INSTITUTO
FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Trabalho de DFT

Processamento de sinais digitais (PSD029007)

Rhenzo Hideki Silva Kajikawa

17 de março de 2024

Sumário

1. Questão 1

As duas sequências de oitos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ mostradas na figura a seguir têm DFT's $X_1[k]$ e $X_2[k]$, respectivamente. Determine a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$

1.1. Resolução Teórica

- Observando $x_1[n]$ temos:

$$x_1[n] = 0\delta(n) + a\delta(n-1) + b\delta(n-2) + c\delta(n-3) + d\delta(n-4) + e\delta(n-5)$$
$$+0\delta(n-6) + 0\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$$

- Observando $x_2[n]$ temos:

$$x_2[n] = d\delta(n) + e\delta(n-1) + 0\delta(n-2) + 0\delta(n-3) + 0\delta(n-4) + a\delta(n-5)$$
$$+b\delta(n-6) + c\delta(n-7) + 0\delta(n-8)$$

Observando ambos, podemos desconsiderar o $\delta(n-8)$ e considerar a janela de 0 a 7 , sendo assim uma janela de 8 pontos.

Com essas considerações podemos concluir que:

$$x[(n-4) \bmod 8] \rightarrow X_2 = e^{\frac{-j2\pi}{8} \cdot 4} \cdot X_1[k]$$

1.2. Resolução Matlab

```
%Questão 1
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 8;
k=0:N-1;
n=0:N-1

%Cria o vetor de impulso dos sinais
x1 = [0,1,2,3,2,1,0,0];
x2 = [2,1,0,0,0,1,2,3];

%Faz a DFT de x1
X = fft(x1);
%Desloca X1 em 4
Y = exp(j*pi*2*4*k/8).*X;

%Faz a inversa
y = ifft(Y);

%Compara o resultado com x2
subplot(211)
stem(n,x2)
title('x_2 (n)')
subplot(212)
```

```
stem(n,y)
title('x_1 [(n-4) mod 8]')
```

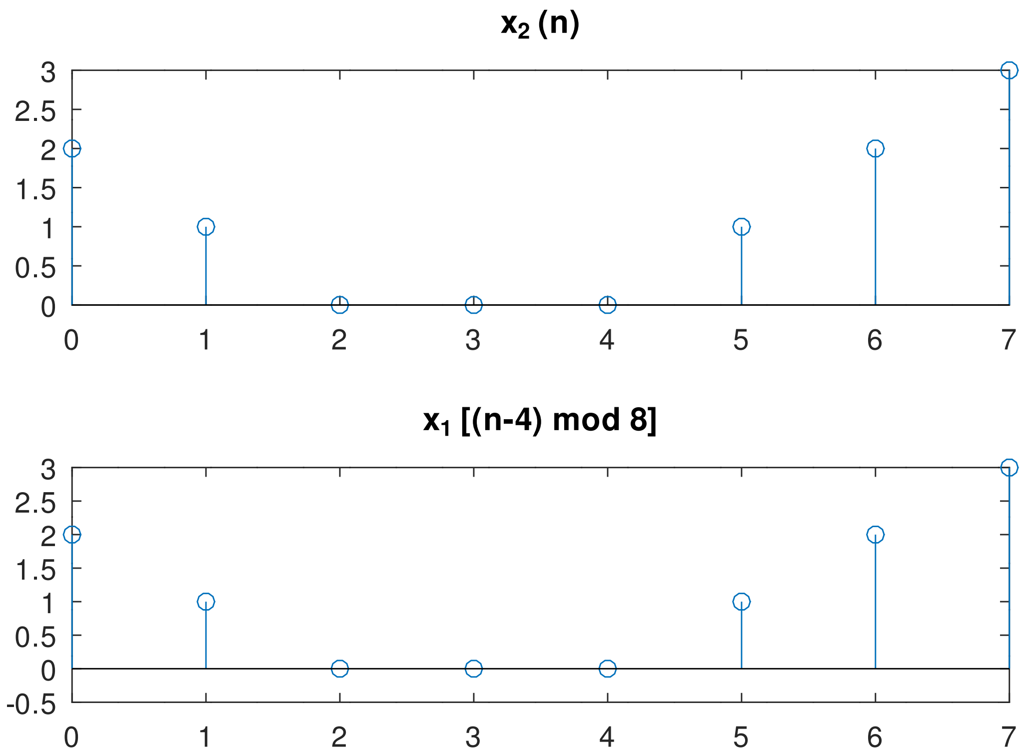

Figura 1: Resultados da Questão 1
Fonte: Elaborada pelo autor

2. Questão 2

Suponha que temos duas sequências de quantro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte foma:

$$x[n] = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$$

$$h[n] = 2^n$$

n = 0,1,2,3.

a) Calcule a DFT de quatro pontos $X[k]$.
b) Calcule a DFT de quatro pontos $H[k]$.
c) Calcule $y[n] = x[n] ④ h[n]$ (realizando a convolução circular diretamente).
d) Calcule $y[n]$ do item (c) multiplicando as DFT's de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma DFT inversa.

2.1. Resolução Teórica

a)

$$\begin{gathered} n = 0 \to \cos(0) = 1 \\ n = 1 \to \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ n = 2 \to \cos(\pi) = -1 \\ n = 3 \to \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{ logo: } x[n] = 1\delta[n] - \delta[n-2] \\ X[k] = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} \end{gathered} \tag{1}$$

b)

$$\begin{gathered} n = 0 \to 2^0 = 1 \\ n = 1 \to 2^1 = 2 \\ n = 2 \to 2^2 = 4 \\ n = 3 \to 2^3 = 8 \text{ logo: } h[n] = 1\delta[n] + 2\delta[n] + 4\delta[n] + 8\delta[n-2] \\ H[k] = 1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1k} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2k} + 8 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k} \end{gathered} \tag{2}$$

c)

$$\begin{gathered}\text{temos:}\\ x[n]=[1,0,-1,0]\\ h[n]=[1,2,4,8]\ \text{Relizando convolução circular com h[-n]:}\\ h[0]=[1,8,4,2]\\ h[1]=[2,1,8,4]\\ h[2]=[4,2,1,8]\\ h[3]=[8,4,2,1]\\ \text{Podemos calcular y[n] agora:}\\ y[0]=1\cdot 1+0\cdot 8+(-1)\cdot 4+0\cdot 2=1-4=-3\\ y[1]=1\cdot 2+0\cdot 1+(-1)\cdot 8+0\cdot 4=2-8=-6\\ y[2]=1\cdot 4+0\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot 8=4-1=3\\ y[3]=1\cdot 8+0\cdot 4+(-1)\cdot 2+0\cdot 1=8-2=6\\ y[n]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3]\end{gathered}\tag{3}$$

d)

$$\begin{gathered}Y[K]=\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}\right)\left(1+2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}\right)\\ 1+2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}-e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}-2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}-4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4k}-8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 5k}\\ 1+2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+3\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}-4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4k}-8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 5k}\\ \text{temos um deslocamento de 4 e de 5 porém está sendo trabalho em apenas uma faixa de 4}\\ 1+2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+3\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}-4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (4-4)k}-8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (5-4)k}\\ 1+2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+3\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}-4\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (0)k}-8\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot (1)k}\\ Y[k]=-3-6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1k}+3\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2k}+6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3k}\\ y[n]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3]\end{gathered}\tag{4}$$

2.2. Resolução Matlab

```
%Questão 2
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 4;
k=0:N-1;
n=0:N-1;

%criando sinais
x = [1,0,-1,0]
h = [1,2,4,8]

X = fft(x);
H = fft(h);
```

```
%conv pela DFT
convDFT = ifft(X.*H)

%conv utilizando cconv
convDIR = cconv(x,h,4)

%plotando os sinais e comparando
subplot(211)
stem(n,convDFT);
title('Convolução pela DFT')
subplot(212)
stem(n,convDIR)
title('Convolução Dirata')
```

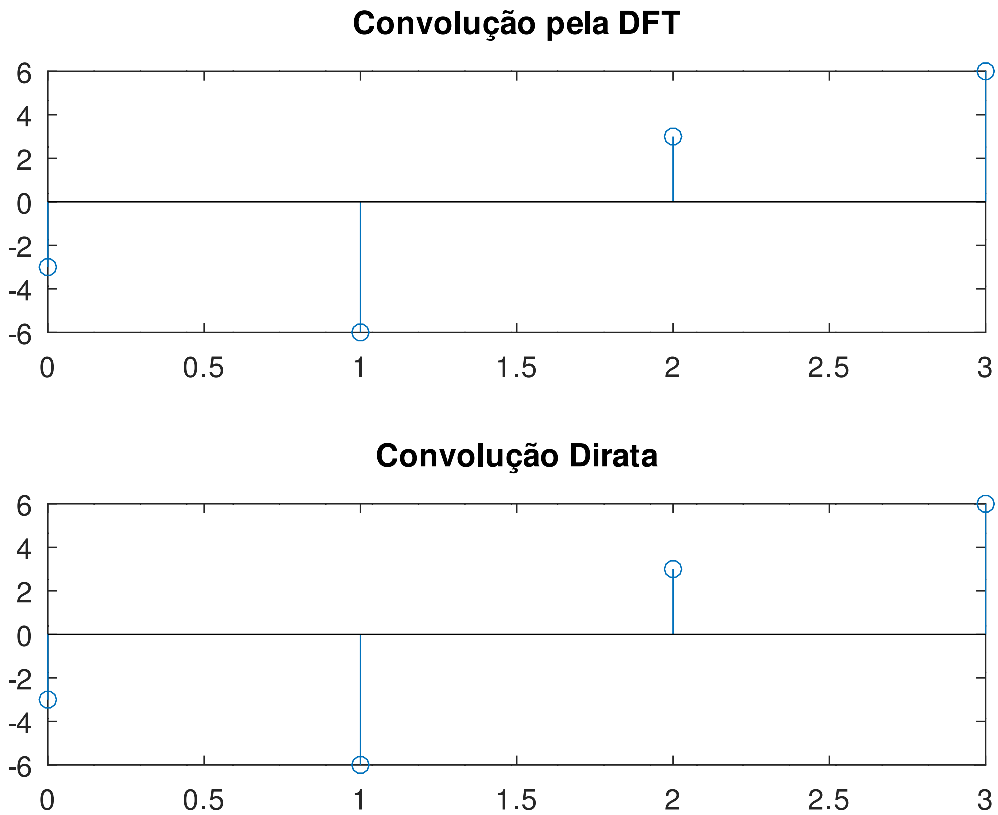

Figura 2: Resultados da Questão 2
Fonte: Elaborada pelo autor

3. questão 3

Dois sinais de comprimento finito, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, são esboçados na figura a seguir. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja $x_3[n]$ a convolução circular de oito pontos de $x_1[n]$ com $x_2[n]$. Determine $x_3[n]$

3.1. Resolução Teórica

- Os sinais dados tem a seguinte sequências:

$$x_1[n] = [1,2,1,1,2,1,1,2] x_2[n] = [0,1,3,2,0,0,0,0] \tag{5}$$

- Realizando a inversão temporal em $x_2[n]$:

$$\begin{aligned}
x_2[0] &= [0,0,0,0,0,2,3,1] \\
x_2[1] &= [1,0,0,0,0,0,2,3] \\
x_2[2] &= [3,1,0,0,0,0,0,2] \\
x_2[3] &= [2,3,1,0,0,0,0,0] \\
x_2[4] &= [0,2,3,1,0,0,0,0] \\
x_2[5] &= [0,0,2,3,1,0,0,0] \\
x_2[6] &= [0,0,0,2,3,1,0,0] \\
x_2[7] &= [0,0,0,0,2,3,1,0]
\end{aligned} \tag{6}$$

- Calculando $x_3[n]$:

$$\begin{aligned}
x_3[0] &= 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot1 = 7 \\
x_3[1] &= 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot2+2\cdot3 = 9 \\
x_3[2] &= 1\cdot3+2\cdot1+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot2 = 9 \\
x_3[3] &= 1\cdot2+2\cdot3+1\cdot1+1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0 = 9 \\
x_3[4] &= 1\cdot0+2\cdot2+1\cdot3+1\cdot1+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0 = 8 \\
x_3[5] &= 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot1+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot0 = 7 \\
x_3[6] &= 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot2+2\cdot3+1\cdot1+1\cdot0+2\cdot0 = 9 \\
x_3[7] &= 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+2\cdot2+1\cdot3+1\cdot1+2\cdot0 = 8
\end{aligned} \tag{7}$$

Temos que, $x_3[2] = 9$

3.2. Resolução Matlab

```
%questão 3
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 8;
k=0:N-1;
n=0:N-1;
```

```
%criando os sinais
x1 = [1,2,1,1,2,1,1,2]
x2 = [0,1,3,2,0,0,0,0]

%Fazendo a convolução de 8
x3 = cconv(x1,x2,8)

%Plotando o sinal
stem(n,x3)
ylim([0 9]);

%Valor de x3[2] = 9
```

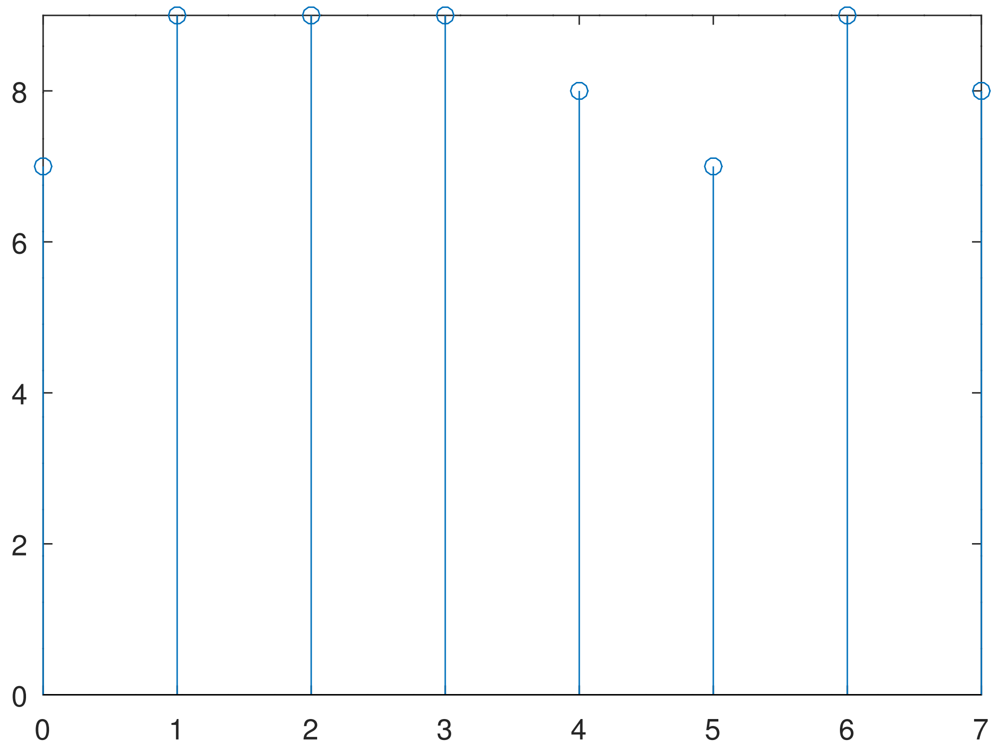

Figura 3: Resultados da Questão 2
Fonte: Elaborada pelo autor

4. Questão 4

Na figura é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos $x[n]$. Suponha que $x[n] = 0$ fora do intervalo mostrado. O valor de $x[4]$ nãp ´e conhecido e é representado como b. Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessariamente na escala. Sejam $X(e^{j\omega})$ a TFTD de $x[n]$ e $X_1[k]$ as amostras de $X(e^{j\omega})$ a cada $\frac{\pi}{2}$, isto é.

$$X_1[k] = X(e^{j\omega}) \mid_{\omega=\frac{k\pi}{2}}, 0 \leq k \leq 3$$

A sequência com quatros pontos $x_1[n]$ que resulta da invesa com quatro pontos de $X_1[k]$ é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo,dê esse valor de b.

Resolução:

sendo $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\delta[n-4] + \delta[n-5]$

e a DFT de $X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}4} + e^{j\frac{2k\pi}{4}5}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + be^{j\frac{2k\pi}{4}0} + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}}$$

Sendo $x[n] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$

Fazendo a DTF de X_1[k]

$$X_1\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3}$$

Substituindo em $X_1[k] = X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right]|_{\omega=k\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{gathered} X_1[k] = X[e^{j\omega}] \rightarrow 1 + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} + b + e^{j\frac{2k\pi}{4}} = 4 + e^{j\frac{2k\pi}{4}} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}2} + 2e^{j\frac{2k\pi}{4}3} \\ 1 + b = 4 \\ b = 4 - 1 = 3 \\ b = 3 \end{gathered} \tag{8}$$

5. Questão 5

Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à uma convolução linear dessas sequências.

5.1. Resolução Teórica

- Dada as figuras, obtém-se os seguintes pontos:

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= [1, -2. - 1.3.0.0] \\
x_2[n] &= [0, 2, 0, 0, -1, 1]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Para que as covoluções tenham a mesma sequência

$$
\begin{aligned}
x_1[n] = [1, -2. - 1.3.0.0] \rightarrow N_1 = 4 \\
x_2[n] = [0, 2, 0, 0, -1, 1] \rightarrow N_2 = 6 \\
N = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9
\end{aligned}
\tag{10}
$$

5.2. Resolução Matlab

```
%questão 5
pkg load signal;
close all;
clear all;
clc;

N= 9;
k=0:N-1;
n=0:N-1;

%Cria o sinal com tamanho 9 para conv circular
x1 = [1,-2,-1,3,0,0,0,0,0]
x2 = [0,2,0,0,-1,1,0,0,0]
cc = cconv(x1,x2,9);

%Ajusta os sinais para os tamanhos originais
%Faz a convolução linear
x1 = [1,-2,-1,3]
x2 = [0,2,0,0,-1,1]
cl = conv(x1,x2);

%Compara os resultados das convoluções linear e circular
subplot(211)
stem(n,cc);
title('Convolução circular');
subplot(212)
stem(n,cl);
title('Convolução Linear');
```

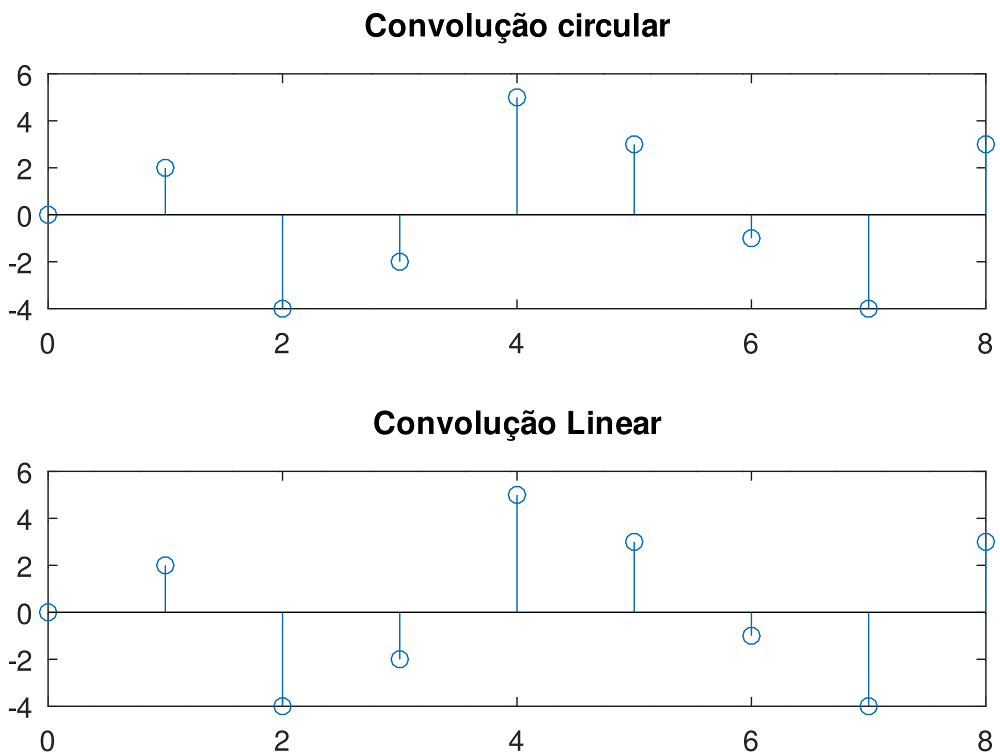

Figura 4: Resultados da Questão 2
Fonte: Elaborada pelo autor

6. Questão 6

Na figura a seguir é mostrada ua sequência $x[n]$ para a qual o valor de $x[3]$ é uma constante desconhecida c.

O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escada. Considere:

$X_1[k] = X[k]e^{j2\frac{\pi}{3}3k}$

Sendo $X[k]$ a DFT de cinco pontos de $x[n]$. A sequência $x_1[n]$ é a DFT inversa de $X_1[k]$. Qual o valor de c?

multiplicando ambos os lados por $e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}$

$e^{-j2\frac{\pi}{5}3k}X_1[k] = X[k]$

Sendo $X_1[n]$ $x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + 0\delta[n-4]$

Sendo $x[n]$ $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] + 0\delta[n-2] + c\delta[n-3] + \delta[n-4]$

Calculando:

$$\begin{gathered}
X[k] = X_1[k] \cdot e^{-j2\frac{\pi}{5}3k} \\
x_1[n] = x[(n-2) \bmod 5] \rightarrow \\
x_1[(n-3) \bmod 5] = 2\delta[(n-2) \bmod 5] - \delta[(n-3) \bmod 5] \\
+0\delta[(n-4) \bmod 5] - c\delta[(n-5) \bmod 5] + \delta[(n-6) \bmod 5] \\
x_1[(n-3) \bmod 5] = 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \\
+0\delta[n-4] - c\delta[n] + \delta[n-1] \\
x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + 0\delta[n-4] = 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \\
+0\delta[n-4] - c\delta[n] + \delta[n-1] c = 2
\end{gathered} \tag{11}$$

7. Questão 7

Suponha que tenhamos uma sequência de 1025 pontos de dados (1 a mais do que $N = 2^{10}$). Em vez de descartar o valor final, vamos preencher a sequência com zeros até ser comprimento seja $N = 2^{11}$, de modo que possamos usar um algoritmo FFT de raiz 2

a) Quantas multiplicações complexas são necessárias para se computar a DFT usando um algoritmo de FFT raiz 2?

b) Quantas multiplicações complexas seriam necessárias para se computar diretamente a DFT de 1025?

7.1. Resultados teóricos

$$N = 2^{11} = 2048; N \tag{12}$$

a)

$$\left(\frac{N}{2}\right)\log_2(N) \rightarrow \left(\frac{1025}{2}\right)\log_2(1025) = 5215.72 \tag{13}$$

b)

$$N^2 \rightarrow 1025^2 = 1050625 \tag{14}$$

8. Quetão 8

Considere a sequência de comprimento finito real $x[n]$ mosrada na Figura a seguir

a) Esboce a sequência de comprimento finito $y[n]$ cuja DFT de seis pontos seja

$$Y[k] = W_6^{5k}X[k] \tag{15}$$

sendo $X[k]$ a DFT de seis pontos de x[n]

b) Esboce a sequência de comprimento finito $w[n]$ cuja DFt de seis pontos seja

$$W[k] = \Im\{X[k]\} \tag{16}$$

c) Esboce a sequência de comprimento finito $q[n]$ cuja DFT de três pontos seja

$$Q[k] = X[2k+1], k = 0, 1, 2 \tag{17}$$

8.1. Resultados teóricos

a)

$$\begin{gathered}
x[n] = [4, 3, 2, 1, 0, 0] \\
Y[k] = W_6^{5k}X[k] \\
y[n] = x[(n-5) \bmod 6] \\
y[n] = 4\delta[(n-5) \bmod 6] + 3\delta[(n-6) \bmod 6] + 2\delta[(n-7) \bmod 6] \\
+1\delta[(n-8) \bmod 6] + 0\delta[(n-9) \bmod 6] + 0\delta[(n-8) \bmod 6] \\
y[n] = 4\delta[n-5] + 3\delta[n-6] + 2\delta[n-1] + 1\delta[n-2] + 0\delta[n-3] + 0\delta[n-4]
\end{gathered} \tag{18}$$

b)

$$W[k] = \Im\{X[k]\}$$
$$W[k] = \Im\left\{4e^{j2\frac{\pi}{6}0k} + 3e^{j2\frac{\pi}{6}1k} + 2e^{j2\frac{\pi}{6}2k} + e^{j2\frac{\pi}{6}4k}\right\}$$
$$W[k] = \Im\left\{4 + 3\cos\left(2\frac{\pi}{6}1k\right) + 3j\sin\left(2\frac{\pi}{6}1k\right) + 2\cos\left(2\frac{\pi}{6}2k\right) + 2j\sin\left(2\frac{\pi}{6}2k\right) + 1\cos\left(2\frac{\pi}{6}4k\right) + j\sin\left(2\frac{\pi}{6}4k\right)\right. \tag{19}$$
$$W[k] = \Im\left\{3j\sin\left(2\frac{\pi}{6}1k\right)2j\sin\left(2\frac{\pi}{6}2k\right) + j\sin\left(2\frac{\pi}{6}4k\right)\right\}$$
$$W[k] = 3j\sin\left(2\frac{\pi}{6}1k\right)2j\sin\left(2\frac{\pi}{6}2k\right) + j\sin\left(2\frac{\pi}{6}4k\right)$$

c)

$$Q[k] = X[2k+1], k = 0, 1, 2;$$
$$X[k] = 4 + 3e^{j\frac{2k\pi}{6}1} + 2e^{j\frac{2k\pi}{6}2} + 1e^{j\frac{2k\pi}{6}3}$$
$$k = 0, X[2\cdot 0+1] \to X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$
$$k = 1, X[2\cdot 1+1] \to X[3] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1\cdot 3} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2\cdot 3} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3\cdot 3} \tag{20}$$
$$X[3] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}3} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$
$$k = 2, X[2\cdot 2+1] \to X[5] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1\cdot 5} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2\cdot 5} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3\cdot 5}$$
$$X[5] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}5} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}4} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$