Pembinaan KSN-Satria Data 2022

Materi Analisis Deret Waktu

Yenni Angraini

Struktur Data

1. Cross-section Data
2. Time-series Data
3. Panel Data (Longitudinal data)

Cross-section Data

Terdiri dari **beberapa objek** data pada **suatu waktu terntentu**. Misalnya data penduduk dan pendapatan perkapita tingkat kabupaten pada tahun 2015.

Kabupaten	Jumlah Penduduk (juta)	Pendapatan per kapita (ribu Rp/bulan)
A	1.3	670
B	0.9	750
C	1.1	1.100
D	1.4	830
….	….	….

Time-series Data

Time-series merupakan data yang terdiri atas **satu objek** tetapi meliputi **beberapa periode waktu** yaitu harian, bulanan, mingguan, tahunan, dan lain-lain.

Tahun	Penjualan
1981	127
1982	134
1983	176
1984	165
1985	159
1986	179
1987	215
1988	232
1989	238
1990	322
1991	389
1992	368
1993	394
1994	386

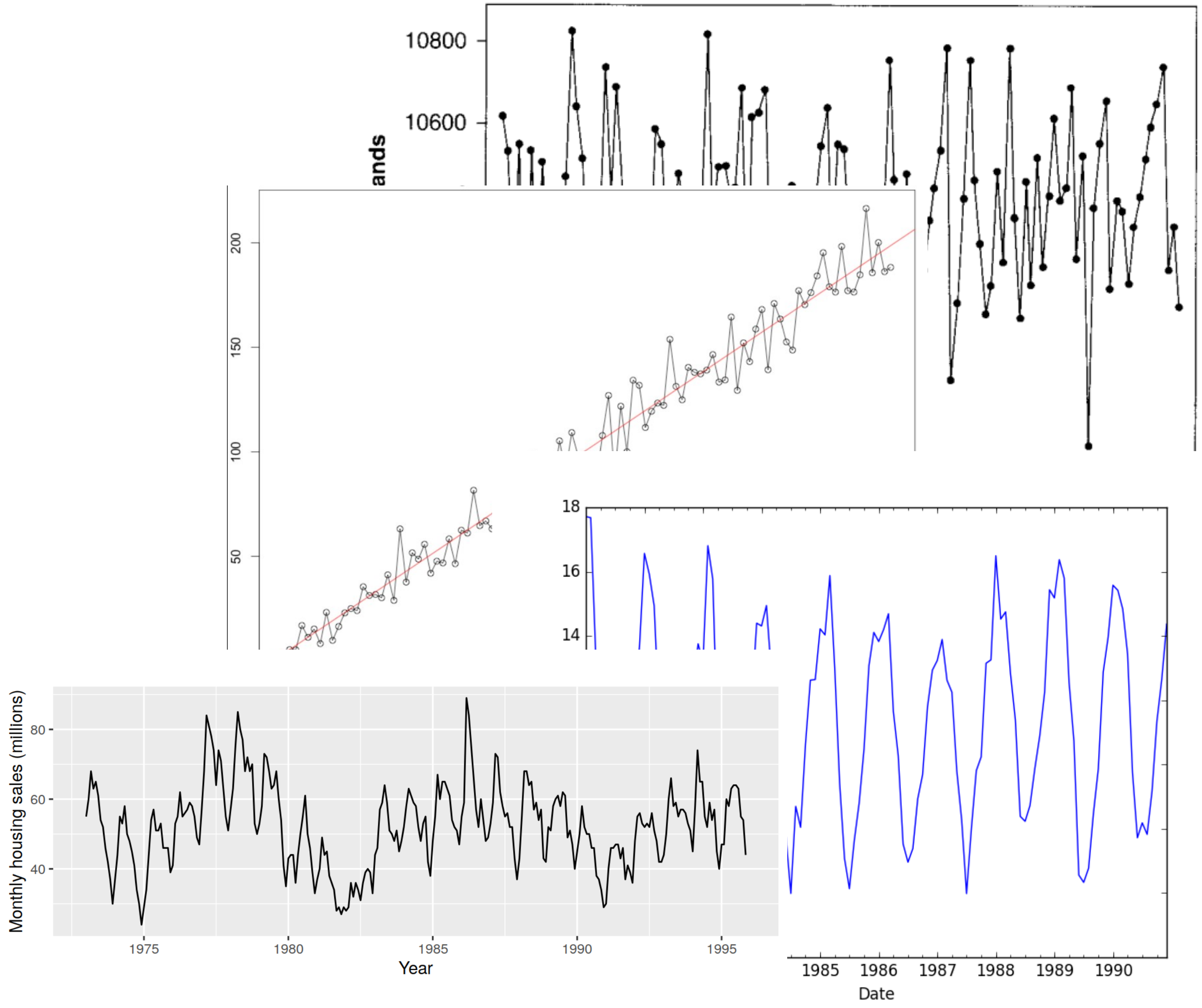
Panel Data (Longitudinal data)

Data panel adalah data yang menggabungkan antara data time-series dan data cross-section. Sehingga data panel akan memiliki **beberapa objek** dan **beberapa periode waktu**.

waktu	Individu ke	Peubah 1	Peubah 2	Peubah 3
t1	1 2 … n			
t2	1 2 … n			
t3	1 2 … n			
t4	1 2 … n			

Beberapa pola dalam mendeskripsikan Time-series Data

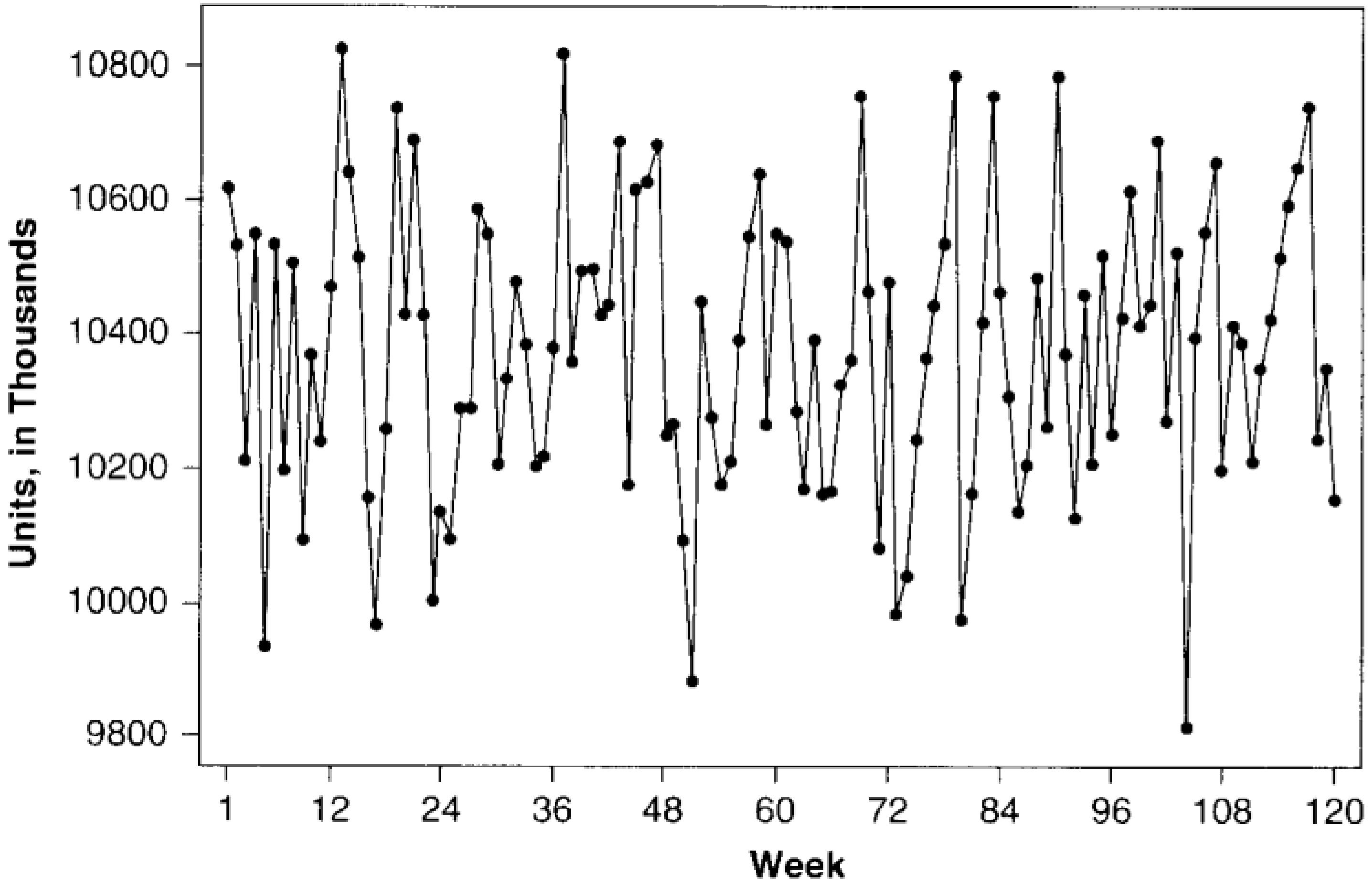
1. Stasioner (Stationary)
2. Kecenderungan (*Trend*)
3. Musiman (*Seasonal*)
4. Siklus (*Cycle*)



IPB University
Bogor Indonesia

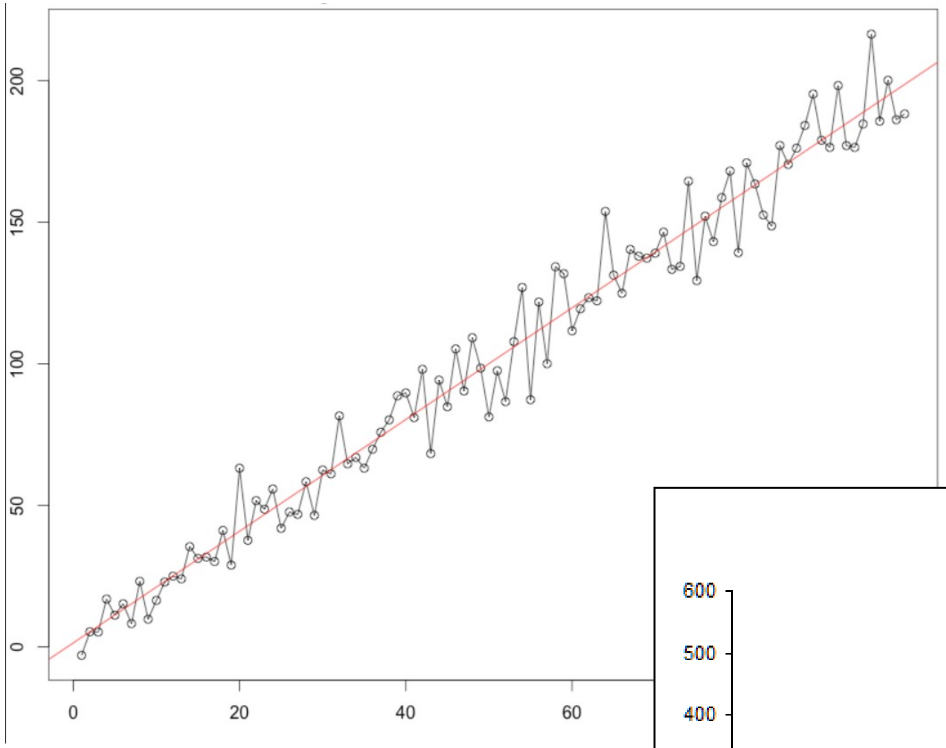
Stasioner (Stationary)

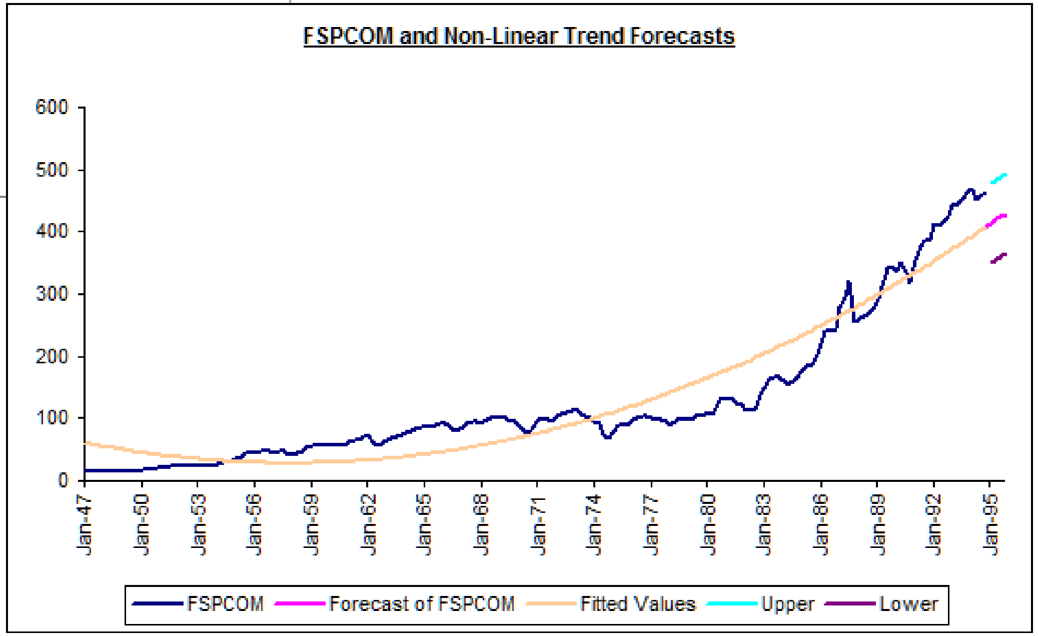
Data deret waktu disebut stasioner jika data memiliki rata-rata yang konstan, yaitu tidak memiliki pola naik dan turun yang berkelanjutan (Mills 2019).



Kecenderungan (*Trend*)

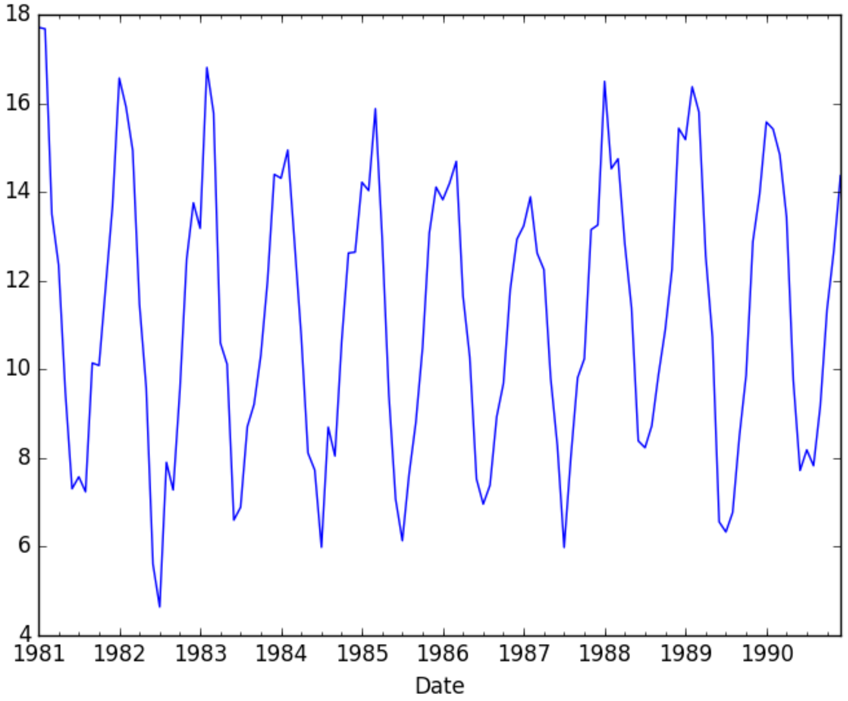
- Sebuah *trend* terdapat pada data deret waktu yang mengalami pola kenaikan atau penurunan untuk jangka waktu panjang. *Trend* memiliki 2 tipe kemiringan, yaitu kemiringan konstan dan kemiringan tidak konstan. Data yang memiliki *trend* dengan kemiringan konstan disebut sebagai data dengan *trend* linear (*linear trend*), sedangkan yang memiliki *trend* dengan kemiringan tidak konstan disebut sebagai data dengan *trend* nonlinear (*nonlinear trend*) (Mills 2019).

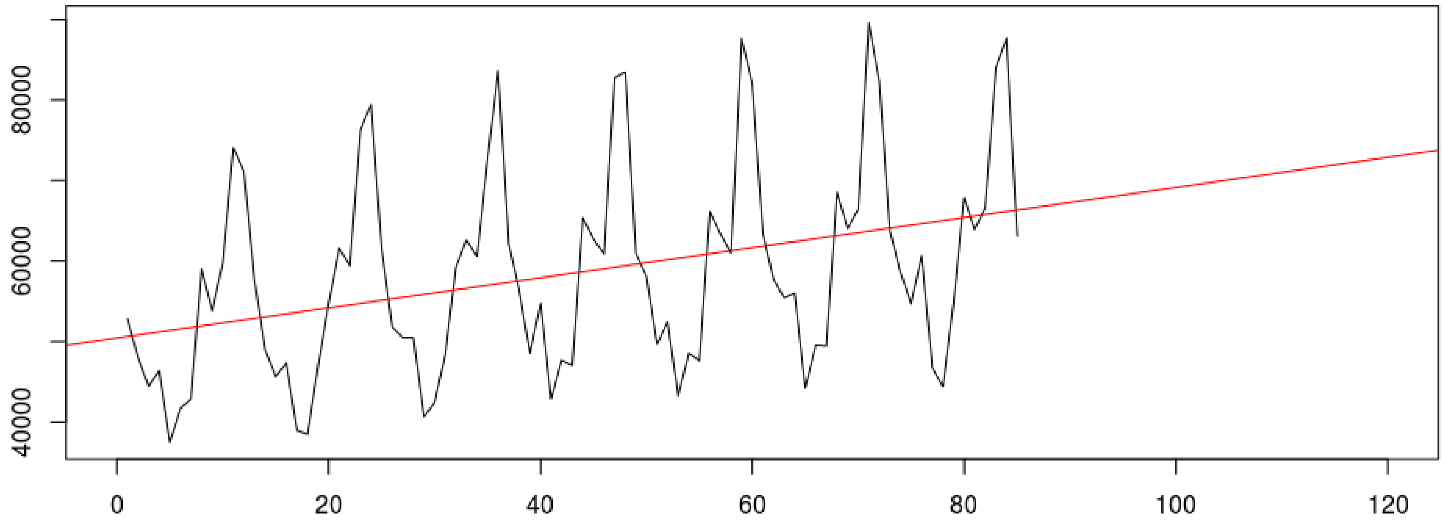




Musiman (*Seasonal*)

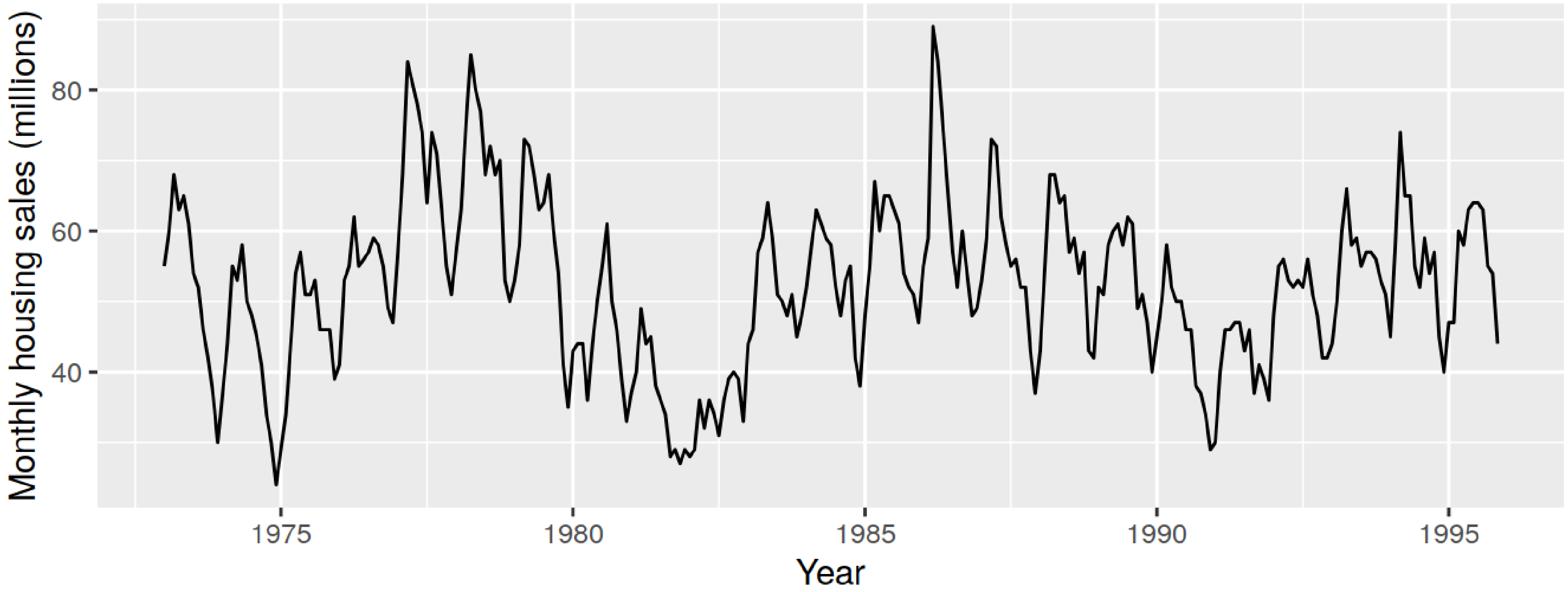
Pola musiman dideskripsikan sebagai pola yang terus berulang pada periode tertentu yang diketahui. Sebagai contoh, pola tersebut dapat berulang dalam periode 12 bulan dalam 1 tahun, atau dalam periode 7 hari dalam 1 minggu (Hyndman *et al.* 2008).





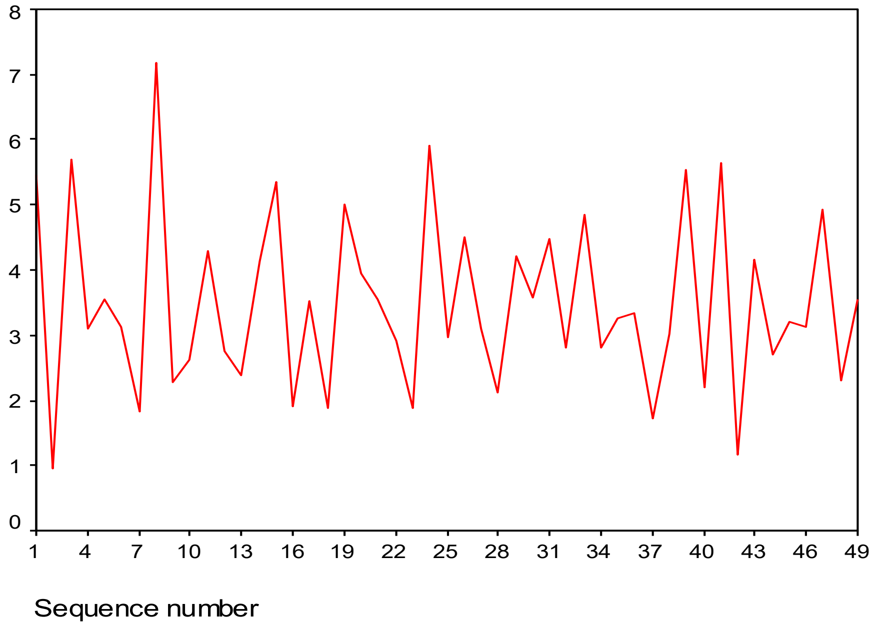
Siklus (*Cycle*)

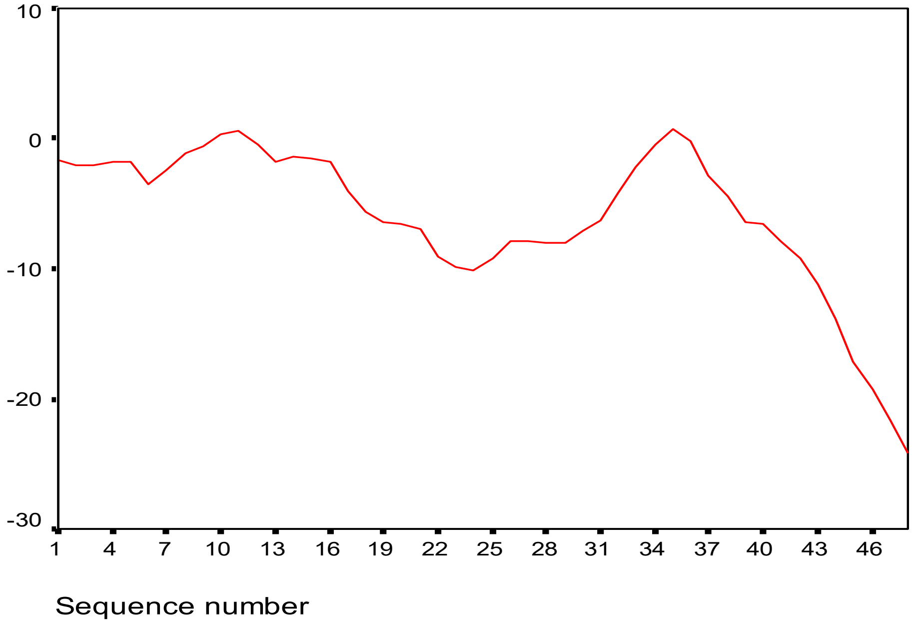
Sebuah pola siklus memiliki pola yang terus berulang tetapi tidak diketahui periode pastinya dan pola tersebut berulang pada periode yang tidak tetap (Hyndman *et al.* 2008).

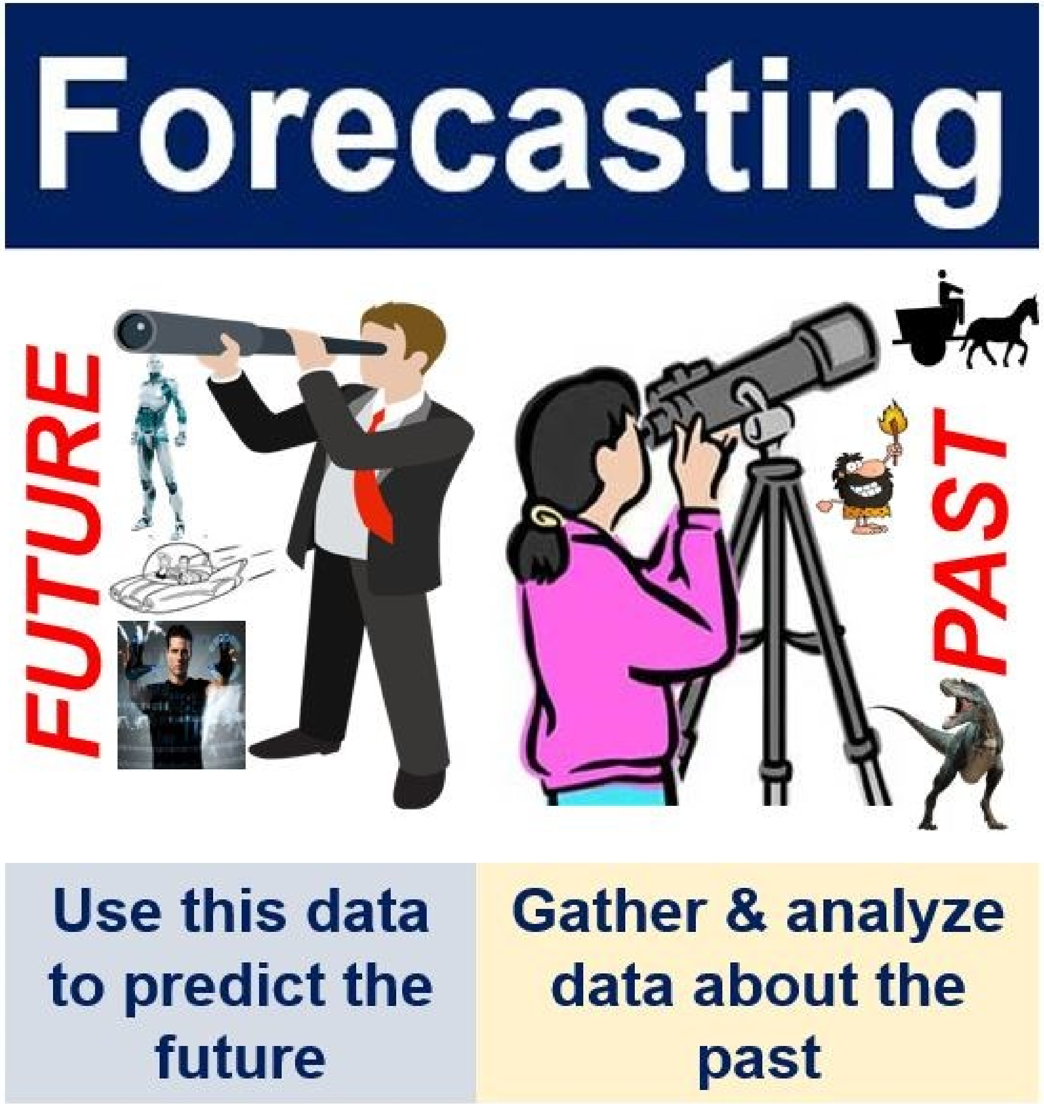


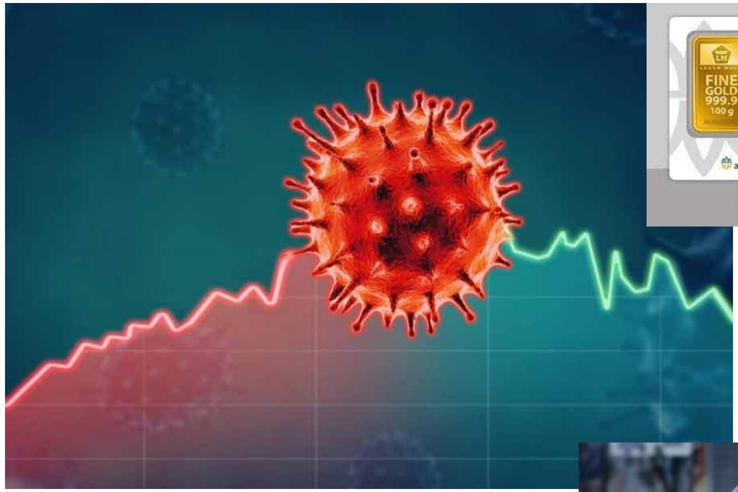
Karakteristik Data Deret Waktu

- Secara garis besar, data deret waktu dibedakan menjadi dua: stasioner dan tidak stasioner
- Dikatakan stasioner apabila data deret waktu memiliki nilai tengah (rataan) dan ragam (fluktuasi) yang konstan dari waktu ke waktu






Forecasting
FUTURE
PAST
Use this data to predict the future
Gather & analyze data about the past




FINE GOLD 999.9 100 g

Forecasting Method

- ❑ Classical models (smoothing methods, Time series models, Regression models, etc)
- ❑ Machine Learning
- ❑ Hybrid

Metode yang hanya didasarkan kepada penilaian dan intuisi, bukan kepada pengolahan data historis

Quantitative Forecasting Method in Time Series Data

Smoothing methods

- ❑ Moving Average
- ❑ Exponential smoothing
- ❑ Metode Winter

Time series Models

- ❑ ARMA Models
- ❑ ARIMA Models
- ❑ SARIMA Models
- ❑ ARCH-GARCH
- ❑ Intervention Models
- ❑ Transfer Function Models
- ❑ Vector autoregression (VAR)
- ❑ dll

25 years of time series forecasting

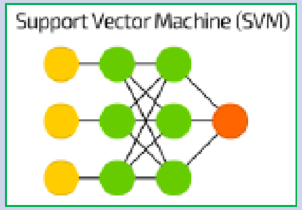
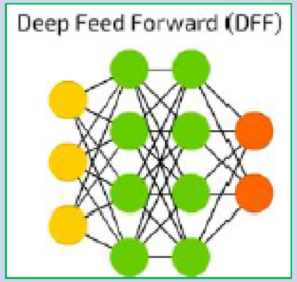
- 25 years of time series forecasting
  - Introduction
  - Exponential smoothing
    - Preamble
    - Variations
    - State space models
    - Method selection
    - Robustness
    - Prediction intervals
    - Parameter space and model properties
  - ARIMA models
    - Preamble
    - Univariate
    - Transfer function
    - Multivariate
  - Seasonality
  - State space and structural models and the Kalman filter

1980 → 2005

- Nonlinear models
  - Preamble
  - Regime-switching models
  - Functional-coefficient model
  - Neural nets
  - Deterministic versus stochastic dynamics
  - Miscellaneous
- Long memory models
- ARCH/GARCH models
- Count data forecasting
- Forecast evaluation and accuracy measures
- Combining
- Prediction intervals and densities
- A look to the future
- Acknowledgments
- References

De Gooijer& Hyndman(International Journal of Forecasting, 2006)

Quantitative Forecasting Method in Time Series Data

Approach	Variable	Technique	Methods
Causal	Univariate	Classical models	Multiple Regression, MARS, …
		Machine Learning	NN, SVR, ANFIS, Deep Learning NN, …
		Hybrid	Regression & NN, …
	Multivariate	Classical models	Multivariate Linear Regression (MLR), …
		Machine Learning	Multi output NN, Deep Learning NN, …
		Hybrid	MLR & Multi output NN, …
Time Series	Univariate	Classical models	TSR, ARIMA, ARIMAX, …
		Machine Learning	NN, SVR, ANFIS, Deep Learning NN, …
		Hybrid	ARIMA & NN, ARIMAX & NN, …
	Multivariate	Classical models	VARIMA, GSTAR, VARIMAX, GSTARX, …
		Machine Learning	Multi output NN, Deep Learning NN, …
		Hybrid	VARIMA & NN, GSTAR & NN, …

IPB University
Bogor Indonesia

1. Exponential Smoothing: Holt-Winter's method, Holt-Winter-Taylor's method
2. Decomposition Method
3. Trend Analysis & Time Series Regression
4. ARIMA & ARIMAX: Intervention Analysis, Transfer Function model
5. Neural Networks: FFNN, RBFN, GRNN, RNN
6. Adaptive Neuro Fuzzy Inference Systems (ANFIS)
7. Multiresolution Autoregressive (MAR)
8. Wavelet Neural Networks (WNN)
9. Support Vector Regression (SVR)
10. Fuzzy Time Series (FTS)
11. Quantile Regression Autoregressive & ARIMAX
12. Quantile Regression Neural Networks (QRNN)
13. Singular Spectrum Analysis (SSA) - Linear Recurrence Relations (LRR)
14. Deep Learning Neural Networks (DLNN)

Individual Methods

1. Decomposition method & ARIMA
2. Decomposition method & Neural Networks
3. Decomposition method & Fuzzy Time Series
4. Wavelet Transform - MODWT & Autoregressive Model
5. Wavelet Transform - MODWT & Neural Networks
6. Wavelet Transform - MODWT & ANFIS
7. Singular Spectrum Analysis & Time Series Regression
8. Singular Spectrum Analysis & ARIMA
9. Singular Spectrum Analysis & Neural Networks
10. Singular Spectrum Analysis & ANFIS
11. Singular Spectrum Analysis & Support Vector Regression
12. Singular Spectrum Analysis & Deep Learning Neural Networks

Hybrid Decomposition Methods

1. Winter's model & ARIMA
2. Winter's model & Neural Networks
3. Winter's model & Fuzzy Time Series
4. Decomposition Method & ARIMA
5. Decomposition Method & Neural Networks
6. Time Series Regression & Neural Networks
7. Time Series Regression & ANFIS
8. Time Series Regression & Support Vector Regression
9. ARIMAX & Neural Networks
10. ARIMAX & ANFIS
11. ARIMAX & Support Vector Regression
12. ARIMAX & Quantile Regression Neural Networks
13. ARIMAX & Deep Learning Neural Networks

Hybrid Methods

Future WORK

Peramalan (Forecasting)

- Peramalan adalah memprediksi masa depan secara akurat dengan informasi yang tersedia. Informasi tersebut mencakup data masa lalu dan pengetahuan tentang faktor lain yang akan mempengaruhi hasil dari peramalan. (Hyndman dan Athanasopoulos 2018).
- Peramalan dilakukan untuk memprediksi nilai di masa yang akan datang dengan menggunakan data deret waktu yang sudah tersedia.
- Terdapat tiga macam peramalan berdasarkan penggunaannya, yaitu peramalan jangka pendek, jangka menengah dan jangka panjang
- Peramalan Jangka Pendek : Peramalan jangka pendek seringkali digunakan untuk penjadwalan pegawai, produksi dan transportasi.
- Peramalan Jangka Menengah : Peramalan jangka menengah seringkali digunakan untuk mengukur kebutuhan sumber daya di masa depan. Peramalan jangka menengah dapat berguna untuk membeli bahan mentah sebelum produksi, menerima pegawai baru, atau membeli peralatan dan mesin.
- Peramalan Jangka Panjang : Peramalan jangka panjang seringkali digunakan untuk perencanaan strategi.

Terima Kasih

Pembinaan KSN-Satria Data 2023
Pertemuan 2

Materi Analisis Deret Waktu

Yenni Angraini

Peramalan (Forecasting)

- Peramalan adalah memprediksi masa depan secara akurat dengan informasi yang tersedia. Informasi tersebut mencakup data masa lalu dan pengetahuan tentang faktor lain yang akan mempengaruhi hasil dari peramalan. (Hyndman dan Athanasopoulos 2018).
- Peramalan dilakukan untuk memprediksi nilai di masa yang akan datang dengan menggunakan data deret waktu yang sudah tersedia.
- Terdapat tiga macam peramalan berdasarkan penggunaannya, yaitu peramalan jangka pendek, jangka menengah dan jangka panjang
- Peramalan Jangka Pendek : Peramalan jangka pendek seringkali digunakan untuk penjadwalan pegawai, produksi dan transportasi.
- Peramalan Jangka Menengah : Peramalan jangka menengah seringkali digunakan untuk mengukur kebutuhan sumber daya di masa depan. Peramalan jangka menengah dapat berguna untuk membeli bahan mentah sebelum produksi, menerima pegawai baru, atau membeli peralatan dan mesin.
- Peramalan Jangka Panjang : Peramalan jangka panjang seringkali digunakan untuk perencanaan strategi.

Kesalahan Peramalan (Forecast Error) dan Sisaan (Residual) pada deret waktu

Kesalahan Peramalan

$$e_t(\tau) = y_t - \hat{y}_t(t-\tau)$$

Contoh :

$$e_t(1) = y_t - \hat{y}_t(t-1)$$

Sisaan

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Ukuran Keakuratan Peramalan

- Mean Error (ME)
- Mean Absolute Deviation (MAD)
- Mean Squared Error (MSE)
- Mean Percent forecast- Error (MPE)
- Mean Absolute Percent forecast- Error (MAPE)

$$ME = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t(1) \qquad MAD = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |e_t(1)| \qquad MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} [e_t(1)]^2$$

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} re_t(1) \qquad MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |re_t(1)|$$

TABLE 2.2 Calculation of Forecast Accuracy Measures

Time Period	(1) Observed Value y_t	(2) Forecast $\hat{y}_t(t-1)$	(3) Forecast Error $e_t(1)$	(4) Absolute Error $\lvert e_t(1)\rvert$	(5) Squared Error $[e_t(1)]^2$	(6) Relative (%) Error $(e_t(1)/y_t)100$	(6) Absolute (%) Error $\lvert(e_t(1)/y_t)100\rvert$
1	47	51.1	−4.1	4.1	16.81	−8.7234	8.723404
2	46	52.9	−6.9	6.9	47.61	−15	15
3	51	48.8	2.2	2.2	4.84	4.313725	4.313725
4	44	48.1	−4.1	4.1	16.81	−9.31818	9.318182
5	54	49.7	4.3	4.3	18.49	7.962963	7.962963
6	47	47.5	−0.5	0.5	0.25	−1.06383	1.06383
7	52	51.2	0.8	0.8	0.64	1.538462	1.538462
8	45	53.1	−8.1	8.1	65.61	−18	18
9	50	54.4	−4.4	4.4	19.36	−8.8	8.8
0	51	51.2	−0.2	0.2	0.04	−0.39216	0.392157
11	49	53.3	−4.3	4.3	18.49	−8.77551	8.77551
12	41	46.5	−5.5	5.5	30.25	−13.4146	13.41463
13	48	53.1	−5.1	5.1	26.01	−10.625	10.625
14	50	52.1	−2.1	2.1	4.41	−4.2	4.2
15	51	46.8	4.2	4.2	17.64	8.235294	8.235294
16	55	47.7	7.3	7.3	53.29	13.27273	13.27273
17	52	45.4	6.6	6.6	43.56	12.69231	12.69231
18	53	47.1	5.9	5.9	34.81	11.13208	11.13208
19	48	51.8	−3.8	3.8	14.44	−7.91667	7.916667
20	52	45.8	6.2	6.2	38.44	11.92308	11.92308
	Totals		*−11.6*	*86.6*	*471.8*	*−35.1588*	*177.3*

$$ME = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t(1) = \frac{1}{20}(-11.6) = -0.58$$

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |e_t(1)| = \frac{1}{20}(86.6) = 4.33$$

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} [e_t(1)]^2 = \frac{1}{20}(471.8) = 23.59$$

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} re_t(1) = \frac{1}{20}(-35.1588) = -1.76\%$$

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |re_t(1)| = \frac{1}{20}(177.3) = 8.87\%$$

Sekilas Tentang Smoothing

- Prinsip dasar: pengenalan pola data dengan menghaluskan variasi lokal.
- Prinsip penghalusan umumnya berupa rata-rata.
- Beberapa metode penghalusan hanya cocok untuk pola data tertentu.

Smoothing (Pemulusan)

- Pemulusan Rataan Bergerak Sederhana (Simple Moving Average)
- Pemulusan Rataan Bergerak Berganda (Double Moving Average)
- Pemulusan Eksponensial Sederhana (Simple Exponential Smoothing)
- Pemulusan Eksponensial Berganda (Double Exponential Smoothing)
- Pemulusan eksponensial Data Musiman (Winters’ Method)

Single Moving Average

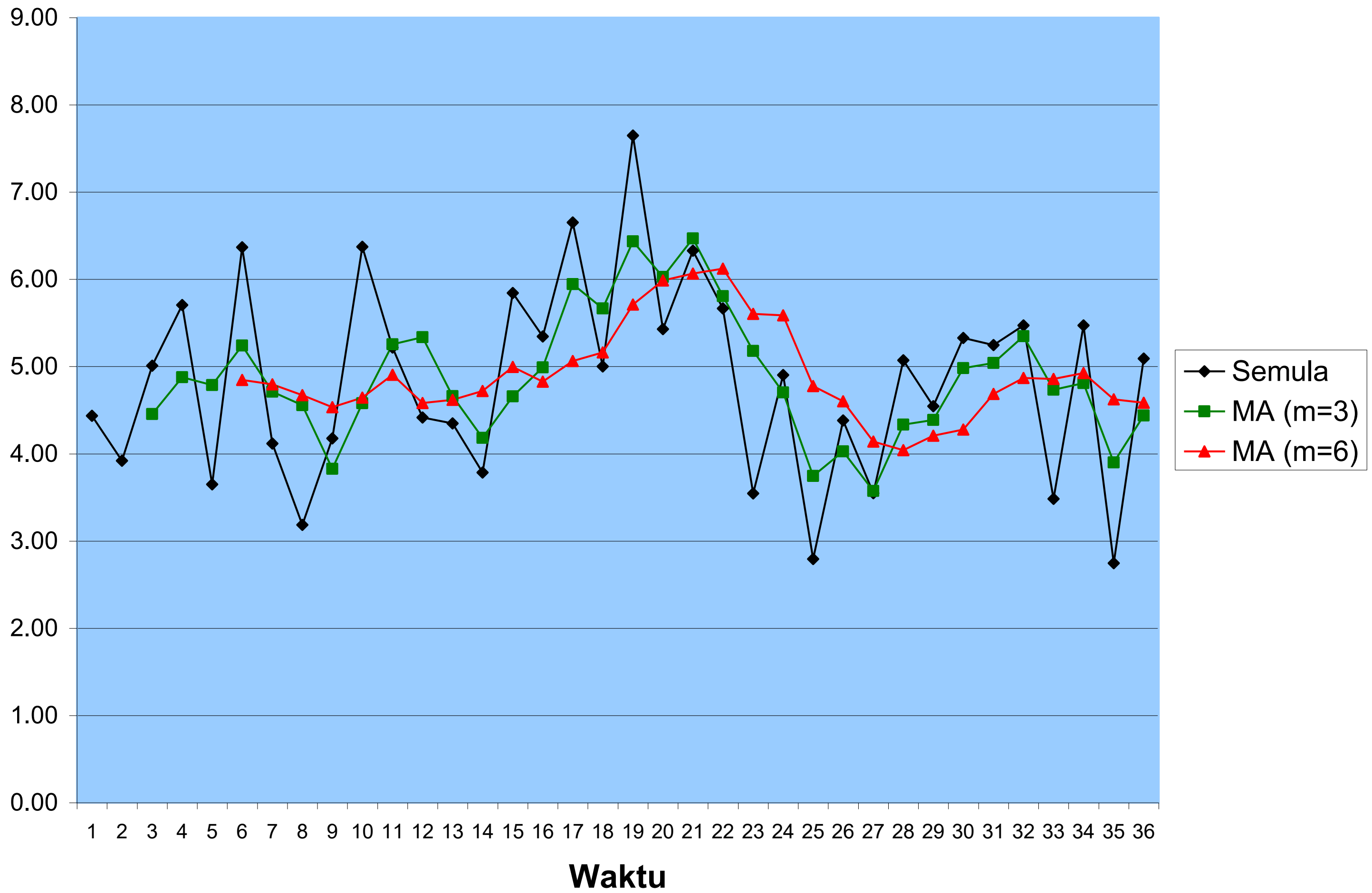
- Ide: data pada suatu periode dipengaruhi oleh data beberapa periode sebelumnya
- Cocok untuk pola data konstan/stasioner
- Prinsip dasar:
    - Data *smoothing* pada periode ke-*t* merupakan rata-rata dari *m* buah data dari data periode ke-*t* hingga ke-(*t*-*m*+1) ➔

$$S_t = \frac{1}{m} \sum_{i=t-m+1}^{t} X_i$$

    - Data *smoothing* pada periode ke-*t* berperan sebagai nilai *forecasting* pada periode ke-*t*+1

$$F_t = S_{t-1} \text{ dan } F_{n,h} = S_n$$

Pengaruh Pemilihan Nilai *m*



MA dengan *m* yang lebih besar menghasilkan pola data yang lebih halus.

Double Moving Average

- Mirip dengan *single moving average*
- Cocok untuk data yang berpola tren
- Proses penghalusan dengan rata-rata dilakukan dua kali
  - Tahap I: $$S_{1,t} = \frac{1}{m} \sum_{i=t-m+1}^{t} X_i$$
  - Tahap II: $$S_{2,t} = \frac{1}{m} \sum_{i=t-m+1}^{t} S_{1,i}$$

Double Moving Average (lanjutan)

- Forecasting dilakukan dengan formula

$$F_{2,t,t+h} = A_t + B_t(h)$$

dengan

$$A_t = 2S_{1,t} - S_{2,t}$$

$$B_t = \frac{2}{m-1}\left(S_{1,t} - S_{2,t}\right)$$

Ilustrasi DMA dengan *m*=3

t	X_t	$S_{1,t}$	$S_{2,t}$	A_t	B_t	$F_{2,t}$
1	12.50					
2	11.80					
3	12.85	12.38				
4	13.95	12.87				
5	13.30	13.37	12.87	13.87	0.50	
6	13.95	13.73	13.32	14.14	0.41	14.37
7	15.00	14.08	13.73	14.43	0.35	14.55
8	16.20	15.05	14.29	15.81	0.76	14.78
9	16.10	15.77	14.97	16.57	0.80	16.57
10						17.37
11						18.17
12						18.97

Single Exponential Smoothing

- Metode Moving Average mengakomodir pengaruh data beberapa periode sebelumnya melalui pemberian bobot yang sama dalam proses merata-rata.
- Hal ini berarti bobot pengaruh sekian periode data tersebut dianggap sama.
- Dalam kenyataannya, bobot pengaruh data yang lebih baru mestinya lebih besar.
- Adanya perbedaan bobot pengaruh ini diakomodir metode SES dengan menetapkan bobot secara eksponensial.

Single Exponential Smoothing (lanjutan)

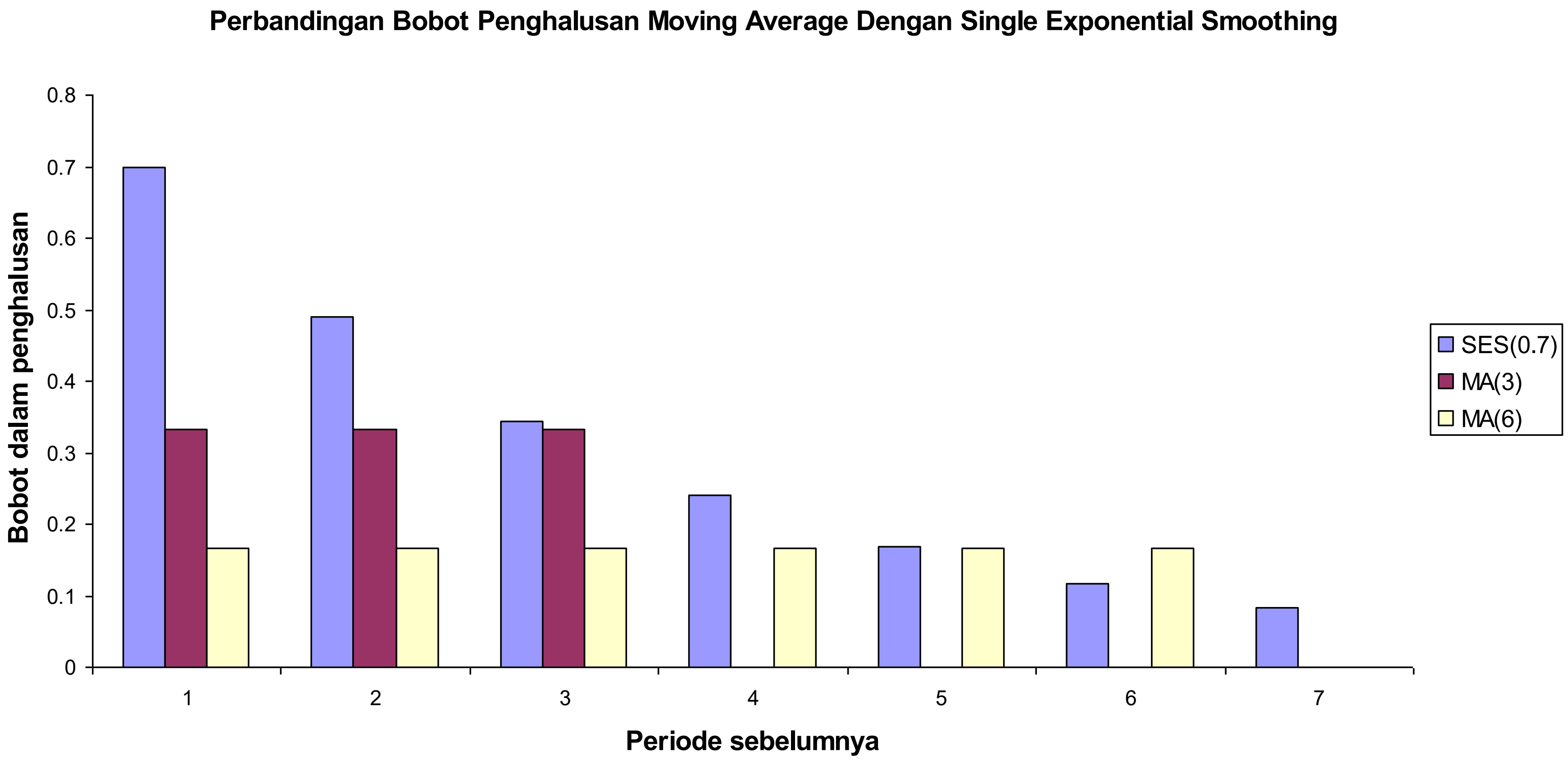
- Nilai *smoothing* pada periode ke-t:

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

- Nilai α merupakan parameter pemulusan dengan nilai $0 < \alpha < 1$.
- S_0 biasanya diambil dari rataan beberapa data pertama (5 untuk MINITAB)
- Nilai *smoothing* pada periode ke-t bertindak sebagai nilai *forecast* pada periode ke-(t+1)

$$\Rightarrow F_t = S_{t-1} \text{ dan } F_{n,h} = S_n$$

Bobot Penghalusan MA vs SES



Ilustrasi SES dengan $\alpha = 0.2$

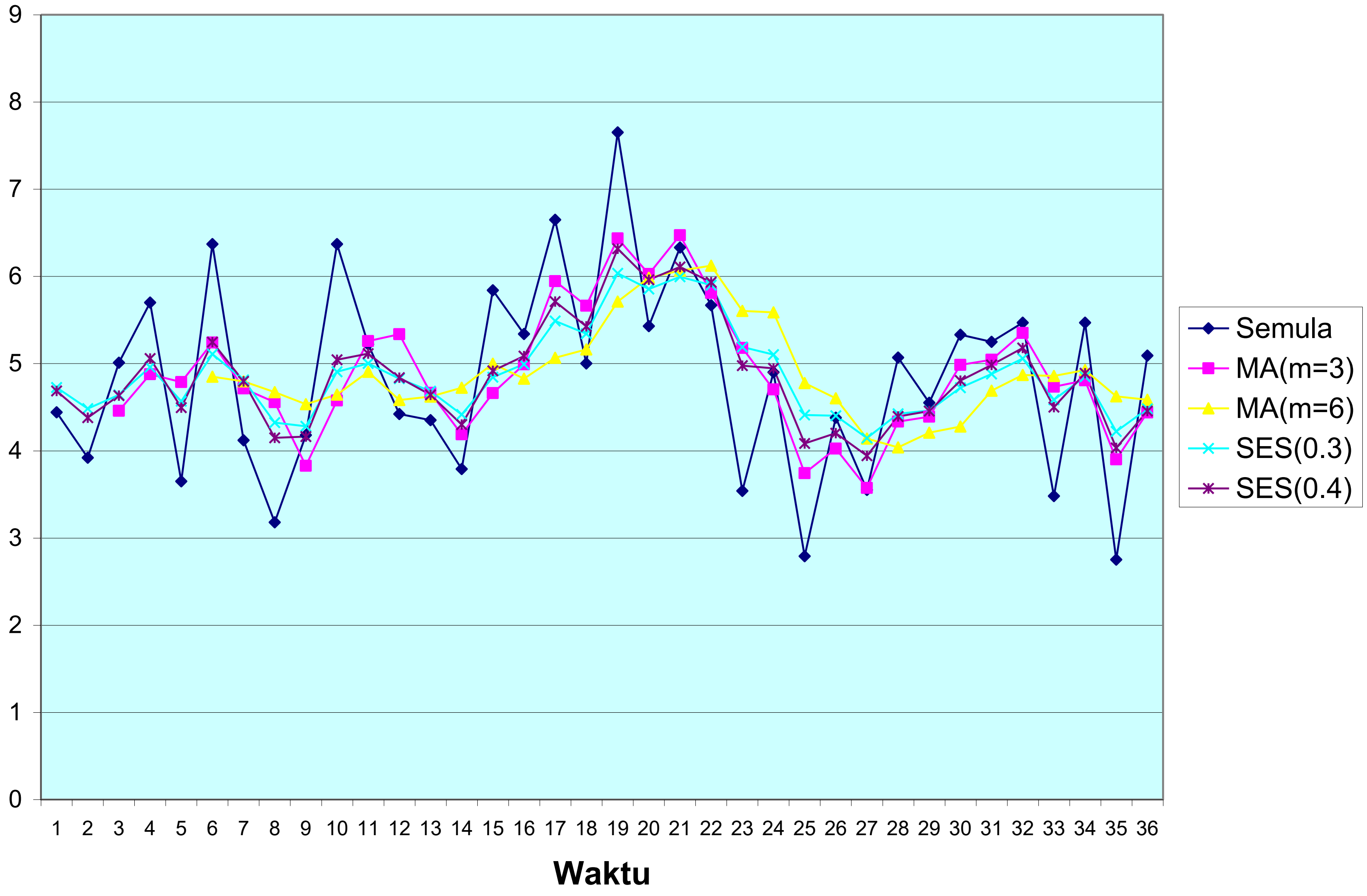
Periode (t)	Data (X_t)	*Smoothing* (S_t)	*Forecasting* (F_t)
1	5	5.40000	5.50000
2	7	5.72000	5.40000
3	6	5.77600	5.72000
4	4	5.42080	5.77600
5	5	5.33664	5.42080
6	6	5.46931	5.33664
7	8	5.97545	5.46931
8	7	6.18036	5.97545
9	8	6.54429	6.18036
10	7	6.63543	6.54429
11			6.63543
12			6.63543

Pemilihan Model

- Beberapa model dapat diterapkan untuk data yang sama (MA dengan m = 3 atau m = 6, SES dengan $\alpha = 0.3$ atau $\alpha = 0.4$)

  ➔ mana yang dipilih??
- Membagi data menjadi dua bagian, *training* dan *testing*
- *Training*: bagian data yang digunakan untuk *smoothing* atau *modeling*
- *Testing*: bagian data yang digunakan untuk verifikasi

Pemilihan Model (lanjutan)



Double Exponential Smoothing

- Digunakan untuk data yang memiliki pola tren
- Semacam SES, hanya saja dilakukan dua kali
    - Pertama untuk tahapan ‘level’
    - Kedua untuk tahapan ‘tren’

Double Exponential Smoothing (lanjutan)

- Nilai *smoothing* data ke-*t*:

$$S_t = L_{t-1} + T_{t-1}$$

$$T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$$

$$L_t = \alpha X_t + (1- \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

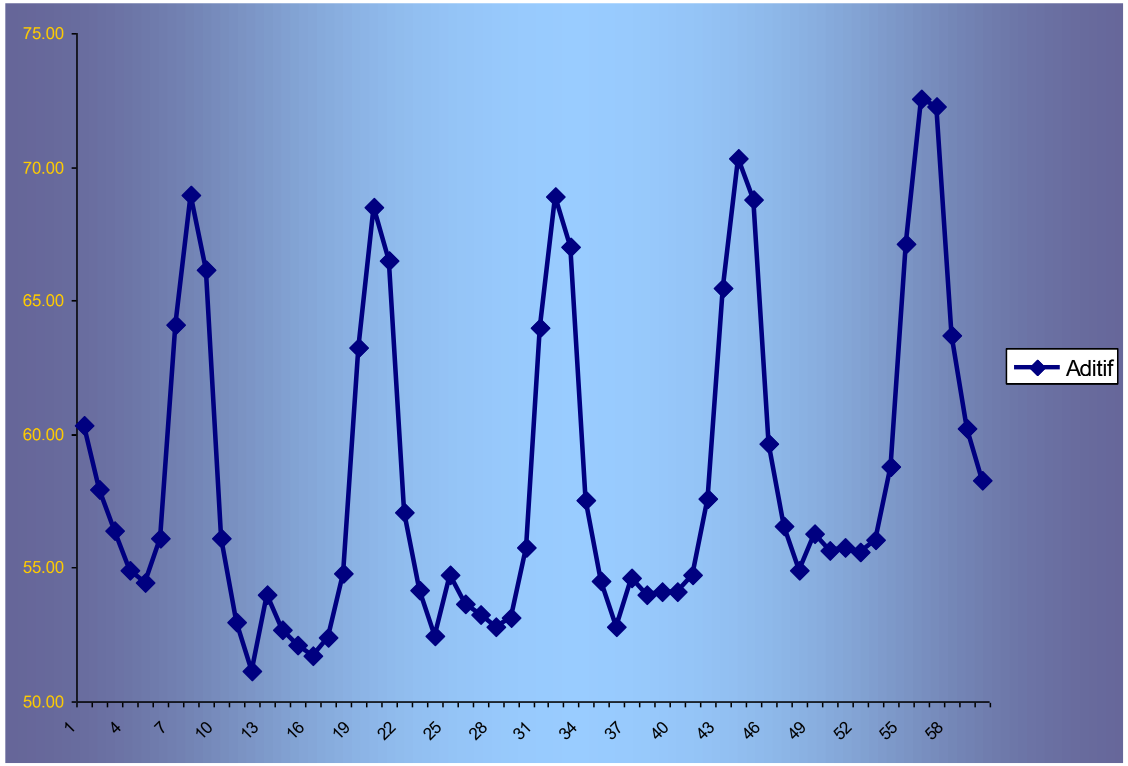
- Bila: $Y_t = a + b*t + e$, maka $L_0 = a$ dan $T_0 = b$
- Nilai *forecasting* diperoleh dengan formula

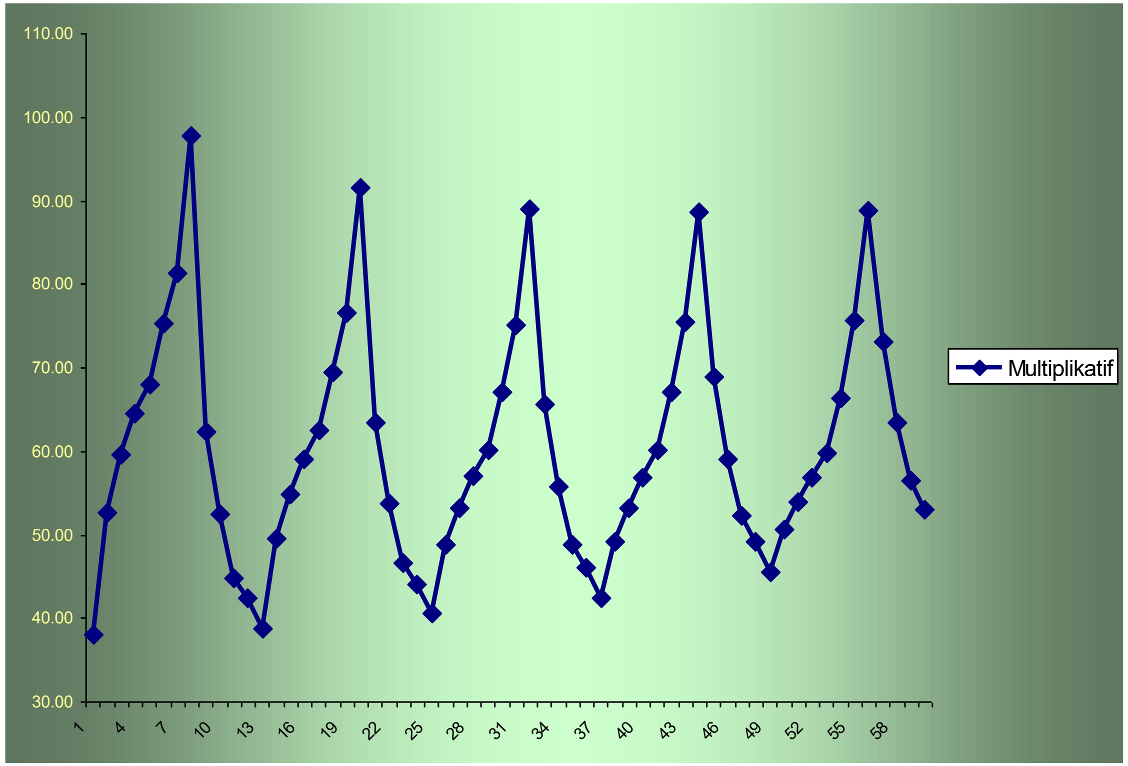
$$F_{t,h} = L_t + h*T_t$$

Metode Winters

- Merupakan salah satu pendekatan *smoothing* untuk data yang berpola musiman (*seasonal*)
- Memiliki dua prosedur penghitungan tergantung kondisi data:
  - **Aditif**: komponen musiman bersifat *aditif* dengan komponen level dan tren
  - **Multiplikatif**: komponen musiman bersifat *multiplikatif* dengan komponen level dan tren

Seasonal Aditif vs Multiplikatif





Metode Winters - Aditif

- Komponen model:
  - $L_t = \alpha(Y_t - M_{t-p}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
  - $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$
  - $M_t = \delta(Y_t - L_t) + (1 - \delta)M_{t-p}$
- Nilai *Smoothing*:

  $S_t = L_t + T_t + M_{t-p}$
- Nilai *Forecast*:

  $F_{t,h} = L_t + h*T_t + M_{t-p+h}$

Nilai Awal - Aditif

- Ambil 2q data pertama (q: ordo musiman)
- Hitung rata-rata masing-masing musim
  - Musim I $$V_1 = \frac{1}{q}\sum_{i=-2q+1}^{-q} X_i$$
  - Musim II $$V_2 = \frac{1}{q}\sum_{i=-q+1}^{0} X_i$$
- $T_0 = (V_2 - V_1)/q$
- $L_0 =(V_2 + T_0(q-1))/2$
- Deseasonalized data:

  $S_t = X_t - (L_0 + tT_0)\ \forall t = -2q+1, -2q+2, \ldots, 0$
- $M_{-q+1} = (M_{-2q+1} + M_{-q+1})/2, \ldots, M_0 = (M_{-q} + M_0)/2$

Metode Winters - Multiplikatif

- Komponen model:
  - $L_t = \alpha(Y_t / M_{t-p}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
  - $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$
  - $M_t = \delta(Y_t / L_t) + (1 - \delta)M_{t-p}$
- Nilai *Smoothing*:

  $S_t = (L_t + T_t)M_{t-p}$
- Nilai *Forecast*:

  $F_{t,h} = (L_t + h*T_t)M_{t-p+h}$

Nilai Awal - Multiplikatif

- Serupa dengan versi aditif, hanya berbeda dalam menghitung deseasonalized data, di mana:

  $S_t = X_t / (L_0 + tT_0)\ \forall t = -2q+1, -2q+2, \ldots, 0$

Pemodelan

Pemodelan – ARIMA(p,d,q)

- Penamaan model ARIMA(p,d,q)
  - AR(p) : *Autoregressive* ber-ordo *p*
  - I(d) : *Integreted* ber-ordo *d*
  - *MA(q) : Moving Average* ber-ordo *q*
- Model Stasioner dan Tidak Stasioner
  - Model Stasioner : AR(p), MA(q) dan ARMA(p,q)
  - Model Tidak Stasioner : ARI(p,d), IMA(d,q), dan ARIMA(p,d,q)

Data Deret Waktu

Y1, Y2, Y3,...., Yt

Merupakan peubah acak yang dibangkitkan oleh proses peluang tertentu dan Yt bisa tidak bebas satu dengan lainnya.

Pengamatan didapatkan secara teratur dari waktu ke waktu dan ada kaitan antara satu pengamatan terhadap pengamatan lainnya

KETIDAKBEBASAN ini yang membedakan antar model deret waktu dengan model CROSS-SECTION

Data Deret Waktu

- Rangkaian peubah acak Y1, Y2,....dinamakan dengan proses stokastik
- Karena Yt adalah peubah acak, maka prilaku dapat digambarkan dengan nilai harapan, ragam dan koragamnya

$$\boxed{\mu_t = E(Y_t)}$$

$$\boxed{\gamma_{t,s} = Cov(Y_t, Y_s)}$$

$$\boxed{\rho_{t,s} = Corr(Y_t, Y_s)}$$

$$\boxed{Corr(Y_t, Y_s) = \frac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_s)}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}}}$$

Penting untuk diingat

$$\gamma_{t,t} = Var(Y_t) \qquad \rho_{t,t} = 1$$

$$\gamma_{t,s} = \gamma_{s,t} \qquad \rho_{t,s} = \rho_{s,t}$$

$$|\gamma_{t,s}| \le \sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}} \qquad |\rho_{t,s}| \le 1$$

Kestasioneran (Stationary)

- Asumsi yang mendasari pemodelan data deret waktu adalah kestasioneran
- Prinsip dasar: model peluang yang mendasari proses stokastik/data deret waktu tidak berubah bersama waktu (*process is in statistical equilibrium)*
- Suatu deret waktu Y_t dikatakan stasioner jika :

$$E[Y_t] = E[Y_{t-1}] = E[Y_{t-2}] = \cdots = E[Y_{t-k}]$$
$$V[Y_t] = V[Y_{t-1}] = V[Y_{t-2}] = \cdots = V[Y_{t-k}]$$

Kesimpulan

Jika deret waktu memiliki sifat :

- Nilai tengah konstan (tidak tergantung dari t)
- Ragamnya konstan (tidak tergantung dari t)

Maka data deret waktu ini disebut STASIONER

D.W STASIONER →mudah untuk dimodelkan

D.W TIDAK STASIONER harus transformasi dahulu agar menjadi STASIONER sebelum dimodelkan

Model Moving Average, MA(q)

- Model MA mempunyai ordo yang besarnya dinotasikan dengan huruf *"q"*, sehingga dinotasikan dengan *MA(q)*
- Model MA mengasumsikan tiap observasi dibentuk oleh rata-rata *q* periode ke belakang
- Model umum *MA(q)* ditulis :

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Model Moving Average, MA(1)

MA(1) : Nilai deret waktu saat ini bergantung pada nilai eror terakhir, satu unit waktu di masa lalu.

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2}) \\ &= Cov(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) = -\theta\sigma_e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-2} - \theta e_{t-3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

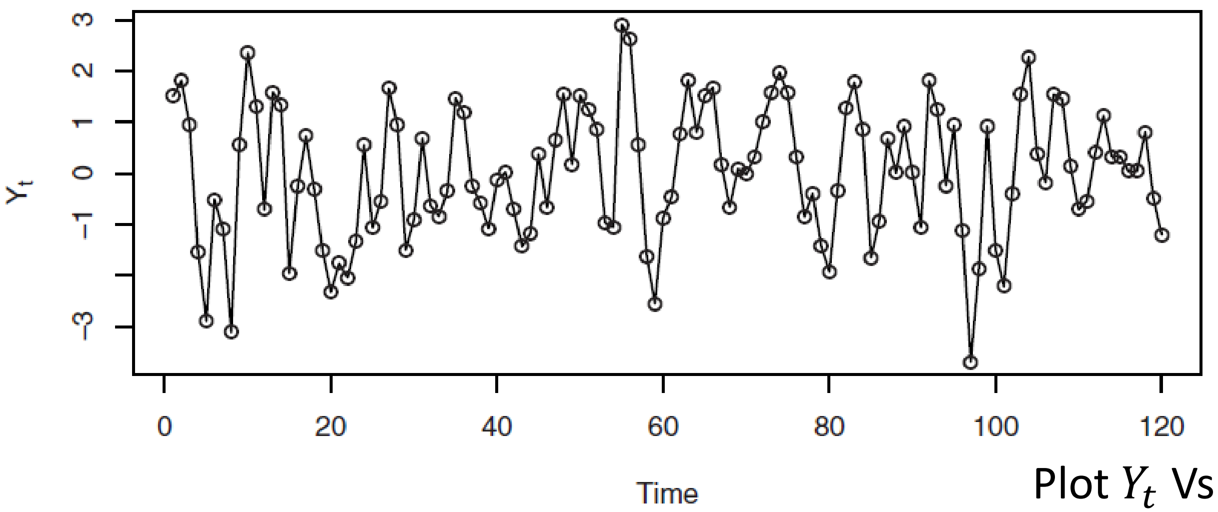
$$E(Y_t) = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= Var(Y_t) = \sigma_e^2(1+\theta^2) \\ \gamma_1 &= -\theta\sigma_e^2 \end{aligned}$$

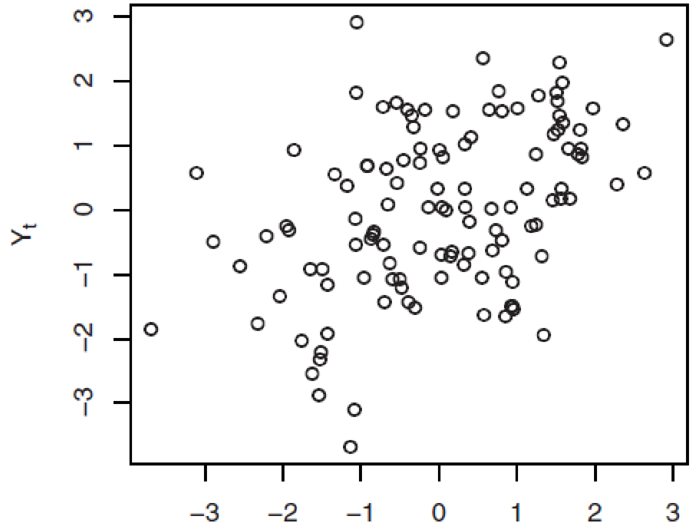
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (-\theta)/(1+\theta^2) \\ \gamma_k &= \rho_k = 0 \quad \text{for } k \geq 2 \end{aligned}$$

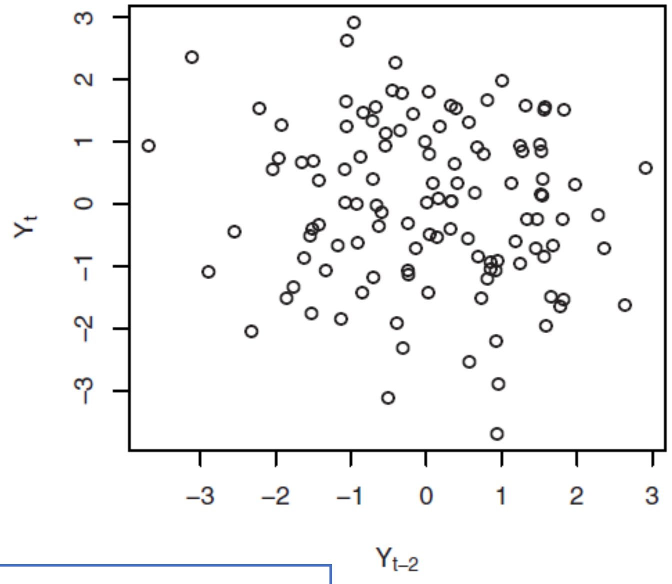
Contoh: Proses MA(1) dengan $\theta = -0.9$



Plot Y_t Vs Y_{t-1}



Plot Y_t Vs Y_{t-2}



Terdapat korelasi positif pada lag 1

Model Moving Average, MA(2)

MA(2) : Nilai deret waktu saat ini bergantung pada dua nilai eror terakhir, satu unit waktu dan dua unit waktu di masa lalu.

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = Var(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}, e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2} - \theta_2 e_{t-3}) \\
&= Cov(-\theta_1 e_{t-1}, e_{t-1}) + Cov(-\theta_1 e_{t-2}, -\theta_2 e_{t-2}) \\
&= [-\theta_1 + (-\theta_1)(-\theta_2)]\sigma_e^2 \\
&= (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2 \\
\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}, e_{t-2} - \theta_1 e_{t-3} - \theta_2 e_{t-4}) \\
&= Cov(-\theta_2 e_{t-2}, e_{t-2}) \\
&= -\theta_2\sigma_e^2
\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0 \quad \text{for } k = 3, 4, \ldots$$

Model Moving Average, MA(q)

- Dengan cara yang sama dapat ditelusuri sifat-sifat dari MA(3), MA(4), ...dst
- Yang perlu diingat adalah :
  - Untuk MA(q) maka $\rho_k \neq 0$ jika $k \leq q$
  - Dan $\rho_k = 0$ jika $k \geq q + 1$

The General MA(q) Process

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_e^2$$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \text{for } k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{for } k > q \end{cases}$$

Model MA(q)

$$\begin{aligned} Y_t &= e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \\ &= e_t - \theta_1 B e_t - \theta_2 B^2 e_t - \cdots - \theta_q B^q e_t \\ &= \boxed{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)} e_t \end{aligned}$$

$$\boxed{Y_t = \theta(B) e_t}$$

$$\boxed{\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)}$$

Misalkan Anda memiliki observasi yang mengikuti model MA(1) dengan $\theta = -0.75$. Manakah dari pernyataan berikut yang benar?

A. Diagram pencar Y_t vs Y_{t-1} akan membentuk tren linier negative dan diagram pencar Y_t vs Y_{t-2} akan membentuk tren linier negative
B. Diagram pencar Y_t vs Y_{t-1} akan membentuk tren linier positif dan diagram pencar Y_t vs Y_{t-2} akan membentuk tren linier positif
C. Diagram pencar Y_t vs Y_{t-1} akan membentuk tren linier negative dan diagram pencar Y_t vs Y_{t-2} akan memiliki pola hubungan yang acak
D. Diagram pencar Y_t vs Y_{t-1} akan membentuk tren linier positif dan diagram pencar Y_t vs Y_{t-2} akan memiliki pola hubungan yang acak

Model Autoregressive, AR(p)

- Model AR mempunyai ordo yang besarnya dinotasikan dengan huruf *“p”*, sehingga dinotasikan dengan *AR(p)*
- Nilai Y_t pada periode saat ini (t) adalah kombinasi linear dari p nilai periode sebelumnya ditambah komponen e_t
- Model umum *AR(p)* ditulis :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

Asumsi: e_t saling bebas thdp $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$

Model Autoregressive, AR(1)

AR(1): Nilai deret waktu saat ini bergantung pada nilai terakhir, satu unit waktu di masa lalu.

Model: $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$

$$Var(Y_t) = Var(\phi Y_{t-1} + e_t)$$
$$= \phi^2 Var(Y_{t-1}) + Var(e_t)$$

$$\gamma_0 = \phi^2 \gamma_0 + \sigma_e^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$$

dengan $\phi^2 < 1$ atau $|\phi| < 1$

Model Autoregressive, AR(1)

Model: $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$

untuk $k = 1,2, \ldots$

$$E(Y_{t-k}Y_t) = \phi E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + E(e_t Y_{t-k})$$

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} + E(e_t Y_{t-k})$$

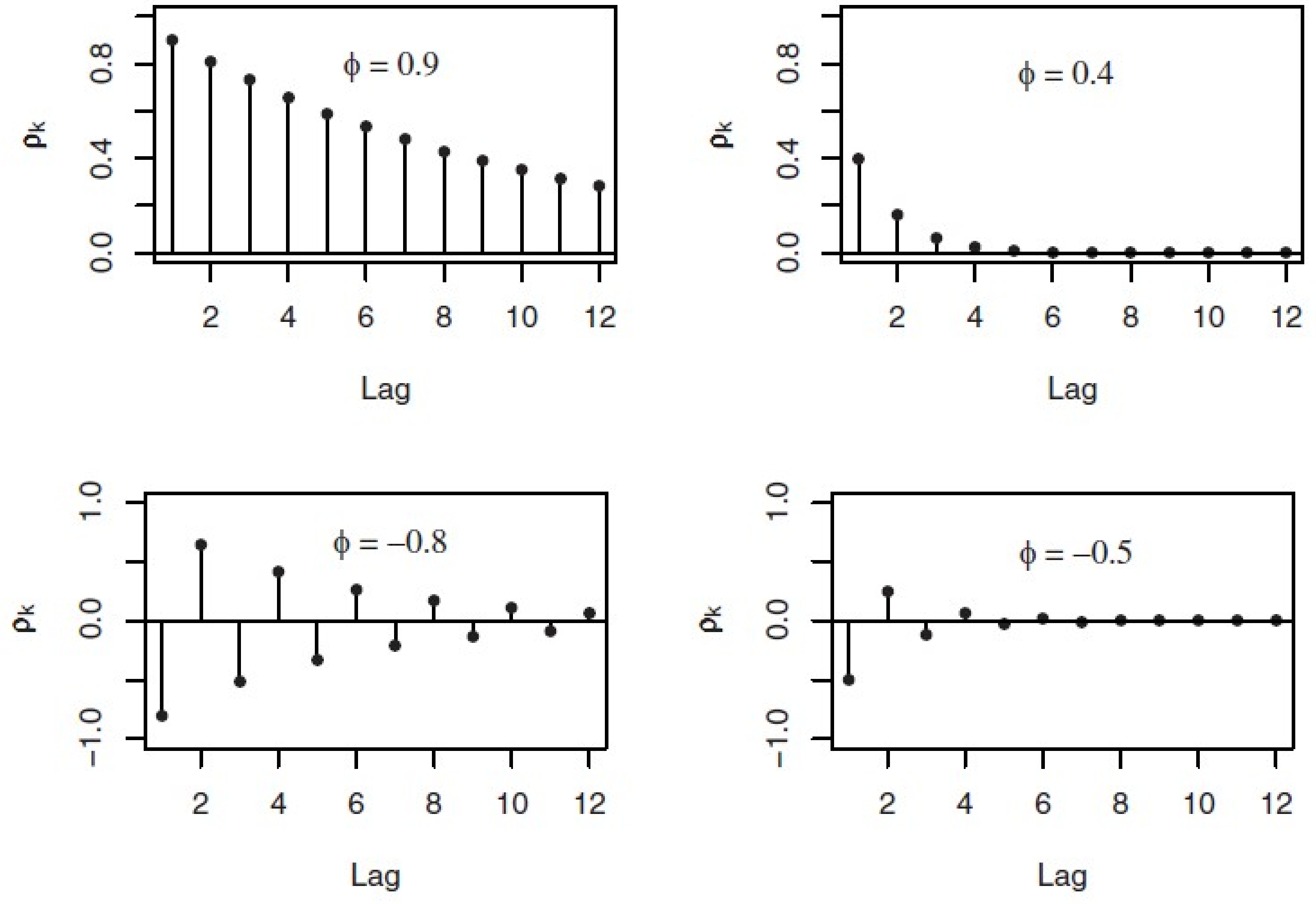
untuk $k = 1, \gamma_1 = \phi\gamma_0 = \frac{\phi\sigma_e^2}{1-\phi^2}$

untuk $k = 2, \gamma_2 = \phi\gamma_1 = \frac{\phi^2\sigma_e^2}{1-\phi^2}$

$$\gamma_k = \frac{\phi^k \sigma_e^2}{1-\phi^2}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \qquad \text{for } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Plot ACF untuk AR(1) pada berbagai nilai ϕ



Asumsi yang digunakan:

- e_t saling bebas terhadap

  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3} \ldots$

- $\sigma_e^2 > 0$

Stationarity condition pada

AR(1) $\leftrightarrow |\phi| < 1$

Model Autoregressive, AR(2)

Nilai deret waktu saat ini bergantung pada dua nilai terakhir, satu unit waktu dan dua unit waktu dari masa lalu

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

Melihat Kestasioneran Parameter Model AR(p)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

Persamaan Karakteristik AR adalah sebagai berikut :

$$1 - \phi_1 y - \phi_2 y^2 - \ldots - \phi_p y^p = 0$$

Model AR(p) dikatakan stasioner jika dan hanya jika akar-akar PK-AR dalam bentuk mutlaknya lebih besar dari 1

AR(1) stasioner jika dan hanya jika $-1 < \phi_1 < 1$

AR(2) stasioner jika dan hanya jika

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$|\phi_2| < 1$$

Model AR(p)

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = e_t$$

$$Y_t - \phi_1 B Y_t - \phi_2 B^2 Y_t - \cdots - \phi_p B^p Y_t = e_t$$

$$\boxed{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)} Y_t = e_t$$

$$\boxed{\phi(B)} Y_t = e_t$$

$$\boxed{\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)}$$

Model Campuran, ARMA (p,q)

- Adakalanya proses acak yang stasioner mempunyai dua karakteristik AR dan MA
- Proses acak seperti ini perlu didekati dengan model campuran antara *autoregressive* dan *moving average* → disebut ARMA(p,q)
- Model umu ARMA(p,q) :

$$Y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

ARMA (p,q)

$$\boxed{\phi(B)}Y_t = \boxed{\theta(B)}e_t$$

$$\boxed{\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)}$$

$$\boxed{\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)}$$

$$Y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

ARMA(1,1) $\quad Y_t = \phi_1 y_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$

Asumsi :

e_t bebas terhadap $\mathrm{y}_{t-1}, \mathrm{y}_{t-2}, \ldots$
e_{t-1} bebas terhadap $\mathrm{y}_{t-2}, \mathrm{y}_{t-3}, \ldots$
Namun e_t dan e_{t-1} tidak bebas terhadap y_t

$$
\begin{aligned}
E(e_t Y_t) &= E[e_t(\phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1})] \\
&= \sigma_e^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(e_{t-1} Y_t) &= E[e_{t-1}(\phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1})] \\
&= \phi\sigma_e^2 - \theta\sigma_e^2 \\
&= (\phi - \theta)\sigma_e^2
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi\gamma_1 + [1 - \theta(\phi - \theta)]\sigma_e^2 \\
\gamma_1 &= \phi\gamma_0 - \theta\sigma_e^2 \\
\gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} \quad \text{for } k \geq 2
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\gamma_0 = \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2}\sigma_e^2
$$

$$
\rho_k = \frac{(1 - \theta\phi)(\phi - \theta)}{1 - 2\theta\phi + \theta^2}\phi^{k-1} \quad \text{for } k \geq 1
$$

ARIMA(p,d,q)

$$\boxed{\phi(B)(1-B)^d} Y_t = \boxed{\theta(B)} e_t$$

$$\boxed{\theta(B) = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)}$$

$$\boxed{\phi(B) = (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)}$$

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t$$
$$= (1-B)Y_t$$

$$\nabla^2 Y_t = (1-B)^2 Y_t$$

Common Box-Cox Transformations	
Lambda	**Suitable Transformation**
-2	$Y^{-2} = 1/Y^2$
-1	$Y^{-1} = 1/Y^1$
-0.5	$Y^{-0.5} = 1/(\mathrm{Sqrt}(Y))$
0	log(Y)
0.5	$Y^{0.5} = \mathrm{Sqrt}(Y)$
1	$Y^1 = Y$
2	Y^2

$$\boxed{\phi(B)(1-B)^d} Y_t = \boxed{\theta(B)} e_t$$

IMA(1,1) Model

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$$

IMA(2,2) Model

$$\nabla^2 Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

$$Y_t = 2Y_{t-1} - Y_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

ARI(1,1) Model

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_t$$

$$Y_t = (1+\phi)Y_{t-1} - \phi Y_{t-2} + e_t$$

Model SARIMA$(p, d, q)(P, D, Q)^s$

$$\Phi_P(B^s)\emptyset_p(B)(1-B)^d(1-B^s)^D Y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)e_t$$

Keterangan:

$\emptyset_p(B)$	: $\left(1-\emptyset_1 B-\cdots-\emptyset_p B^p\right)$, operator AR*(p)*
$\theta_q(B)$	: $\left(1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q\right)$, operator MA*(q)*
$\Phi_P(B^s)$	: $(1-\Phi_1 B^s-\cdots-\Phi_P B^{Ps})$, operator *Seasonal* AR*(P)*
$\Theta_Q(B^s)$	: $\left(1-\Theta_1 B^s-\cdots-\Theta_Q B^{Qs}\right)$, operator *Seasonal* MA*(Q)*
$(1-B)^d$	: pembedaan nonmusiman
$(1-B^s)^D$	: pembedaan musiman
Y_t	: data pada waktu ke-*t*
(p, d, q)	: ordo bagian nonmusiman dari model
(P, D, Q)	: ordo bagian musiman dari model
s	: jumlah periode per musim
e_t	: sisaan pada waktu ke-t
B	: operator penggeser mundur *(backshift)*

Seasonal AR(1)$_{12}$

The seasonal AR(1)$_{12}$ model is

$$Y_t = \Phi Y_{t-12} + e_t$$

Seasonal MA(1)$_{12}$

For the seasonal MA(1)$_{12}$ model, we have

$$Y_t = e_t - \Theta e_{t-12} + \theta_0$$

ARIMA(0,0,0)×(0,1,1)$_{12}$

The ARIMA(0,0,0)×(0,1,1)$_{12}$ model is

$$Y_t - Y_{t-12} = e_t - \Theta e_{t-12}$$

ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)$_{12}$

For the ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)$_{12}$ model

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + e_t - \theta e_{t-1} - \Theta e_{t-12} + \theta\Theta e_{t-13}$$

Terima Kasih

Latihan NSC 23/05/2023

Manakah pernyataan dibawah ini yang benar terkait dengan deret waktu yang stasioner?

$a. E[Y_t] = E[Y_{t-1}]$ dan $V[Y_t] = k \times V[Y_{t-k}]$

$b. E[Y_t] = E[Y_{t-1}]$ dan $V[Y_t] = 2 \times V[Y_{t-2}]$

$c. E[Y_t] = t \times E[Y_{t-1}]$ dan $V[Y_t] = V[Y_{t-k}]$

$d. E[Y_t] = E[Y_{t-1}]$ dan $V[Y_t] = V[Y_{t-k}]$

Misalkan Anda memiliki observasi yang mengikuti model MA(2) dengan $\theta_1 = 0.9$ dan $\theta_2 = 0.7$. Manakah dari pernyataan berikut yang benar?

a. Diagram pencar Yt vs Yt-1 akan membentuk tren linier positif dan diagram pencar Yt vs Yt-2 akan membentuk tren linier negative
b. Diagram pencar Yt vs Yt-1 akan membentuk tren linier negatif dan diagram pencar Yt vs Yt-2 akan membentuk tren linier positif
c. Diagram pencar Yt vs Yt-2 akan membentuk tren linier positif dan diagram pencar Yt vs Yt-3 akan memiliki pola hubungan yang acak
d. Diagram pencar Yt vs Yt-1 akan membentuk tren linier negatif dan diagram pencar Yt vs Yt-3 akan memiliki pola hubungan yang acak

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{-0{,}9 + 0{,}63}{(+)} = (-)$$

$$\rho_3 = 0 \rightarrow \text{acak.}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{-0{,}7}{(+)} = (-)$$

Data pendapatan bulanan (*Yt*) suatu perusahaan pada 10 tahun terakhir diidentifikasi memiliki pola model deret waktu (*time series*) dalam bentuk umum sebagai berikut:

ARMA $\phi(B)\, Y_t = \theta(B) e_t$

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$

$$(1 - 0.6B)Y_t = (1 - 0.3B)e_t$$

yang mana *white noise* ε_t diasumsikan menyebar Normal(0, 1) dan *B* merupakan *Backshift-operator*.

$p = 1,\ q = 1$

Pernyataan yang benar untuk model di atas adalah

a. Y_t bersifat non-stasioner dan modelnya ARMA(1,1)

b. Y_t bersifat stasioner dan modelnya ARMA(1,1) ✓

c. Y_t bersifat non-stasioner dan modelnya ARMA(1,0)

d. Y_t bersifat stasioner dan modelnya ARMA(1,0)

ARIMA $\phi(B)(1-B)^d\, Y_t = \theta(B) e_t$

Data pendapatan bulanan (*Yt*) suatu perusahaan pada 10 tahun terakhir diidentifikasi memiliki pola model deret waktu (*time series*) dalam bentuk umum sebagai berikut:

$(1-B)^d$ θ_1 MA(2)

AR(1)

$$(1 - 0.6B)(1 - B)^1 Y_t = 0.8 + (1 - 0.3B + 0.6B^2)e_t$$

yang mana *white noise* ε_t diasumsikan menyebar Normal(0, 1) dan *B* merupakan *Backshift-operator*. Pernyataan yang benar untuk model di atas adalah

a. Y_t bersifat non-stasioner dan modelnya ARMA(1,2) ✓
b. Y_t bersifat stasioner dan modelnya ARMA(1,2)
c. Y_t bersifat non-stasioner dan modelnya ARMA(2,2)
d. Y_t bersifat stasioner dan modelnya ARMA(2,2)

Diketahui Yt merupakan variabel acak (random variable) deret waktu (time series) dengan waktu t = 1, 2, ..., T dan white noise εt diasumsikan menyebar Normal(0, 1). Misalkan model Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA) bagi Yt adalah:

MA(2)

$$Y_t = 0.7 + (1 - 0.6B + 0.8B^2)e_t \rightarrow \text{MA}(3)$$

Pernyataan yang sesuai dengan model tersebut adalah…

a. Nilai Autocovariance pada lag ke 2 adalah negatif
b. Nilai Autocovariance pada lag ke 3 adalah negatif
c. Nilai Autokorelasi pada lag ke 2 adalah nol
d. Nilai Autokorelasi pada lag ke 3 adalah nol

4 nol

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ |\phi_2| < 1 \end{cases} A(2)$$

Manakah dari model $AR(2)$ berikut yang tidak stasioner?

tdk stasior a. $\phi_1 = 0.7$ dan $\phi_2 = 0.5$ $\quad 0{,}7 + 0{,}5 > 1$

Stasioner b. $\phi_1 = -0.8$ dan $\phi_2 = -0.6$ $\quad -0{,}6 + 0{,}8 < 1 \quad |\phi_2| < 1$

tdk stasion c. $\phi_1 = -1.1$ dan $\phi_2 = 0.8$ $\quad 0{,}8 + 1{,}1 > 1$

Stasioner d. $\phi_1 = 0.7$ dan $\phi_2 = -0.9$ $\quad 0{,}7 - 0{,}9 < 1, \quad -0{,}9 - 0{,}7 < 1 \quad |-0{,}9| < 1$

tdk stasi e. $\phi_1 = -0.7$ dan $\phi_2 = 1.2$

$1{,}2 + 0{,}7 > 1$

$|1{,}2| > 1$

AR reguler AR Mem

$\to AR(1)_6$ $s=6$ $\to AR(1)$ $\to d=1$ $d=1$ $\to MA(1)$ $\to MA(1)_6$

Perhatikan persamaan berikut:

$$(1-0.3B^6)(1-0.6B)(1-B)Z_t = (1+0.3B)(1+0.4B^6)e_t$$

Manakah model yang merepresentasikan persamaan diatas?

a. ARIMA(1,0,1) X ARIMA$(1,0,1)_6$

b. ARIMA(0,1,1) X ARIMA$(1,1,1)_6$

c. ARIMA(0,2,1) X ARIMA$(1,1,1)_6$

d. ARIMA(1,1,1) X ARIMA$(1,0,1)_6$

$p=1$ $P=1$

$d=1$ $D=0$

$q=1$ $Q=1$

ARIMA$(1,1,1) \times (1,0,1)_6$

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D y_t = \theta(B)\Theta(B^s)e_t$$

Perhatikan persamaan berikut:

$$(1-0.3B^4)(1-0.6B)(1-B)(1-B^4)Z_t = (1+0.3B)(1+0.4B^4-0.5B^8)e_t$$

Manakah model yang merepresentasikan persamaan diatas?

a. $\text{ARIMA}(1,1,2) \text{ X } \text{ARIMA}(1,0,1)_4$
b. $\text{ARIMA}(0,1,1) \text{ X } \text{ARIMA}(1,1,1)_4$
c. $\text{ARIMA}(1,1,1) \text{ X } \text{ARIMA}(1,1,2)_4$
d. $\text{ARIMA}(1,1,1) \text{ X } \text{ARIMA}(1,0,2)_4$

AR musiman

AR reguler

$q=1 \quad Q=2$

$d=1$, $s=4$

$D=1$

AR(1)

AR

AR(1)4

MA(1)

MA(2)

$P=1$ AR $p=1$

$(1+0,4B^4-0,5B^8)$

$(1-B)^1 \rightarrow d=1$

differency Reguler

dif musiman $(1-B^4)^D \rightarrow D=1$

M

$$\underbrace{(1-0,3B^4)}_{AR(1)_4}\underbrace{(1-B^4)}_{D=1}Z_t = \underbrace{(1+0,4B^4)}_{MA(1)}e_t$$

$\text{SARIMA}(1,1,1)_4$

$\text{SARIMA}(P,D,Q)_s$

Perhatikan persamaan berikut:

$$Y_t - Y_{t-1} = e_t - 0.5\, e_{t-1}$$

Bagaimanakan bentuk persamaan diatas jika dituliskan menggunakan notasi backshift?

a. $(1-B)Y_t = (1-0.5B)e_t$ ✓
b. $BY_t = (1-0.5B)e_t$
c. $B(Y_t - Y_{t-1}) = 0.5Be_t$
d. Tidak satupun diatas

Apakah model yang tepat untuk persamaan pada nomor 9 ($Y_t - Yt\_1 = et - 0.5\ et\_1$)?

a. IMA(2,2)

b. IMA(1,1) ✓

c. ARI(1,1)

d. Tidak satupun diatas

$y_t - y_{t-1} = e_t - 0{,}5\, e_{t-1}$

$\underbrace{(1-B)}_{d=1} y_t = \underbrace{(1-0{,}5)}_{\substack{MA(1) \\ q=1}} e_t$

ARIMA (0,1,1)

$\downarrow$

IMA (1,1)

$\to AR(1)_{12}$

$\to MA(1)$

$$\left.\begin{array}{l} p = q = 1 \\ P = Q = 0 \end{array}\right] \quad Y_t\ ?$$

$s = 12$

$$(1 - \Phi B^{12}) y_t = (1 - \theta B) e_t \quad \checkmark$$

$$y_t - \Phi y_{t-12} = e_t - \theta e_{t-1}$$

$$y_t = \Phi y_{t-12} + e_t - \theta e_{t-1}$$

MA $\left[\begin{array}{l} \theta(x) = 1 - \theta_1 x \\ \Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s \end{array}\right]$ y_t ?

$(AR)\, \cancel{y_t} = (MA)\, e_t$

$$(1 - \theta_1 x)(1 - \Theta_1 x^s) \Leftrightarrow 1 - \Theta_1 x^s - \theta_1 x + \theta_1 \Theta_1 x^{s+1}$$

$$\rightarrow 1 - \theta_1 x - \Theta_1 x^s + \theta_1 \Theta_1 x^{13}$$

$s = 12$

$$\boxed{y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta_1 e_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 e_{t-13}}$$

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi_1 x^s - \Phi_2 x^{2s} - \cdots - \Phi_P x^{Ps}$$

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \cdots - \theta_q x^q$$

$$\Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s - \Theta_2 x^{2s} - \cdots - \Theta_Q x^{Qs}$$

tdk stasioner dlm nilai tengah → pembedaan

Pemodelan ARIMA Box-Jenkins

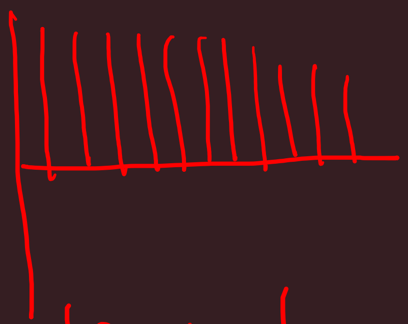
1. Cek stasioner — Plot time series $\{y_t\}$
✓ Plot ACF dr $\{y_t\}$
$\rho_1 \; \rho_2 \; \rho_3 \; \ldots \; \rho_k$
✓ Uji → ADF test

~~eksplorasi~~

nilai tengah.

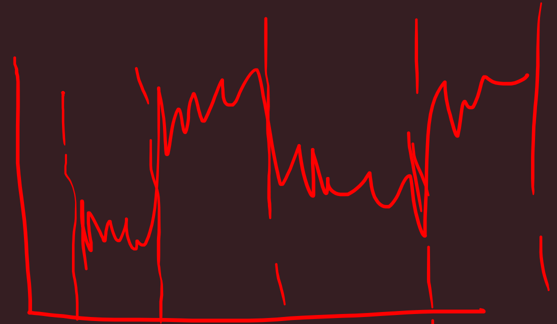
ACF

y_t tdk stasioner



↓

Stasioner dlm nilai tengah & Stasioner dlm ragam



$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$

- Box-Cox → λ & SK λ
  → transformasi thd data y_t
  → $\lambda \approx 1$ (tdk perlu transformasi)
- Uji Levene / Bartlett

$H_0 : \sigma^2_{T_1} = \sigma^2_{T_2} = \sigma^2_{T_3} = \sigma^2_{T_4} = 0$

② Identifikasi model (data sdh stasioner) — Model tentatif > 1

tail off
- ACF ✓
- PACF ✓
- ~~EACF~~

	ACF	PACF
MA(q)	cut off after lag q	tail off
AR(p)	tail off	cut off

$$\left.\begin{array}{l} p = 2 \\ q = 2 \end{array}\right\} ARMA(2,2)$$

3. Pendugaan Parameter

- momen
- ~~MKT~~
- MLE

Model 1

AR(2)

$\hat{\phi}_1$ **

$\hat{\phi}_2$ **

Model 2

ARMA(2,1)

$\hat{\phi}_1$ ~~**~~

$\hat{\phi}_2$ **

$\hat{\theta}_1$ **

AIC paling kecil

BIC

4. Diagnostik Model ACF & PACF e_t

AR(2) terpenuhi

A → acak

H → Homogen

N → normal

↓ QQ

sisaan dr model

AIC paling kecil

AR(1) → e_t — white noise $e_t \overset{bsi}{\sim} (0, \sigma_e^2)$

5. Overfitting.

AR(2)

$\downarrow$

✓ AR(3) $\rightarrow$ $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ nyata?

0,28   0,513

$\downarrow$

Diagnostik ~~AR(3)~~

AIC

$\hat{\phi}_1$ vs $\hat{\phi}_2$

$\hat{\phi}_1$ & $\hat{\phi}_2$ $\rightarrow$ AR(2) ✓

0,3   0,510

6. Forecasting.

Pembinaan ADW

30 Mei 2023

Box - Jenkins — Identifikasi model

AR(p)
MA(q)
ARMA(p,q)

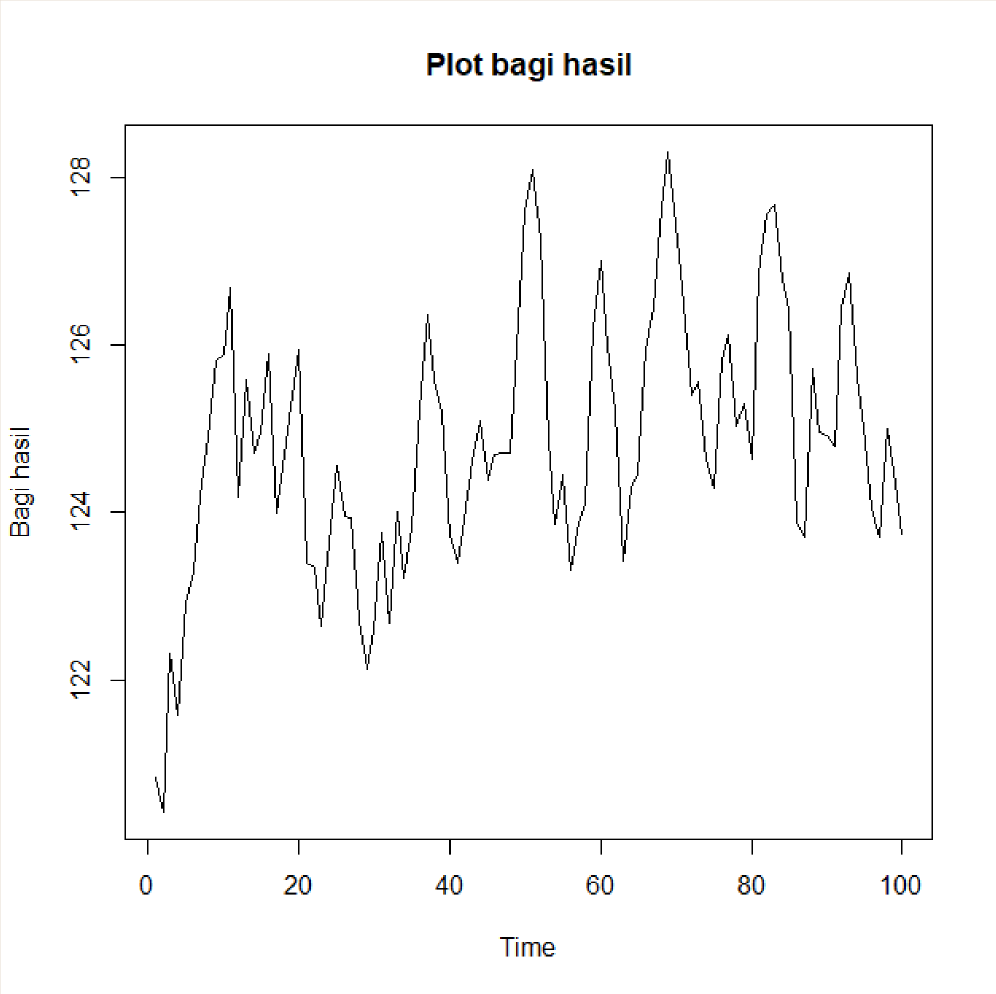
Exhibit 6.3 General Behavior of the ACF and PACF for ARMA Models

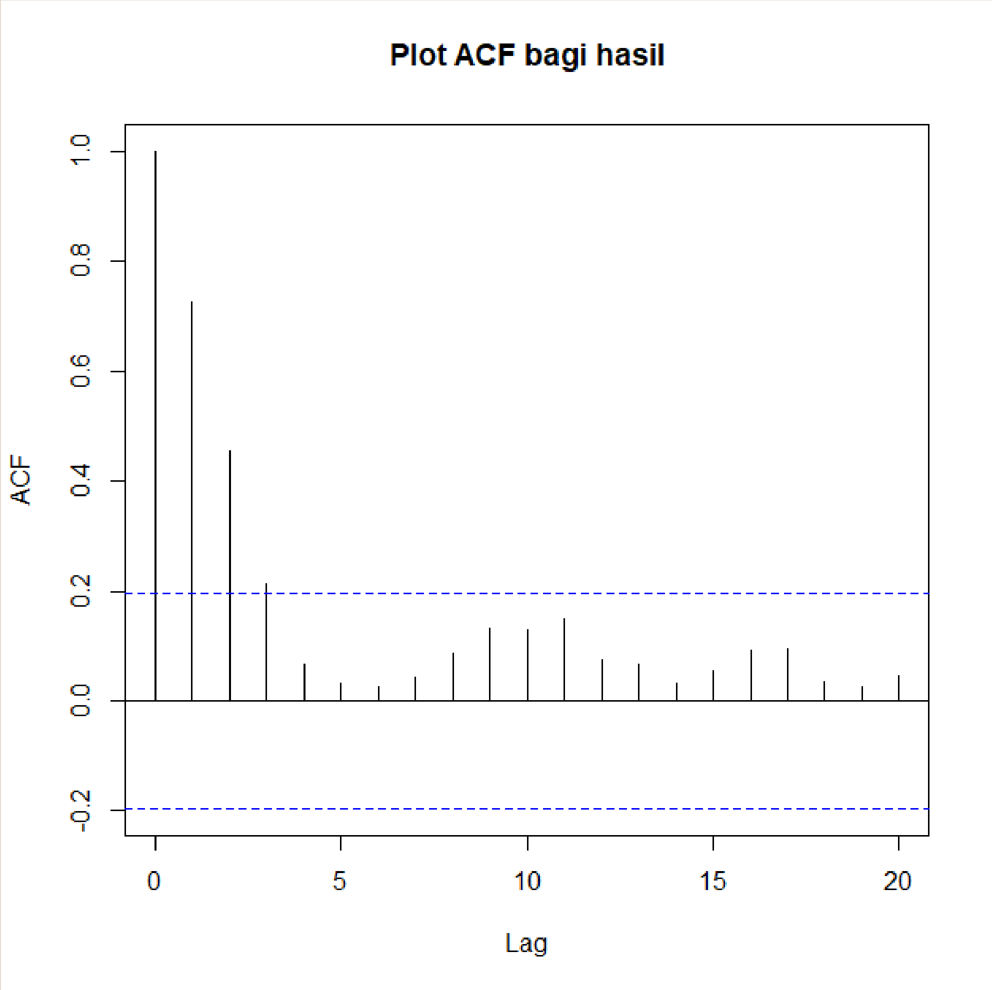
	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q), p>0, and q>0
ACF	Tails off	Cuts off after lag q	Tails off
PACF	Cuts off after lag p	Tails off	Tails off

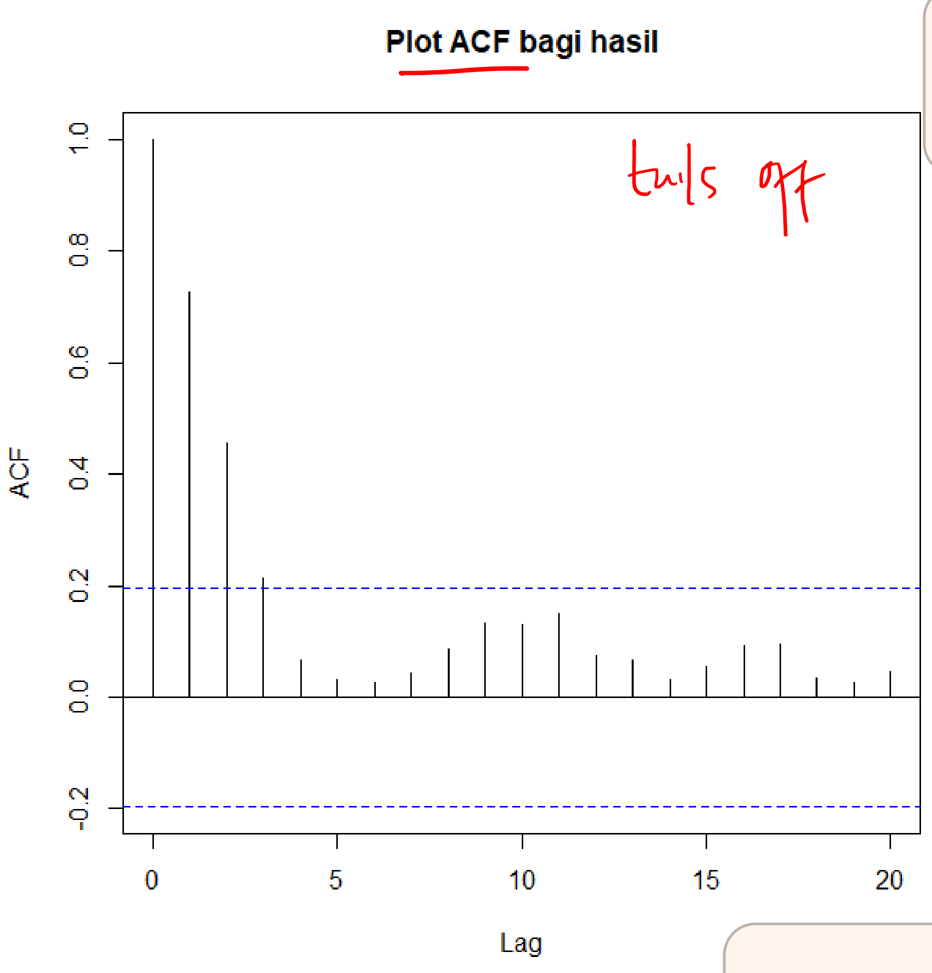
EACF

Illustration 1

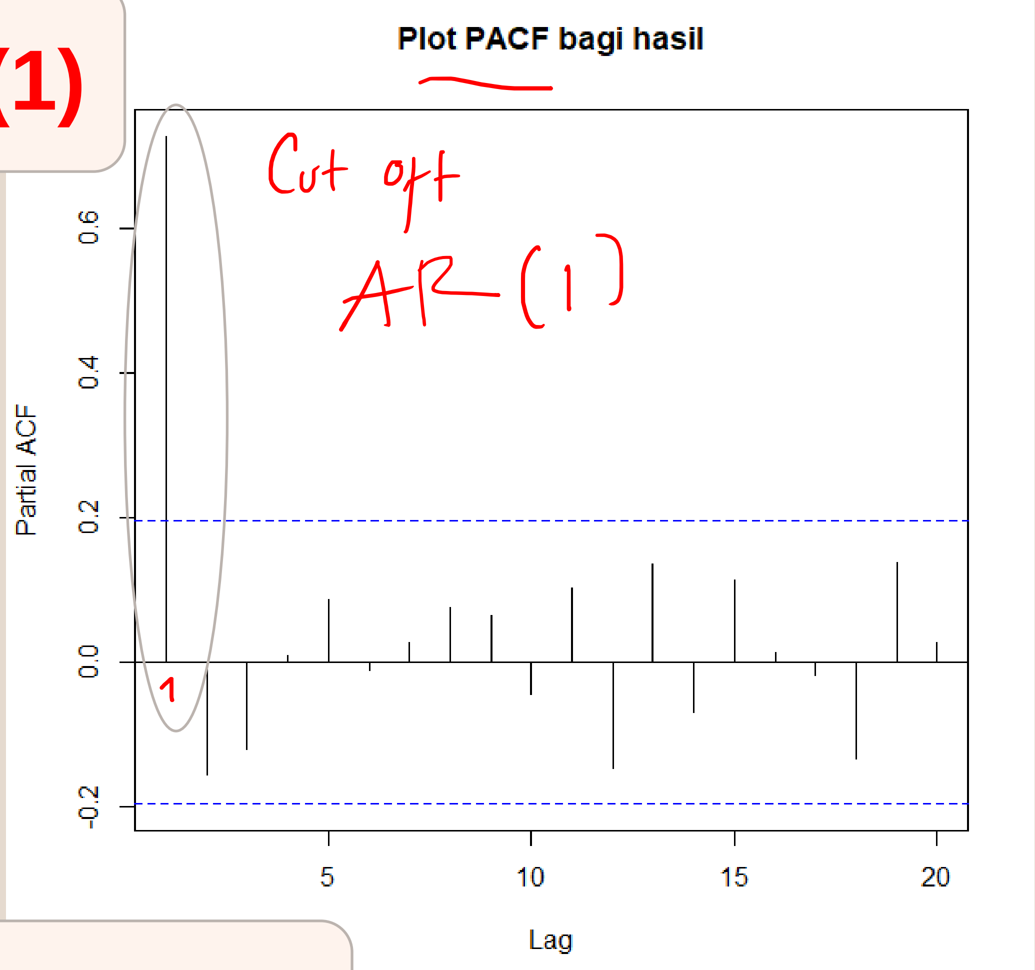
```
> Bagi.hasil
Time Series:
Start = 1
End = 100
Frequency = 1
  [1] 120.8399 120.4160 122.3064 121.5694 122.8942 123.3013 124.1932 124.8930
  [9] 125.8147 125.8902 126.6755 124.1835 125.5775 124.7087 124.9495 125.8825
 [17] 123.9903 124.6912 125.2508 125.9463 123.3904 123.3333 122.6446 123.6364
 [25] 124.5462 123.9536 123.9251 122.7099 122.1322 122.5747 123.7589 122.6723
 [33] 124.0033 123.2013 123.8163 125.2421 126.3553 125.5886 125.1816 123.7251
 [41] 123.4024 123.9143 124.6083 125.0931 124.3820 124.6854 124.7064 124.7050
 [49] 126.2886 127.5864 128.0930 127.2421 124.8627 123.8595 124.4472 123.3074
 [57] 123.8689 124.1007 126.1777 126.9949 125.9848 125.1947 123.4171 124.2836
 [65] 124.4681 125.9491 126.4359 127.6295 128.2976 127.4389 126.4682 125.3810
 [73] 125.5677 124.6353 124.2816 125.8262 126.1171 125.0234 125.2856 124.6220
 [81] 126.8500 127.5602 127.6669 126.7697 126.4150 123.8775 123.6915 125.7046
 [89] 124.9605 124.9237 124.7858 126.4416 126.8498 125.6157 124.8311 124.0431
 [97] 123.6912 124.9995 124.3380 123.7311
```


Plot bagi hasil
Bagi hasil
122
124
126
128
0
20
40
60
80
100
Time


Plot ACF bagi hasil
ACF
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
15
20
Lag



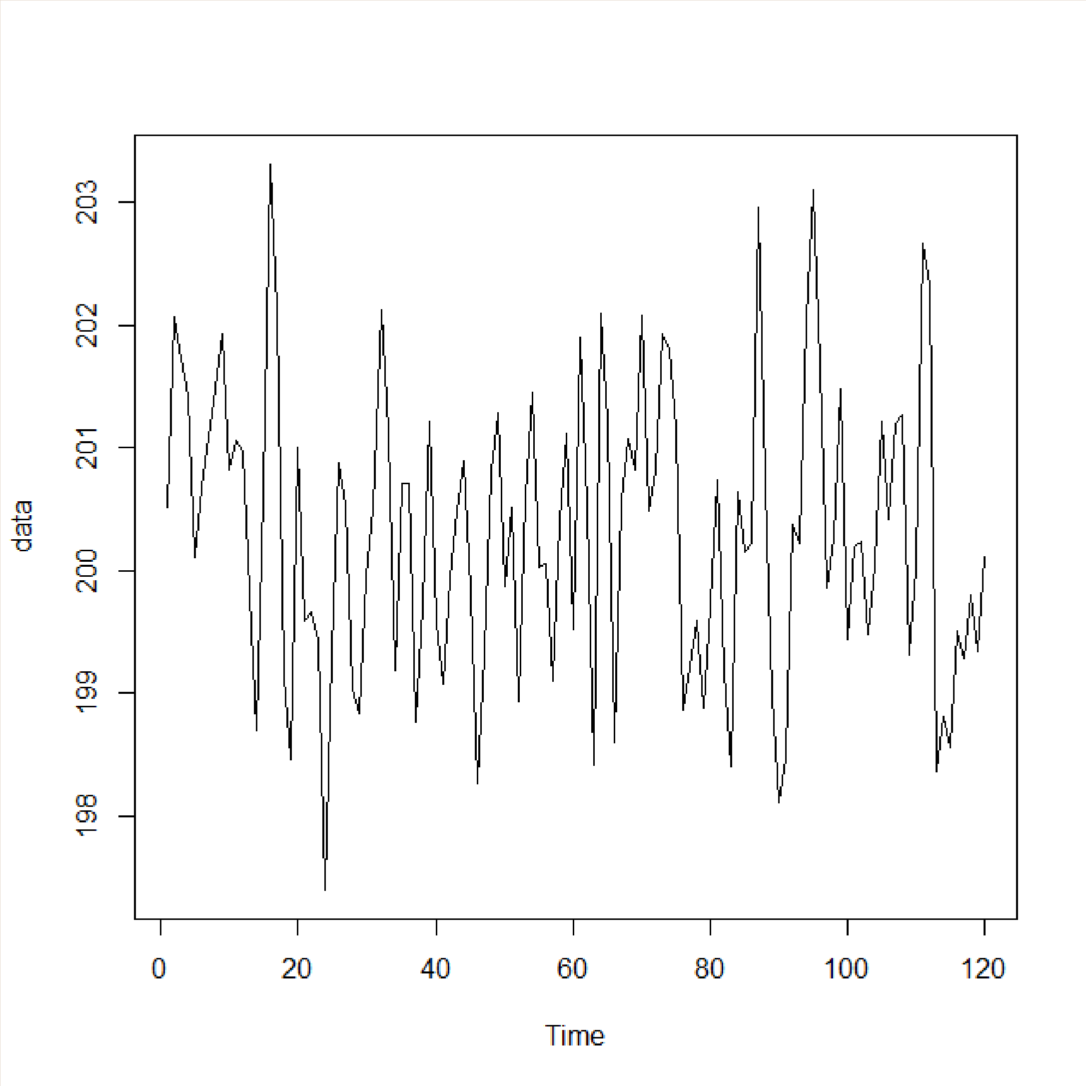
AR(1)



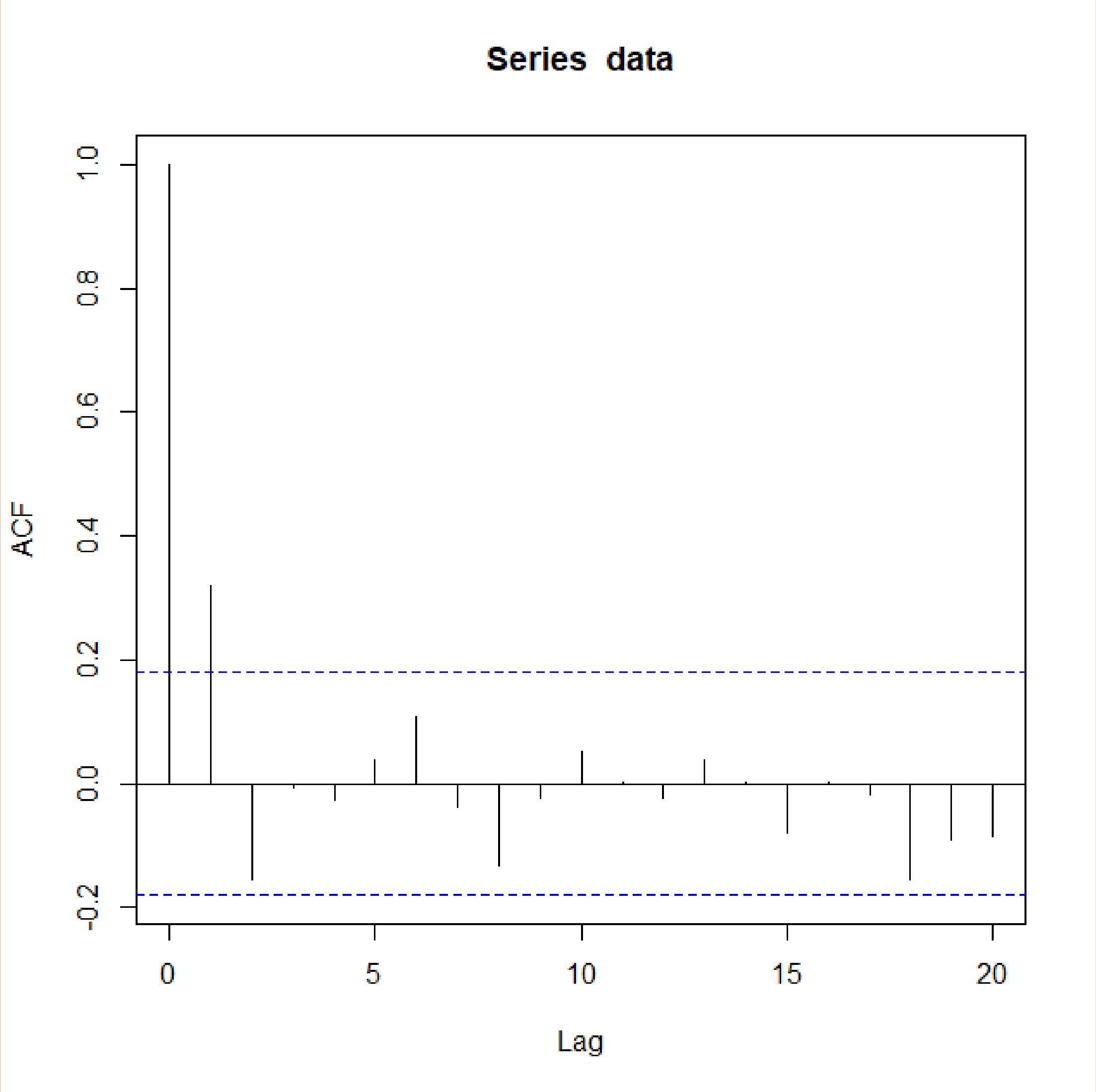
→ **ACF tails off**
→ **PACF cuts off after lag 1**

Illustration 2

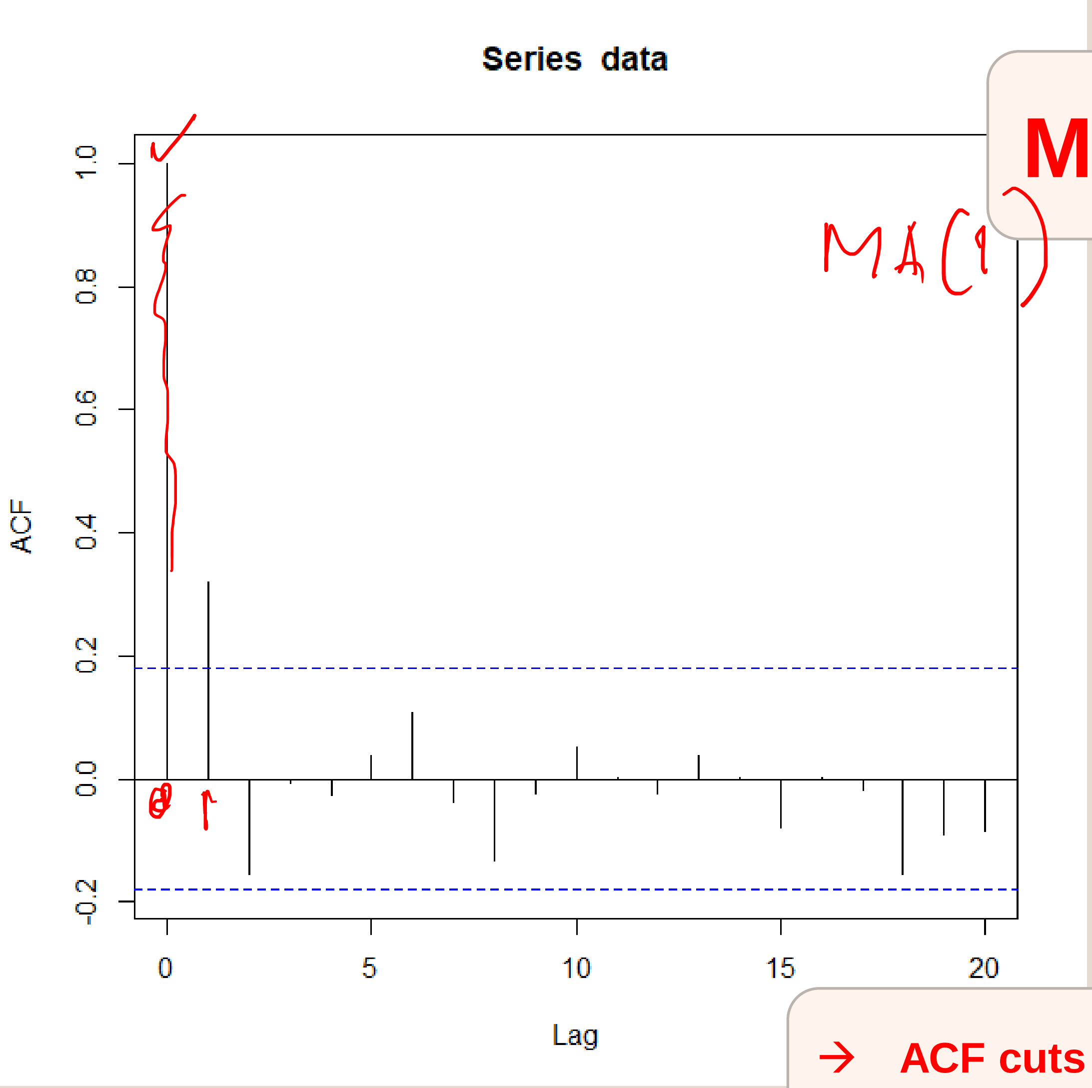
```
Time Series:
Start = 1
End = 120
Frequency = 1
  [1] 200.5173 202.0572 201.7297 201.4259 200.1057 200.6729 201.0916 201.4741 201.9279 200.8178 201.0537 200.9672 199.8111 198.6983 200.6401 203.3064 202.1264 199.1470 198.4510 201.0010
 [21] 199.5935 199.6556 199.4319 197.3983 199.3218 200.8780 200.5457 199.0316 198.8325 199.9403 200.4977 202.1172 201.1243 199.1779 200.7120 200.7010 198.7608 199.7088 201.2135 199.5722
 [41] 199.0691 199.9331 200.4803 200.8937 199.8262 198.2573 199.3214 200.7999 201.2875 199.8618 200.5080 198.9363 200.5931 201.4473 200.0211 200.0435 199.0973 200.4031 201.1087 199.5232
 [61] 201.9022 200.5117 198.4120 202.0972 201.2107 198.5957 200.5630 201.0777 200.8211 202.0754 200.4868 200.7986 201.9214 201.7936 201.1510 198.8624 199.2071 199.5827 198.8699 199.7079
 [81] 200.7313 199.1806 198.3952 200.6342 200.1485 200.2179 202.9627 200.7069 198.9806 198.1063 198.4641 200.3711 200.2231 202.0403 203.1007 201.6661 199.8561 200.2652 201.4809 199.4389
[101] 200.1917 200.2379 199.4787 200.0520 201.2102 200.4082 201.1976 201.2709 199.3109 200.0213 202.6683 202.3267 198.3642 198.8088 198.5504 199.5064 199.2750 199.7942 199.3422 200.1082
```

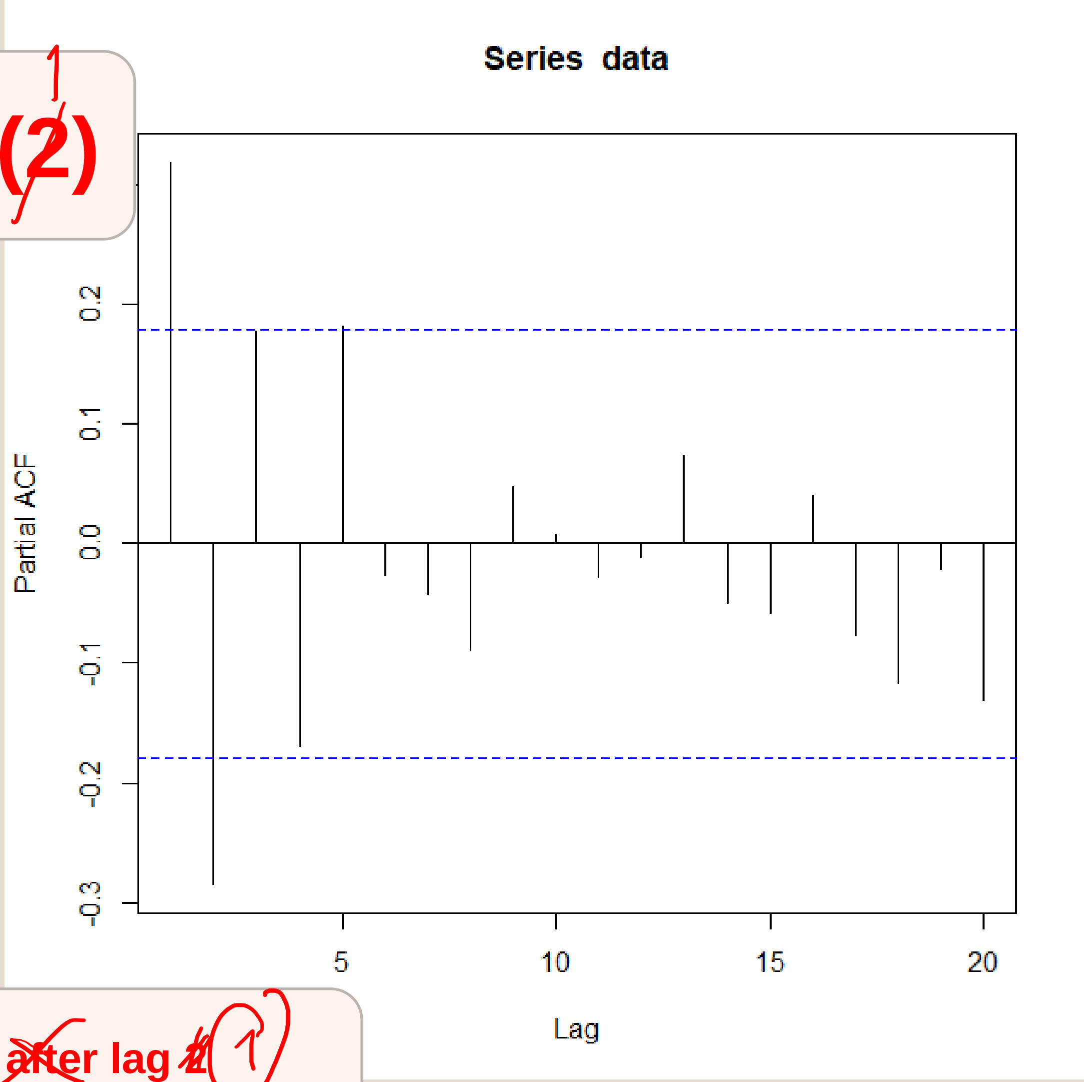


data
203
202
201
200
199
198
0
20
40
60
80
100
120
Time



Series data
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
5
10
15
20
Lag

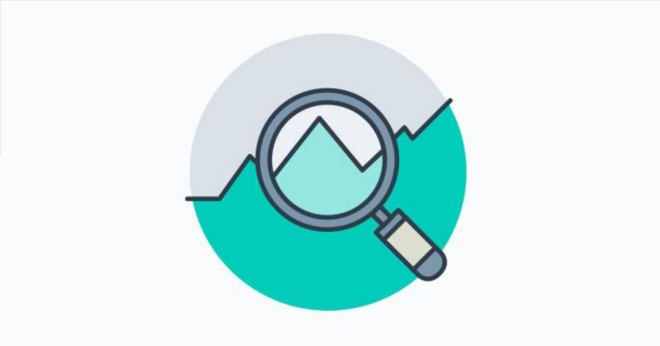




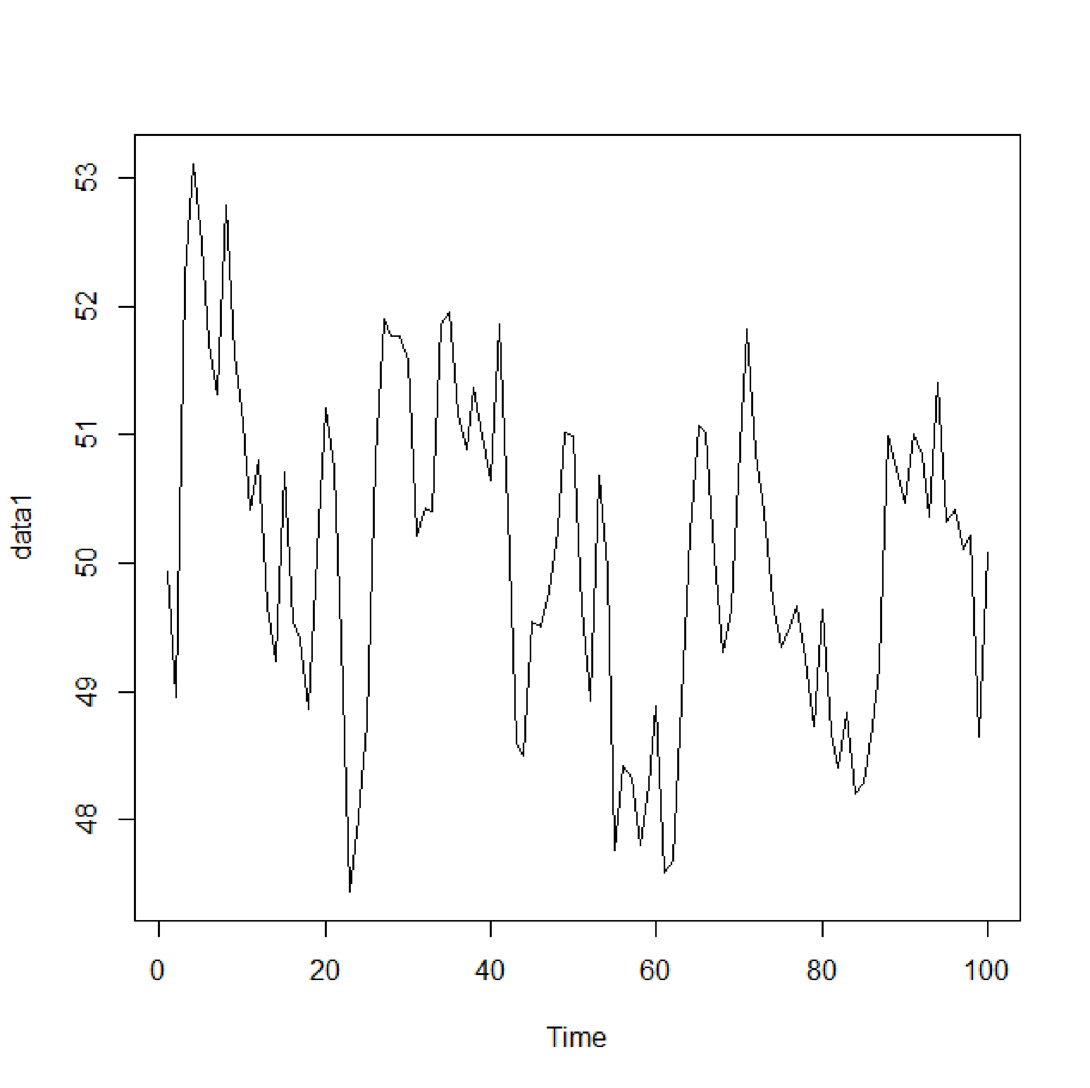
MA(2)

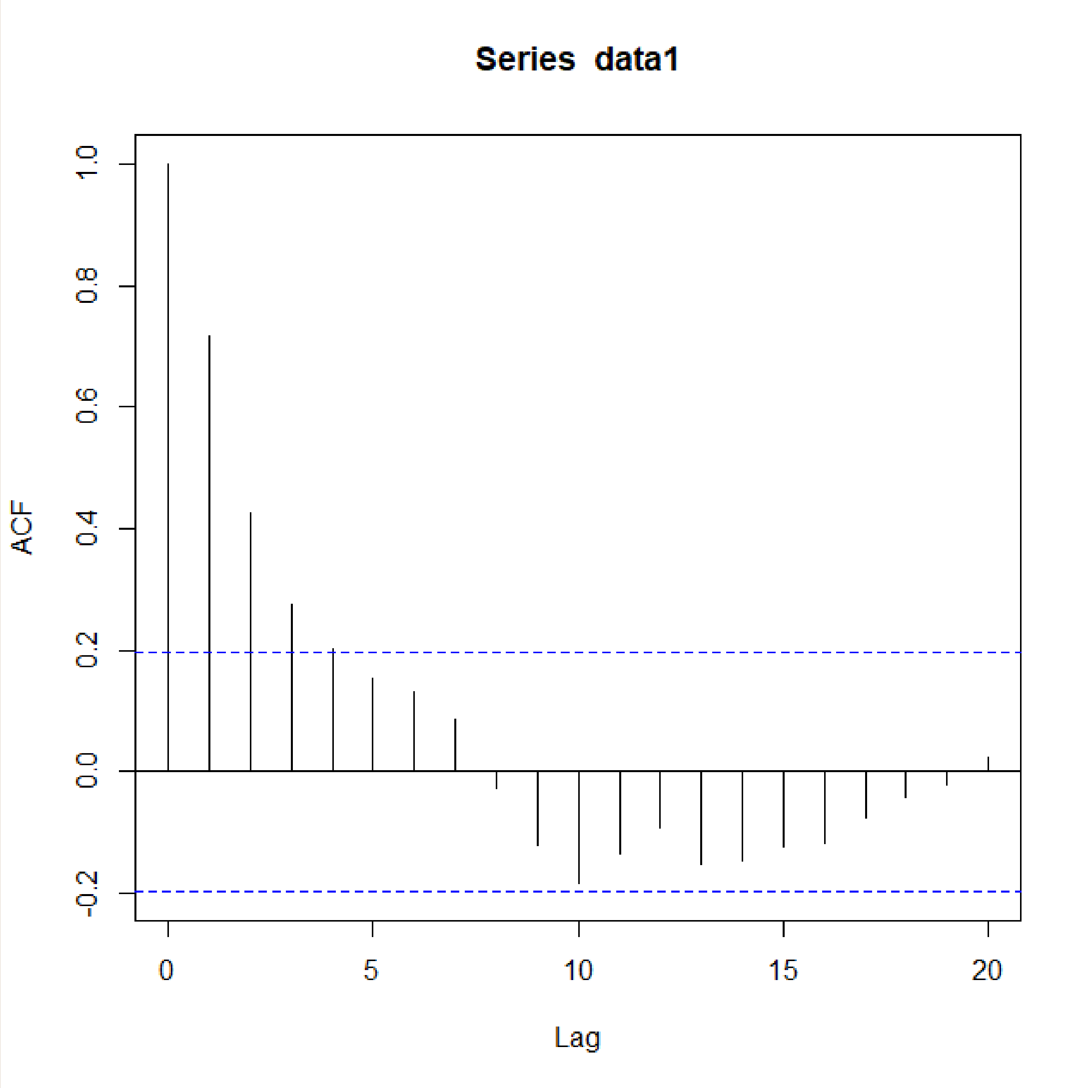
- → **ACF cuts off after lag 2** (1)
- → **PACF tails off**

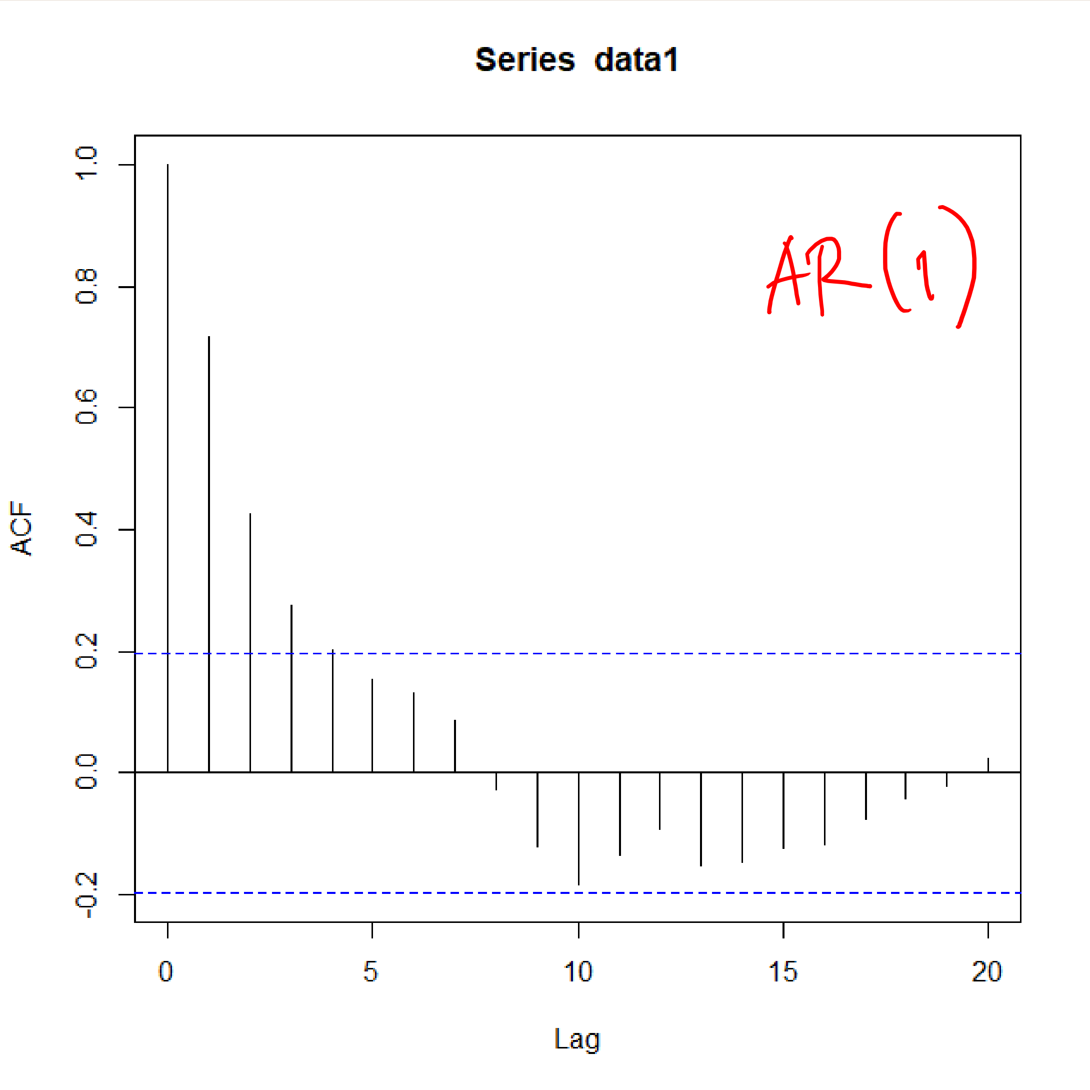
Illustration 3

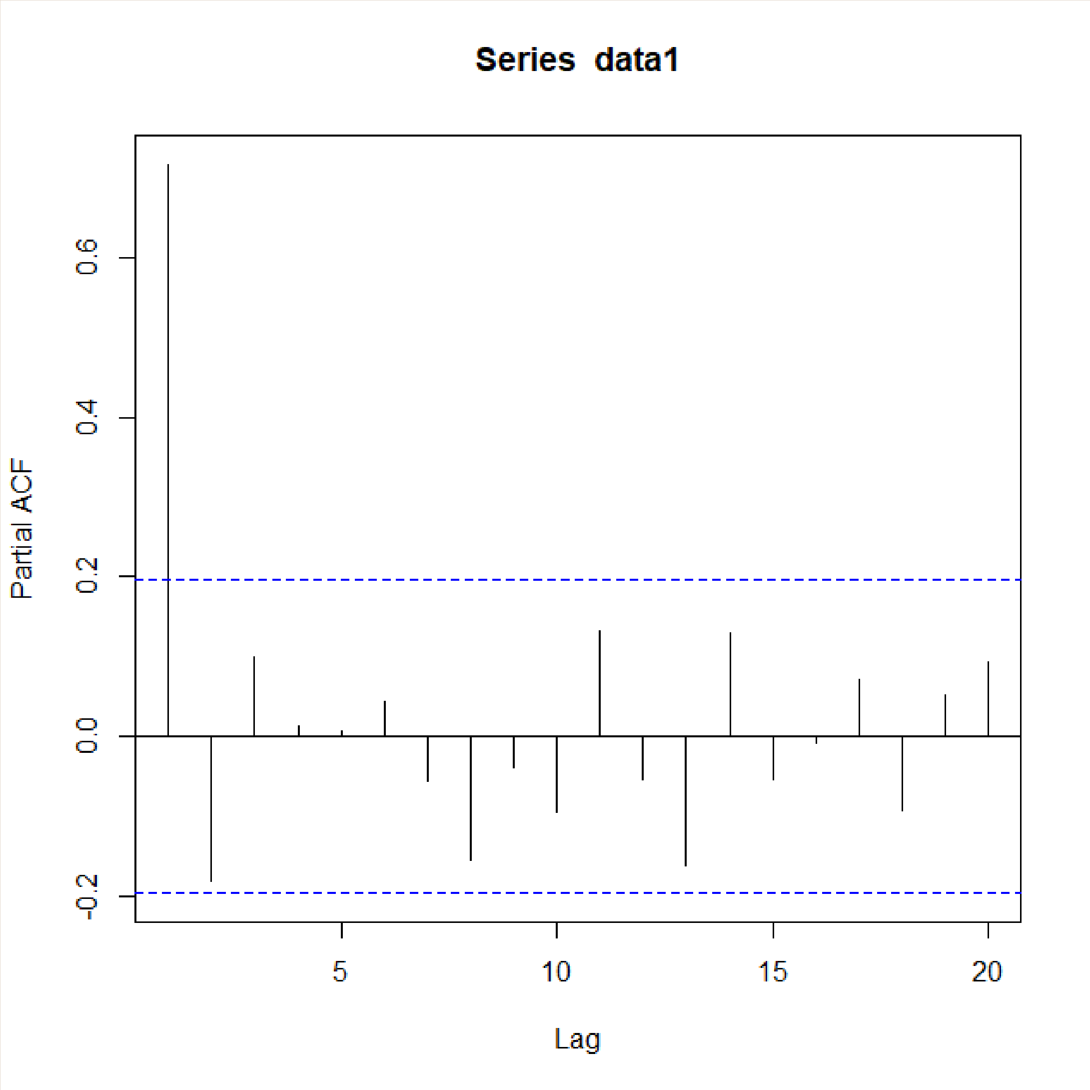


```
Time Series:
Start = 1
End = 100
Frequency = 1
  [1] 49.92942 48.95245 52.22844 53.10579 52.49634 51.72033 51.31350 52.78676
  [9] 51.61496 51.09523 50.41426 50.80596 49.66480 49.24230 50.71685 49.54151
 [17] 49.41205 48.86938 50.08358 51.20780 50.73118 49.40406 47.44811 48.02236
 [25] 48.75842 50.80060 51.89719 51.77418 51.76429 51.58101 50.20945 50.42741
 [33] 50.40793 51.86786 51.95139 51.16796 50.88727 51.36737 50.99544 50.64541
 [41] 51.86159 50.40773 48.60134 48.50495 49.54614 49.50129 49.78693 50.25483
 [49] 51.01725 50.98829 49.64737 48.93415 50.68030 49.94146 47.76121 48.42248
 [57] 48.32285 47.80088 48.27708 48.88886 47.59616 47.68154 48.92910 50.23003
 [65] 51.07214 51.01725 50.05644 49.30724 49.63453 50.91134 51.82234 50.86288
 [73] 50.40121 49.71097 49.34301 49.50765 49.67234 49.26819 48.73062 49.64235
 [81] 48.67032 48.40517 48.84276 48.21299 48.29200 48.72733 49.20141 50.99337
 [89] 50.73869 50.47096 51.00631 50.84143 50.35898 51.40961 50.32619 50.41951
 [97] 50.10471 50.21408 48.64214 50.07742
```

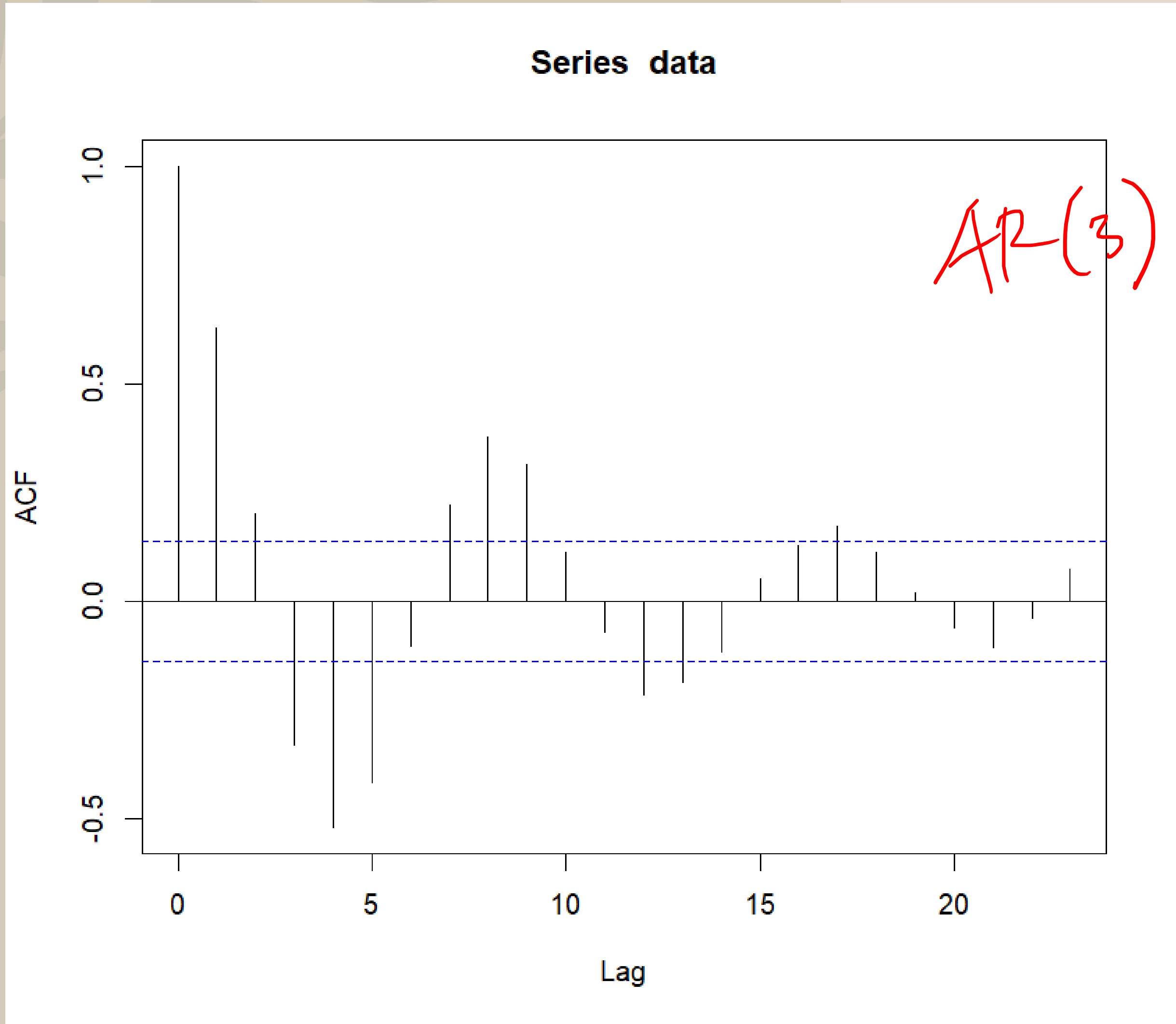

53
52
51
50
49
48
data1
0
20
40
60
80
100
Time

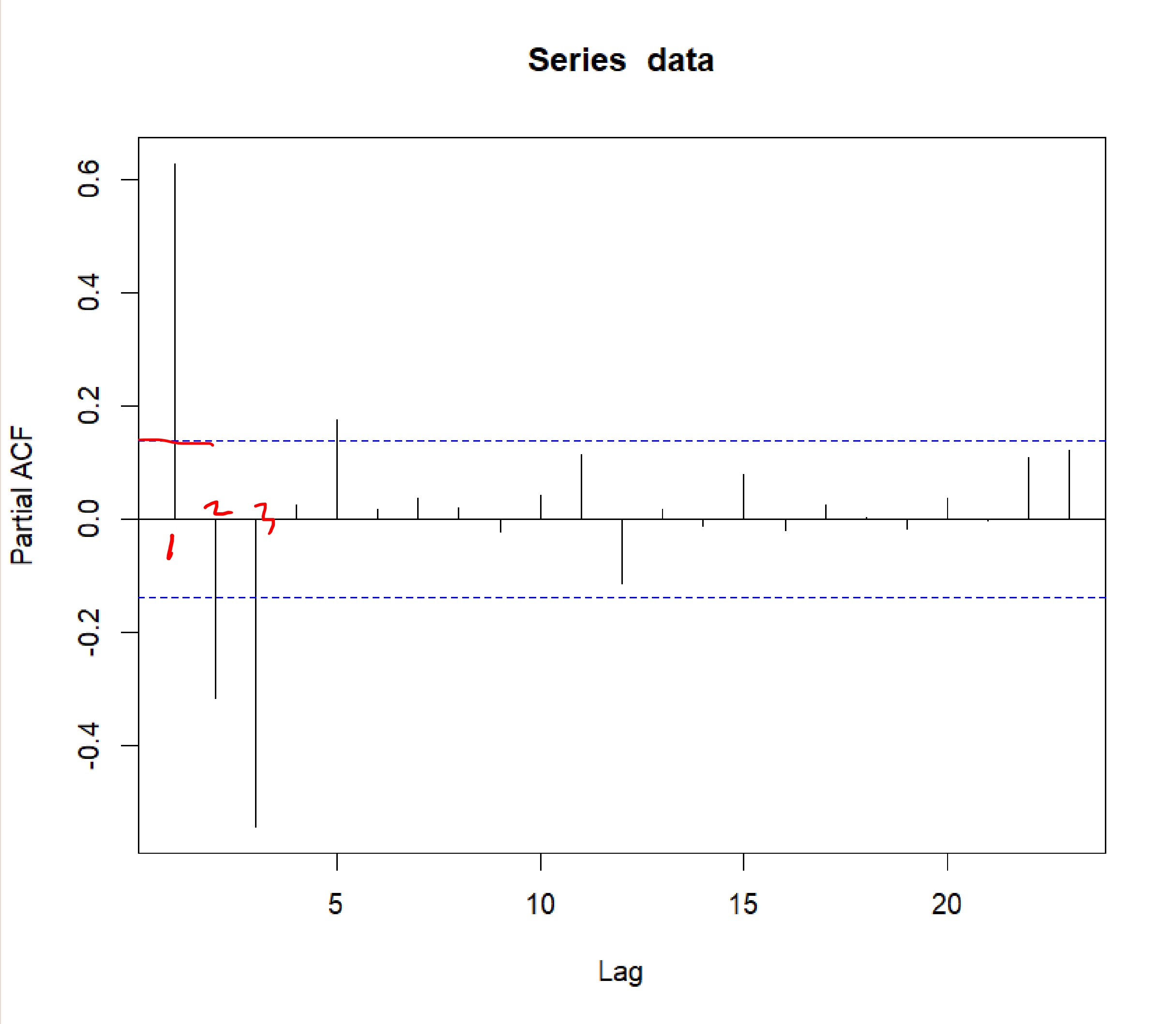

Series data1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
ACF
0
5
10
15
20
Lag


Series data1
AR(1)
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
5
10
15
20
Lag

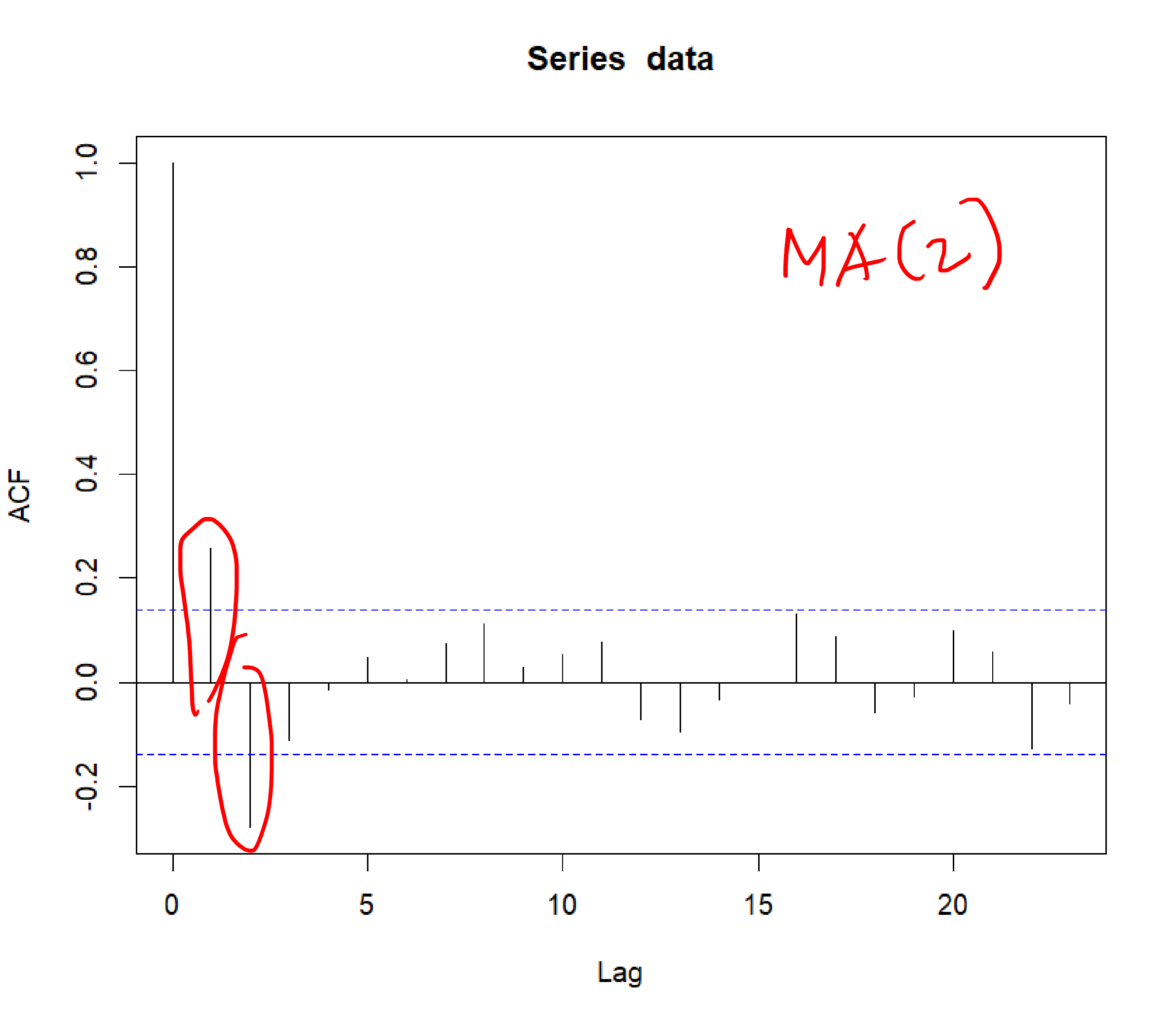

Series data1
Partial ACF
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
5
10
15
20
Lag

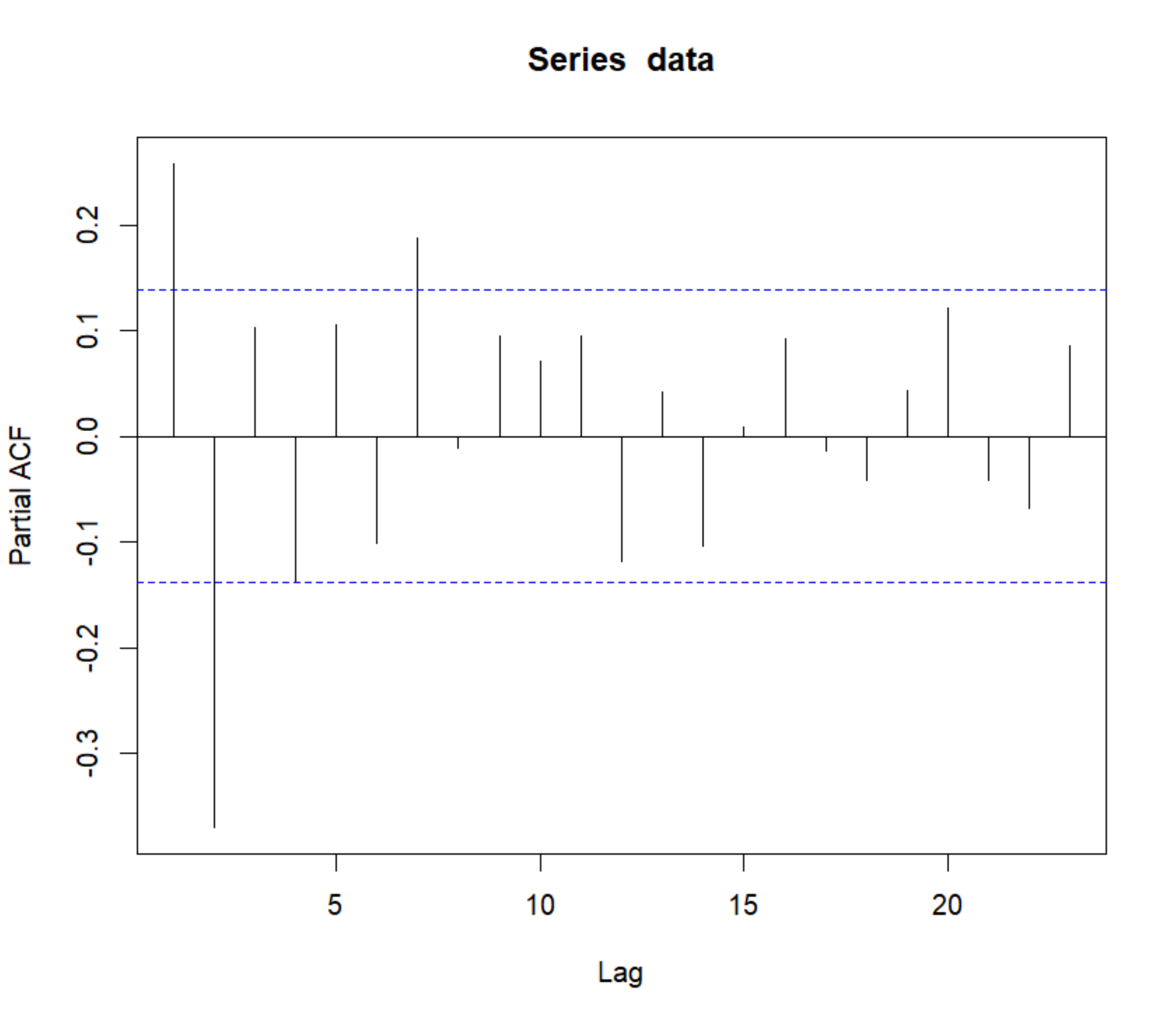
Latihan



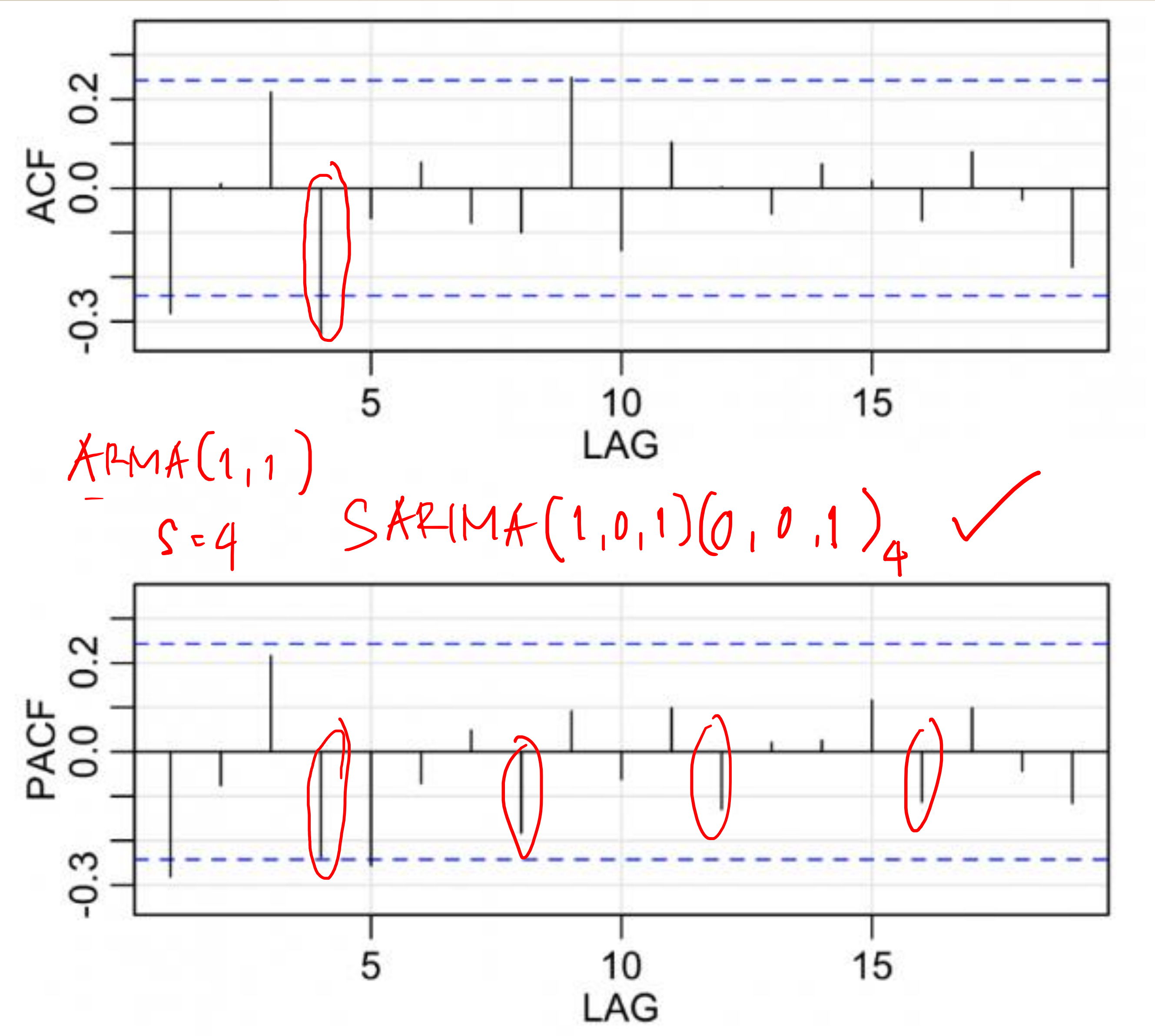


Identifikasi model ARIMA berdasarkan ACF dan PACF di atas !!





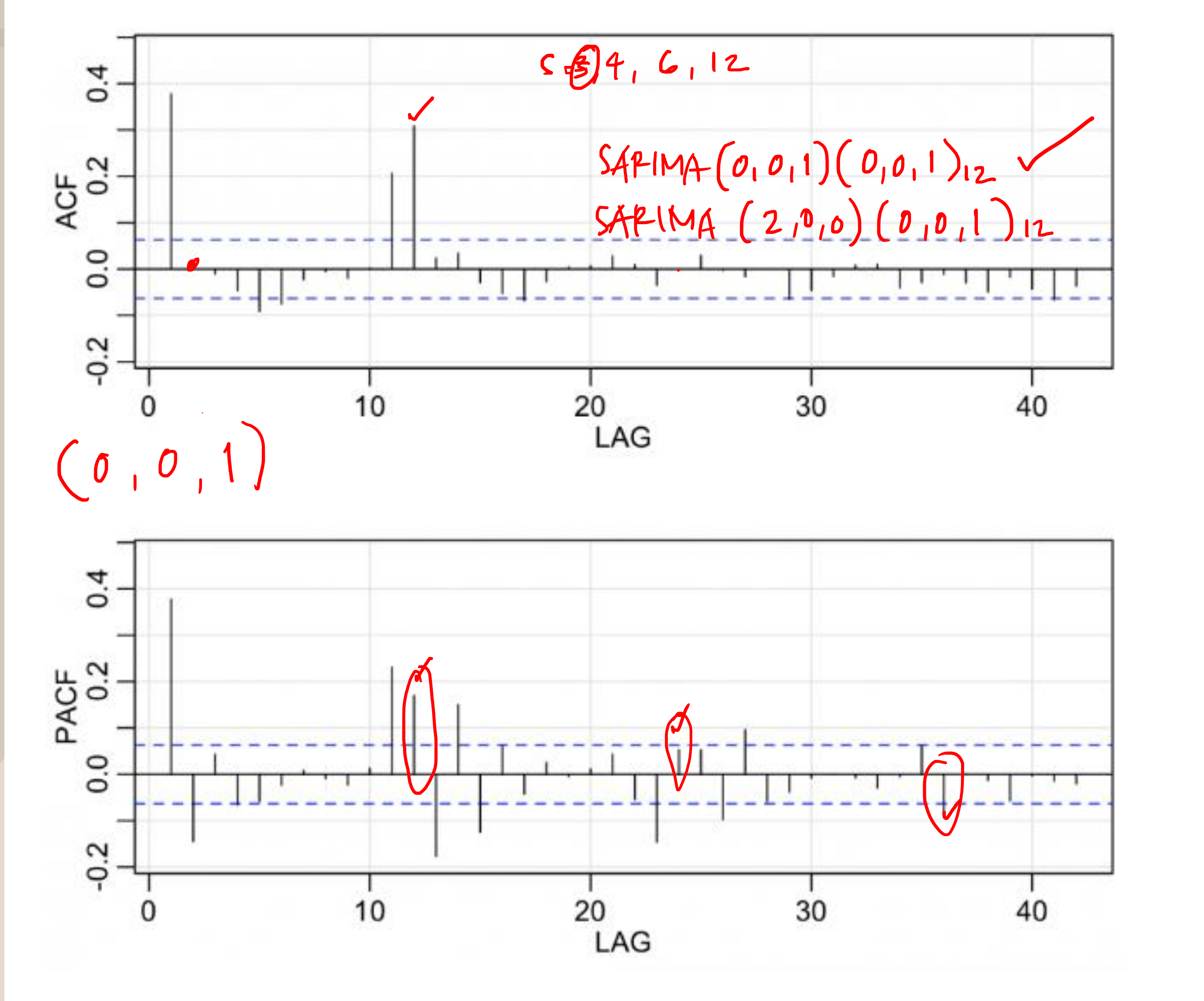
Identifikasi model ARIMA berdasarkan ACF dan PACF di atas !!


ACF
0.2
0.0
-0.3
5
10
15
LAG
ARMA(1,1)
S=4
SARIMA(1,0,1)(0,0,1)4
PACF
0.2
0.0
-0.3
5
10
15
LAG

Musiman

ARIMA(0,0,1)

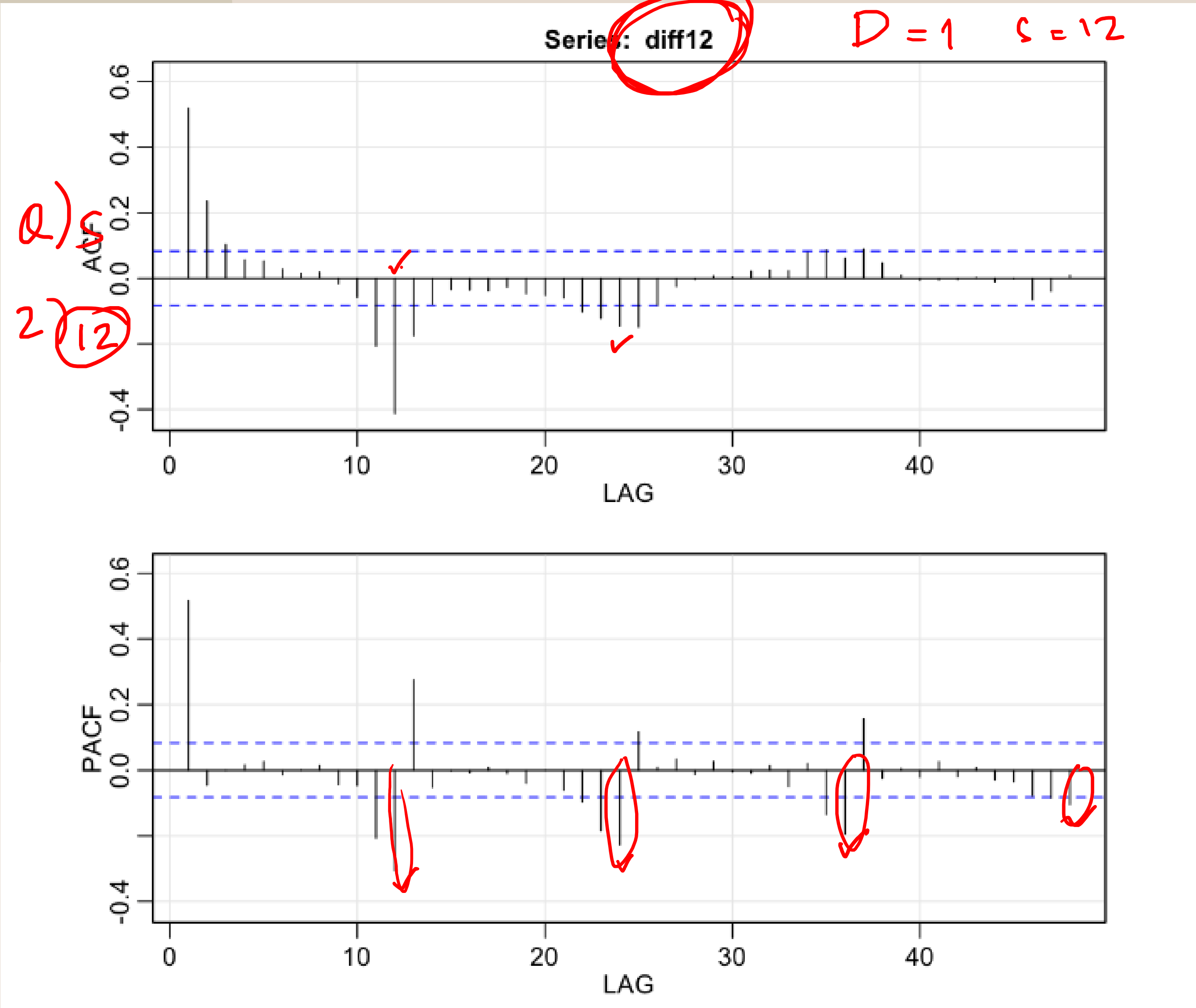
ARIMA(2,0,0)



ARIMA(1, 12, 0)

SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$_s$

(1, 0, 0)(0, 1, 2)12



Dalam suatu analisis, disimpulkan bahwa

- Uji Dickey-Fuller unit root test untuk deret waktu {Yt} tolak H_0
- ACF untuk deret waktu {Yt} menurun secara eksponensial
- PACF untuk deret waktu {Yt} signifikan pada lags 1, 2 dan 3 (pada lag lainnya tidak nyata)

Model manakah yang paling konsisten dengan kesimpulan di atas?

a. IMA(1,3)
b. ARI(3,1)
c. ARIMA(3,0,0)
d. IMA(2,3)

C

Dalam suatu analisis, disimpulkan bahwa

- ACF untuk deret waktu {Yt} menurun sangat lambat sekali
- PACF untuk deret waktu $\{\nabla^2 Yt\}$ signifikan pada lags 1 dan 2 (pada lag lainnya tidak nyata) $(1-B)^2 y_t$
- Uji Dickey-Fuller unit root test untuk deret waktu {Yt} tidak tolak H_0

Model manakah yang paling konsisten dengan kesimpulan di atas?

a. IMA(1,1)
b. ARI(2,2) ✓
c. ARIMA(2,2,2)
d. IMA(2,2)

AR

$$(1-B)^d(1-B^S)^D$$

Perhatikan persamaan berikut:

$$\underbrace{(1-0.7B)}_{AR(1)}(1-B^6)\underbrace{(1-0.3B^6)}_{S\ AR(1)}Z_t = \underbrace{(1+0.2B)}_{MA(1)}\underbrace{(1+0.8B^6)}_{S\ MA(1)}e_t$$

Manakah model yang merepresentasikan persamaan diatas?

a. ARIMA(1,1,1) $(1,0,1)_6$

b. ARIMA(1,0,1) $(1,1,1)_6$ ✓

c. ARIMA(1,0,1) $(1,0,1)_6$

d. ARIMA(0,2,1) $(1,1,1)_6$

ARIMA $(1,0,1)(1,1,1)_6$

Perhatikan persamaan berikut:

$$(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 + 0.2B)(1 + 0.8B^{12})e_t$$

Manakah model yang merepresentasikan persamaan diatas?

a. ARIMA(1,1,0) $(1,0,1)_{12}$

b. ARIMA(1,1,1) $(1,0,1)_{12}$

c. ARIMA(0,2,1) $(1,1,1)_{12}$

d. ARIMA(0,1,1) $(0,1,1)_{12}$ ✓

ARIMA(0,1,1)$(0,1,1)_{12}$

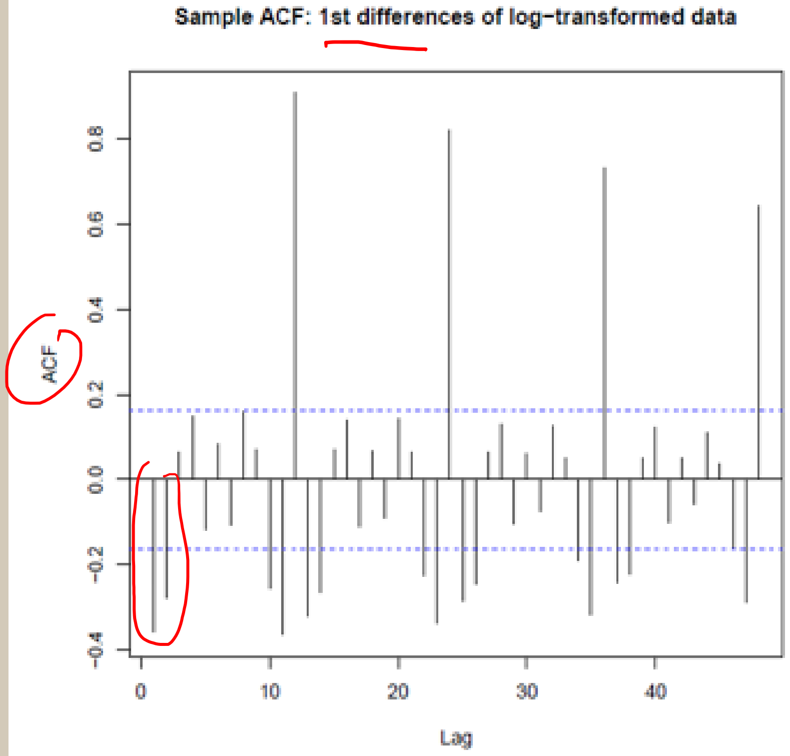
Perhatikan persamaan berikut:

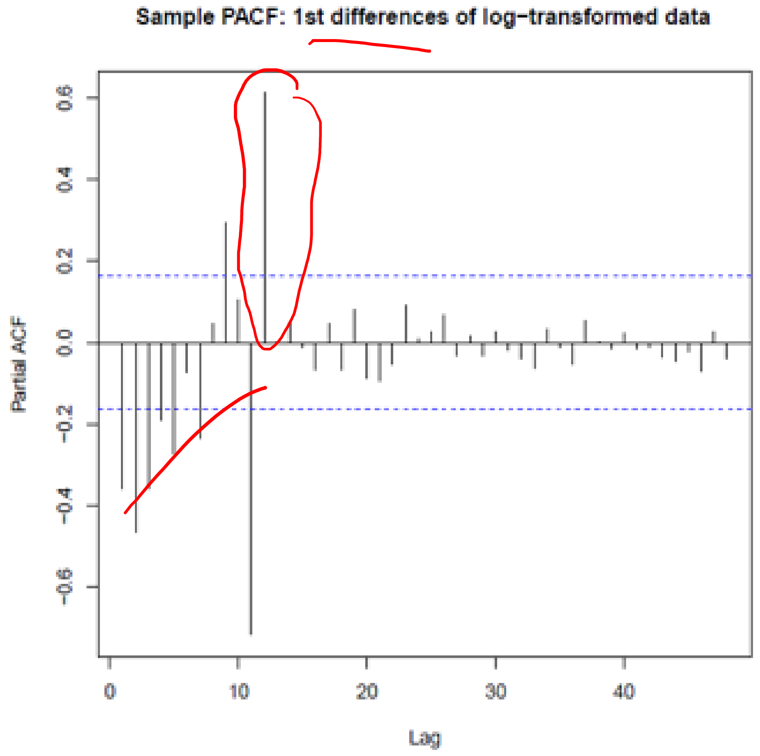
$$(1-B)(1-0.6B)(1-B^4)(1-0.8B^4)Z_t = e_t$$

Manakah model yang merepresentasikan persamaan diatas?

a. ARIMA(1,1,1) $(1,0,1)_4$
b. ARIMA(0,1,1) $(1,1,1)_4$
c. ARIMA(1,1,0) $(1,0,1)_4$
d. ARIMA(1,1,0) $(1,1,0)_4$

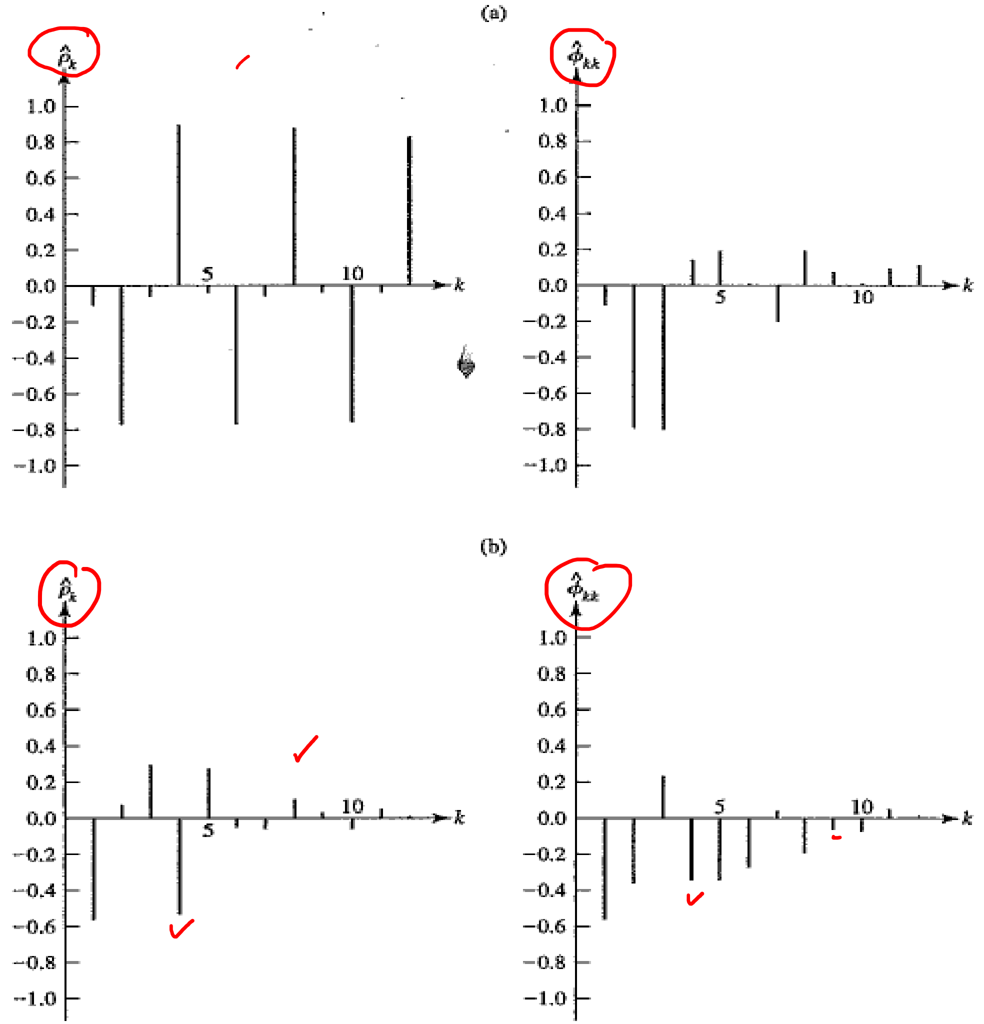
Berdasarkan plot ACF dan PACF berikut ini, maka model yang tepat adalah





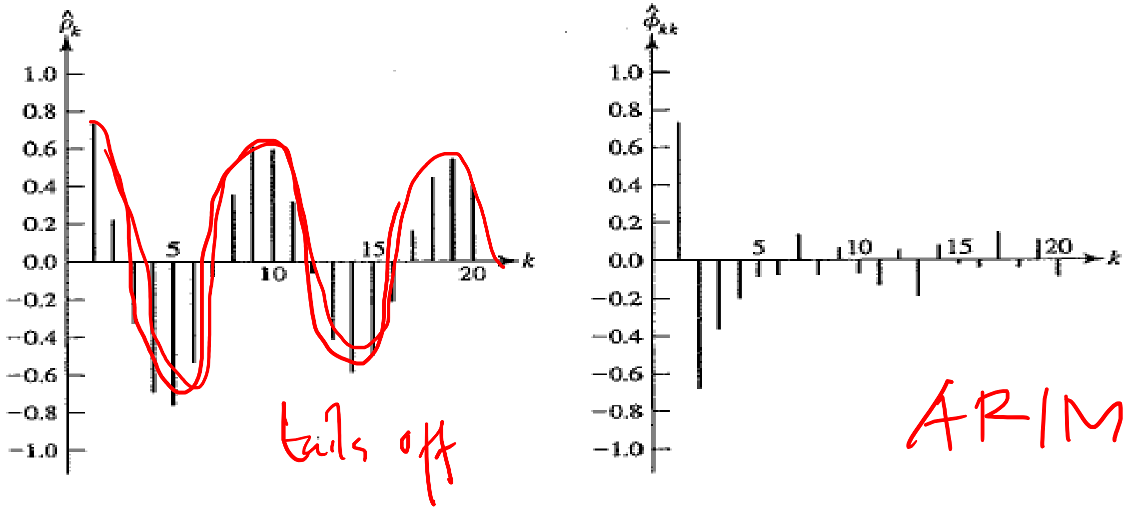
a. ARIMA$(0,1,2)(1,0,0)_{12}$
b. ARIMA$(2,1,0)\ (1,0,0)_{12}$
c. ARIMA$(0,1,2)\ (0,1,1)_{12}$
d. ARIMA$(2,1,0)\ (0,1,1)_{12}$

Berdasarkan plot ACF dan PACF berikut ini dimana Gambar (a) untuk $W_t = (1 - B)Z_t$ dan Gambar (b) untuk $W_t = (1 - B)(1 - B^4)Z_t$, maka model yang tepat adalah



~~a.~~ ARIMA(1,1,1) $(1,0,1)_4$
b. ARIMA(0,1,1) $(1,1,0)_4$
~~c.~~ ARIMA(1,1,0) $(1,0,1)_4$
d. ARIMA(0,1,1) $(0,1,1)_4$

Berdasarkan plot ACF, PACF serta dugaan nilai ACF dan PACF berikut ini, maka model yang tepat adalah



ARIMA(0,0,1)

(a) ACF, $\hat{\rho}_k$

1–10	.73	.22	−.32	−.69	−.76	−.53	−.08	.35	.61	.59
St.E.	.13	.19	.20	.21	.25	.29	.30	.30	.31	.33
11–20	.31	−.06	−.41	−.58	−.49	−.21	.16	.44	.54	.40
St.E.	.35	.36	.37	.37	.39	.40	.40	.41	.41	.43

(b) PACF, $\hat{\phi}_{kk}$

1–10	.73	−.68	−.36	−.20	−.09	−.08	.13	−.08	.06	−.07
St.E.	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13
11–20	−.13	.05	−.19	.07	−.02	−.04	.14	−.04	.10	−.09
St.E.	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13

a. ARIMA (3,0,0)
b. ARIMA (0,0,3)
c. ARIMA(3,1,0) X
d. ARIMA (0,1,3) X

thit..

Misalkan $\{Y_t\}$ adalah suatu deret waktu yang mengikuti proses $AR(2)$ dengan model $Y_t = \phi_2 Y_{t-2} + e_t$. Maka kisaran nilai ϕ_2 agar model tersebut stasioner adalah sebagai berikut :

a. $\phi_2 > 1\ sehingga\ Var(Y_{t-2}) \geq 0$

b. $\phi_2 < 1\ sehingga\ Var(Y_{t-2}) \geq 0$

c. $-1 < \phi_2 < 1\ sehingga\ Var(Y_{t-2}) < 0$

d. $-1 < \phi_2 < 1\ sehingga\ Var(Y_{t-2}) \geq 0$

$\phi_1 + \phi_2 < 1$

$\boxed{\phi_2 - \phi_1 < 1}$

$-1 < \phi_2 < 1$ atau $|\phi_2| < 1$

. Misalkan $\{Z_t\}$ adalah suatu deret waktu yang mengikuti proses $ARMA(1,2)$ dengan model

$$Z_t = \underset{\phi_1}{0.8}Z_{t-1} + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.6e_{t-2}, e_t \sim (0, \sigma_e^2)$$

Maka pernyataan yang tepat untuk model diatas adalah

a. $\rho_k = 0.8\rho_{k-1}\ for\ k \geq 1$
b. $\rho_k = 0.8\rho_{k-1}\ for\ k > 2$ ✓
c. $\rho_2 = 0.8\rho_1 + 0.6\sigma_e^2$
d. $\rho_2 = 0.8\rho_1 + 0.7\sigma_e^2$

ARMA(p,q) $p = 1$, $q = 2$

$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$ for $k > q$

$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$ for $k > 2$

Diketahui model ARIMA Box-Jenkins musiman $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)^S$ adalah:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)a_t$$

dimana

p, d, q = orde AR, *differencing*, dan MA non-musiman,

P, D, Q = orde AR, *differencing*, dan MA musiman,

$\phi_p(B)$ = $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$

$\Phi_P(B^S)$ = $1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \cdots - \Phi_p B^{PS}$

$(1-B)^d$ = orde *differencing* non-musiman

$(1-B^S)^D$ = orde *differencing* musiman

Jika diketahui bahwa

$Z_t = Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + a_t - 0.5a_{t-1} - 0.5a_{t-12} + 0.25a_{t-13}$, maka model ARIMA yang sesuai adalah…

Select one:

- A. $ARIMA(1,0,1)(1,0,1)^{12}$
- B. $ARIMA(1,0,1)(0,1,1)^{12}$
- C. $ARIMA(0,1,1)(\cancel{1},1,1)^{12}$
- D. $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)^{12}$ ✓

$$Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} = a_t - 0{,}5a_{t-1} - 0{,}5a_{t-12} + 0{,}25a_{t-13}$$

$$(1 - B - B^{12} + B^{13})Z_t = (1 - 0{,}5B - 0{,}5B^{12} + 0{,}25B^{13})a_t$$

$$(1-B)(1-B^{12})Z_t = (1-0{,}5B)(1-0{,}5B^{12})a_t$$

$d=1$ $D=1$ $q=1$ $Q=1$

$s=12$

thank you

mirjam nilsson

mirjam@contoso.com

www.contoso.com