Nama : Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban Soal 1

Seorang peneliti ingin melakukan pembangkitan data $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ yang menyebar Gamma (n, λ). Fasilitas hanya bisa Gamma $(n, 1)$. Solusi?

Penyelesaian: G_s : Fungsi kumulatif dari Gamma $(n,1)$

Misalkan ~~Gamma (n,1) = G_s (Gamma Standar)~~

$0 \le F_X(x) \le 1$ $\qquad F(y) = \dfrac{x-a}{b-a} \quad a \le x \le b$ pada sebaran seragam (a,b)

$0 \le G_s \le 1$

maka pada $y \sim$ Uniform $(0,1)$: $F(y) = y$

Sehingga untuk mendapatkan $y_i \sim U(0,1)$ didapat melalui

$G_s = F_y(y)$

$G_s = y$

$y = G_s$

Selanjutnya menggunakan Building - blocks of simulation didapatkan

$X \sim$ Gamma $(\alpha = n, \beta = \lambda)$

dengan $X_i = \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)}{\lambda}$

hal ini dapat pula diuraikan dengan pendekatan $E \sim$ Eksponensial (λ)

$0 \le y \le 1$ $\qquad$ karena $1 - y \sim U(0,1)$

$y = F_E(E)$ $\qquad$ maka $E_i = \dfrac{-\ln(y_i)}{\lambda}$

$y = 1 - e^{-\lambda E}$

$e^{-\lambda E} = 1 - y$ $\qquad$ sementara Eksponensial adalah kasus khusus pada saat Gamma $(\alpha = 1, \beta = \lambda)$ maka $X \sim$ Gamma(n,λ) dapat dibangkitkan dengan

$\ln(e^{-\lambda E}) = \ln(1-y)$ $\qquad X = \sum_{i=1}^{n} E_i$

$-\lambda E = \ln(1-y)$

$E = \dfrac{-\ln(1-y)}{\lambda}$

karena $y = G_s$ maka $X \sim$ Gamma (n, λ) dapat dicari dengan

$X_i = \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} \ln(G_{si})}{\lambda}$

Nama: Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban Soal 2

Seorang mahasiswa Statistika FMIPA - IPB ingin membangkitkan 2 p.a. X_1 & X_2
X_1 & $X_2 \sim N(0,1)$ & $\rho_{x_1 x_2} = 0,7$. Kemungkinan ~~pendek~~ pendekatan yang dapat digunakan? uraikan langkah² pengerjaannya.

Penyelesaian:
Pendekatan yang mungkin digunakan yaitu ~~pendekata~~ ~~metode Polar Marsaglia~~ dalil limit pusat. karena pada metode ini tidak ~~ted~~ terdapat asumsi peubah acak Xi saling bebas.
~~Sementara dalil limit pusat~~ dan

Langkah pengerjaan:
1. mencari a, b, dan m yang sesuai agar dapat membangkitkan sebaran uniform yang memiliki korelasi $\rho = 0,7$.
2. lalu membangkitkan X_1 & X_2 dari U_1 & U_2 yang di dapatkan dari pembangkitan bil. acak seragam (0,1) pada poin sebelumnya

$E(U_i) = 1/2$ $\quad$ $Var(U_i)$ $1/12$

maka $X_i = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \sim$ Normal (0,1)

karena : $n = 12\sigma^2 = 12 \cdot (1) = 12$
$C = \mu - n/2 = 0 - 12/2 = -6$

Nama : Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban Soal 3

Uraikan beberapa pendekatan yang dapat digunakan untuk pembangkitan Poisson (3). Lakukan pembandingan kelemahan & kelebihan setiap pendekatan

~~Pendekatan yang dapat d~~

Penyelesaian:

Pendekatan yang dapat dilakukan

1). Melalui sebaran eksponensial

$Y \sim \text{Eksponensial}(\lambda) \rightarrow X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\left.\begin{aligned} &S_0 = 0 \\ &S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ &S_x \le 1 \le S_{x+1} \end{aligned}\right\} \text{Poisson}(3):\quad \begin{aligned} &S_0 = 0 \\ &S_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\ln(U_i)}{3} \\ &S_x \le 1 \le S_{x+1} \end{aligned}$$

kelemahan: langkah2 yang diterapkan lebih panjang

2). Melalui sebaran Uniform

$U \sim \text{Uniform}(0,1) \rightarrow X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

~~Kelemahan~~

$$\left.\begin{aligned} &U = F_X(x) \\ &U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &U = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \Rightarrow \prod_{i=1}^{x} U_i < e^{-\lambda} \end{aligned}\right\} \text{Poisson}(3):\ \prod_{i=1}^{x} U_i < e^{-3}$$

Nama: Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

<u>Jawaban Soal 4</u>

Dengan memanfaatkan tabel bilangan acak yang tersedia, uraikan langkah untuk membangkitkan 10 bilangan acak yang menyebar $F(12, 8)$

Penyelesaian:

bilangan acak $F(12,8)$ dapat dibangkitkan dengan $\dfrac{\chi^2_{12}}{\chi^2_8}$

yang mana merupakan 2 sebaran chi-square genap

χ^2_{12} di dapatkan dari membangkitkan Gamma (~~4~~6, 2)

χ^2_8 " Gamma (4, 2)

maka χ^2_{12} didapatkan dari $G = \dfrac{-\sum_{i=1}^{6} \ln(U_i)}{2}$

χ^2_8 didapatkan dari $G = \dfrac{-\sum_{i=1}^{4} \ln(U_i)}{2}$

Sehingga $F(12,8)$ didapatkan dari $\dfrac{\chi^2_{12}}{\chi^2_8} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{6} \ln(U_i)}{-\sum_{i=1}^{4} \ln(U_i)}$.

~~Sehin~~ untuk membangkitkan 1 bilangan acak $F(12,8)$ diperlukan 10 bilangan acak $U(0,1)$ yang ~~da~~ didapatkan dari tabel bilangan acak.

Nama: Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban soal 5

Jika X_1, X_2, X_3, X_4 p.a. saling bebas dan $X_i \sim N(0,1)$ maka $y = |X_1, X_2, + X_3X_4|$ $y \sim$ Eksponensial (1). Berdasarkan informasi, bangkitkan 25 bilangan acak dari sebaran Eksponensial (5).

Penyelesaian:

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1)$

$y = X_1X_2 + X_3X_4 \quad y \sim$ Eksponensial (1)

$\left.\begin{array}{l} X_1X_2 \sim \chi^2_1 \\ X_3X_4 \sim \chi^2_1 \end{array}\right\} y \sim \chi^2_2$

$\cancel{\chi^2_2 \text{ didapatkan dari } G = -\frac{\sum_{i=1}^{1} \ln(U_i)}{2} = -\frac{\ln(U_i)}{2}}$ $G = \frac{-\ln(u_i)}{2}$

χ^2_2 didapatkan dari $\cancel{X = Z^2}$ $G = -\frac{\sum_{i=1}^{1} \ln(U_i)}{2} \Rightarrow \cancel{G = \ln(U_i)}$

$\cancel{Z \sim \text{Normal}(0,1)}$

$\cancel{Z = \sum U_i}$

$\cancel{Z = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6}$

$\cancel{Z = 12(U_i - 6)}$

$\cancel{Z/12 = U_i - 6}$

$\cancel{U_i = Z/12 + 6}$

maka $y \sim$ Eksponensial (5) di dapat dari

$-\ln(U_i) = 2G \Rightarrow \frac{-\ln(U_i)}{5} = \frac{2G}{5}$

$y \sim$ Eksponensial (5) didapatkan dari $\cancel{y = \frac{\ln(U_i)}{\lambda} = \frac{-\ln(Z_i/12+6)}{5}}$

$y_i = 2\left(\frac{-\ln(U_i)}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} = -\frac{\ln(U_i)}{5}$

$\cancel{Z_i = (\text{rnorm}(1))^2}$

$\cancel{Z_i = \{2.93, 0.08, 0.34, 0.18, 0.26, 0.}$

$\cancel{y_i = \frac{\ln(Z_i/12+6)}{5}}$

bangkitkan y_i sebanyak 25 kali

didapatkan y_i: { -0.35, -0.36, -0.35, -0.35, -0.36,
-0.35, -0.35, -0.36, -0.35, -0.36,
-0.35, -0.35, -0.36, -0.35, -0.35,
-0.36, -0.35, -0.35, -0.36, -0,36,
-0,36, -0.35, -0.35, -0.35, -0.36

Nama : Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban Soal 6

Pendekatan yg dapat digunakan serta uraikan langkah pengerjaan untuk membangkitkan $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ yg menyebar

a) t-student, db = 4

langkah:

1) membangkitkan 20 bilangan Acak $U(0,1) \rightarrow x_i$
2). cari rata² ($\bar{x}$) dan simpangan baku (s) ~~setiap 20~~
3). lalu setiap $\frac{x_i - \bar{x}}{s}$ sehingga didapatkan 20 bilangan acak yang menyebar t-student

b) khi-kuadrat db = 5

1). uraikan χ^2_5 menjadi $\chi^2_4 + \chi^2_1$ sehingga dapat didapatkan

$\chi^2 = \Gamma(2,2) + Z^2$ $\quad Z \sim$ Normal (0,1)

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} Z_i^2$

2). Z_i didapat dari pembangkitan sebaran normal (0,1) dengan U(0,1)
3). bangkitkan 25 y_i dengan $y_i = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6$
4). kuadratkan y_i
5). Jumlahkan y_1 hingga y_5 dan bilangan tersebut merupakan X_1 begitu seterusnya hingga y_{20} hingga y_{25} ~~sebagai~~ dijumlahkan dan menjadi X_{20}

Nama : Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180021

Jawaban Soal 7

Tunjukkan langkah² menggunakan simulasi, bahwa s^2 merupakan penduga yang berbias dari σ^2

Penyelesaian:

langkah² :

1. bangkitkan 10.000 populasi yang menyebar normal dengan nilai tengah ~~m~~ μ dan ragam σ^2.
2. lakukan ~~r~~ sampling ~~berkali² misal sebanyak 100 kali~~. n = 30.
3. hitung ~~stand~~ ragam contoh → simpan pada ~~a~~ ragama_contoh_i
4. Ulangi langkah 2 dan 3 sebanyak 100 kali.
5. cari rata-rata dari ragama_contoh_i
6. s^2 berbias bila E(ragama_contoh_i) ≠ ~~raga~~ σ^2
   atau mean(ragam_contoh_i) ≠ σ^2

Nama: Annissa Nur Fitria Fathina
NIM : G14180031

Jawaban Soal 8

Dengan tabel bilangan ~~acak~~ acak yang disediakan, uraikan langkah serta tuliskan hasil pembangkitan yang diperoleh untuk membangkitkan 5 bilangan acak yang berasal dari sebaran:

a) Normal (5, 16)

$n = 12\sigma^2 = 12(16) = 192$

$c = \mu - n/2 = 5 - 192/2 = -91$

$X \sim$ Normal (5, 16) dapat dibangkitkan dengan

$X_i = \sum_{i=1}^{192} U_i - 91 \sim$ Normal (5, 16)

untuk membangkitkan 5 bil. Acak Normal dibutuhkan 960 bilangan acak dari tabel.

Tabel bilangan acak berisi angka $\sim U(0,1)$

b). Binomial (4, 0.3)

$$P(X=x) = \begin{cases} 0{,}2401 & ; x=0 \rightarrow P(X=0) \\ 0{,}4116 & ; x=1 \rightarrow P(X=1) \\ 0{,}2646 & ; x=2 \rightarrow P(X=2) \\ 0{,}0756 & ; x=3 \rightarrow P(X=3) \\ 0{,}0081 & ; x=4 \rightarrow P(X=4) \end{cases}$$

memberi nilai sesuai x nya jadi ~~sebara~~ dikelompokan bilangan acak hasil sebaran uniform dikelompokan menjadi 5 kelompok di atas.

dan didapatlah bilangan acak binomial dengan ~~nilai~~ kemungkinan nilai 0, 1, 2, 3, 4