INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Avaliação 3

Processos Estocásticos (PRE029006)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

20 de Setembro de 2023

Sumário

1. Comando da Avaliação

1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.3. Questão Sorteada

10. Sejam $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{3}\right)$ variáveis aleatórias sorteadas independentemente. (a) Sejam

$$Y_1 = X_1 X_2, \tag{1}$$

$$Y_2 = X_2 X_3, \tag{2}$$

$$Y_3 = X_3 X_1. \tag{3}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Y} = [Y_1 Y_2 Y_3]^T$. (b) Sejam

$$Z_1 = Y_1 + Y_2, \tag{4}$$

$$Z_2 = Y_2 + Y_3, \tag{5}$$

$$Z_3 = Y_3 + Y_1. \tag{6}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Z} = [Z_1 Z_2 Z_3]^T$. Utilize a formulação matricial.

2. Resolução

2.1. Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Y} = [Y_1 Y_2 Y_3]^T$.

Sabemos que:

$$Y_1 = X_1 X_2, \tag{7}$$

$$Y_2 = X_2 X_3, \tag{8}$$

$$Y_3 = X_3 X_1. \tag{9}$$

e também que $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{3}\right)$

2.1.1. Determinando o vetor média do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Y} = [Y_1 Y_2 Y_3]^T$.

Determinando a PMF:

X_1	X_2	X_3	Pr_0	Pr_1	$Y_1 = X_1 X_2,$	$Y_2 = X_2 3$	$3 = X_3 X_{1.3}$
0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
0	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1
1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0
1	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1

$\vec{Y}$	$P_{\vec{Y}}\left(\vec{Y}\right)$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{20}{27}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{27}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{27}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{27}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{27}$

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \\ E[Y_3] \end{pmatrix}$$

$$E[Y_1] = (0)\frac{20}{27} + (1)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{10}$$

$$E[Y_2] = (0)\frac{20}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{11}$$

$$E[Y_3] = (0)\frac{20}{27} + (0)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{12}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \tag{13}$$

2.1.2. Determinando a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Y} = [Y_1 Y_2 Y_3]^T$**.**

$$C_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(Y_1) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{cov}(Y_3, Y_1) \\ \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{var}(Y_2) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) \\ \mathrm{cov}(Y_3, Y_1) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{var}(Y_3) \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \\ E[Y_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathrm{var}(Y_i) = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 \tag{16}$$

logo :

$$E[Y_1] = (0)\frac{20}{27} + (1)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{17}$$

$$E[Y_2] = (0)\frac{20}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{18}$$

$$E[Y_3] = (0)\frac{20}{27} + (0)\frac{2}{27} + (0)\frac{2}{27} + (1)\frac{2}{27} + (1)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{19}$$

$$E[Y_1^2] = (0)^2\frac{20}{27} + (1)^2\frac{2}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (1)^2\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{20}$$

$$E[Y_2^2] = (0)^2\frac{20}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (1)^2\frac{2}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (1^2)\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{21}$$

$$E[Y_3^2] = (0)^2\frac{20}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (0)^2\frac{2}{27} + (1)^2\frac{2}{27} + (1)^2\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \tag{22}$$

$$\mathrm{var}(Y_1) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{8}{81} \tag{23}$$

$$\mathrm{var}(Y_2) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{8}{81} \tag{24}$$

$$\mathrm{var}(Y_3) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{8}{81} \tag{25}$$

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = E[Y_1, Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] \tag{26}$$

$$\mathrm{cov}(Y_2, Y_3) = E[Y_2, Y_3] - E[Y_2]E[Y_3] \tag{27}$$

$$\mathrm{cov}(Y_3, Y_1) = E[Y_3, Y_1] - E[Y_3]E[Y_1] \tag{28}$$

$$E[Y_1, Y_2] = (0)(0)\frac{20}{27} + (1)(0)\frac{2}{27} + (0)(1)\frac{2}{27} + (0)(0)\frac{2}{27} + (1)(1)\frac{1}{27} = \frac{1}{27} \tag{29}$$

$$E[Y_2, Y_3] = (0)(0)\frac{20}{27} + (0)(0)\frac{2}{27} + (1)(0)\frac{2}{27} + (0)(1)\frac{2}{27} + (1)(1)\frac{1}{27} = \frac{1}{27} \tag{30}$$

$$E[Y_3, Y_1] = (0)(0)\frac{20}{27} + (0)(1)\frac{2}{27} + (0)(1)\frac{2}{27} + (1)(0)\frac{2}{27} + (1)(1)\frac{1}{27} = \frac{1}{27} \tag{31}$$

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = E[Y_1, Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{81} \tag{32}$$

$$\mathrm{cov}(Y_2, Y_3) = E[Y_2, Y_3] - E[Y_2]E[Y_3] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{81} \tag{33}$$

$$\mathrm{cov}(Y_3, Y_1) = E[Y_3, Y_1] - E[Y_3]E[Y_1] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{81} \tag{34}$$

$$C_{\tilde{Y}} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(Y_1) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{cov}(Y_3, Y_1) \\ \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{var}(Y_2) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) \\ \mathrm{cov}(Y_3, Y_1) & \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) & \mathrm{var}(Y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{81} & \frac{2}{81} & \frac{2}{81} \\ \frac{2}{81} & \frac{8}{81} & \frac{2}{81} \\ \frac{2}{81} & \frac{2}{81} & \frac{8}{81} \end{pmatrix} \tag{35}$$

2.2. Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Z} = [Z_1 Z_2 Z_3]^T$. Utilize a formulação matricial.

Sejam

$$Z_1 = Y_1 + Y_2, \tag{36}$$

$$Z_2 = Y_2 + Y_3, \tag{37}$$

$$Z_3 = Y_3 + Y_1. \tag{38}$$

2.2.1. Determinando o vetor média do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Z} = [Z_1 Z_2 Z_3]^T$.

$$\vec{Z} = A \cdot \vec{Y} + \vec{b} \tag{39}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{Z}} = A \cdot \vec{\mu}_{\vec{Y}} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \tag{41}$$

2.2.2. Determinando a matriz covariância do vetor aleatório $\rightarrow \vec{Z} = [Z_1 Z_2 Z_3]^T$.

$$C_{\vec{Z}} = A \cdot C_{\vec{Y}} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{81} & \frac{14}{81} & \frac{14}{81} \\ \frac{14}{81} & \frac{20}{81} & \frac{14}{81} \\ \frac{14}{81} & \frac{14}{81} & \frac{20}{81} \end{pmatrix} \tag{42}$$