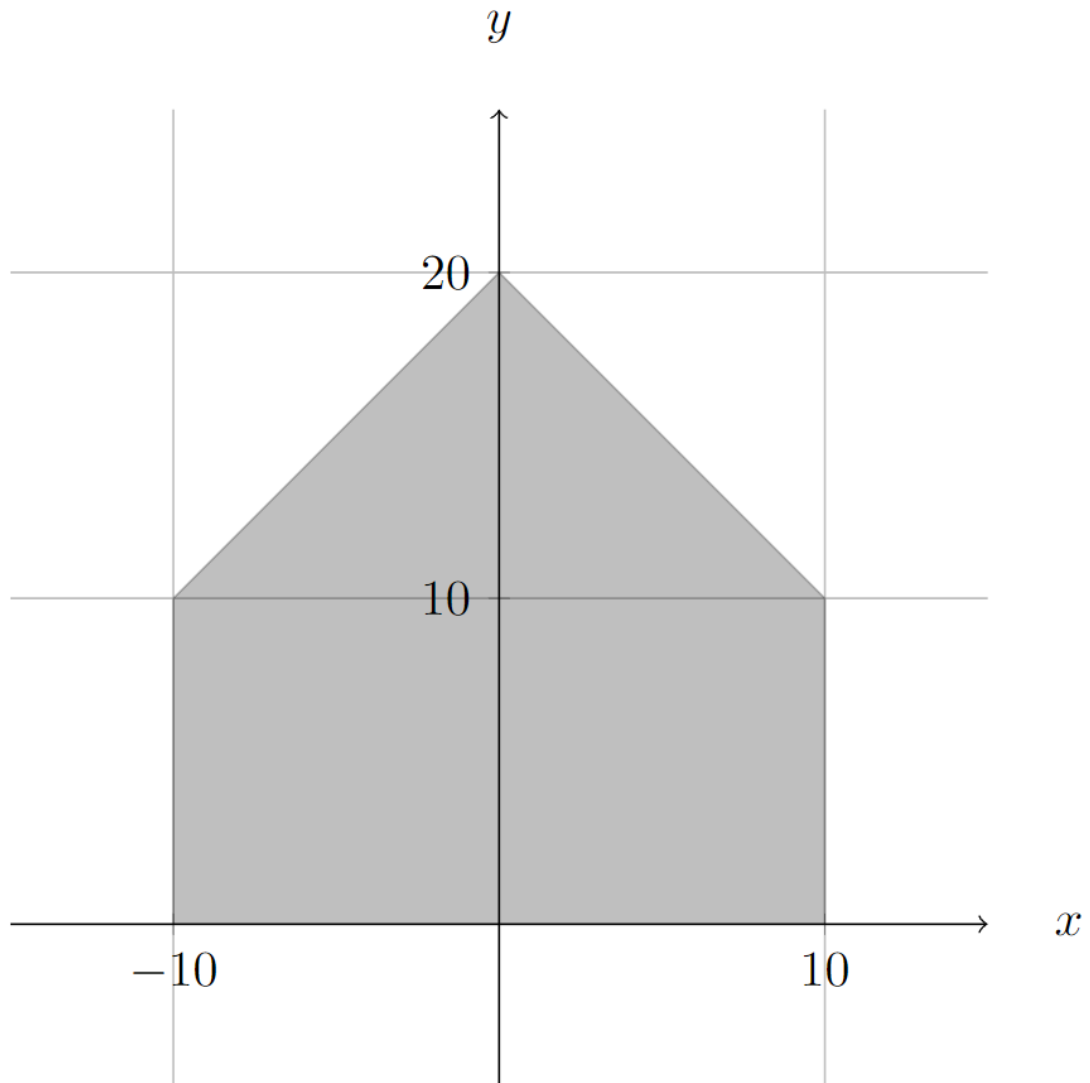


Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

- (a) Determine o valor da constante k .
- (b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.
- (c) Determine e esboce a PDF marginal em Y .
- (d) Determine e esboce a CDF marginal de Y .
- (e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado $X = 5$.
- (f) Determine a covariância entre X e Y .

2. Resolução

2.1. Determinando a PDF conjunta X e Y

Temos:

$$X \sim \text{Unif}([-10, 10])$$

$$Y|X = x \sim \text{Unif}([0, x])$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\ f_Y(y|X = x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\ f_{x,y}(x, y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)} \end{aligned} \tag{1}$$

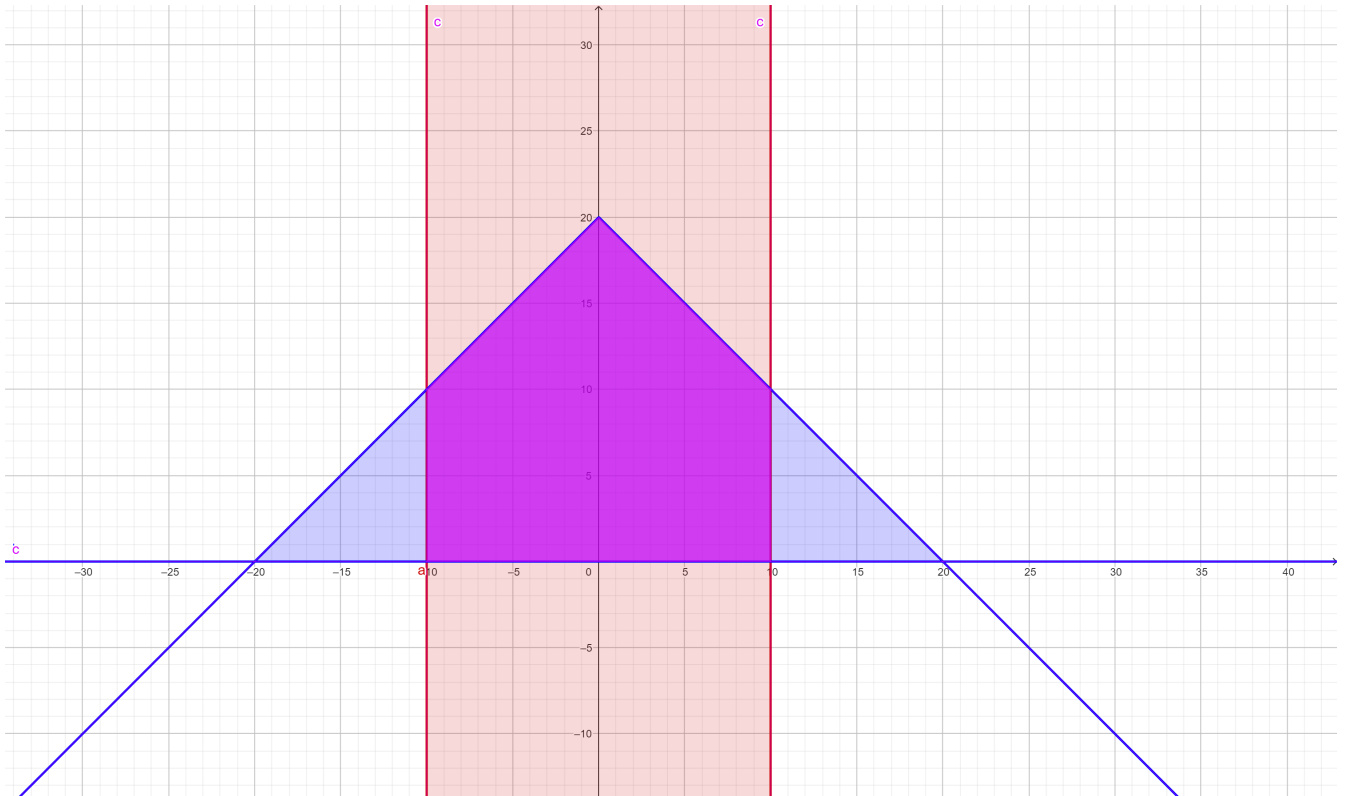


Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é $f_X(x)$, nela podemos ver o intervalo respeita $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$.

A função em azul é $f_Y(y)$, nela é possível ver que também respeita o calcula acima $f_Y(y|X = x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$.

Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta, fazendo a intersecção delas $f_{x,y}(x, y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$A_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} 1 \, dy \, dx = \int_{-10}^{10} (20 - |x|) \, dx = 300 \quad (2)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} A \cdot k &= 1 \\ 300 \cdot k &= 1 \\ k &= \frac{1}{300} \end{aligned} \quad (3)$$

2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a $\Pr[X \geq Y]$ podemos criar uma reta d que respeita a seguinte condição $d : X \geq Y$, teremos uma reta como na figura a seguir:

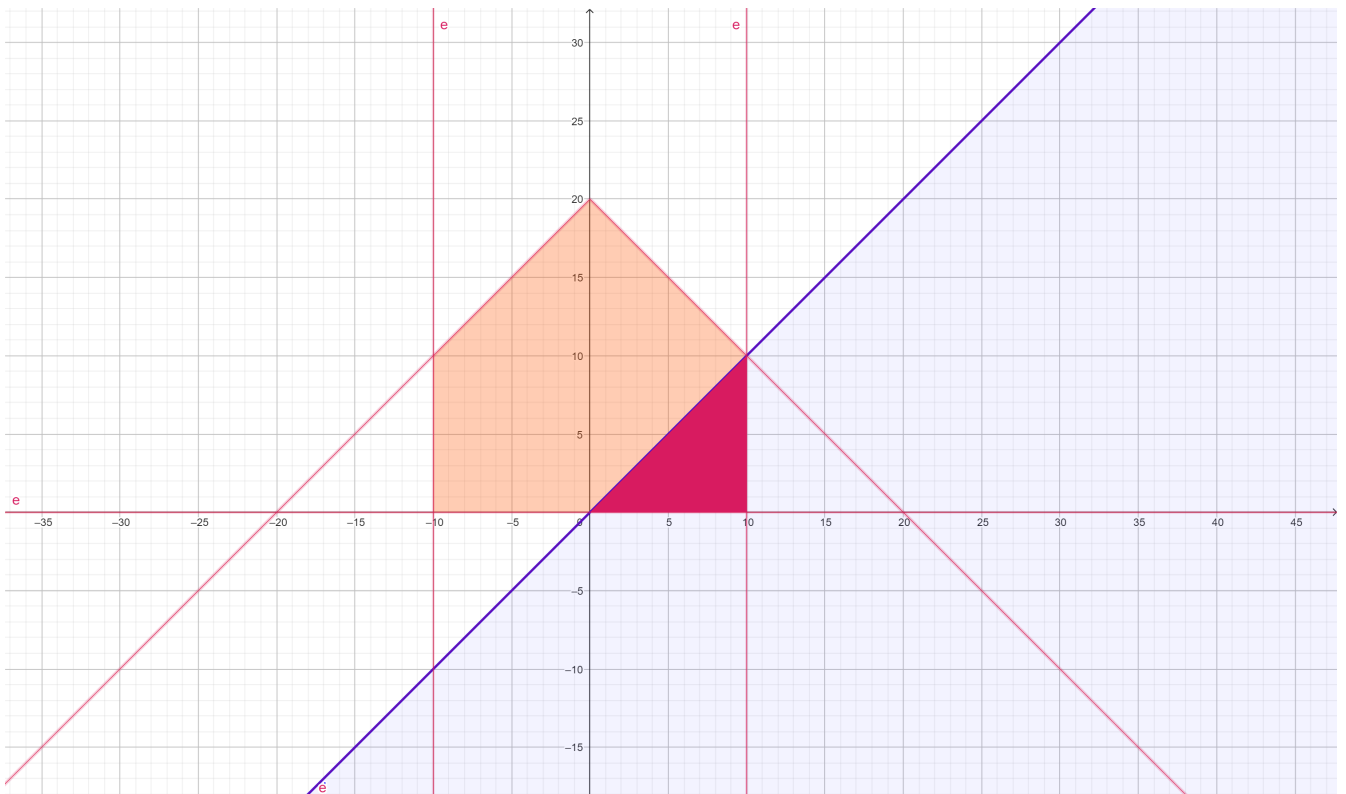


Figura 3: Ilustrando a intersecção de $f_Y(y|X = x)$ e d

A função em laranja é a $f_Y(y|X = x)$ e a área em azul é d , a área em magenta é o que a questão quer $\Pr[X \geq Y]$ Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de $\Pr[X \geq Y]$,

o coeficiente $k = \frac{1}{300}$

a área é $A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

logo $\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6}$

$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6}$

2.4. Resolução da PDF marginal em Y

$$f_{Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

$$f_{Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

2.5. Resolução da CDF marginal de Y

2.6. Resolução da PDF condicional de Y dado $X = 5$

2.7. Resolução da covariância entre X e Y