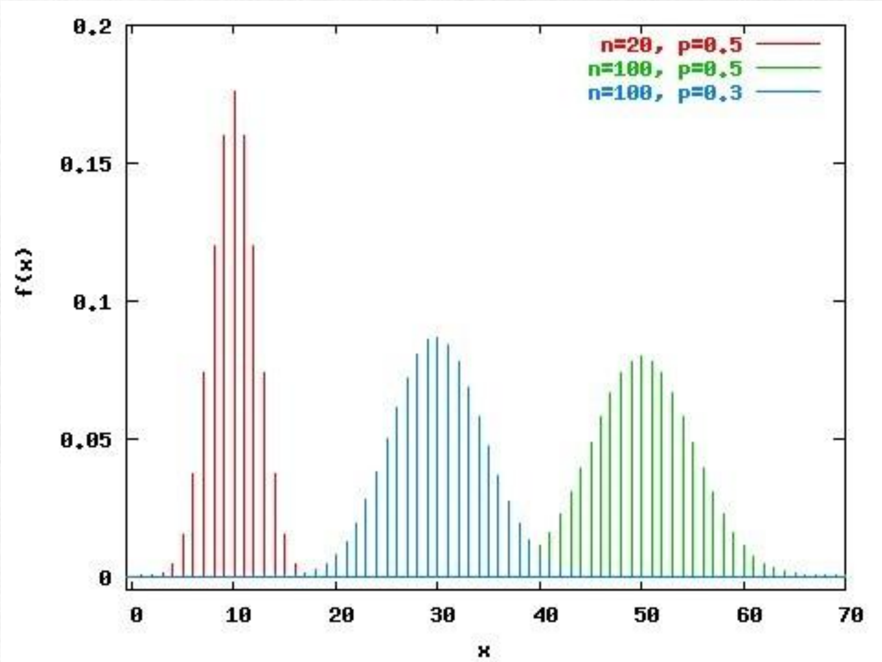
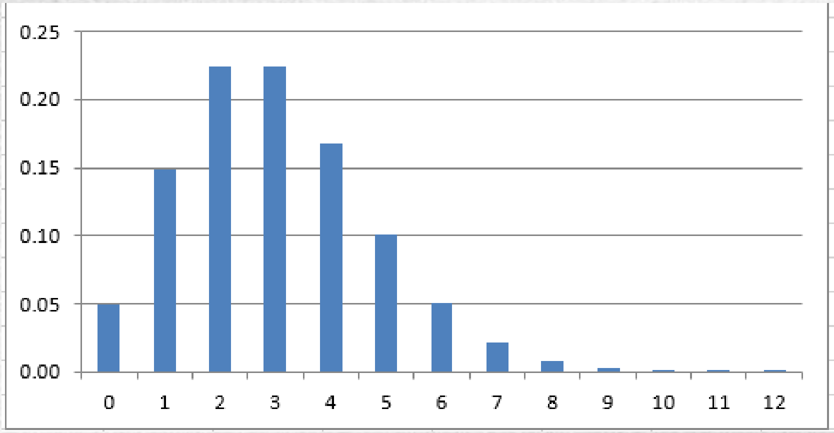
Pembangkitan Peubah Acak Diskrit

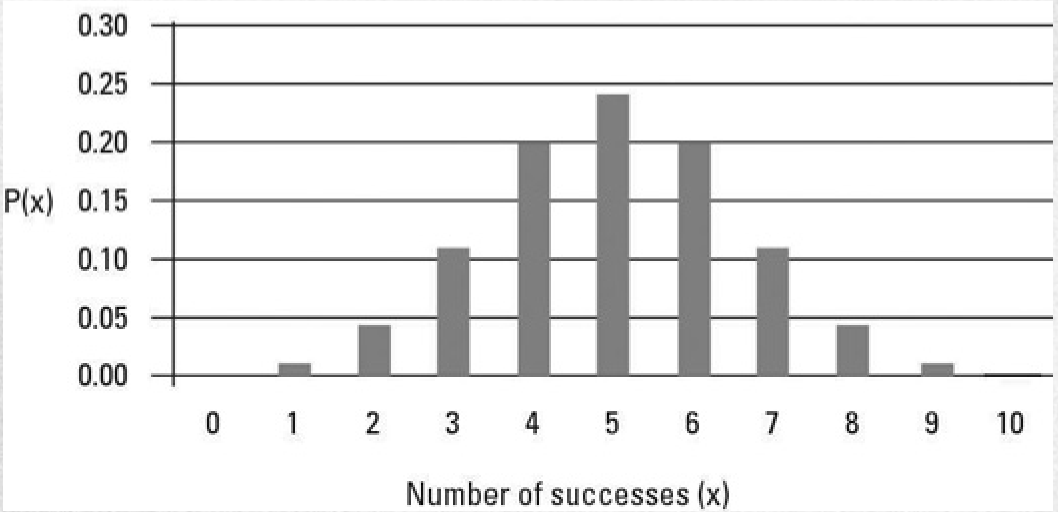


Peubah Acak Diskrit

- Beberapa contoh peubah acak diskrit



Distribusi Poisson $\lambda = 3$



Distribusi Binomial $p = 0.5, n = 10$

Peubah Acak Diskrit

- Contoh PMF dari peubah acak diskrit

$$P(X = x) = \frac{x}{15}, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Contoh CDF dari peubah acak diskrit

We use the *cumulative distribution function* and state:

$$P(X \leq 3) = \sum_{t=1}^{3} P(X = t)$$

That's:

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit

- Peubah Acak Diskrit dapat dibangkitkan dengan metode **inverse-transform**
- Langkah-Langkah metode ini sebagai berikut:

  - Misal kita akan membangkitkan peubah acak diskrit X dengan pmf (probability mass fuction)

$$P(X = x_j) = p_j \quad , j = 0,1,2, \ldots \qquad , \sum_j p_j = 1$$

  - Pembangkitan peubah acak X dapat **memanfaatkan** distribusi uniform (seragam) $U \sim Uniform\ (0,1)$ atau **RNG** sedemikian sehingga:

$$X = \begin{cases} x_0 & \text{If } U < p_0 \\ x_1 & \text{If } p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{If } \sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^{j} p_i \\ \vdots & \end{cases}$$

  - Sehingga X adalah distribusi yang diinginkan

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit

- Secara algoritma metode **inverse-transform** dapat dituliskan:
  1. Tetapkan $X = x_0$ jika $\mathrm{U} < p_0$ dan berhenti
  2. Tetapkan $X = x_1$ jika $\mathrm{U} < p_0 + p_1$ dan berhenti
  3. Tetapkan $X = x_2$ jika $\mathrm{U} < p_1 + p_2$ dan berhenti

  dan seterusnya

Example 4a. If we wanted to simulate a random variable X such that

$$p_1 = 0.20, \quad p_2 = 0.15, \quad p_3 = 0.25, \quad p_4 = 0.40 \quad \text{where } p_j = P\{X = j\}$$

then we could generate U and do the following:

If $U < 0.20$ set $X = 1$ and stop
If $U < 0.35$ set $X = 2$ and stop
If $U < 0.60$ set $X = 3$ and top
Otherwise set $X = 4$

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Binomial

Suppose we want to generate the value of a binomial (n, p) random variable X—that is, X is such that

$$P\{X=i\} = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

To do so, we employ the inverse transform method by making use of the recursive identity

$$P\{X=i+1\} = \frac{n-i}{i+1} \frac{p}{1-p} P\{X=i\}$$

With i denoting the value currently under consideration, $\text{pr} = P\{X=i\}$ the probability that X is equal to i, and $F = F(i)$ the probability that X is less than or equal to i, the algorithm can be expressed as follows:

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Binomial

- Secara algoritma dapat ditulliskan:
  1. Bangkitkan bilangan acak U
  2. Definisikan $c = \frac{p}{1-p}, i = 0, pr = (1-p)^n, F = pr$
  3. Jika $U < F$ maka tetapkan $X = i$ dan iterasi berhenti
  4. Hitung $pr = \left[\frac{c(n-i)}{i+1}\right] \times pr\ , F = F + pr\ , i = i + 1$
  5. Kembali ke langkah 3

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Binomial

- Bangkitkan data berdasarkan distribusi binomial sebanyak 1 amatan dengan $n = 10, p = 0.25$

- Iterasi 1

1. Bangkitkan bilangan acak U, misal diperoleh $U = 0.2$
2. Definisikan $c = \frac{0.25}{1-0.25} = 0.333\,, i = 0\,, pr = (1-0.25)^{10} = 0.0563\,, F = 0.0563$
3. $U = 0.2 > F = 0.0563$
4. Hitung $pr = \left[\frac{0.333(10-0)}{0+1}\right] \times 0.0653 = 0.1877117\ F = 0.0563 + 0.1877117 = 0.2440252\,,\quad i = 0 + 1 = 1$
5. Kembali ke langkah 3

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Binomial

- Bangkitkan data berdasarkan distribusi binomial sebanyak 1 amatan dengan $n = 10, p = 0.25$

- Iterasi 2

3. $U = 0.2 < F = 0.2440252$ maka tetapkan $X = i = 1$

Sehingga diperoleh data yaitu 1

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Poisson

The random variable X is Poisson with mean λ if

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, \ldots$$

The key to using the inverse transform method to generate such a random variable is the following identity (proved in Section 2.8 of Chapter 2):

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i, \quad i \geq 0 \tag{4.1}$$

Upon using the above recursion to compute the Poisson probabilities as they become needed, the inverse transform algorithm for generating a Poisson random variable with mean λ can be expressed as follows. (The quantity i refers to the value presently under consideration; $p = p_i$ is the probability that X equals i and $F = F(i)$ is the the probability that X is less than or equal to i.)

Pembangkitan Peubah Acak Diskrit Poisson

- Secara algoritma dapat dituliskan:
  1. Bangkitan bilangan acak U
  2. Definisikan $i = 0, pr = e^{-\lambda}, F = pr$
  3. Jika $U < F$ maka tetapkan $X = i$ dan iterasi berhenti
  4. Hitung $pr = \frac{\lambda pr}{i+1}$ $, F = F + pr$ $, i = i + 1$
  5. Kembali ke langkah 3

SOAL LATIHAN

Question 1

Bangkitkan data berdasarkan distribusi bernouli sebanyak 3 amatan dengan $p = 0.6$ tanpa bantuan software apapun (tunjukkan langkah tiap iterasi)

IPB University
— Bogor Indonesia —

Question 2

Bangkitkan data berdasarkan distribusi poisson sebanyak 3 amatan dengan $\lambda = 3$ tanpa bantuan software apapun (tunjukkan langkah tiap iterasi)

Question 3

Kerjakan **Question 1** dengan bantuan Software R untuk banyaknya amatan yang dibangkitkan adalah 50 **tanpa menggunakan fungsi bawaan R**. Kemudian bandingkan dengan output dari fungsi **rbinom** yang ada di R. Buatlah **grafik barplot** untuk kedua hasil pembangkitan data! Aturlah **set.seed** yang sama! Apakah hasil output dari **rbinom** sama dengan sintaks yang anda buat, baik secara **pola sebaran** maupun secara **nilai keluaran**? Mengapa?

(set.seed yang digunakan tiap kelompok adalah jumlah 3 digit terakhir NIM anggota kelompok, misal: 11+86+53=150, maka gunakan set.seed(150))

Question 4

Kerjakan **Question 2** dengan bantuan Software R untuk banyaknya amatan yang dibangkitkan adalah 50 **tanpa menggunakan fungsi bawaan R**. Kemudian bandingkan dengan output dari fungsi **rpois** yang ada di R. Buatlah **grafik barplot** untuk kedua hasil pembangkitan data! Aturlah **set.seed** yang sama! Apakah hasil output dari **rpois** sama dengan sintaks yang anda buat, baik secara **pola sebaran** maupun secara **nilai keluaran**? Mengapa?

(set.seed yang digunakan tiap kelompok adalah jumlah 3 digit terakhir NIM anggota kelompok, misal: 11+86+53=150, maka gunakan set.seed(150))