INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 3

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

Sumário

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.3. Questão sorteada

7. Um vetor gaussiano $\vec{X} = (X_1 \ \ X_2 \ \ X_3)^T$ tem média nula e matriz covariância

$$C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Determine:

(a) $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4]$.

(b) $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4 \ \text{ e } X_2 < 0]$.

(c) $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4 \ \text{ e } X_2 < 0 \mid X_3 = 3]$.

(d) $\Pr[X_1 + X_2 + X_3 > 2]$.

1.4. Resolução

Dados para as questões: Sabemos que no caso geral temos:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2}$$

Também sabemos que a média é:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E covariância:

$$C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.4.1. Determinando $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4]$.

Aplicando a formula:

$$\Pr[3 \leq X \leq 4] = \Phi\left(\frac{4-0}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{3-0}{\sqrt{5}}\right) = 0.053037 \tag{4}$$

1.4.2. Determinando (b) $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4 \;\text{ e } X_2 < 0]$.

Sabemos a partir da covariância que X_1 e X_2 são independentes, logoaplicando a formula:

$$\Pr[3 \leq X \leq 4 \land X_2 < 0] = \Pr[3 \leq X \leq 4] = \Phi\left(\frac{4-0}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{3-0}{\sqrt{5}}\right) = 0.053037 \tag{5}$$

1.4.3. Determinando $\Pr[3 \leq X_1 \leq 4 \;\; \text{e} \; X_2 < 0 \mid X_3 = 3]$.
Aplicando a formula:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \vec{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \Pr[3 \leq X \leq 4 \;\; \text{e} \; X_2 < 0 \mid X_3 = 3] = \\ \Pr[3 \leq X \leq 4 \mid X_3 = 3] \to f_X(X_1 | X_3 = 3) = \frac{f_{X_1, X_3}(X_1, 3)}{f_Y(3)} \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} f_X(X_1 | X_3 = 3) = \\ \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 \times \det C}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(X_1 - 0 \;\; 3 - 0)\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}\right) \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} f_X(X_1 | X_3 = 3) = \\ \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 \times 11}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{3X_1^2 - 12X_1 + 45}{11}\right) \end{gathered} \tag{9}$$

$$f_Y(3) = \left(\frac{1}{\sqrt{\tau \times 3}}\right) \exp\left(-\frac{3}{2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{f_{X_1, X_3}(X_1, 3)}{f_Y(3)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 \times 11}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{3X_1^2 - 12X_1 + 45}{11}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\tau \times 3}}\right) \exp\left(-\frac{3}{2}\right)} \tag{11}$$

$$\frac{f_{X_1, X_3}(X_1, 3)}{f_Y(3)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau * 11}} \exp\left(-\frac{3}{2 * 11}(x - 2)^2\right) \tag{12}$$

$$(X_1 \mid X_3 = 3) \sim \vec{N}\left(2, \frac{11}{3}\right) \tag{13}$$

$$\Pr[3 \leq X \leq 4 \mid X_3 = 3] = \Phi\left(\frac{4 - 2}{\sqrt{\frac{11}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - 2}{\sqrt{\frac{11}{3}}}\right) = 0.1526 \tag{14}$$

1.4.4. Determinando(d) $\Pr[X_1 + X_2 + X_3 > 2]$.

$W = X_1 + X_2 + X_3, (w) = A \times \vec{X} + \vec{b}$

$$(w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu}_{\overrightarrow{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_{\overrightarrow{W}} = AC_{\vec{X}}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 16$$

$$\Pr[W > 2] = \Phi\left(\frac{\infty - 0}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{4 - 0}{\sqrt{16}}\right) = 0.3085 \tag{15}$$