



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Avaliação 3**

Processos Estocásticos (PRE029006)

**Rhenzo Hideki Silva Kajikawa**

20 de Setembro de 2023

# Sumário

<b>1. Comando da Avaliação .....</b>	<b>3</b>
1.1. Atenção .....	3
1.2. Instruções gerais: .....	3
1.3. Questão Sorteada .....	4
<b>2. Resolução .....</b>	<b>5</b>
2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$ .....	5
2.2. Determine o valor da constante $k$ .....	6
2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$ .....	6
2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$ .....	7
2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$ .....	7
2.6. Resolução da PDF condicional de $Y$ dado $X = 5$ .....	7
2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$ .....	7

# 1. Comando da Avaliação

## 1.1. Atenção

- Resolva apenas a questão sorteada
- Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB

## 1.2. Instruções gerais:

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos seus passos devem ser justificados.
- É permitido o envio de manuscritos digitalizado (ex: foto) ou de documento digital.
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato **.zip** pelo **SIGAA**, contendo um arquivo **.pdf** e um ou mais arquivos **.m**.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicado no **SIGAA**. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

### 1.3. Questão Sorteada

1. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com PDF conjunta constante (igual a  $k$ ) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo

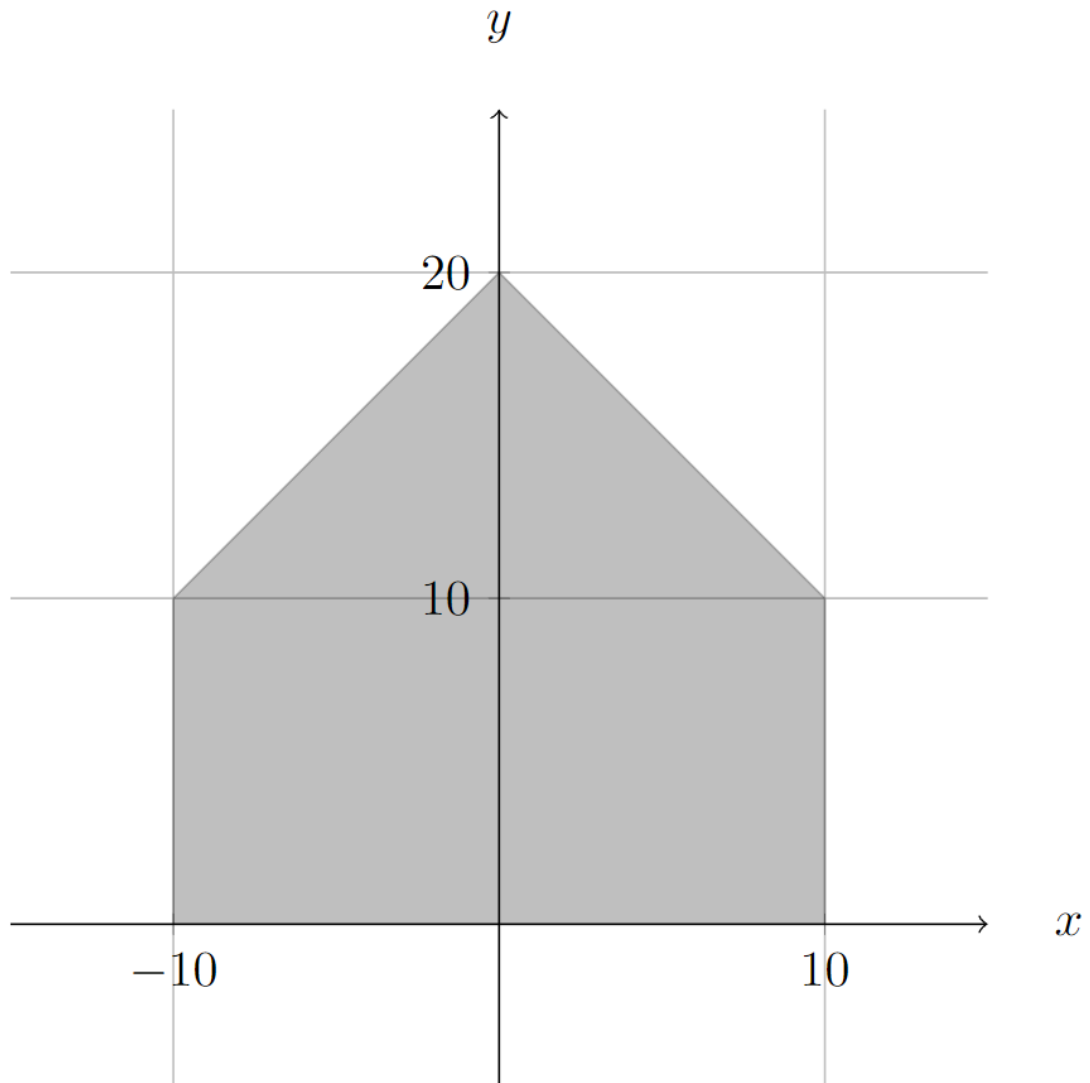


Figura 1: Gráfico elaborado pelo professor

- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine  $\Pr[X \geq Y]$ .
- (c) Determine e esboce a PDF marginal em  $Y$ .
- (d) Determine e esboce a CDF marginal de  $Y$ .
- (e) Determine e esboce a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = 5$ .
- (f) Determine a covariância entre  $X$  e  $Y$ .

## 2. Resolução

### 2.1. Determinando a PDF conjunta $X$ e $Y$

Temos:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= 1 \cdot [-10 \leq x \leq 10] \\f_Y(y|X=x) &= [0 \leq y \leq 20 - |x|] \\f_{x,y}(x,y) &= f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}\end{aligned}\tag{1}$$

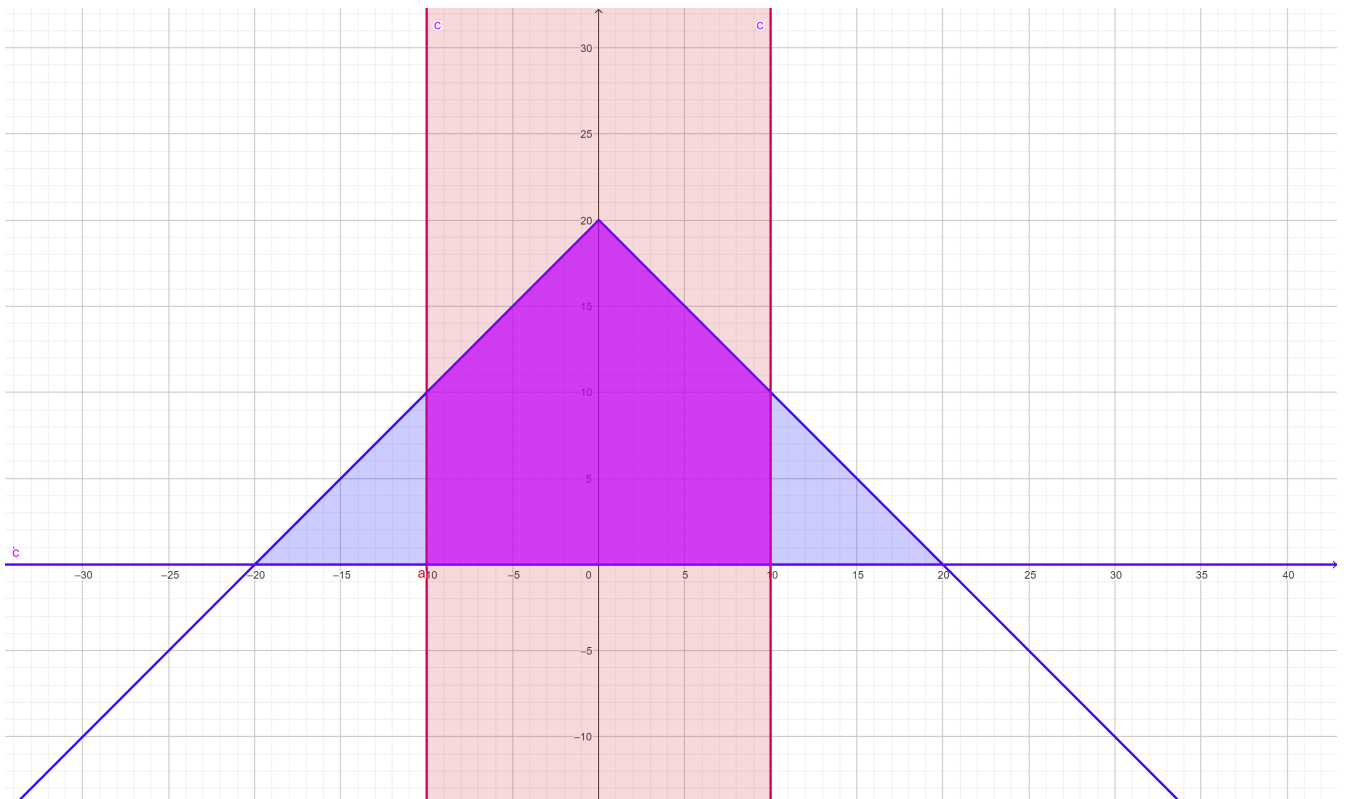


Figura 2: Ilustrando a intersecção das 2 funções

A função em vermelho é  $f_X(x)$ , nela podemos ver o intervalo respeita  $f_X(x) = [-10 \leq x \leq 10]$ .

A função em azul é  $f_Y(y)$ , nela é possível ver que também respeita o calcula acima  $f_Y(y|X=x) = [0 \leq y \leq 20 - |x|]$ .

Com essas 2 funções pode-se chegar na função da questão a colorida em magenta, fazendo a intersecção delas  $f_{x,y}(x,y) = f_{X(x)} \wedge f_{Y(Y|X=x)}$

## 2.2. Determine o valor da constante k

Portanto:

$$V_{\text{total}} = \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \, dy \, dx =$$
$$k \int_{-10}^{10} 20 - |x| \, dx = 300k$$
(2)

Sabemos que:

$$V_{\text{total}} \cdot k = 1$$
$$300 \cdot k = 1$$
$$k = \frac{1}{300}$$
(3)

## 2.3. Resolução da $\Pr[X \geq Y]$

Para calcular a  $\Pr[X \geq Y]$  podemos criar uma reta  $d$  que respeita a seguinte condição  $d : X \geq Y$ , teremos uma reta como na figura a seguir:

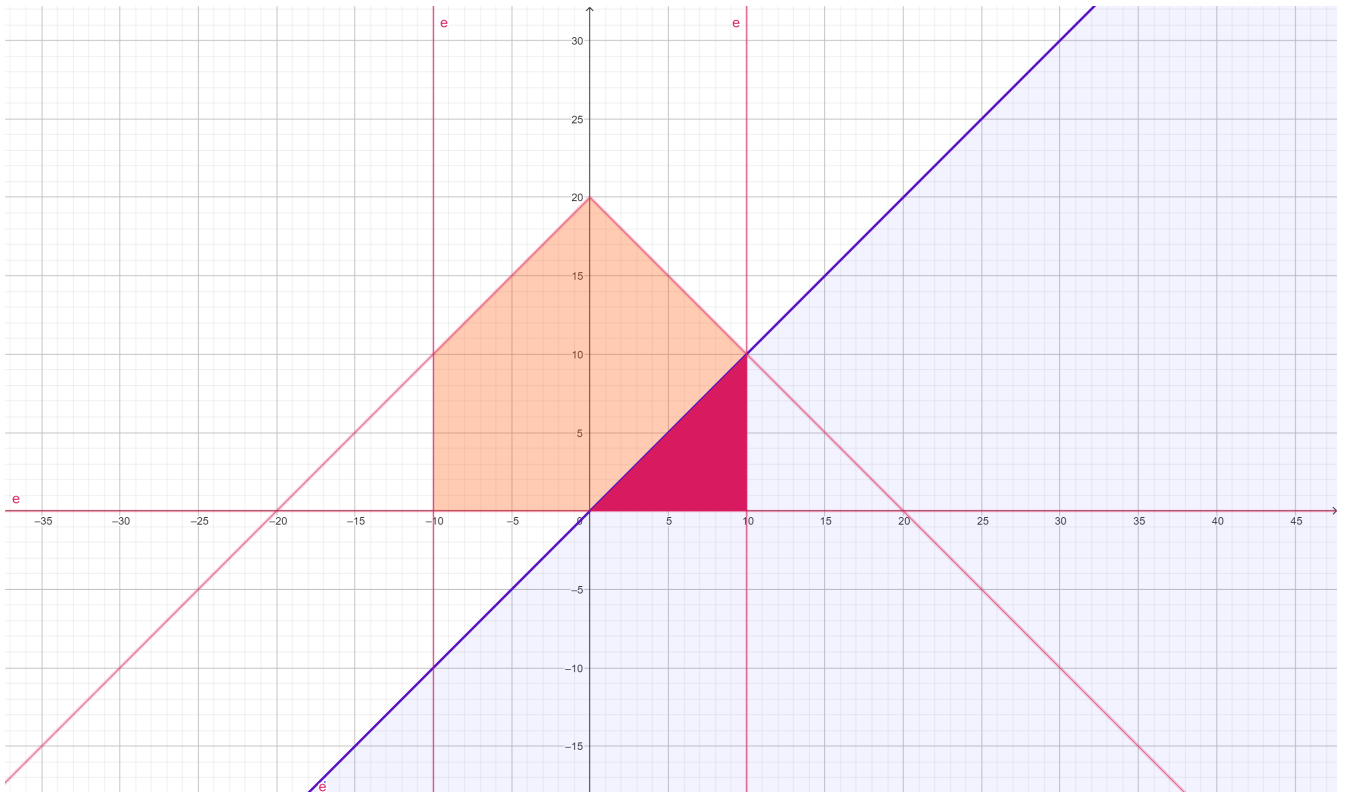


Figura 3: Ilustrando a intersecção de  $f_Y(y|X = x)$  e  $d$

A função em laranja é a  $f_Y(y|X = x)$  e a área em azul é  $d$ , a área em magenta é o que a questão quer  $\Pr[X \geq Y]$ . Baseando-se no gráfico podemos calcular a área de  $\Pr[X \geq Y]$ ,

o coeficiente  $k = \frac{1}{300}$

a área da base é  $A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

logo  $\Pr[X \geq Y] = k \cdot A_{\Pr[X \geq Y]} = \frac{1}{300} \cdot 50 = \frac{1}{6}$

$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{6}$

## 2.4. Resolução da PDF marginal em $Y$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot y \, dy \, dx = \\ \frac{1}{300} \cdot \int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} y \, dy \, dx &= \frac{70}{9} \approx 7.77778 \end{aligned} \tag{4}$$

## 2.5. Resolução da CDF marginal de $Y$

$$\int_{-10}^{10} \int_0^{20-|x|} k \cdot y \, dy \, dx$$

## 2.6. Resolução da PDF condicional de $Y$ dado $X = 5$

## 2.7. Resolução da covariância entre $X$ e $Y$