计算机视觉 问题包-1

黄榕基
519030910026

Problem 3

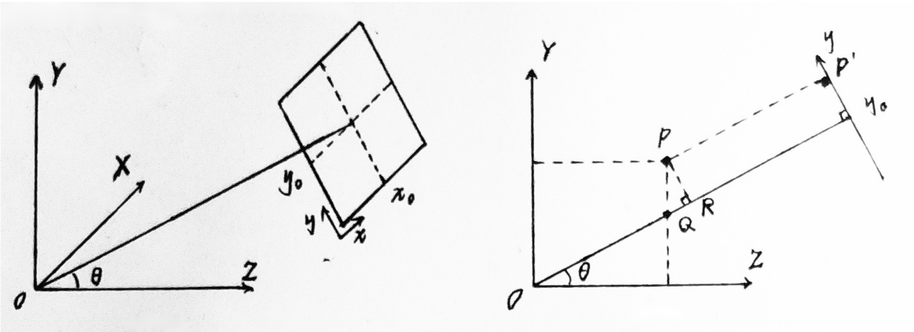

图 1: 一个简单的投影模型：a) 世界坐标系和相机平面；b) 与 X 轴垂直的平面以及与 x 轴垂直的坐标轴的投影关系。

如图 1.a 所示，相机平面的 x 轴与世界坐标系的 X 轴平行，相机平面的 y 轴与世界坐标系的 $X=0$ 平面平行。投影缩放系数为 α，当相机平面坐标原点与世界坐标系对齐时，X 投影到相机平面中即为 x，故有 $x=\alpha X$，再加上偏移量 x_0，即 $x=\alpha X+x_0$。

再考虑 y 的计算，如图 1.b 所示，由于 y 轴与 $X=0$ 平面平行，故 y 与 X 无关；世界坐标系原点到相机平面的垂线 Oy_0 与 Z 轴正方向成 θ 角。考虑世界坐标系中任意一点 $P(*,Y,Z)$，其到垂线 Oy_0 的距离 PR 即为实际投影到相机平面里的 $P'y_0$，故有：

$$|PR| = |PQ|\cos\theta = (Y - Z\tan\theta)\cos\theta = Y\cos\theta - Z\sin\theta$$
$$y = \alpha|PR| + y_0 = \alpha(Y\cos\theta - Z\sin\theta) + y_0$$

实际上，该投影问题实际是旋转坐标系问题。如图 1.a 所示，相机平面坐标系可以看作世界坐标系绕 X 轴向着 Y 轴到 Z 轴的方向旋转了 $-\theta$ 角之后舍去了 z 轴得到的坐标系。坐标系旋转变换计算如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ 0 & -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

通过上述坐标系旋转可得到 $x=X, y=Y\cos\theta - Z\sin\theta$。再考虑到投影缩放系数 α 和坐标系原点的偏移值 x_0, y_0，那么可得到从三维世界坐标系到图像平面的投影方程为：

$$x = \alpha X + x_0$$
$$y = \alpha(Y\cos\theta - Z\sin\theta) + y_0$$

Problem 4

不妨令投影缩放系数 $\alpha = 1$。

对于边的约束条件

在通用视图下，相机平面中的竖直边（垂直于 x 轴）就是世界坐标系中的竖直边（垂直于 $Y = 0$ 平面），相机平面中的其他边均为世界坐标系中的水平边（平行于 $Y = 0$ 平面）。

1. 对于一条 3D 的竖直边，这条边上的 Z 坐标值不会变化，因此 Z 沿着这条边的偏导应为 0：

   $$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} = 0$$

   向量 $\mathbf{t}$ 表示相机平面中边的切向，$\mathbf{t} = (-n_y, n_x)$，可将偏导写作关于对 x 和 y 偏导的函数：

   $$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} = \nabla Z \times \mathbf{t} = -n_y \frac{\partial Z}{\partial x} + n_x \frac{\partial Z}{\partial y}$$

   根据链式法则可知：$-n_y = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{t}}, n_x = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{t}}$。而对于 3D 的竖直边，其在相机平面中也是竖直边，其 x 值不会改变而 y 值会改变，因此有 $-n_y = 0, n_x \neq 0$，故约束条件可简化为：

   $$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

2. 对于一条 3D 的水平边，将投影方程两边对沿着边方向同时求偏导：

   $$y = Y \cos\theta - Z \sin\theta + y_0$$
   $$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{t}} \cos\theta - \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} \sin\theta$$

   根据 Y 的约束条件可知，对于 3D 的水平边其 Y 值不会改变，有 $\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{t}} = 0$，那么

   $$n_x = -\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} \sin\theta$$
   $$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{n_x}{\sin\theta}$$

   验证：

   (a) 当这条 3D 的水平边垂直于 $X = 0$ 平面（平行于 X 轴）时，这条边的 Z 坐标值也不会改变，因此 Z 沿着这条边的偏导也应为 0。这种情况下，这条边在相机平面中的投影也平行于 x 轴，它的 y 坐标值不会改变，即 $n_x = 0$，故有

   $$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} = 0$$

   (b) 当这条 3D 的水平边不垂直于 $X = 0$ 平面时，不考虑偶然的特殊情况，有 $n_x = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{t}} \neq 0$，等式两边同时除以 n_x 可得：

   $$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{1}{\sin\theta}$$

   该结果符合直接根据投影方程求得的 Z 对 y 的偏导。

综上所述，对于边的 Z 的约束方程为：

1. 对于 3D 的竖直边，$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$。
2. 对于 3D 的水平边，$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{n_x}{\sin\theta}$，$\mathbf{t} = (-n_y, n_x)$ 表示边的切向。

对于面的约束条件

与 Y 的情况相同，世界坐标系中物体的平坦表面投影到相机平面中也是平坦的，故 Z 对 x 和 y 的二阶导均为 0：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0$$