



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Avaliação 3**

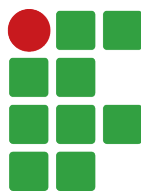
Processos Estocásticos (PRE029006)

**Rhenzo Hideki Silva Kajikawa**

20 de Setembro de 2023

# Sumário

|   |          |
|---|----------|
| <b>1. Comando da Avaliação .....</b>                        | <b>5</b> |
| 1.1. Atenção .....  | 5        |
| 1.2. Instruções gerais: .....                               | 5        |
| 1.3. Questão Sorteada .....                                 | 6        |
| <b>2. Resolução .....</b>                                   | <b>7</b> |
| 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$ .....            | 7        |
| 2.2. Determine o valor da constante $k$ .....               | 8        |
| 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$ .....                     | 8        |
| 2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$ .....                 | 9        |
| 2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$ .....                 | 9        |
| 2.6. Resolução da PDF condicional de $Y$ dado $X = 5$ ..... | 9        |
| 2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$ .....         | 9        |



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Typst IFSC-SJ**

Um template para o Typst voltado para

**Gabriel Luiz Espindola Pedro**

13 de Setembro de 2023

# Sumário

|   |          |
|---|----------|
| <b>1. Comando da Avaliação .....</b>                        | <b>5</b> |
| 1.1. Atenção .....  | 5        |
| 1.2. Instruções gerais: .....                               | 5        |
| 1.3. Questão Sorteada .....                                 | 6        |
| <b>2. Resolução .....</b>                                   | <b>7</b> |
| 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$ .....            | 7        |
| 2.2. Determine o valor da constante $k$ .....               | 8        |
| 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$ .....                     | 8        |
| 2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$ .....                 | 9        |
| 2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$ .....                 | 9        |
| 2.6. Resolução da PDF condicional de $Y$ dado $X = 5$ ..... | 9        |
| 2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$ .....         | 9        |

# 1. Comando da Avaliação

## 1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

## 1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

### 1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com PDF conjunta constante (igual a  $k$ ) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo

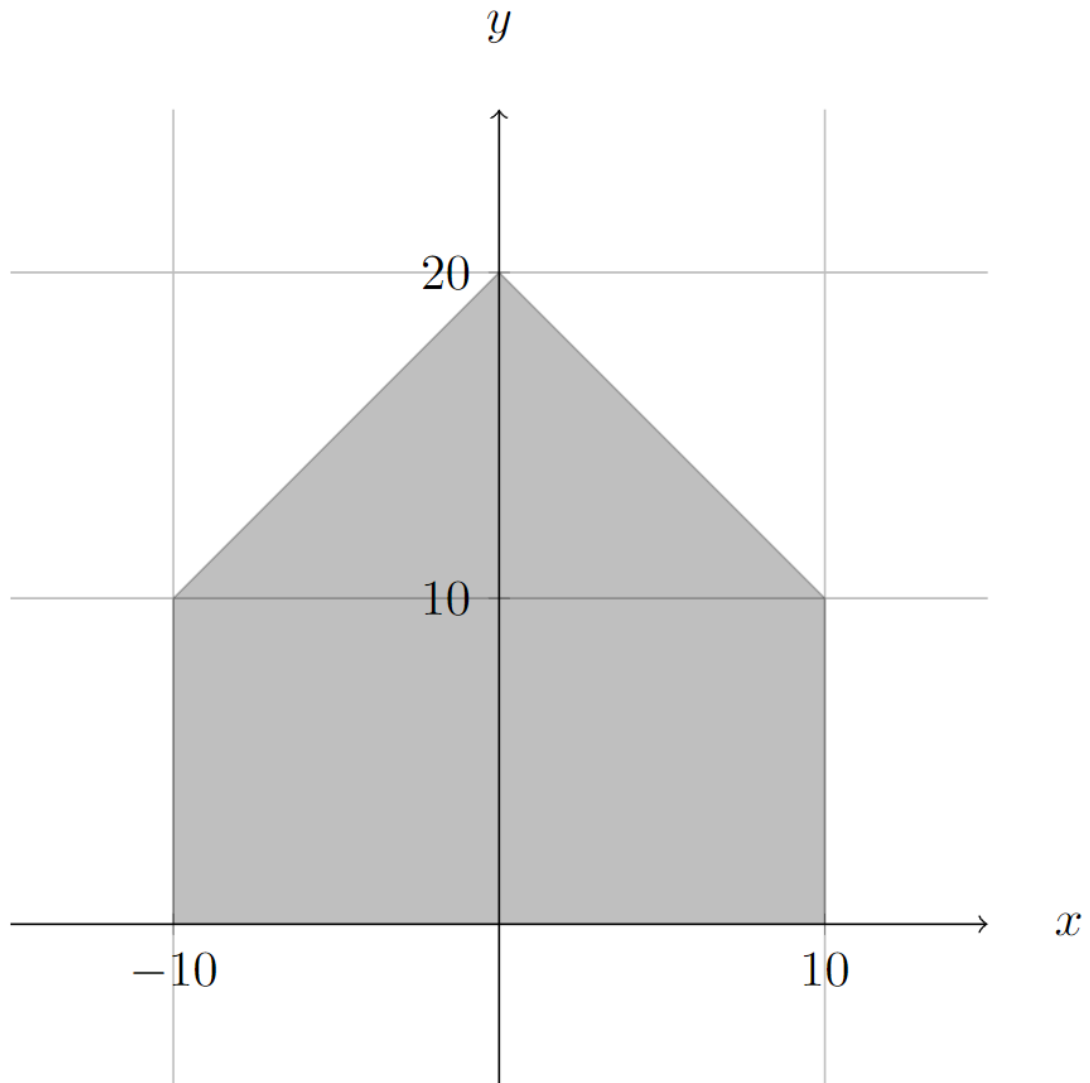


Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine  $\Pr[X \geq Y]$ .
- (c) Determine e esboce a PDF marginal em  $Y$ .
- (d) Determine e esboce a CDF marginal de  $Y$ .
- (e) Determine e esboce a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = 5$ .
- (f) Determine a covariância entre  $X$  e  $Y$ .

## 2. Resolução

### 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$

Temos:

$$X \sim \text{Unif}([-10, 10])$$

$$Y|X = x \sim \text{Unif}([0, x])$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\ f_Y(y|X = x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\ f_{x,y}(x, y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)} \end{aligned} \tag{1}$$

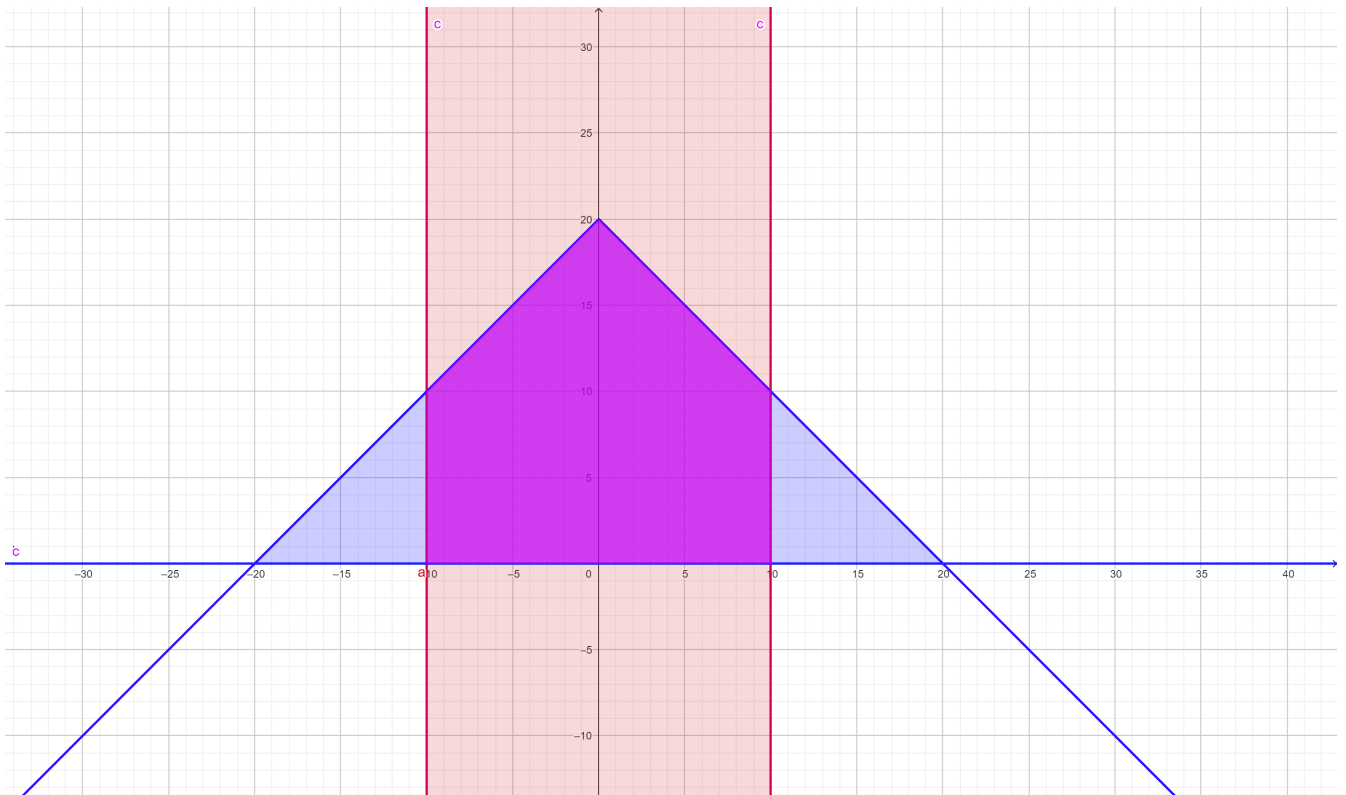


Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é  $f_X(x)$ , nela podemos ver o intervalo respeita  $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$ .

A função em azul é  $f_Y(y)$ , nela é possível ver que também respeita o calcula acima  $f_Y(y|X = x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$ .

Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta, fazendo a intersecção delas  $f_{x,y}(x, y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

## 2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$A_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} 1 \, dy \, dx = \int_{-10}^{10} (20 - |x|) \, dx = 300 \quad (2)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} A \cdot k &= 1 \\ 300 \cdot k &= 1 \\ k &= \frac{1}{300} \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a  $\Pr[X \geq Y]$  podemos criar uma reta  $d$  que respeita a seguinte condição  $d : X \geq Y$ , teremos uma reta como na figura a seguir:

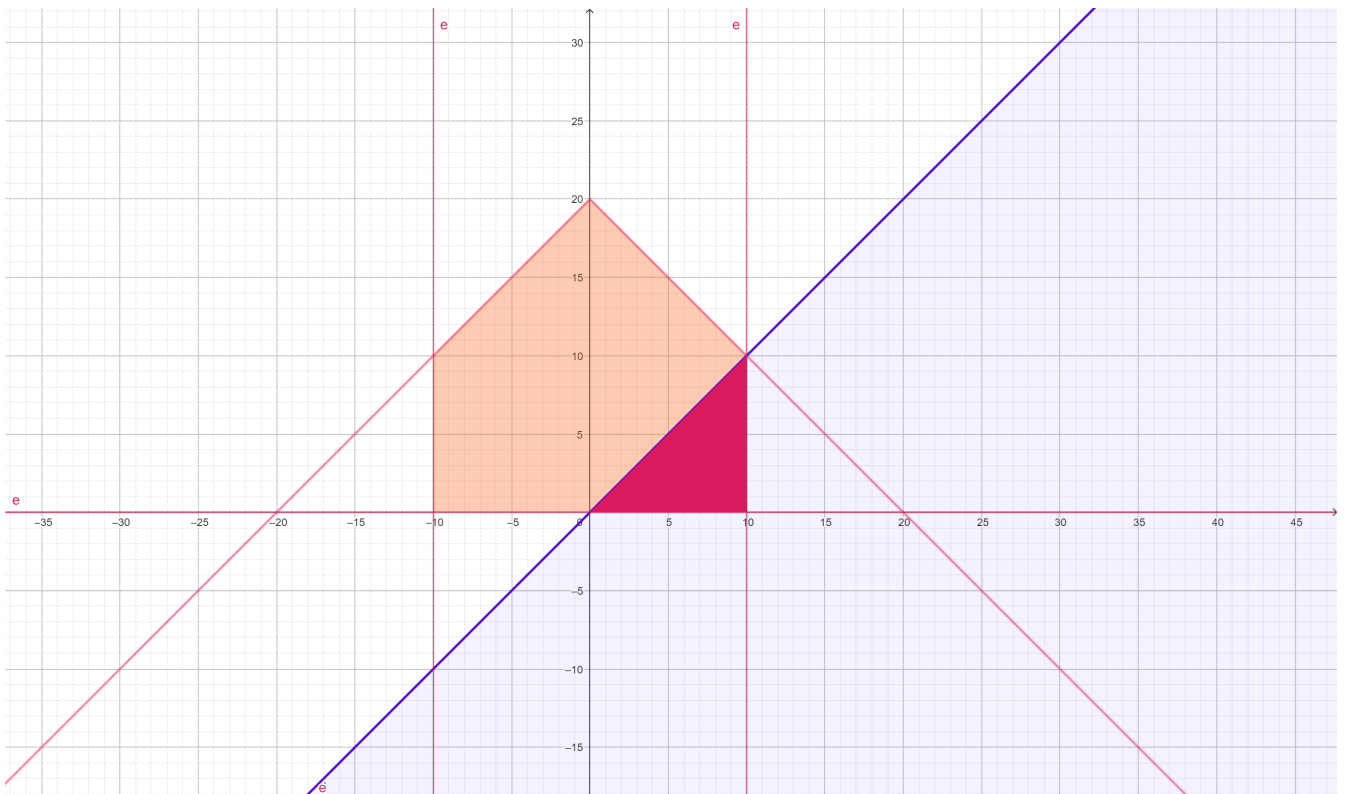


Figura 3: Ilustrando a intersecção de  $f_Y(y|X = x)$  e  $d$

A função em laranja é a  $f_Y(y|X = x)$  e a área em azul é  $d$ , a área em magenta é o que a questão quer  $\Pr[X \geq Y]$  Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de  $\Pr[X \geq Y]$ ,



o coeficiente  $k = \frac{1}{300}$

a área é  $A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

logo  $\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6}$

$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6}$

#### **2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$**

$$f_{Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

$$f_{Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

#### **2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$**

#### **2.6. Resolução da PDF condicional de $Y$ dado $X = 5$**

#### **2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$**