



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 3

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

Sumário

1. Comando da Avaliação	3
1.1. Atenção	3
1.2. Instruções gerais:	3
2. Questão sorteada	4
3. Resolução	4
3.1. (a) Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, à sua escolha.	4
3.2. (b) Determine e esboce a função média de $X(t)$	6
3.3. (c) Determine a função autocovariância de $X(t)$	6

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

2. Questão sorteada

8. Considere o processo estocástico

$$X(t) = A \operatorname{rect}(t - 2) + B \operatorname{rect}(t - \frac{3}{2})$$

onde A e B são variáveis aleatórias independentes, ambas uniformemente distribuídas sobre o intervalo real $[0,4]$.

(a) Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, à sua escolha.

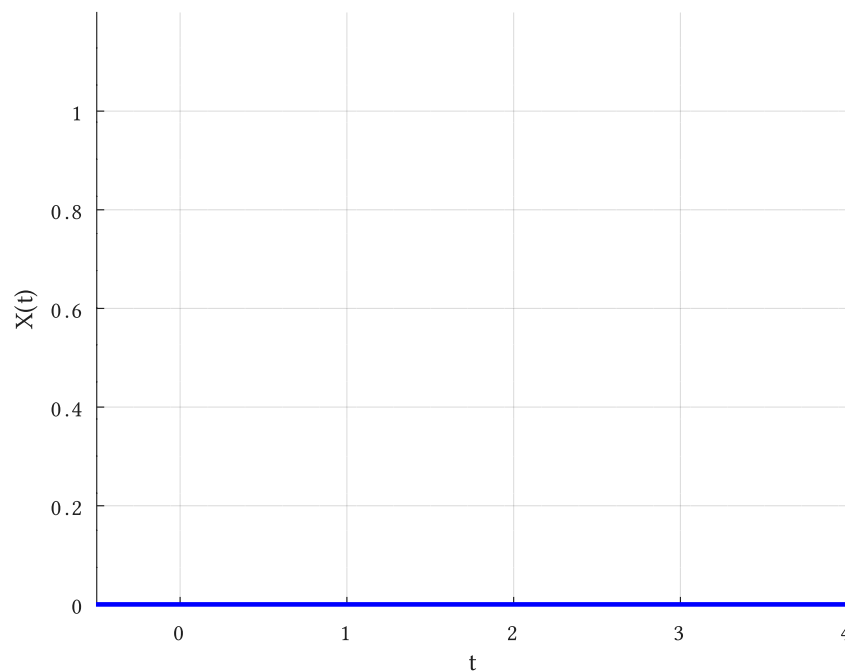
(b) Determine e esboce a função média de $X(t)$.

(c) Determine a função autocovariância de $X(t)$.

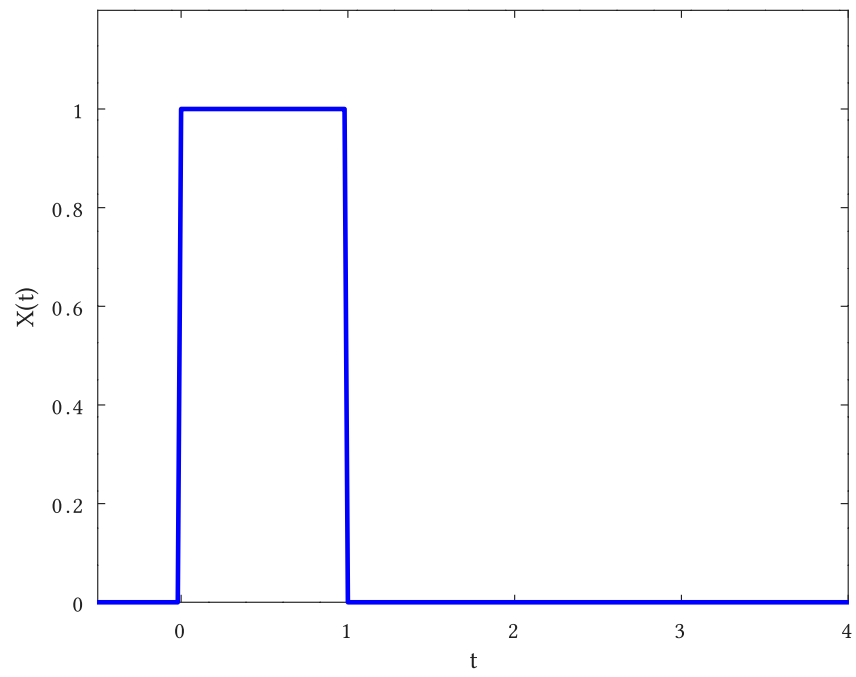
3. Resolução

3.1. (a) Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, à sua escolha.

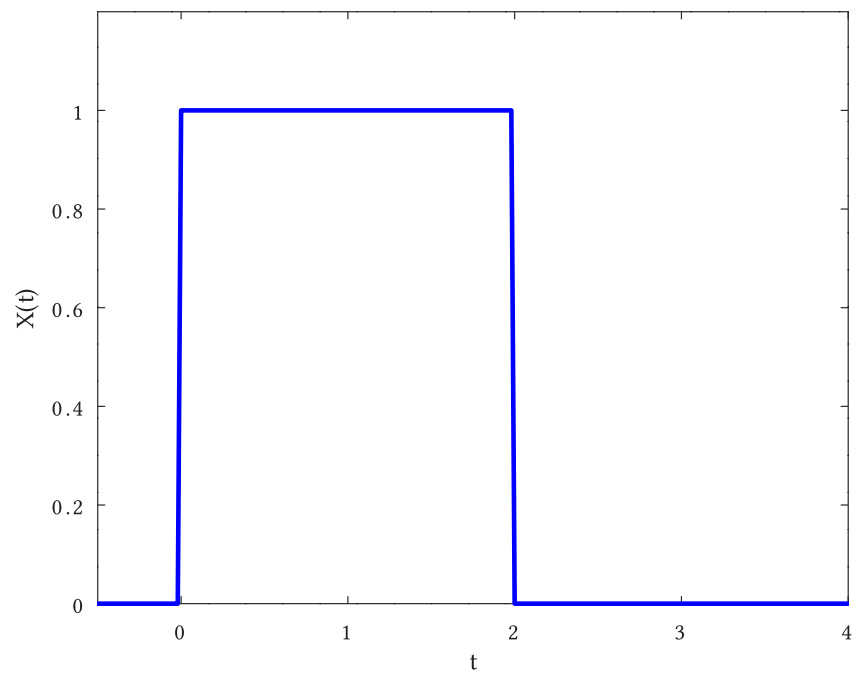
Função-Amostra $A = 0, B = 0$



Função-Amostra $A = 1, B = 0$



Função-Amostra $A = 1, B = 1$



3.2. (b) Determine e esboce a função média de $X(t)$.

$$\mu_x(t) = E[x(t)]$$

$$\mu_x(t) = E\left[A \operatorname{rect}(t-2) + B \operatorname{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$$

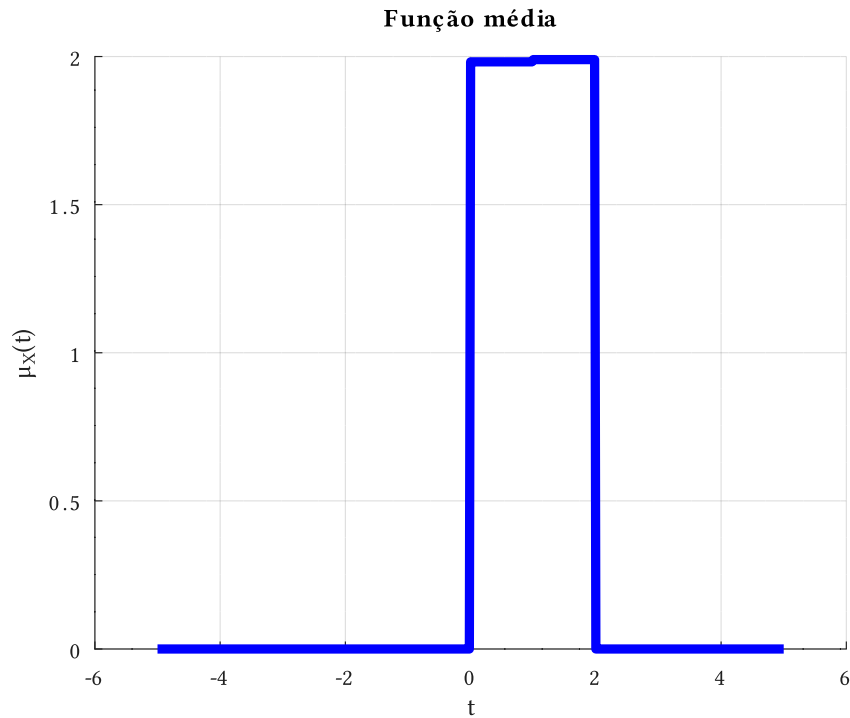
$$\mu_x(t) = E[A \operatorname{rect}(t-2)] + E\left[B \operatorname{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$$

$$\mu_x(t) = \operatorname{rect}(t-2) \times E[A] + \operatorname{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) \times E[B] \quad (1)$$

$$\int_0^4 a \times \frac{1}{4-0} da = \frac{1}{4} \int_0^4 a \times da = \frac{1}{4} \frac{a^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{4^2 - 0^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$E[A] = E[B]$$

$$\mu_x(t) = 2[0 \leq t \leq 2]$$



3.3. (c) Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$C_x(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

$$C_x(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)] - E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

$$E[X(t_1), X(t_2)] = E\left[\left(A \text{rect}(t_1 - 2) + B \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right)\right) \times \left(A \text{rect}(t_2 - 2) + B \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right)\right]$$

$$E[X(t_1), X(t_2)] = E[A^2] \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}(t_2 - 2) + AB \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}(t_2 - 2)$$

$$+ AB \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) + B^2 \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)]$$

$$E[X(t_1), X(t_2)] = E[A^2] \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}(t_2 - 2) + E[AB] \left(\text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}(t_2 - 2) \right.$$

$$\left. + \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) \right) + E[B^2] \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$E[A^2] = \int_0^4 a^2 \times \frac{1}{4-0} da = \frac{1}{4} \int_0^4 a^2 da = \frac{1}{4} \frac{a^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

$$E[B^2] = \int_0^4 b^2 \times \frac{1}{4-0} db = \frac{1}{4} \int_0^4 b^2 db = \frac{1}{4} \frac{b^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

$$E[AB] = \int_0^4 \int_0^4 ba \times \left(\frac{1}{4-0}\right)^2 da db = \frac{1}{16} \int_0^4 \int_0^4 ba da db = \frac{1}{16} \int_0^4 b \int_0^4 a da db = \frac{1}{16} \int_0^4 b \left(\frac{a^2}{2} \Big|_0^4\right) db$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^4 b \left(\frac{(4-0)^2}{2}\right) db = \frac{1}{2} \int_0^4 b db = \frac{1}{2} \frac{b^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{16}{4} = 4 \rightarrow E[AB] = 4$$

$$E[X(t_1), X(t_2)] = \frac{16}{3} \left(\text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}(t_2 - 2) + \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) \right)$$

$$+ 4 \left(\text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}(t_2 - 2) + \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) \right)$$

$$E[X(t_1)] = 2 \text{rect}\left(\frac{t_1 - 2}{2}\right)$$

$$E[X(t_2)] = 2 \text{rect}\left(\frac{t_2 - 2}{2}\right)$$

$$C_x(t_1, t_2) = \frac{16}{3} \left(\text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}(t_2 - 2) + \text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) \right)$$

$$+ 4 \left(\text{rect}\left(t_1 - \frac{3}{2}\right) \text{rect}(t_2 - 2) + \text{rect}(t_1 - 2) \text{rect}\left(t_2 - \frac{3}{2}\right) \right) - 4 \left(\text{rect}\left(\frac{t_1 - 2}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{t_2 - 2}{2}\right) \right)$$