UTS Simulasi Statistika - G14190020

Seorang peneliti ingin melakukakan pembangkitan data $x_1, x_2, ..., x_100$ **yang menyebar** $\text{Gamma}(n, \lambda)$**. Fasilitas yang tersedia di software yang dimiliki peneliti tersebut ,hanyalah untuk membangkitkan** $\text{Gamma}(n, 1)$**. Berikan solusi pemecahan yang harus dilakukan si peneliti agar dapat membangkitkan** $\text{Gamma}(n, \lambda)$**.**

Note bahwa $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ memiliki bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

Maka $\text{Gamma}(n, 1)$ memiliki bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)1^n} x^{n-1} e^{-x}$$

Bagaimana fkp $y = x\lambda$?. Diketahui bahwa Jacobian $\partial x/\partial y = \frac{1}{\lambda}$, karena $x = \frac{y}{\lambda}$. Maka transformasi fungsi adalah mentransformasi dan mengalikan dengan Jacobian:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\Gamma(n)1^n} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{n-1} e^{-y/\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y/\lambda} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} y^{n-1} e^{-y/\lambda} \end{aligned}$$

Ini tidak lain adalah fungsi kepekatan peluang $Gamma(n, \lambda)$. Buat peubah acak $Z = \lambda \cdot X$. Dari kajian transformasi tadi, $Z \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

Seorang mahasiswa Statistika FMIPA-IPB ingin membangkitkan dua peubah acak X1 dan X2 yang masing-masing menyebar Normal(0,1) dan antara kedua peubah tersebut terdapat korelasi sebesar 0.7. Bantulah mahasiswa tersebut dengan memberikan kemungkinan pendekatan yang dapat digunakan, serta uraikan pula langkah-langkah pengerjaannya.

Untuk membangkitkan peubah tersebut, maka yang perlu diperlukan adalah membangkitkan dua peubah acak $N(0,1)$ yang saling bebas. Secara umum, metode yang dapat dipakai adalah metode Box-Muller atau metode Polar-Marsaglia (karena metode CLT hanya membangkitkan satu peubah acak normal).

Untuk membangkitkan Box-Muller:

1. Buat dua peubah acak $U(0,1)$ saling bebas, U_1, U_2.
2. Hitung $N_1 = (-2\log_e U)^{1/2} cos(2\pi U_2)$ dan $N_2 = (-2\log_e U)^{1/2} sin(2\pi U_2)$

Untuk Polar-Marsaglia:

1. Buat dua peubah acak $U(0,1)$ saling bebas, U_1, U_2.
2. Buat $V = 2U - 1$ dari U_1, U_2.
3. Hitung $W = V_1^2 + V_2^2$. Ambil yang kurang dari 1.
4. Hitung $N_1 = V_1[(-2\log_e W)/W]^{1/2}$ dan $N_2 = V_2[(-2\log_e W)/W]^{1/2}$

Setelah dibangkitkan, perhatikan bahwa pada dasarnya hendak dibuat suatu peubah acak normal ganda $\mathbb{X}$ dengan matriks koragam:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan sifat sidik peubah ganda. Jika $\mathbb{Z}$ merupakan peubah acak normal ganda yang saling bebas dan identik normal baku, maka jika:

$$\begin{aligned}
\mathbb{X} &= \mu + \mathbb{C}\mathbb{Z} \\
\mathbb{E}(\mathbb{X}) &= \mu + C\mathbb{E}(\mathbb{Z}) = \mu + 0 = \mu \\
\mathbb{V}(\mathbb{X}) &= V(\mu) + V[\mathbb{C}\mathbb{E}(\mathbb{Z})] = 0 + \mathbb{C}\mathbb{V}(\mathbb{Z})\mathbb{C}^{\mathbb{T}} = \mathbb{C}\mathbb{I}\mathbb{C}^{\mathbb{T}} \\
&= \mathbb{C}\mathbb{C}^{\mathbb{T}} = \Sigma
\end{aligned}$$

Ini disebut dekomposisi Cholesky, dimana suatu matriks simetrik yang positif definit didekomposisi jadi matriks segitiga bawah dan transposenya. Maka dari itu, cari $\mathbb{C}$, suatu matriks segitiga yang menghasilkan matriks koragam yang diinginkan. Dalam kasus ini:

$$
\begin{aligned}
\Sigma = \mathbb{C}\mathbb{C}^{\mathbb{T}} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 0 & ab + 0 \cdot c \\ ab + 0 \cdot c & b^2 + c^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sangat jelas bahwa $a^2 = 1$ sehingga $a = 1$ (ragam tak mungkin negatif). Maka $b = \rho$, sehingga $c^2 = 1 - \rho^2$ dan $c = \sqrt{1 - \rho^2}$. Maka ditemukan tiap elemen dari matriks yang dekomposisi Cholesky. Anggap kita memiliki matriks X sebagai berikut:

$$
\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & ... & X_{2n} \end{pmatrix}
$$

Maka kita mengalikan matriks 2×2 dengan $2 \times n$ sehingga terbentuk matriks peubah baru berupa:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathbb{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & \sqrt{1 - 0.49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & ... & X_{2n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1n} \\ 0.7X_{11} + \sqrt{0.51}X_{21} & 0.7X_{12} + \sqrt{0.51}X_{22} & ... & 0.7X_{1n} + \sqrt{0.51}X_{2n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Contoh di R:

```
x1 <- rnorm(10000)
x2 <- rnorm(10000)
cor(x1,x2)
```

```
[1] -0.001540483
```

```
x3 <- 0.7*x1+sqrt(0.51)*x2

cor(x1,x3)
```

```
[1] 0.695859
```

Terlihat bahwa korelasi berhasil dibuat.

Uraikan beberapa langkah pembangkitan $Poisson(3)$

Proses Poisson dalam kasus ini dibangkitkan sebagai berikut. Waktu tunggu antara kejadian di proses Poisson dimodelkan secara eksponensial. Jika peubah acak $Exp(1/\lambda)$ ditambahkan sampai menghasilkan 1 (di mana proses dianggap selesai), maka karena nilai harapan Eksponensial adalah $\theta = 1/\lambda$, nilai harapan kejadian adalah λ, sesuai dengan Poisson. Jumlah peubah acak $Exp(1/\lambda)$ yang ditambahkan tidak lain adalah jumlahnya kejadian yang terjadi.

Diketahui bahwa cara membangkitkan sebaran $Exp(\theta)$ adalah $-\theta \log(U)$. Maka

$$\frac{-1}{\lambda}\log(U) = Y$$

Menyebar $Exp(1, lambda)$. Dalam kata lain,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{\lambda}\log(U_i) &\geq 1 \\
\sum_{i=1}^{n} \log U_i &\geq -\lambda \\
\log(\prod_{i=1}^{n} U_i) &\geq \\
\prod_{i=1}^{n} U_i &\geq e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Kondisi menambah peubah acak eksponensial sampai lebih dari sama dengan satu untuk membangkitkan Poisson sama saja dengan perkalian uniform sampai $e^{-\lambda}$.

Jadi, pembangkitan tersebut menghitung n maksimal peubah acak $Eksponensial(1/\lambda)$ yang ditambahkan sebelum jumlahnya lebih dari 1.

Maka ada dua pendekatan:

1. Dari Uniform - ambil n maksimal sebelum $\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-3}$

Keuntungan metode ini adalah, proses perkalian biasanya lebih mudah dihitung komputer daripada fungsi matematis seperti log. Oleh karena itu bisa jadi algoritma ini lebih cepat.

Namun, metode ini agaknya tidak langsung menunjukkan hubungan sebaran Eksponensial dan Poisson, serta alasan peubah Poisson terbangkit.

2. Dari $Eksponensial(\lambda)$ - bangkitkan dengan $-\ln(U)/\lambda$. ambil n maksimal sebelum $\sum_{i=1}^{n} -\ln(U_i)/\lambda \geq 1$ atau $\sum_{i=1}^{n} -\ln(U_i) \geq -3$

Keuntungan metode ini adalah, sesuai dengan hubungan Eksponesnial sebagai waktu tunggu Poisson. Tetapi, fungsi log mungkin butuh aproksimasi untuk dihitung komputer sehingga dapat lebih lama.

Dengan memanfaatkan tabel bilangan acak yang tersedia, uraikan langkah untuk membangkitkan 10 bilangan acak yang menyebar F(12,8).

Definisi suatu peubah acak $U \sim F(n_1, n_2)$ adalah:

$$U = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

Jika $X \sim \chi^2(n_1)$, dan $Y \sim \chi^2(n_2)$.

Maka bangkitkan peubah acak $\chi^2(12)$ dan $\chi^2(8)$.

Ini dapat dilakukan dengan membangkitkan peubah acak Uniform. Lalu, perhatikan bahwa untuk membangkitkan $E \sim Exp(\lambda)$=

$$E = \frac{-ln(U)}{\lambda}$$

Jika sejumlah n peubah acak Eksponensial yang saling bebas ditambahkan, maka dapat dibuat $G \sim \Gamma(n, \lambda)$:

$$G = \frac{-\sum_{i=1}^{n} ln(U_i)}{\lambda}$$

Diketahui bahwa $\chi^2(n)$ tidak lain merupakan $\Gamma(n/2, 1/2)$. Maka, dari langkah-langkah tersebut, bangkitkan $\chi_1^2 = \Gamma(12/2, 1/2) = \Gamma(6, 1/2)$. Berarti, bangkitkan 60 bilangan acak Uniform. Bagi menjadi 10 kelompok. Transformasikan menjadi $Eksponensial(1/2)$ sesuai rumus:

$$E = \frac{-\ln(U)}{1/2} = -2\ln(U)$$

Di tiap kelompok ada 6 peubah acak Eksponensial. Tambahkan 6 peubah acak tersebut sehingga menjadi 1 peubah acak $\Gamma(6, 1/2)$. Karena ada 10 kelompok, terbentuk 10 peubah acak $\Gamma(6, 1/2) = \chi^2(12)$.

Lalu bangkitkan $\chi_2^2 = \Gamma(8/2, 1/2) = \Gamma(4, 1/2)$. Berarti, bangkitkan 40 bilangan acak Uniform. Bagi menjadi 10 kelompok. Transformasikan menjadi $Eksponensial(1/2)$ sesuai rumus:

$$E = \frac{-\ln(U)}{1/2} = -2\ln(U)$$

Di tiap kelompok ada 4 peubah acak Eksponensial. Tambahkan 4 peubah acak tersebut sehingga menjadi 1 peubah acak $\Gamma(4, 1/2)$. Karena ada 10 kelompok, terbentuk 10 peubah acak $\Gamma(4, 1/2) = \chi^2(8)$.

Maka, dari dua peubah acak tersebut, bagi dengan derajat bebasnya dan rasiokan:

$$\frac{\chi_1^2/12}{\chi_2^2/8}$$

Terbentuk peubah acak tersebut.

Jika X_1, X_2, X_3, X_4 adalah peubah acak yang saling bebas dan menyebar $N(0, 1)$, maka $Y = |X_1X_2 + X_3X_4|$ akan menyebar $Eksponensial(1)$. Berdasarkan informasi tersebut bangkitkanlah 25 bilangan acak dari sebaran $Eksponensial(5)$.

Note bahwa $Eksponensial(1)$ memiliki bentuk:

$$f(x) = e^{-x}$$

Bagaimana fkp $y = x/5$?. Diketahui bahwa Jacobian $\partial x/\partial y = 5$, karena $x = 5y$. Maka transformasi fungsi adalah mentransformasi dan mengalikan dengan Jacobian:

$$f(y) = e^{-5y} \cdot 5 = 5e^{-5y}$$

Ini tidak lain adalah fungsi kepekatan peluang $Eksponensial(5)$. Maka:

1. Buat 25 peubah acak Eksponensial(1) dari $Y = |X_1X_2 + X_3X_4|$
2. Buat peubah acak $Z = Y/5$ (bagikan peubah acak tersebut dengan λ yang diinginkan). Dari kajian transformasi tadi, $Z \sim \text{Exp}(5)$.

Sebutkan pendekatan yang dapat digunakan serta uraikan langkah pengerjaan untuk membangkitkan $x_1, x_2, ..., x_{20}$, yang menyebar menurut sebaran:

1. t-student, db=4.
2. Khi-kuadrat db=5

t-student

Sebaran t-Student didefinisikan sebagai:

$$X = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

Di mana $Z \sim N(0,1)$, dan $Y \sim \chi^2(n)$. Maka bangkitkan sebaran normal baku dengan metode Sebaran Limit Pusat:

1. Bangkitkan 12 peubah sebaran Uniform saling bebas.
2. Tambahkan 12 sebaran Uniform tersebut, lalu kurangi dengan 6.

Ini dikarenakan $Var(U) = 1/12$ sehingga $Var(U_1 + ... + U_12) = 12/12 = 1$. Tapi $E(U) = 1/2$ sehingga $E(U_1 + ... + U_12) = 6$. Maka dari itu ragam yang benar didapat dari menambah 12 peubah acak uniform, tapi agar nilai harapan benar kurangi dengan 6.

Atau bangkitkan dengan Polar-Marsaglia atau Box-Muller.

Lalu, bangkitkan sebaran $\chi^2(4)$. Rasionale di balik pembangkitan sebaran χ^2 sudah dijelaskan sebelumnya.

Diketahui bahwa $\chi^2(n)$ tidak lain merupakan $\Gamma(n/2, 1/2)$. Maka, dari langkah-langkah tersebut, bangkitkan $\chi^2_1 = \Gamma(4/2, 1/2) = \Gamma(2, 1/2)$. Berarti, bangkitkan 40 bilangan acak Uniform. Bagi menjadi 20 kelompok. Transformasikan menjadi $Eksponensial(1/2)$ sesuai rumus:

$$E = \frac{-\ln(U)}{1/2} = -2\ln(U)$$

Di tiap kelompok ada 2 peubah acak Eksponensial. Tambahkan 2 peubah acak tersebut sehingga menjadi 1 peubah acak $\Gamma(2, 1/2)$. Karena ada 20 kelompok, terbentuk 20 peubah acak $\Gamma(2, 1/2) = \chi^2(4)$.

Lalu, bagi sebaran $\chi^2(4)$ yang dibangkitkan dengan derajat bebasnya (4). Akarkan. Bagi sebaran normal baku dengan hasil akar tersebut.

Kesimpulan:

1. Bangkitkan $Z \sim N(0,1)$ (langkah di atas)
2. Bangkitkan $\chi^2(4)$ dari sebaran Gamma (langkah di atas)
3. Buat $V = \sqrt{\chi^2(4)/4}$.
4. Buat Z/V.

Khi-kuadrat

Definisi sebaran khi-kuadrat $\chi^2(n)$ tidak lain merupakan $\Gamma(n/2, 1/2)$ hanya berlaku jika sebaran tersebut berderajat bebas Genap.

Apa alternatifnya?

Kika $Z \sim \text{Normal}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ (dalam kata lain, normal baku), maka fungsi kepekatan peluang Z:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right) z^2\right]$$

Maka dapat dibuktikan bahwa:

$$\begin{aligned}
M_{Z^2}(t) &= E\left[\exp\left(tz^2\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tz^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \, dz \quad \text{(dari fungsi kepekatan peluang)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(tz^2 - \frac{z^2}{2}\right) \, dz
\end{aligned}$$

Salah satu cara untuk menyelesaikan integral yang mengandung fungsi kepekatan peluang normal dari $-\infty$ ke ∞ adalah dengan fakta bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i) \, dx_i$, jika X_i adalah peubah acak normal. Oleh karena itu, integral tersebut harus dikonversi sehingga menjadi fungsi kepekatan peluang normal dengan parameter yang berbeda, sehingga hasilnya 1. Dalam kasus ini:

$$\begin{aligned}
M_{Z^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(1 - 2t\right) z^2\right] \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left\{\frac{1}{2(1-2t)^{-1}}\right\} z^2\right] \, dz
\end{aligned}$$

Note bahwa suatu peubah yang menyebar $Y = \text{Normal}[0, (1-2t)^{-1}]$ akan memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \frac{1}{(1-2t)^{-1/2}\sqrt{2\sigma}} \exp\left[-\left\{\frac{1}{2(1-2t)^{-1}}\right\} y^2\right]$$

Maka:

$$M_{Z^2}(t) = (1-2t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-2t)^{-1/2}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left\{\frac{1}{2(1-2t)^{-1}}\right\} z^2\right] \, dz$$

(Perkalian dengan konstanta)

$$M_{Z^2}(t) = (1-2t)^{-1/2} \cdot 1 = (1-2t)^{-1/2}$$

Note bahwa peubah acak chi-kuadrat dengan derajat bebas v memiliki fungsi pembangkit momen:

$$(1-2t)^{-v/2}$$

Maka $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Selain itu diketahui bahwa untuk peubah χ^2 saling bebas, jika $X_1, \ldots, X_k$ adalah peubah acak χ^2 saling bebas dengan derajat bebas $n_1, \ldots, n_k$, maka jumlah $V = \sum_{i=1}^{k} X_k$ menyebar khi-kuadrat dengan derajat bebas $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Bukti teorema tersebut dapat dilihat dari fungsi pembangkit momen:

$$\begin{aligned} M_{[V=\sum_{i=1}^{k} X_i]}(t) &= \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) \qquad \text{(Dari sifat fungsi pembangkit momen)} \\ &= \prod_{i=1}^{k} (1-2t)^{-n_i/2} \\ &= (1-2t)^{-\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{2}} \end{aligned}$$

Maka dari itu, peubah acak khi-kuadrat dapat ditambahkan untuk menghasilkan peubah acak khi-kuadrat dengan derajat bebas baru.

Alternatif pertama adalah pembuatan Gamma, lalu normal baku kuadrat:

1. Bangkitkan 40 Uniform, menjadi 40 Eksponensial yang dibagi jadi 20 kelompok; di tiap kelompok peubah eksponensial ditambah hingga menjadi $\Gamma(2, 1/2)$.
2. Bangkitkan Normal Baku menurut CLT (bangkitkan 12*20=240 uniform); tambahkan setiap 12 peubah uniform, Box-Muller, atau Polar Marsaglia - kedua kasus ini bangkitkan (40 peubah acak uniform, 20 U_1, 20 U_2 (sudah dijelaskan di atas). Ambil salah satu N_1 atau N_2
3. Buat kuadrat Z^2 normal baku.
4. Tambahkan $\Gamma(2, 1/2) + Z^2$

Atau, buat 5 kuadrat normal baku. Bangkitkan 12*5*20=1200 uniform. Tambahkan setiap 12 peubah uniform sampai ditemukan 20 observasi normal baku, sampai terbuat 5 peubah acak normal baku dengan n=20. Kuadratkan tiap peubah, tambahkan.

Jika menggunakan Polar Marsaglia atau Box Muller bangkitkan 40 Uniform, ambil N_1 atau N_2; lakukan 5 kali.

Tunjukkan langkah menggunakan simulasi, bahwa S^2 merupakan penduga yang berbias dari σ^2

Dianggap bahwa:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^2)}{n}$$

Maka langkah yang dapat dilakukan adalah;

1. Bangkitkan i jumlah sampel berukuran n dari sebaran dengan ragam σ^2.
2. Hitung s^2 untuk tiap sampel dengan rumus tersebut.
3. Lalu, hitung rata-rata s^2. Apakah dekat dengan σ^2?

Misal:

```r
n<- 30
i<- 10000
truevar<- 9
vars <- rep(0,100)
vars2 <- rep(0,100)

for(j in seq(1,i)){
    sample <- rnorm(n,0,sd=3)
    vars[j] <- sum((sample-mean(sample))^2)/n
}

mean(vars)
```

```
[1] 8.719643
```

Terlihat bahwa penduga tersebut berbias.

Dengan memanfaatkan tabel bilangan acak yang disediakan, uraikan langkah serta tuliskan hasil pembangkitan yang anda peroleh untuk membangkitkan 5 buah bilangan acak yang berasal dari sebaran:

Normal (5, 16).

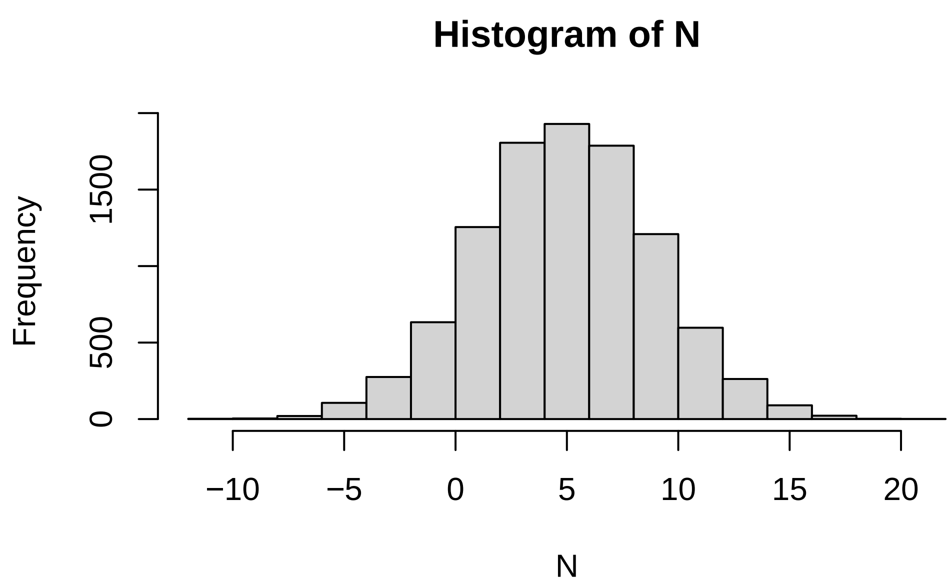
Menggunakan metode CLT:

```
clt <- function(i, mu, sigma2){
  n <-12*sigma2
  k <- mu-n/2
  Umat <- matrix(runif(n*i), i)
  N <- rowSums(Umat)+k
  return(N)
}

N <- clt(10000,5,16)
mean(N);var(N);hist(N)
```

```
[1] 4.937845

[1] 15.63421
```



Tentukan:

1. Jumlah peubah acak Uniform yang perlu ditambah. Karena $\sigma^2 = V(\sum_{i=1}^{n} U_i) = n/12$, maka $n = 12\sigma^2$. Atau, ada $12 * 16 = 192$ peubah acak Uniform.
2. Pengoreksian. Karena nilai harapan menjadi $192/2 = 96$, maka kurangi 91.
3. Maka, buat 192 peubah acak Uniform. Tambahkan. Kurangi hasilnya dengan konstanta 91.
4. Ulangi langkah 5 kali.

```
clt(5,5,16)
```

```
[1]  7.9859006 -0.2395765  4.6826849  8.4421052  4.8371324
```

Binomial (4, 0.3)

Menggunakan metode Fungsi kumulatif:

$$p(x \mid n=4,\ p=0.3) = \begin{cases} \binom{4}{0}0.3^0 \cdot 0.7^4 = 0.2401 & x=0 \\ \binom{4}{1}0.3^1 \cdot 0.7^3 = 4 \cdot 0.1029 = 0.4116 & x=1 \\ \binom{4}{2}0.3^2 \cdot 0.7^2 = 0.2646 & x=2 \\ \binom{4}{3}0.3^3 \cdot 0.7^1 = 0.0756 & x=3 \\ \binom{4}{4}0.3^4 \cdot 0.7^0 = 0.0081 & x=4 \end{cases}$$

Maka fungsi kumulatifnya:

$$P(X \le x) = \begin{cases} 0.2401 & x=0 \\ 0.2401 + 0.4116 = 0.6516 & x=1 \\ 0.6516 + 0.2646 = 0.9162 & x=2 \\ 0.9162 + 0.0756 = 0.9918 & x=3 \\ 1 & x=4 \end{cases}$$

Maka jika kita menemukan peubah acak $U(0,1)$, jika $U \le 0.2401$, $b = 0$, jika $0.2401 < U \le 0.6516$, $b = 1$, jika $0.6516 < U \le 0.9162$, $b = 2$, jika $0.9162 < U \le 0.9918$, $b = 3$, dan jika $0.9918 < U \le 0.1$, $b = 4$.

Atau sebaran $Binomial(n,p)$ dibangkitkan dengan membuat n observasi menyebar $Bernoulli(p)$ dengan metode sebelumnya, n observasi tersebut ditambah (jumlah percobaan yang sukses). Prosedur ini diulangi beberapa kali. Kode di R akan menggunakan matriks untuk menggabung vektor berisi peubah acak uniform yang diubah menjadi Bernoulli, lalu jumlah dari tiap kolom matriks dicari. Vektorisasi dari R yang baik dimanfaatkan:

```
unif<- runif(5)
binom <- ifelse(unif<0.2401,0, ifelse(unif<0.6515,1,ifelse(unif<0.9162, 2, ifelse(unif<0.9

binomial <- function(n, p, i){
  trials <- matrix(nrow = n, ncol = i, byrow = T, runif(n*i))
  binom <- ifelse(trials<p, 1, 0) |> colSums()
  tab <- table(binom)/i
  return(list(tab,binom))
}

binom2<-binomial(4,0.5,5)

binom;binom2
```

```
[1] 1 2 2 1 2
```

```
[[1]]
binom
  1   2   3
0.2 0.4 0.4

[[2]]
[1] 3 2 1 3 2
```