INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Trabalho de DFT

Processamento de sinais digitais (PSD029007)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

17 de março de 2024

Sumário

1. Questão 1

As duas sequências de oitos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ mostradas na figura a seguir têm DFT's $X_1[k]$ e $X_2[k]$, respectivamente. Determine a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$

Resolução:

- Observando $x_1[n]$ temos:

$x_1[n] = 0\delta(n) + a\delta(n-1) + b\delta(n-2) + c\delta(n-3) + d\delta(n-4) + e\delta(n-5)$
$+0\delta(n-6) + 0\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$

- Observando $x_2[n]$ temos:

$x_2[n] = d\delta(n) + e\delta(n-1) + 0\delta(n-2) + 0\delta(n-3) + 0\delta(n-4) + a\delta(n-5)$
$+b\delta(n-6) + c\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$

Observando ambos, podemos desconsiderar o $\delta(n-8)$ e considerar a janela de 0 a 7 , sendo assim uma janela de 8 pontos.

Com essas considerações podemos concluir que:

$x[(n-4) \bmod 8] \rightarrow X_2 = e^{\frac{-j2\pi}{8} \cdot 4} \cdot X_1[k]$

2. Questão 2

Suponha que temos duas sequências de quantro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte foma:

$$x[n] = \cos\left(\pi \tfrac{n}{2}\right)$$

$$h[n] = 2^n$$

n = 0,1,2,3.

a) Calcule a DFT de quatro pontos $X[k]$.
b) Calcule a DFT de quatro pontos $H[k]$.
c) Calcule $y[n] = x[n] ④ h[n]$ (realizando a convolução circular diretamente).
d) Calcule $y[n]$ do item (c) multiplicando as DFT's de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma DFT inversa.

Resolução:

a)

$$\begin{gathered} n = 0 \to \cos(0) = 1 \\ n = 1 \to \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ n = 2 \to \cos(\pi) = -1 \\ n = 3 \to \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{ logo: } x[n] = 1\delta[n] - \delta[n-2] \\ X[k] = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} \end{gathered} \tag{1}$$

b)

$$\begin{gathered} n = 0 \to 2^o = 1 \\ n = 1 \to 2^1 = 2 \\ n = 2 \to 2^2 = 4 \\ n = 3 \to 2^3 = 8 \text{ logo: } h[n] = 1\delta[n] + 2\delta[n] + 4\delta[n] + 8\delta[n-2] \\ H[k] = 1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} \end{gathered} \tag{2}$$

c)

$$
\begin{gathered}
\text{temos:} \\
x[n] = [1, 0, -1, 0] \\
h[n] = [1, 2, 4, 8] \text{ Relizando convolução circular com h[-n]:} \\
h[0] = [1, 8, 4, 2] \\
h[1] = [2, 1, 8, 4] \\
h[2] = [4, 2, 1, 8] \\
h[3] = [8, 4, 2, 1] \\
\text{Podemos calcular y[n] agora:} \\
y[0] = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 1 - 4 = -3 \\
y[1] = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 4 = 2 - 8 = -6 \\
y[2] = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 4 - 1 = 3 \\
y[3] = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 - 2 = 6 \\
y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]
\end{gathered} \tag{3}
$$

d)

$$
\begin{gathered}
Y[K] = \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}\right)\left(1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}\right) \\
1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} - e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} - 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 5k} \\
1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 5k} \\
\text{temos um deslocamento de 4 e de 5 porém está sendo trabalho em apenas uma faixa de 4} \\
1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (4-4)k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (5-4)k} \\
1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (0)k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (1)k} \\
Y[k] = -3 - 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k} \\
y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]
\end{gathered} \tag{4}
$$

3. questão 3

Dois sinais de comprimento finito, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, são esboçados na figura a seguir. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja $x_3[n]$ a convolução circular de oito pontos de $x_1[n]$ com $x_2[n]$. Determine $x_3[n]$

Resolução:

- Os sinais dados tem a seguinte sequências:

$$x_1[n] = [1,2,1,1,2,1,1,2] x_2[n] = [0,1,3,2,0,0,0,0] \tag{5}$$

- Realizando a inversão temporal em $x_2[n]$:

$$\begin{aligned}
x_2[0] &= [0,0,0,0,0,2,3,1] \\
x_2[1] &= [1,0,0,0,0,0,2,3] \\
x_2[2] &= [3,1,0,0,0,0,0,2] \\
x_2[3] &= [2,3,1,0,0,0,0,0] \\
x_2[4] &= [0,2,3,1,0,0,0,0] \\
x_2[5] &= [0,0,2,3,1,0,0,0] \\
x_2[6] &= [0,0,0,2,3,1,0,0] \\
x_2[7] &= [0,0,0,0,2,3,1,0]
\end{aligned} \tag{6}$$

- Calculando $x_3[n]$:

$$\begin{aligned}
x_3[0] &= 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 7 \\
x_3[1] &= 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 9 \\
x_3[2] &= 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 = 9 \\
x_3[3] &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 9 \\
x_3[4] &= 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 8 \\
x_3[5] &= 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 7 \\
x_3[6] &= 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 9 \\
x_3[7] &= 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 8
\end{aligned} \tag{7}$$

Temos que, $x_3[2] = 9$

4. Questão 4

Na figura é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos $x[n]$. Suponha que $x[n] = 0$ fora do intervalo mostrado. O valor de $x[4]$ nãp ´e conhecido e é representado como b. Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessariamente na escala. Sejam $X(e^{j\omega})$ a TFTD de $x[n]$ e $X_1[k]$ as amostras de $X(e^{j\omega})$ a cada $\frac{\pi}{2}$, isto é.

$$X_1[k] = X(e^{j\omega}) \mid_{\omega=\frac{k\pi}{2}}, 0 \leq k \leq 3$$

A sequência com quatros pontos $x_1[n]$ que resulta da invesa com quatro pontos de $X_1[k]$ é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo,dê esse valor de b.

Resolução:

sendo $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\delta[n-4] + \delta[n-5]$

e a DFT de $X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}0} + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

Sendo $x[n] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$

Fazendo a DTF de X_1[k]

$$X_1\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3}$$

Substituindo em $X_1[k] = X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right]|_{\omega=k\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{gathered} X_1[k] = X[e^{j\omega}] \rightarrow 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}} = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} \\ 1 + b = 4 \\ b = 4 - 1 = 3 \\ b = 3 \end{gathered} \tag{8}$$

5. Questão 5

Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à uma convolução linear dessas sequências.

Resolução

- Dada as figuras, obtém-se os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= [1, -2. -1.3.0.0] \\ x_2[n] &= [0, 2, 0, 0, -1, 1] \end{aligned} \tag{9}$$

Para que as covoluções tenham a mesma sequência

$$\begin{aligned} x_1[n] = [1, -2. -1.3.0.0] &\rightarrow N_1 = 4 \\ x_2[n] = [0, 2, 0, 0, -1, 1] &\rightarrow N_2 = 6 \\ N = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 6 - 1 &= 9 \end{aligned} \tag{10}$$

6. Questão 6

Na figura a seguir é mostrada ua sequência $x[n]$ para a qual o valor de $x[3]$ é uma constante desconhecida c.

O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escada. Considere:

$X_1[k] = X[k]e^{j2\frac{\pi}{3}3k}$

Sendo $X[k]$ a DFT de cinco pontos de $x[n]$. A sequência $x_1[n]$ é a DFT inversa de $X_1[k]$. Qual o valor de c?

multiplicando ambos os lados por $e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}$

$e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}X_1[k] = X[k]$

Sendo $X_1[n]$ $x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$

Fazendo a DFT de $X_1[k]$

$$
\begin{aligned}
X_1[k] &= 2e^{-j2\frac{\pi}{5}0k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + 2e^{-j2\frac{\pi}{5}2k} - e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} \\
X_1[k] &= 2 + e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + 2e^{-j2\frac{\pi}{5}2k} - e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Sendo $x[n]$ $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] + c\delta[n-3] + \delta[n-4]$

Fazendo a DFT de $X[k]$

$$X_1[k] = 2 - e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + ce^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} \tag{12}$$

Calculando:

$$
\begin{gathered}
e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}X_1[k] = X[k] \\
2 - e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + ce^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} = e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}\left(2 + e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + 2e^{-j2\frac{\pi}{5}2k} - e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}\right) \\
2 - e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + ce^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} = 2e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} + 2e^{-j2\frac{\pi}{5}5k} - e^{-j2\frac{\pi}{5}6k} \\
2 - e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} + ce^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} = 2e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} + e^{-j2\frac{\pi}{5}4k} + 2 - e^{-j2\frac{\pi}{5}1k} \\
ce^{-j2\frac{\pi}{5}3k} = 2e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} \\
c = 2
\end{gathered} \tag{13}
$$