INSTITUTO
FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 3

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

Sumário

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apensa na área sombreada da figura abaixo

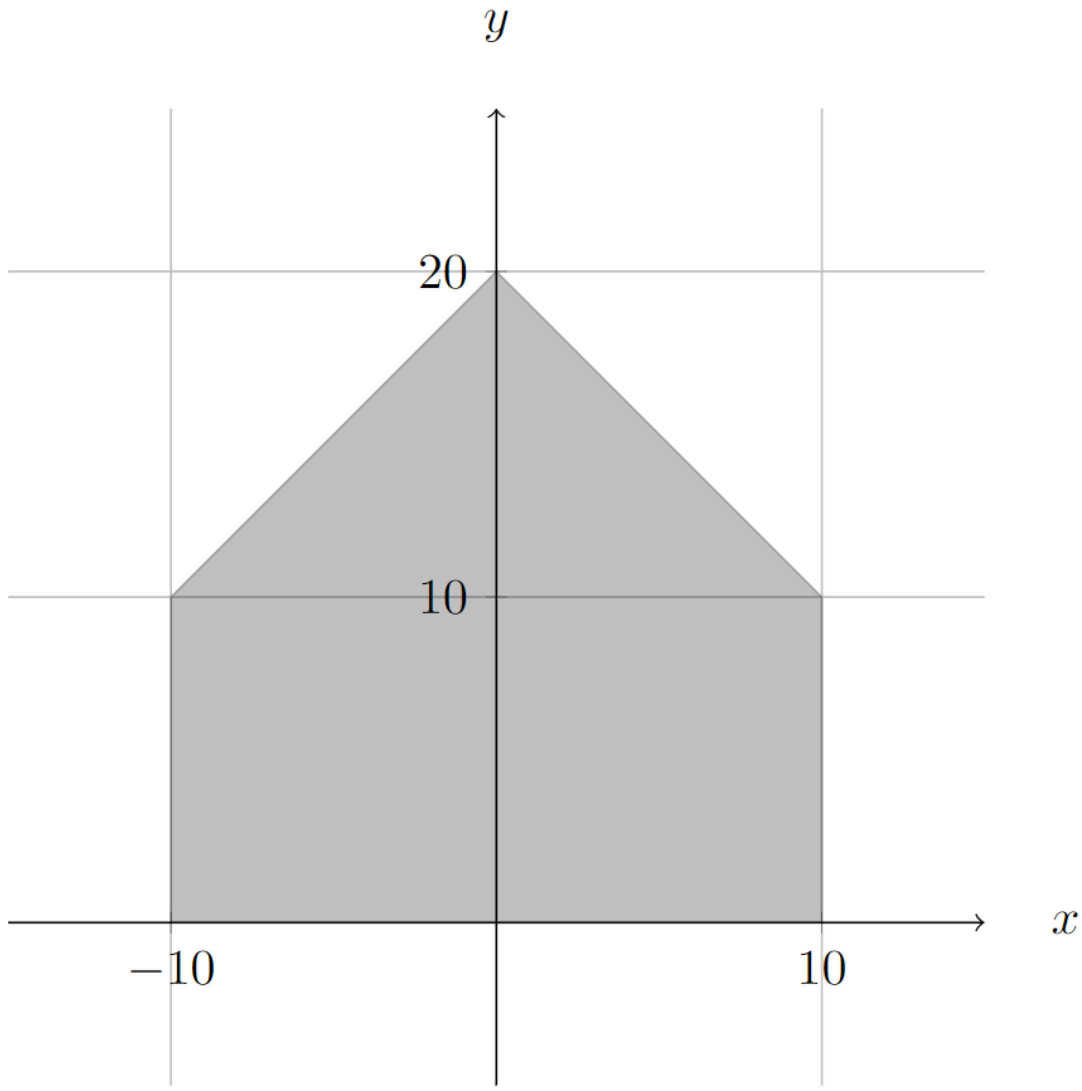

Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

(a) Determine o valor da constante k .
(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.
(c) Determine e esboce a PDF marginal em Y.
(d) Determine e esboce a CDF marginal de Y.
(e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado $X = 5$.
(f) Determine a covariância entre X e Y.

2. Resolução

2.1. Determinando a PDF conjunta X e Y

Temos:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\ f_Y(y|X=x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\ f_{x,y}(x,y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)} \end{aligned} \tag{1}$$

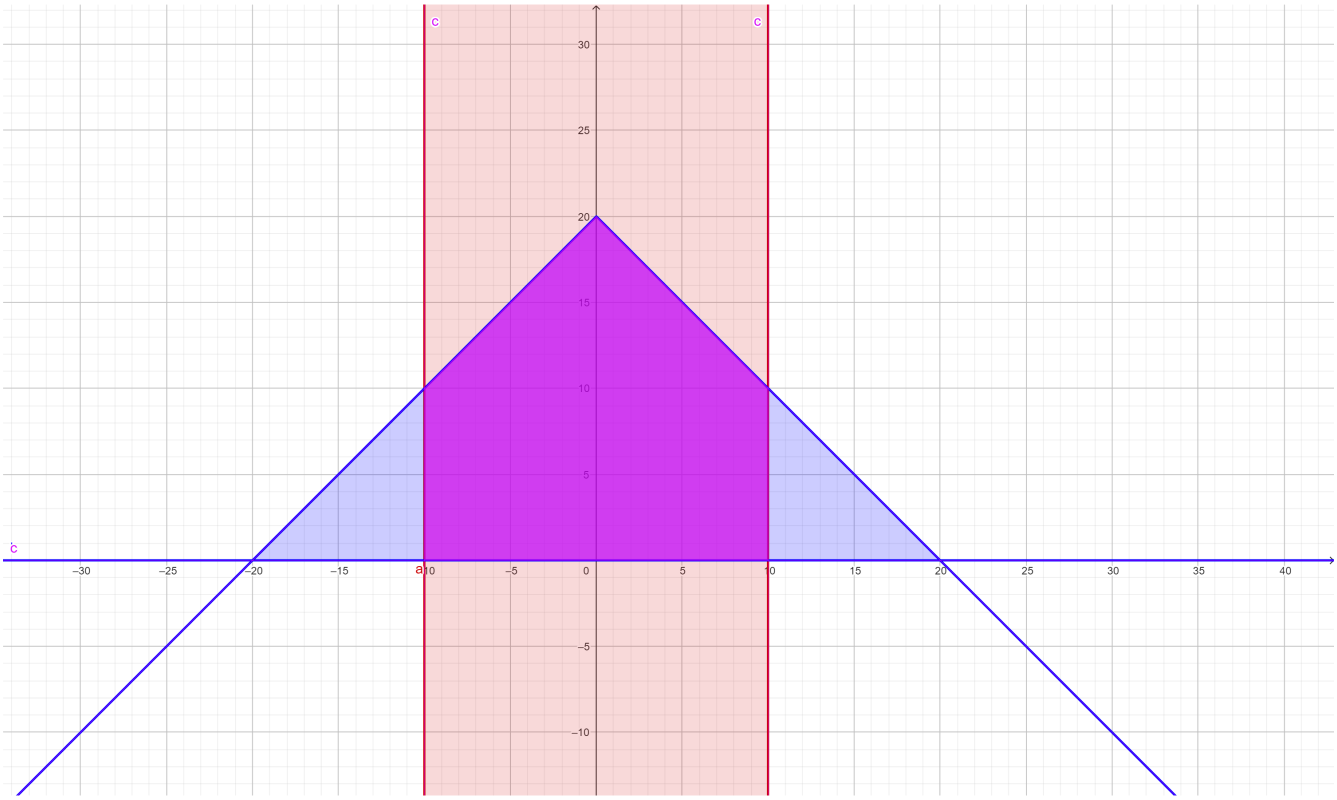

Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é $f_X(x)$, nela podemos ver o intervalo respeita $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$.
A função em azul é $f_Y(y)$, nela é possível ver que também respeita o calcula acima $f_Y(y|X=x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$.
Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta , fazendo a intersecção delas $f_{x,y}(x,y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_{0}^{20-|x|} k \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\
k \int_{-10}^{10} 20 - |x| \, \mathrm{d}x = 300k
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{total}} \cdot k = 1 \\
300 \cdot k = 1 \\
k = \frac{1}{300}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a $\Pr[X \geq Y]$ podemos criar uma reta d que respeita a seguinte condição $d : X \geq Y$, teremos uma reta como na figura a seguir:

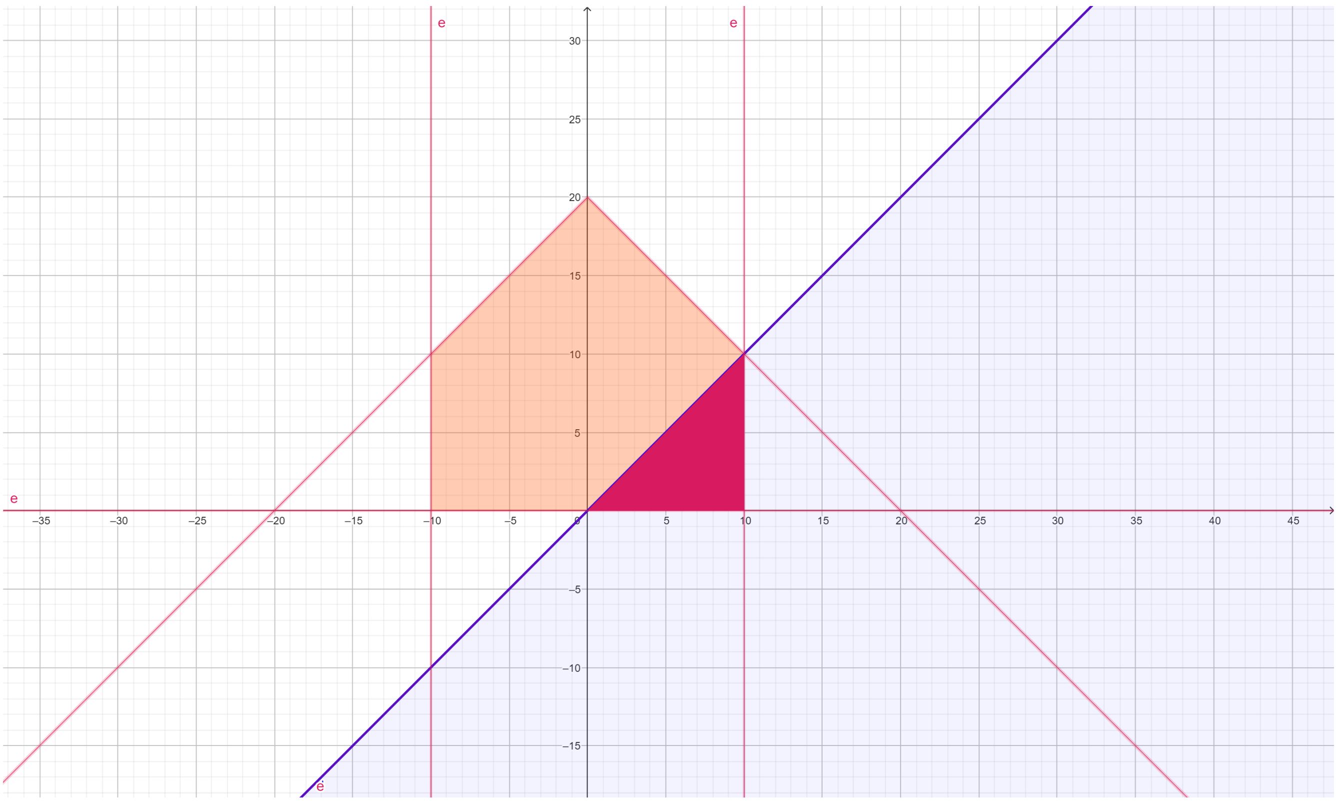

Figura 3: Ilustrando a intersecção de $f_Y(y|X = x)$ e d

A função em laranja é a $f_Y(y|X = x)$ e a area em azul é d , a area em magenta é o que a questão quer $\Pr[X \geq Y]$ Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de $\Pr[X \geq Y]$, o coeficiente:

$$k = \frac{1}{300} \tag{4}$$

a área da base é:

$$A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \tag{5}$$

logo:

$$\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6} \tag{6}$$

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6} \tag{7}$$

2.4. Resolução da PDF marginal em Y

Assumindo que x <= 0

Caso $0 < y \leq 10$

$$\int_0^{10} \frac{10}{300} \times \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \tag{8}$$

Caso $10 < y \leq 20$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{300} \times (20 - y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6} \tag{9}$$

Assumindo que x >=0

Caso $0 < y \leq 10$

$$\int_0^{10} \frac{10}{300} \times \mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \tag{10}$$

Caso $10 < y \leq 20$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{300} \times (20 - y)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{6} \tag{11}$$

2.5. Resolução da CDF marginal de Y

Caso

$$y < 0 \tag{12}$$

y = 0 Caso $0 < y < 10$

$$\int_0^{y} 2 \times \frac{10}{300}\,\mathrm{d} = \frac{y}{15} \tag{13}$$

Caso $0 < y \leq 10$

$$\int_{0}^{10-} 2 \times \frac{10}{300}\,\mathrm{d} + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300}\,\mathrm{d}y = \frac{10}{15} \tag{14}$$

logo: $10 < y \leq 20$

$$\begin{gathered}\int_{0}^{10-} 2 \times \frac{10}{300}\,\mathrm{d} + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300}\,\mathrm{d}y + \int_{10}^{y} 2 \times \frac{20-y}{300} \\ \mathrm{d} + y = -\frac{y^2}{300} + \frac{2y}{15} - 1 + \frac{10}{15}\end{gathered} \tag{15}$$

logo:

$$20 < y \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\int_{0}^{10-} 2 \times \frac{10}{300}\,\mathrm{d} + \int_{10-}^{10+} 2 \times \frac{\delta(y-10)}{300}\,\mathrm{d}y + \int_{10}^{20} 2 \times \frac{20-y}{300} \\ \mathrm{d} + y = 1\end{gathered} \tag{17}$$

2.6. Resolução da PDF marginal em Y dado X = 5

para :

$$x = 5, 0 \leq y \leq 15 \tag{18}$$

$$f_x(5) = \int_{0}^{15} \frac{1}{300}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{20} = 0.05 \tag{19}$$

$$f_y(y \mid x = 5) = \frac{f_{x,y}(5, y)}{f_x(5)} \tag{20}$$

$$f_y(y \mid x = 5) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{15} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}f_y(y \mid x = 5) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{15}, 0 \leq y \leq 15, \\ 0, c.c.\end{gathered} \tag{22}$$

2.7. Resolução da covariância entre X e Y

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} k\cdot y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{1}{300}\cdot\int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{70}{9} \approx 7.77778 \\
E[X] &= \int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} k\cdot x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{1}{300}\cdot\int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0 \\
E[\mathrm{XY}] &= \int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} k\cdot x\cdot y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{1}{300}\cdot\int_{-10}^{10}\int_{0}^{20-|x|} x\cdot y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0 \\
\mathrm{cov}[\mathrm{XY}] &= E[\mathrm{XY}] - E[X]\cdot E[Y] = 0 - 0\cdot\frac{70}{9} = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$