

计算机视觉 问题包-2

黄榕基

519030910026

Problem 1

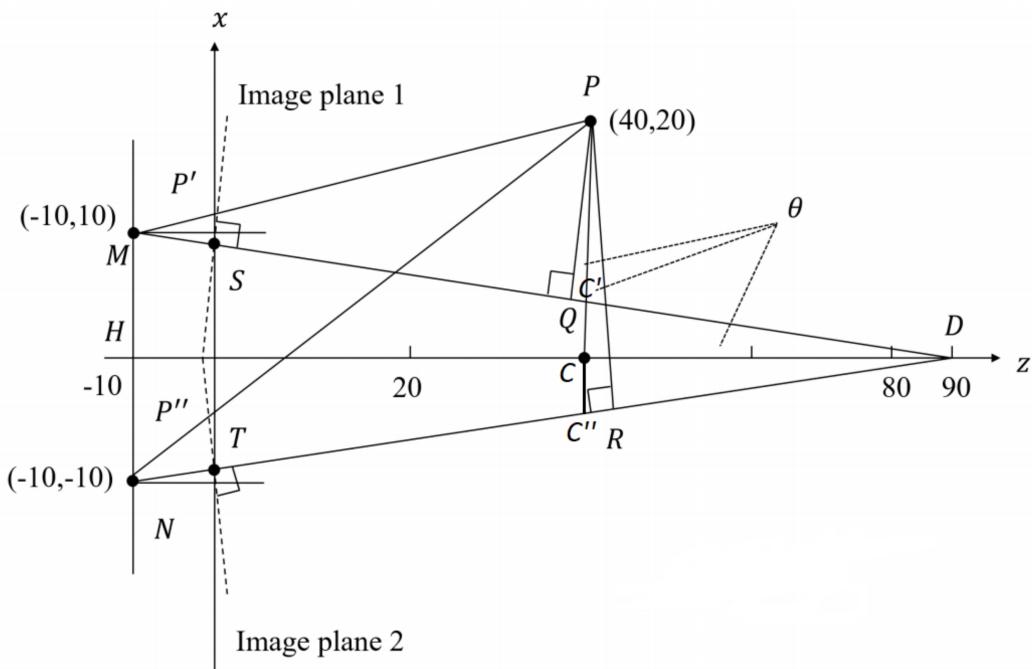


图 1: Problem 1

解：

如图 1, 过 P 作 $PC \perp z$ 于 C , PC 交 MD 于 C' , 延长 PC 交 ND 于 C'' 。由图中数据可知, $C'C''$ 是 $\triangle MND$ 的中位线。因此, $MC' = NC'' = 5\sqrt{101}$, $CC' = CC'' = 5$, $PC' = 15$, $PC'' = 25$ 。又因为 $\triangle DHM \sim \triangle PQC' \sim \triangle PRC''$, 故有

$$\begin{aligned}PQ &= PC' \cos \theta = PC' \frac{HD}{MD} = \frac{150}{101} \sqrt{101} \\PR &= PC'' \cos \theta = \frac{250}{101} \sqrt{101} \\QC' &= PC' \sin \theta = PC' \frac{MH}{MD} = \frac{15}{101} \sqrt{101} \\RC'' &= PC'' \sin \theta = \frac{25}{101} \sqrt{101}\end{aligned}$$

因此, $MQ = \frac{490}{101} \sqrt{101}$, $NR = \frac{530}{101} \sqrt{101}$ 。又因为 $\triangle MSP' \sim \triangle MQP$, $\triangle NTP'' \sim \triangle NRP$, 且 $MS = NT = \sqrt{101}$, 故有

$$P'S = \frac{MS}{MQ} PQ = \frac{101}{490} \cdot \frac{150}{101} \sqrt{101} = \frac{15}{49} \sqrt{101}$$

$$P''T = \frac{NT}{NR} PR = \frac{101}{530} \cdot \frac{250}{101} \sqrt{101} = \frac{25}{53} \sqrt{101}$$

视差为物体在两个图像平面中成像位置的差距, 因此视差为

$$d = |P''T - P'S| = \left(\frac{25}{53} - \frac{15}{49}\right) \sqrt{101} = \frac{430}{2597} \sqrt{101} \approx 1.664$$

Problem 2

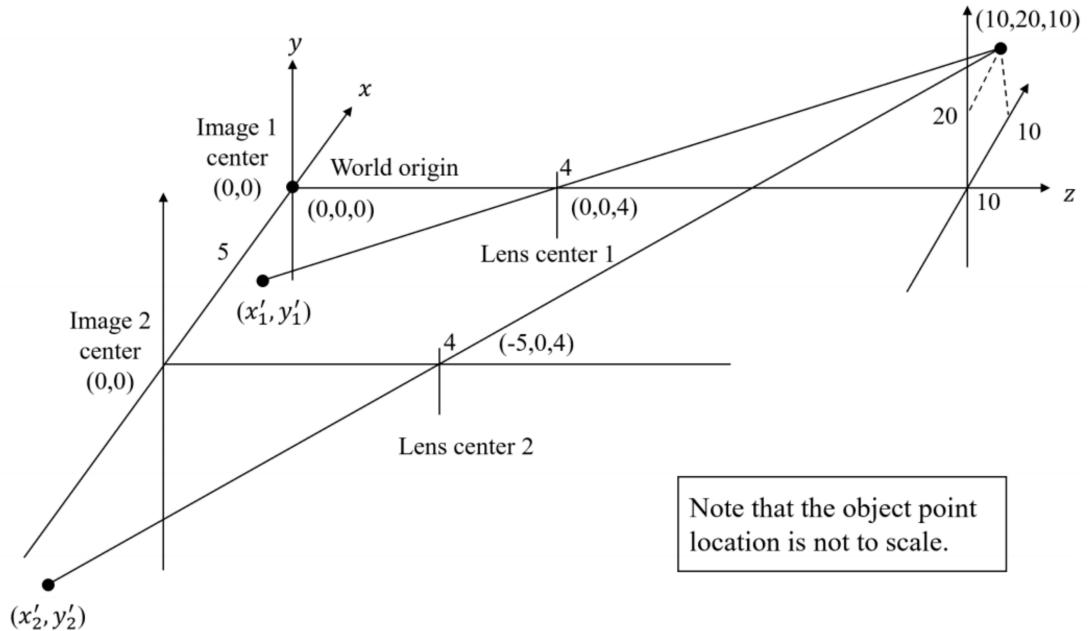


图 2: Problem 2

解:

由几何关系可知坐标值为

$$x'_1 = -\frac{4}{6} \cdot 10 = -\frac{20}{3}$$

$$x'_2 = -\frac{4}{6} \cdot (10 + 5) = -10$$

因此, 视差为

$$x_d = |x'_1 - x'_2| = \frac{10}{3}$$

Problem 3

解：

根据视差的定义 $d = f \frac{T}{Z}$, 假设特征点匹配时出现像素误差 dx , 那么造成的深度误差 ΔZ 为

$$\Delta Z = Z - Z' = \frac{fT}{d} - \frac{fT}{d + dx}$$

由于相机内参不变, 焦距 f 为常数, 而像素误差 dx 也为常熟, 故深度误差 ΔZ 可写作关于基线 T 和深度 Z 的函数, 以此描述立体重建的精度:

$$\Delta Z(T, Z) = Z - \frac{1}{\frac{1}{Z} + \frac{C}{T}} = \frac{CZ^2}{T + CZ}, \quad C \equiv \frac{dx}{f}.$$

Problem 4

证明:

根据本质矩阵定义 $E = [\mathbf{t}]_\times R$, 其中 $\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]^\top$, R 为旋转矩阵, 从而是正交矩阵, 有 $RR^\top = I$ 。

而 $[\mathbf{t}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$ 为斜对称矩阵, 因此 $[\mathbf{t}]_\times$ 可表示为 $[\mathbf{t}]_\times = Q^\top \begin{bmatrix} 0 & \phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q$, 其中 Q 为正交矩阵, 有 $QQ^\top = I$ 。那么有

$$\begin{aligned} EE^\top &= [\mathbf{t}]_\times RR^\top [\mathbf{t}]_\times^\top = [\mathbf{t}]_\times [\mathbf{t}]_\times^\top \\ &= Q^\top \begin{bmatrix} 0 & \phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} QQ^\top \begin{bmatrix} 0 & \phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q \\ &= Q^\top \begin{bmatrix} \phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q \end{aligned}$$

由于 Q 为正交矩阵, 则矩阵 EE^\top 的特征值为 $\phi^2, \phi^2, 0$ 。而 E 的奇异值为 EE^\top 的特征值, 也就是说本质矩阵 E 的一个奇异值为 0, 另外两个奇异值相等。

得证。

Problem 5

参考了文献 Andrea Fusiello, Emanuele Trucco, and Alessandro Verri. A compact algorithm for rectification of stereo pairs. 12, 10 2000., 根据论文中使用的 INRIA-Syntim 数据集提供的相机参数和拍照角度得到的透射变换矩阵 P_{O_1} 和 P_{O_2} , 再根据论文中提供的 Matlab 代码改写为 Python 代码, 同时根据参数仿照拍摄了一对照片进行测试。

如图 3 所示, 左右两张图为两个摄像头同时拍下的照片。经过矫正后得到图 4, 可以看到矫正后的照片中的尺子已经水平平行。



图 3: Original photos

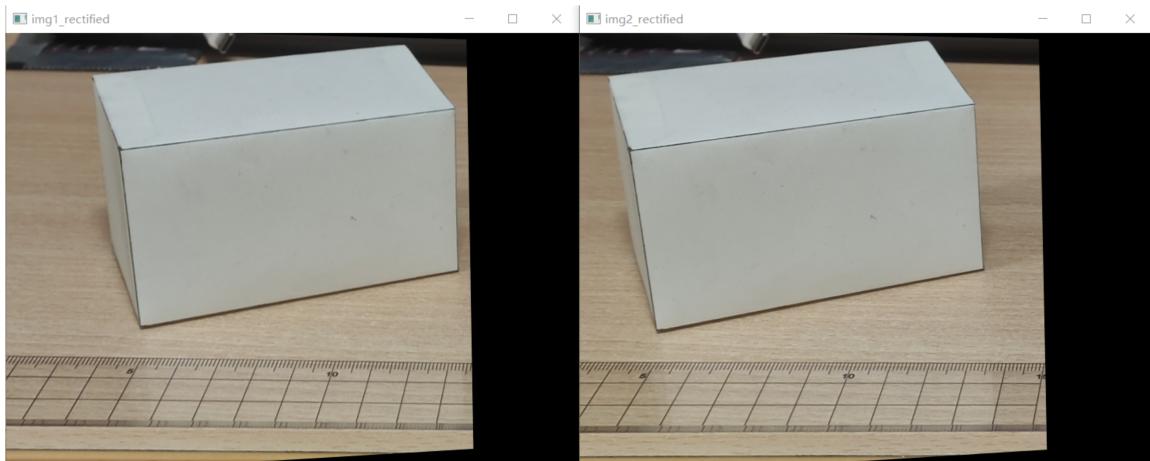


图 4: Rectified photos

参考文献

- [1] Andrea Fusiello, Emanuele Trucco, and Alessandro Verri. A compact algorithm for rectification of stereo pairs. 12, 10 2000.