



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Trabalho de DFT

Processamento de sinais digitais (PSD029007)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

17 de março de 2024

Sumário

1. Questão 1	3
1.1. Resolução Teórica	3
1.2. Resolução Matlab	3
2. Questão 2	5
2.1. Resolução Teórica	5
2.2. Resolução Matlab	6
3. questão 3	8
3.1. Resolução Teórica	8
3.2. Resolução Matlab	8
4. Questão 4	10
5. Questão 5	11
5.1. Resolução Teórica	11
5.2. Resolução Matlab	11
6. Questão 6	13
7. Questão 7	14
7.1. Resultados teóricos	14
8. Quetão 8	14

1. Questão 1

As duas sequências de oitos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ mostradas na figura a seguir têm DFT's $X_1[k]$ e $X_2[k]$, respectivamente. Determine a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$

1.1. Resolução Teórica

- Observando $x_1[n]$ temos:

$$x_1[n] = 0\delta(n) + a\delta(n-1) + b\delta(n-2) + c\delta(n-3) + d\delta(n-4) + e\delta(n-5) + 0\delta(n-6) + 0\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$$

- Observando $x_2[n]$ temos:

$$x_2[n] = d\delta(n) + e\delta(n-1) + 0\delta(n-2) + 0\delta(n-3) + 0\delta(n-4) + a\delta(n-5) + b\delta(n-6) + c\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$$

Observando ambos, podemos desconsiderar o $\delta(n-8)$ e considerar a janela de 0 a 7, sendo assim uma janela de 8 pontos.

Com essas considerações podemos concluir que:

$$x[(n-4) \bmod 8] \rightarrow X_2 = e^{\frac{-j2\pi}{8} \cdot 4} \cdot X_1[k]$$

1.2. Resolução Matlab

```
%Questão 1
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 8;
k=0:N-1;
n=0:N-1

%Cria o vetor de impulso dos sinais
x1 = [0,1,2,3,2,1,0,0];
x2 = [2,1,0,0,0,1,2,3];

%Faz a DFT de x1
X = fft(x1);
%Desloca X1 em 4
Y = exp(j*pi*2*4*k/8).*X;

%Faz a inversa
y = ifft(Y);

%Compara o resultado com x2
subplot(211)
stem(n,x2)
title('x_2 (n)')
subplot(212)
```

```
stem(n,y)
title('x_1 [(n-4) mod 8]')
```

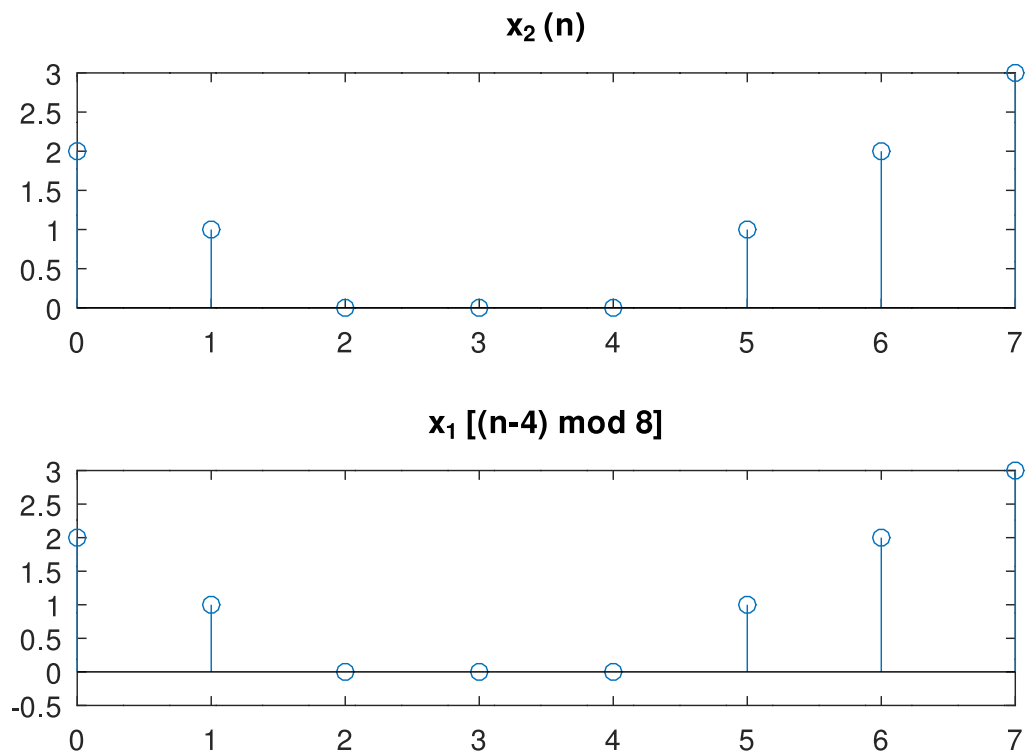


Figura 1: Resultados da Questão 1
Fonte: Elaborada pelo autor

2. Questão 2

Suponha que temos duas seqüências de quatro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte forma:

$$x[n] = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$$

$$h[n] = 2^n$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

- a) Calcule a DFT de quatro pontos $X[k]$.
- b) Calcule a DFT de quatro pontos $H[k]$.
- c) Calcule $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ (realizando a convolução circular diretamente).
- d) Calcule $y[n]$ do item (c) multiplicando as DFT's de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma DFT inversa.

2.1. Resolução Teórica

a)

$$n = 0 \rightarrow \cos(0) = 1$$

$$n = 1 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$n = 2 \rightarrow \cos(\pi) = -1 \quad (1)$$

$$n = 3 \rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{ logo: } x[n] = 1\delta[n] - \delta[n - 2]$$

$$X[k] = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k}$$

b)

$$n = 0 \rightarrow 2^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow 2^1 = 2$$

$$n = 2 \rightarrow 2^2 = 4 \quad (2)$$

$$n = 3 \rightarrow 2^3 = 8 \text{ logo: } h[n] = 1\delta[n] + 2\delta[n] + 4\delta[n] + 8\delta[n - 2]$$

$$H[k] = 1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k}$$

c)

temos:

$$x[n] = [1, 0, -1, 0]$$

$h[n] = [1, 2, 4, 8]$ Realizando convolução circular com $h[-n]$:

$$h[0] = [1, 8, 4, 2]$$

$$h[1] = [2, 1, 8, 4]$$

$$h[2] = [4, 2, 1, 8]$$

$$h[3] = [8, 4, 2, 1]$$

(3)

Podemos calcular $y[n]$ agora:

$$y[0] = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

$$y[1] = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 4 = 2 - 8 = -6$$

$$y[2] = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 4 - 1 = 3$$

$$y[3] = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$$

$$y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$

d)

$$Y[K] = \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k}\right) \left(1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k}\right)$$

$$1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} - e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} - 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 4k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 5k}$$

$$1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 4k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 5k}$$

temos um deslocamento de 4 e de 5 porém está sendo trabalho em apenas uma faixa de 4

$$1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot (4-4)k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot (5-4)k}$$

$$1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} - 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot (0)k} - 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot (1)k}$$

$$Y[k] = -3 - 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k}$$

$$y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$

2.2. Resolução Matlab

%Questão 2

pkg load signal;

close all;

clear all;

clc;

N= 4;

k=0:N-1;

n=0:N-1;

%criando sinais

x = [1,0,-1,0]

h = [1,2,4,8]

X = fft(x);

H = fft(h);

```

%conv pela DFT
convDFT = ifft(X.*H)

%conv utilizando cconv
convDIR = cconv(x,h,4)

%plotando os sinais e comparando
subplot(211)
stem(n,convDFT);
title('Convolução pela DFT')
subplot(212)
stem(n,convDIR)
title('Convolução Dirata')

```

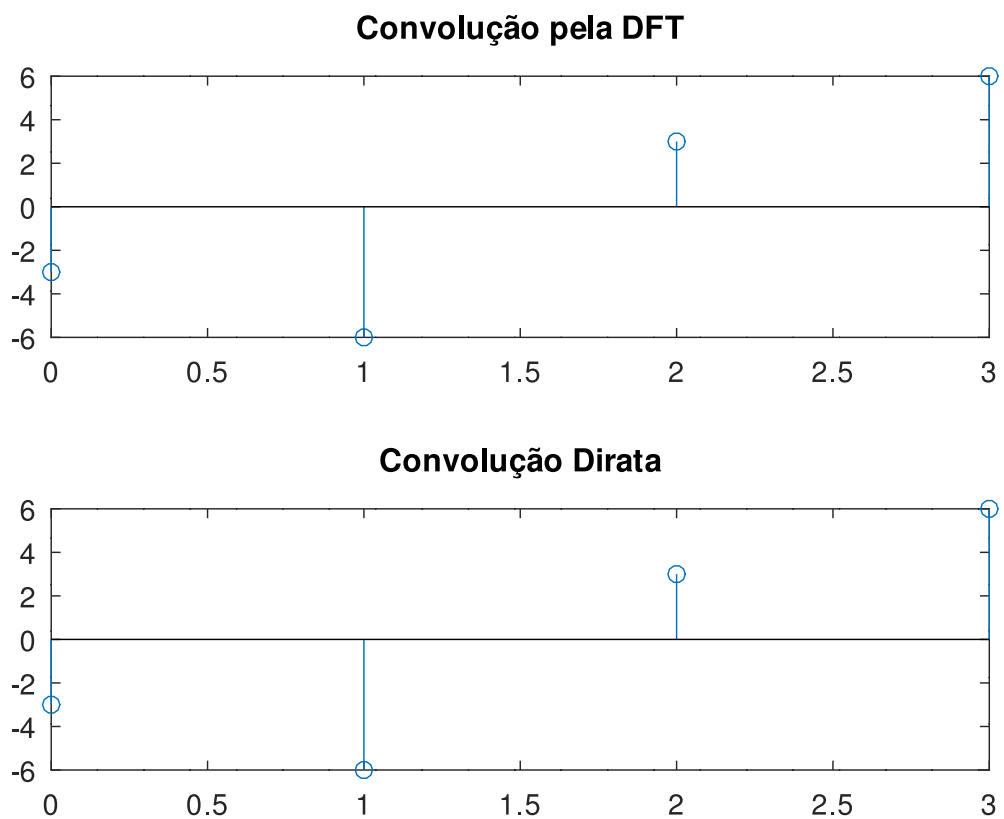


Figura 2: Resultados da Questão 2
Fonte: Elaborada pelo autor

3. questão 3

Dois sinais de comprimento finito, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, são esboçados na figura a seguir. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja $x_3[n]$ a convolução circular de oito pontos de $x_1[n]$ com $x_2[n]$. Determine $x_3[n]$

3.1. Resolução Teórica

- Os sinais dados tem a seguinte sequências:

$$x_1[n] = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2] \quad x_2[n] = [0, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 0] \quad (5)$$

- Realizando a inversão temporal em $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} x_2[0] &= [0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 1] \\ x_2[1] &= [1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 3] \\ x_2[2] &= [3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2] \\ x_2[3] &= [2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ x_2[4] &= [0, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0] \\ x_2[5] &= [0, 0, 2, 3, 1, 0, 0, 0] \\ x_2[6] &= [0, 0, 0, 2, 3, 1, 0, 0] \\ x_2[7] &= [0, 0, 0, 0, 2, 3, 1, 0] \end{aligned} \quad (6)$$

- Calculando $x_3[n]$:

$$\begin{aligned} x_3[0] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 7 \\ x_3[1] &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ x_3[2] &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 9 \\ x_3[3] &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 9 \\ x_3[4] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8 \\ x_3[5] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 7 \\ x_3[6] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 9 \\ x_3[7] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 8 \end{aligned} \quad (7)$$

Temos que, $x_3[2] = 9$

3.2. Resolução Matlab

```
%questão 3
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 8;
k=0:N-1;
n=0:N-1;
```



```

%criando os sinais
x1 = [1,2,1,1,2,1,1,2]
x2 = [0,1,3,2,0,0,0,0]

%Fazendo a convolução de 8
x3 = cconv(x1,x2,8)

%Plotando o sinal
stem(n,x3)
ylim([0 9]);

%Valor de x3[2] = 9

```

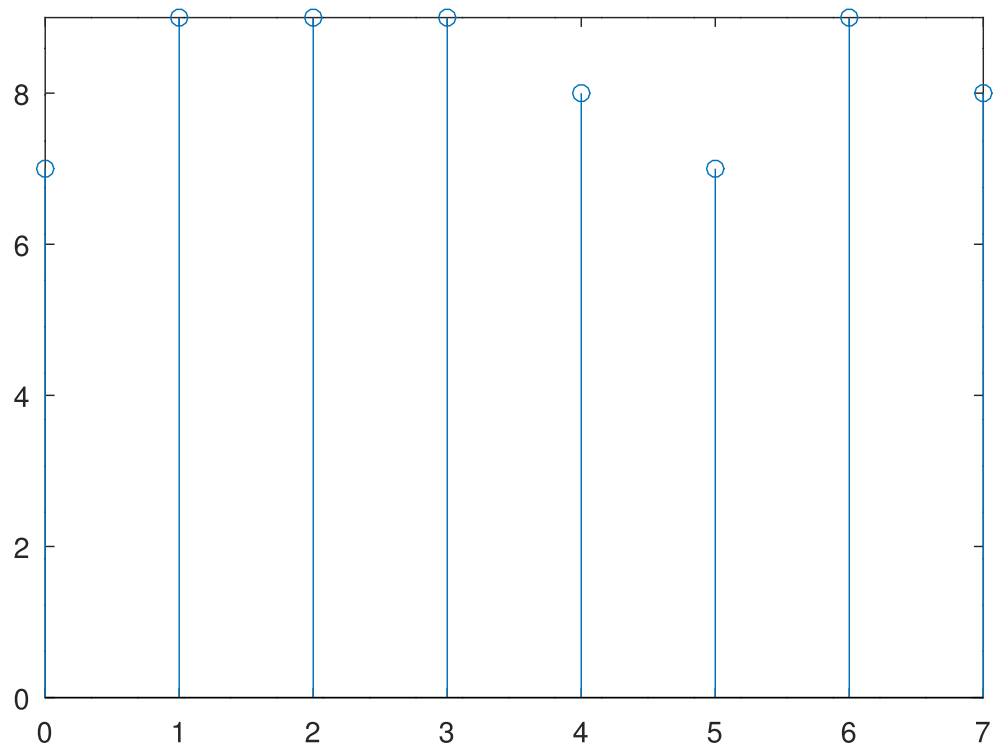


Figura 3: Resultados da Questão 2
 Fonte: Elaborada pelo autor

4. Questão 4

Na figura é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos $x[n]$. Suponha que $x[n] = 0$ fora do intervalo mostrado. O valor de $x[4]$ não é conhecido e é representado como b . Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessariamente na escala. Sejam $X(e^{j\omega})$ a TFTD de $x[n]$ e $X_1[k]$ as amostras de $X(e^{j\omega})$ a cada $\frac{\pi}{2}$, isto é.

$$X_1[k] = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{k\pi}{2}}, 0 \leq k \leq 3$$

A sequência com quatro pontos $x_1[n]$ que resulta da inversa com quatro pontos de $X_1[k]$ é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo, dê esse valor de b .

Resolução:

$$\text{sendo } x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

$$\text{e a DFT de } X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}0} + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

$$\text{Sendo } x[n] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

Fazendo a DTF de $X_1[k]$

$$X_1\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3}$$

$$\text{Substituindo em } X_1[k] = X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] \big|_{\omega=\frac{k\pi}{2}}$$

$$X_1[k] = X[e^{j\omega}] \rightarrow 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}} = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3}$$

$$1 + b = 4$$

$$b = 4 - 1 = 3$$

$$b = 3$$

(8)

5. Questão 5

Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à uma convolução linear dessas sequências.

5.1. Resolução Teórica

- Dada as figuras, obtém-se os seguintes pontos:

$$\begin{aligned}x_1[n] &= [1, -2, -1, 3, 0, 0] \\x_2[n] &= [0, 2, 0, 0, -1, 1]\end{aligned}\tag{9}$$

Para que as convoluções tenham a mesma sequência

$$\begin{aligned}x_1[n] &= [1, -2, -1, 3, 0, 0] \rightarrow N_1 = 4 \\x_2[n] &= [0, 2, 0, 0, -1, 1] \rightarrow N_2 = 6 \\N &= N_1 + N_2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9\end{aligned}\tag{10}$$

5.2. Resolução Matlab

```
%questão 5
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 9;
k=0:N-1;
n=0:N-1;

%Cria o sinal com tamanho 9 para conv circular
x1 = [1,-2,-1,3,0,0,0,0,0]
x2 = [0,2,0,0,-1,1,0,0,0]
cc = cconv(x1,x2,9);

%Ajusta os sinais para os tamanhos originais
%Faz a convolução linear
x1 = [1,-2,-1,3]
x2 = [0,2,0,0,-1,1]
cl = conv(x1,x2);

%Compara os resultados das convoluções linear e circular
subplot(211)
stem(n,cc);
title('Convolução circular');
subplot(212)
stem(n,cl);
title('Convolução Linear');
```

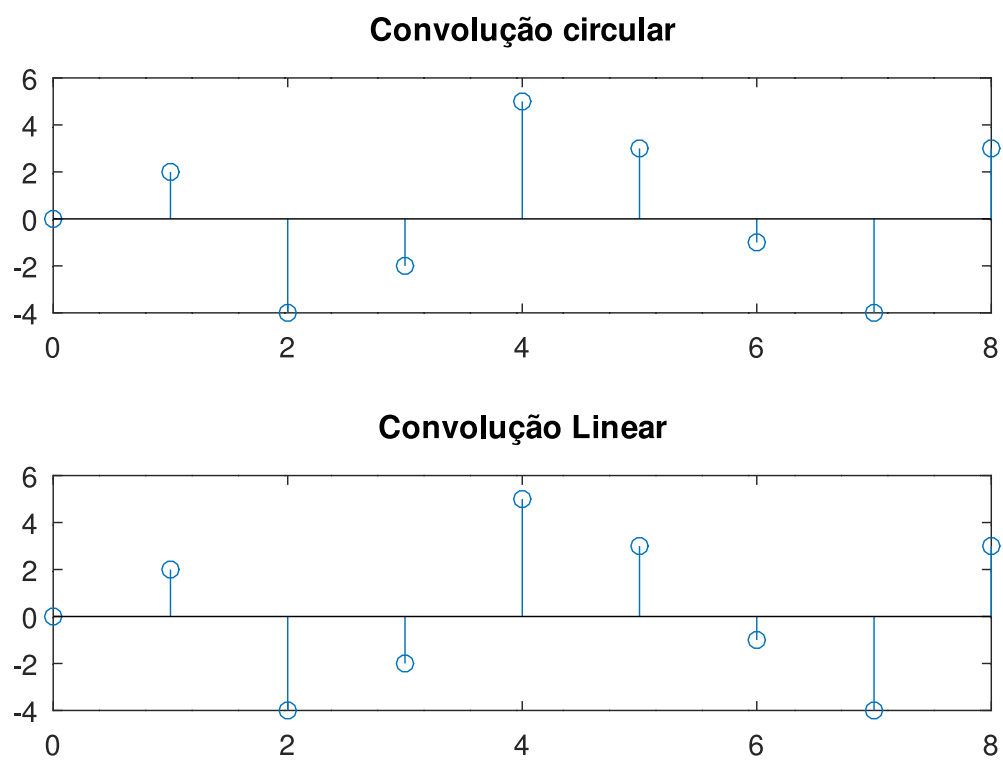


Figura 4: Resultados da Questão 2
Fonte: Elaborada pelo autor

6. Questão 6

Na figura a seguir é mostrada a sequência $x[n]$ para a qual o valor de $x[3]$ é uma constante desconhecida c .

O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escada. Considere:

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\frac{\pi}{5}3k}$$

Sendo $X[k]$ a DFT de cinco pontos de $x[n]$. A sequência $x_1[n]$ é a DFT inversa de $X_1[k]$. Qual o valor de c ?

multiplicando ambos os lados por $e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}$

$$e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} X_1[k] = X[k]$$

$$\text{Sendo } X_1[n] \quad x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + 0\delta[n-4]$$

$$\text{Sendo } x[n] \quad x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] + 0\delta[n-2] + c\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Calculando:

$$X[k] = X_1[k] \cdot e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}$$

$$x_1[n] = x[(n-2) \bmod 5] \rightarrow$$

$$x_1[(n-3) \bmod 5] = 2\delta[(n-2) \bmod 5] - \delta[(n-3) \bmod 5]$$

$$+ 0\delta[(n-4) \bmod 5] - c\delta[(n-5) \bmod 5] + \delta[(n-6) \bmod 5]$$

(11)

$$x_1[(n-3) \bmod 5] = 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$+ 0\delta[n-4] - c\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + 0\delta[n-4] = 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$+ 0\delta[n-4] - c\delta[n] + \delta[n-1] \quad c = 2$$

7. Questão 7

Suponha que tenhamos uma sequência de 1025 pontos de dados (1 a mais do que $N = 2^{10}$). Em vez de descartar o valor final, vamos preencher a sequência com zeros até ser comprimento seja $N = 2^{11}$, de modo que possamos usar um algoritmo FFT de raiz 2

- a) Quantas multiplicações complexas são necessárias para se computar a DFT usando um algoritmo de FFT raiz 2?
- b) Quantas multiplicações complexas seriam necessárias para se computar diretamente a DFT de 1025?

7.1. Resultados teóricos

$$N = 2^{11} = 2048; N \quad (12)$$

a)
$$\left(\frac{N}{2}\right) \log_2(N) \rightarrow \left(\frac{1025}{2}\right) \log_2(1025) = 5215.72 \quad (13)$$

b)
$$N^2 \rightarrow 1025^2 = 1050625 \quad (14)$$

8. Questão 8

Considere a sequência de comprimento finito real $x[n]$ mostrada na Figura a seguir

- a) Esboce a sequência de comprimento finito $y[n]$ cuja DFT de seis pontos seja

$$Y[k] = W_6^{5k} X[k] \quad (15)$$

sendo $X[k]$ a DFT de seis pontos de $x[n]$

- a) Esboce a seq7 de comprimento finito $w[n]$ cuja DFT de seis pontos seja

$$W[k] = \mathcal{I}\{X[k]\} \quad (16)$$

- a) Esboce a sequência de comprimento finito $q[n]$ cuja DFT de três pontos seja

$$Q[k] = X[2k + 1], k = 0, 1, 2 \quad (17)$$