IPB University
— Bogor Indonesia —
Department of Statistics

SIMULASI STATISTIKA

Pembangkitan Bilangan Acak Seragam

PEUBAH ACAK SERAGAM

Fungsi Kepekatan Peluang ⟶

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fungsi Kumulatif Peluang ⟶

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$$

Nilai Harapan :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Ragam :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

PEUBAH ACAK SERAGAM

Untuk sembarang peubah acak X,

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Building-blocks Of Simulation

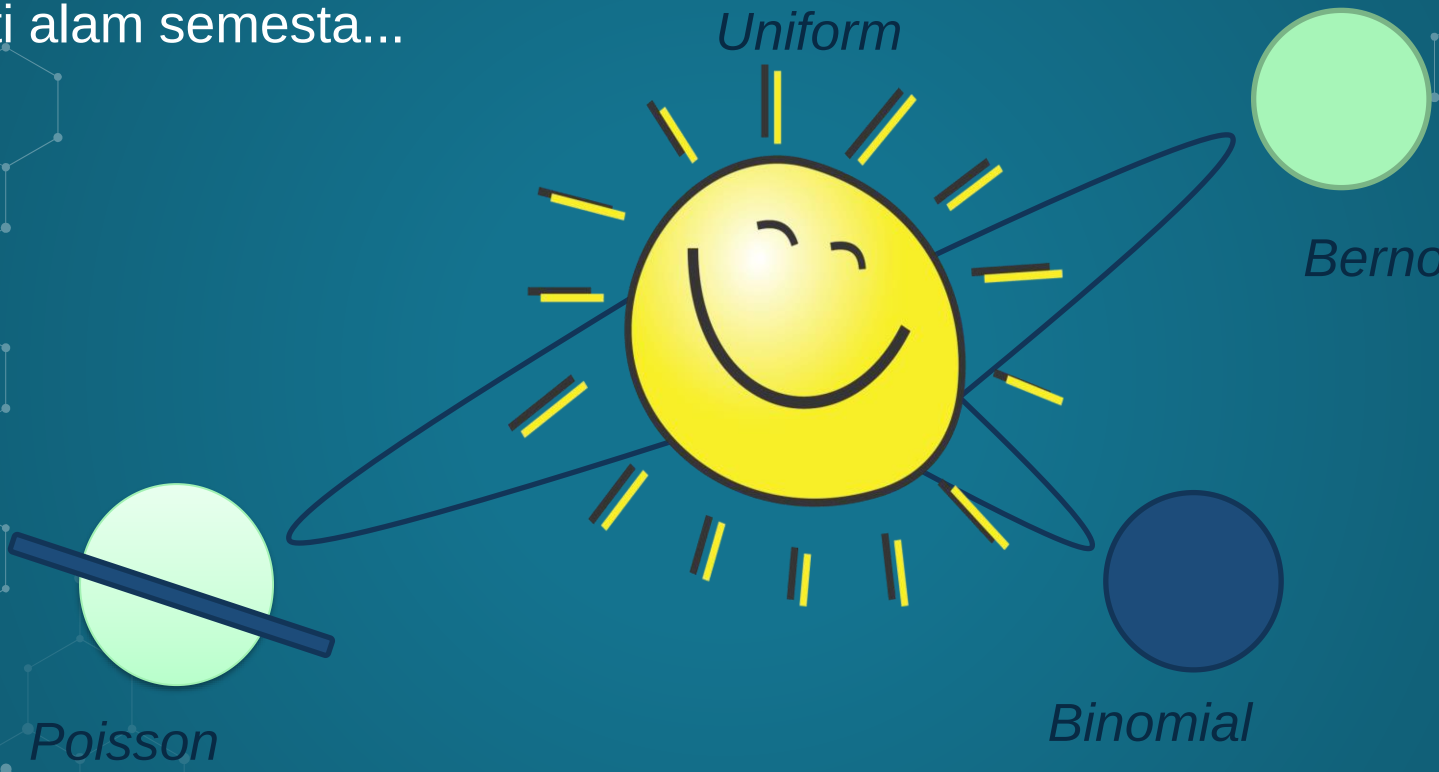
Peubah acak lain dapat dibangkitkan dari peubah acak seragam (0,1)

Mengapa harus menyebar seragam?

- Distribusi kontinu yang paling sederhana
- Distribusi yang lebih rumit dapat didekati dari distribusi seragam

Ilustrasi :

Seperti alam semesta...



Dan sebaran lainnya...

PEMBANGKITAN BILANGAN ACAK SERAGAM

$$U_{n+1} = (\pi + U_n)^5 \bmod(1); \quad n \geq 0; 0 < U_0 < 1$$

$U_n \sim U(0,1)$

U_0 → *seed(nilai awal), misal: 0.321*

PEMBANGKITAN BILANGAN ACAK SERAGAM

Dibangkitkan secara rekursif dengan fungsi

$$X_{n+1} = a\,X_n + b \pmod{m}, n \geq 0$$

Keterangan :

a, b dan m adalah konstanta

X_0 adalah nilai awal ("*Seed*").

Bentuk pembangkit kongruensial

PEMBANGKITAN BILANGAN ACAK SERAGAM

$$X_{n+1} = a\,X_n + b \pmod{m}, n \geq 0$$

- b = 0, bentuk multiplikatif
- $b \neq 0$, bentuk campuran
- Bilangan acak U(0,1) dapat diperoleh dari X

$$U_i = \frac{X_i}{m} \sim U(0,1)$$

Pertimbangan dalam pemilihan konstanta a, b dan m

- Efisiensi perhitungan
- Independensi antar pengamatan
- Panjang siklus

Efisiensi Perhitungan

Misalkan $X_0 = 89$, $a = 1573$, dan $b = 19$
Berapa besaran m harus ditetapkan agar diperoleh efisiensi dalam penghitungan?

- Penyelesaian :
  - $X_1 = (1573)(89) + 19 \pmod{m} = 140016 \pmod{m}$

akan mudah bila dipilih $m = 10^3$, sehingga :

- $X_1 = 140016 \pmod{10^3} = 16$
- $X_2 = (1573)(16) + 19 \pmod{10^3} = 25187 \pmod{10^3} = 187$
- dst

**Jika menggunakan basis bilangan r maka pilihlah $m = r^h$, h adalah bilangan bulat positif*

Panjang Siklus

- $X_0 = 3$, $a = 2$, $b = 5$, dan $m = 10$
- Penyelesaian :
  - $X_1 = (2)(3) + 5 \pmod{10} = 1$
  - $X_2 = (2)(1) + 5 \pmod{10} = 7$
  - $X_3 = (2)(7) + 5 \pmod{10} = 9$
  - $X_4 = (2)(9) + 5 \pmod{10} = 3$
  - $X_5 = (2)(3) + 5 \pmod{10} = 1$
  - $X_6 = (2)(1) + 5 \pmod{10} = 7$
  - $X_7 = (2)(7) + 5 \pmod{10} = 9$
  - $X_8 = (2)(9) + 5 \pmod{10} = 3$
  - dst.

Note !

Kita menginginkan pembangkit bilangan acak dengan siklus yang terpanjang. Maksimum dari panjang siklus ini adalah m

Panjang Siklus

Knuth, 1982. *The Art of Computer Programing*
Untuk b>0, panjang siklus maksimum dapat dicapai jika dan hanya jika hubungan berikut dipenuhi:

1. Bilangan b dan m tidak memiliki faktor bersama kecuali bilangan satu.
2. (a-1) merupakan kelipatan dari setiap bilangan prima yang membagi m.
3. (a-1) merupakan kelipatan 4 jika m merupakan kelipatan 4.

Panjang Siklus

Teladan :

Misal $m = 2^k$,

- Syarat (2) dan (3) dipenuhi bila $a = 4c + 1$, $c > 0$
- Syarat (1) dipenuhi bila b bilangna bulat ganjil positif

- Untuk pembangkit multiplikatif ($b = 0$) maka siklus maksimum yang bias dicapai sebesar 2^{k-2}, jika $m = 2^k$.

Contoh:

a	b
5^{13}	36 atau 39
5^{17}	40, 42 atau 43

dengan X_0 = Bilangan ganjil positif

Independensi Antar Pengamatan

$$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim \text{Uniform}\,(0,1)$$
$$\text{Cov}\,(U_i, U_j) = 0, \qquad \nabla\, i \neq j$$

- Tidak selalu cov $(X_i, X_j) = 0$, $\nabla\, i \neq j$ $\rightarrow$ cov $(X_i, X_j) \approx 0$
- Sangat bergantung pada penetapan konstanta a, b dan m.
- Besaran autokorelasi ordo-1 dapat dirumuskan sebagai fungsi dari a, b dan m.

$$\rho = \left[\frac{1}{a} - \frac{6b}{am}\left(1 - \frac{b}{m}\right)\right] \pm \frac{a}{m},$$

idealnya ρ =0

Independensi Antar Pengamatan

LATIHAN

a	b	m	ρ
$2^{34}+1$	1	2^{35}	
$2^{18}+1$	1	2^{35}	

Pembangkitan Bilangan Acak Seragam Kontinu dengan Minitab

Uniform Distribution

A uniform distribution on the lower endpoint, a, to the upper endpoint, b. The pdf is

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b$$

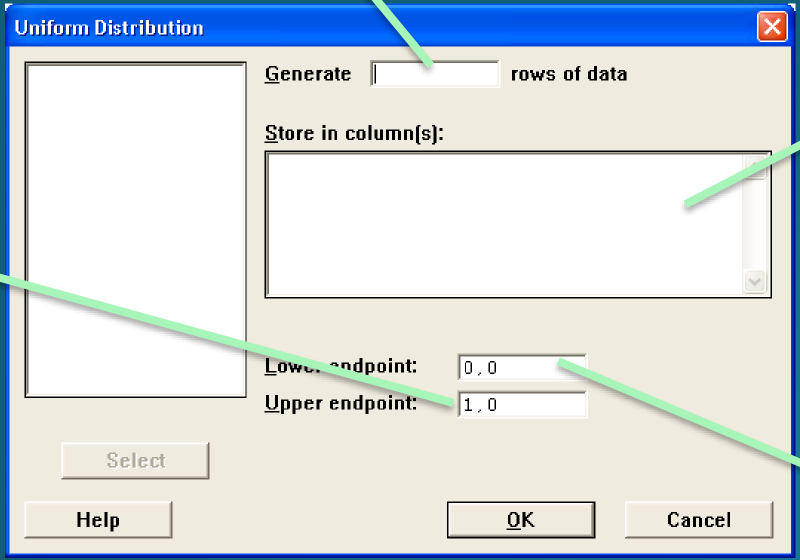
Perintah

CALC>RANDOMDATA>UNIFORM<OK

Berapa banyak bilangan yang harus dibangkitkan

Kolom tempat menyimpan bilangan hasil bangkitan

Parameter b (batas atas)



Parameter a (batas bawah)

TERIMA KASIH