Resolution by Polygraphs, François Métayer, 2003 [1]

Raphaël Paegelow

25 mars 2020

Introduction des concepts clefs

Définition :

• Un ∞-**graphe** est la donnée suivante :

$$X_0 \underset{t_0}{\overset{s_0}{\leftleftarrows}} X_1 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\leftleftarrows}} \dots \underset{t_{n-1}}{\overset{s_{n-1}}{\leftleftarrows}} X_n \underset{t_n}{\overset{s_n}{\leftleftarrows}} \dots$$ vérifiant les relations globulaires :

$\forall i \geq 0, s_i s_{i+1} = s_i t_{i+1} \quad t_i s_{i+1} = t_i t_{i+1}$

• Un **morphisme d'**∞**-graphe** $\phi : X \to Y$ est une famille de fonctions $\phi_i : X_i \to Y_i$ commutant avec source et but :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "\phi_i"'] & X_{i+1} \arrow[l, shift right, "s_i"'] \arrow[l, shift left, "t_i"] \arrow[d, "\phi_{i+1}"] \\
Y_i & Y_{i+1} \arrow[l, shift right, "s_i"'] \arrow[l, shift left, "t_i"]
\end{tikzcd}$$

On notera $\mathbf{Grph}_\infty$ la catégorie des ∞-graphes et $\mathbf{Grph}_n$ la catégorie des n-graphes.

Définition :
Structure d'∞-catégorie sur X un ∞-graphe :

- i-composition : $x^j \star_i y^j : x^i \xrightarrow{x^j} y^i \xrightarrow{y^j} z^i$ $0 \leq i < j$
- j-identités : $\forall x^i \in X_i$ on a $id^j(x^i) \in X_j$ $0 \leq i < j$
- 3 relations de compatibilités (avec $0 < i < j < k$) :

$$(x^k \star_j y^k) \star_i (u^k \star_j v^k) = (x^k \star_i u^k) \star_j (y^k \star_i v^k) \text{ (relation d'échange)}$$
$$id^k(x^i) = id^k(id^j(x^i))$$
$$id^k(x^j \star_i y^j) = id^k(x^j) \star_i id^k(y^j)$$

On notera $\mathbf{Cat}_\infty$ la catégorie des ∞-catégories et $\mathbf{Cat}_n$ la catégorie des n-catégories (avec comme morphismes ceux du graphe sous-jacent).

Notations :

- Si $x^j \in X_j$ alors $x_0^i := s_{ij}x^j$ et $x_1^i := t_{ij}x^j, i < j$ $((s|t)_{ij} := (s|t)_i ... (s|t)_{j-1})$
- $d_- := s_i$ et $d_+ := t_i$ (l'indice dépend du contexte)
- $d_-^k := s_{ij}$ et $d_+^k := t_{ij}$ (avec $j = i + k$)

Exemple :

On peut associer à un complexe de groupe abélien une structure d'∞-catégorie.

Définition :
On considère la catégorie $\mathbf{Cat}_n^+$ donnée par le pullback :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat}_n^+ \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \mathbf{Grph}_{n+1} \arrow[d, "V_n"] \\
\mathbf{Cat}_n \arrow[r, "U_n"] & \mathbf{Grph}_n
\end{tikzcd}$$

avec U et V des foncteurs d'oubli.
Un objet de $\mathbf{Cat}_n^+$ = une n-catégorie + des $(n+1)$-cellules en faisant un $(n+1)$-graphe

$->$ On a alors $W_{n+1} : \mathbf{Cat}_{n+1} \to \mathbf{Cat}_n^+$ un foncteur d'oubli tel que :

Polygraphes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat}_{n+1} \arrow[dr, "W_{n+1}"] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
& \mathbf{Cat}_n^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Grph}_{n+1} \arrow[d, "V_n"] \\
& \mathbf{Cat}_n \arrow[r, "U_n"] & \mathbf{Grph}_n
\end{tikzcd}$$

On a $L : \mathbf{Cat}_n^+ \to \mathbf{Cat}_{n+1}$ qui est un adjoint à gauche de W (foncteur libre).

Définition :
Un n-**polygraphe** S est une suite $S^{(i)} \in Obj(\mathbf{Cat}^{+}_{i-1})$ construite par récurrence avec $S^{(0)}$ un ensemble S_0 et ensuite :

$$
\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[d] & S_1 \arrow[d] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] & S_2 \arrow[d] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] & S_3 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] & \dots \\
S_0^* & S_1^* \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & S_2^* \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \dots \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] &
\end{tikzcd}
$$

Avec $S_i^* := L_i(S^{(i)})$.

On notera que $S^* = QS$ définit une n-catégorie générée par S.
On peut de même définir des polygraphes sous-entendu ∞-polygraphes.

On a la propriété universelle des polygraphes :

Soit S un polygraphe, X une $(n+1)$-catégorie, un morphisme de $\mathbf{Cat}_n$
$\forall i \in [n], \phi_i : S_i^* \to X_i$ et $f_{n+1} : S_{n+1} \to X_{n+1}$ définissant avec les ϕ_i un morphisme de $\mathbf{Cat}_n^+$,
Alors $\exists! \phi_{n+1} : S_{n+1}^* \to X_{n+1}$ tel que $(\phi)_{i \in [n+1]}$ soit un morphisme de $\mathbf{Cat}_{n+1}$ et que :

$$\begin{tikzcd} S_{n+1} \arrow[r, "j_{n+1}"] \arrow[dr, "f_{n+1}"'] & S_{n+1}^* \arrow[d, dashed, "\phi_{n+1}"] \\ & X_{n+1} \end{tikzcd}$$

- Un morphisme entre S et T est une suite $f_i : S_i \to T_i$ qui fasse commuter les triangles induit par la propriété universelle.
- On note **Pol** la catégorie des polygraphes et $Q : \mathbf{Pol} \to \mathbf{Cat}_\infty$

Linéarisation

À S on associe un complexe de groupe abélien (ZS, ∂) où :

- $(ZS)_i$ est le groupe abélien libre généré par $S_i, i \geq 0$.
- ∂ est construit par récurrence avec une application de linéarisation $\lambda : QS \to ZS$ tel que :

$$j_i \lambda_i = g_i \text{ où } g_i : S_i \to (ZS)_i \text{ inclusion des générateurs}$$
$$\partial_{i-1}\lambda_i x^i = \lambda_{i-1} t_{i-1} x^i - \lambda_{i-1} s_{i-1} x^i \text{ avec } x^i \in (QS)_i$$

- On peut aussi linéariser un morphisme $u : QS \to QT \in Mor(\mathbf{Cat}_\infty)$:

$$\begin{tikzcd} & (ZS)_i \arrow[r, "\tilde{u}_i"] & (ZT)_i & \\ S_i \arrow[ur] \arrow[r] & (QS)_i \arrow[u, "\lambda_i"] \arrow[r, "u_i"'] & (QT)_i \arrow[u, "\lambda_i"'] & T_i \arrow[l] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Définition :
Soit X une ∞-catégorie. Une **résolution de** X est une paire (S, ϕ) où S est un polygraphe et $\phi : QS \to X \in Mor(\mathbf{Cat}_\infty)$ tel que :

(i) $\forall i \geq 0, \phi_i : S_i^* \to X_i$ est surjectif

(ii) (Propriété de dilatation) $\forall i \geq 0, \forall (x^i, y^i) \in (S_i^*)^2, (x^i || y^i \text{ et } \phi_i x^i = \phi_i y^i) \Rightarrow$
$$\exists z^{i+1} \in S_{i+1}^*, z^{i+1} : x^i \to y^i \text{ et } \phi_{i+1} z^{i+1} = id^{i+1}(\phi_i x^i)$$

Remarque :
On peut considérer les cellules de S_{i+1} commes des générateurs de X_{i+1} et comme des relations pour X_i.

Résolution standard

On peut construire par récurrence une résolution d'une ∞-catégorie dite résolution standard :

- $n = 0$: $S_0 := X_0$ et $\phi_0 : S_0^* \to X_0$ est id
- $n \to n+1$:

$$S_{n+1} := \{c^{n+1} = (z^{n+1}, x^n, y^n) | z^{n+1} \in X_{n+1}, (x^n, y^n) \in (S_n^*)^2$$
$$\text{et } x_n || y_n, z^{n+1} : \phi_n x^n \to \phi_n y^n\}$$

De plus $s_n c^{n+1} = x_n, t_n c^{n+1} = y_n$.

On a $f_{n+1} : S_{n+1} \to X_{n+1}, c_{n+1} \mapsto z^{n+1}$ qui s'étend par la P.U. en :

$$\phi_{n+1} : S_{n+1}^* \to X_{n+1}$$

Il reste à vérifier que (S, ϕ) est bien une résolution de X.

On notera $PX := S$ le polygraphe de cette résolution standard.

Propriété de relèvement

Proposition (Propriété fondamentale de relèvement)
Soit X une ∞-catégorie, S et T deux polygraphes et $\phi : QS \to X \in Mor(\boldsymbol{Cat}_\infty)$ et $\psi : QT \to X$ une résolution.

Alors il existe un morphisme $u : QS \to QT$ tel que :

$$\begin{tikzcd} QS \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\phi"'] & QT \arrow[d, "\psi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Théorème homotopique

Définition :
Soit X une ∞-catégorie. On peut lui associer une autre ∞-catégorie notée HX la catégorie des chemins sur X. On a alors les morphismes :

$$(HX)_n \underset{d_-}{\overset{d_+}{\rightrightarrows}} (HX)_{n-1}$$

Mais on va aussi construire (par récurrence) :

$$(HX)_n \underset{a_-^n}{\overset{a_+^n}{\rightrightarrows}} X_n \ , \quad (HX)_n \xrightarrow{[\,]} X_{n+1}$$

On définit également $\begin{cases} T_-^n x := a_+^n x \star_0 [d_+^n x] \star_1 [d_+^{n-1} x] \star_2 \dots \star_{n-1} [d_+ x] \\ T_+^n x := a_-^n x \star_0 [d_-^n x] \star_1 [d_-^{n-1} x] \star_2 \dots \star_{n-1} [d_- x] \end{cases}$

Construction de HX

- $n = 0$: $(HX)_0 := X_1$, $[] := id$ et $a_+^0 x = d_-[x], a_-^0 = d_+[x]$
- $n \to n+1$: On étend HX en un $(n+1)$-graphe en définissant l'ensemble $(HX)_{n+1}$ et les morphismes :

$$(HX)_{n+1} \underset{d_-}{\overset{d_+}{\rightrightarrows}} (HX)_n$$

$x \in (HX)_{n+1}$ est donné par $(x_+^n, x_-^n, v_+^{n+1}, v_-^{n+1}, w^{n+2})$ où

(i) $x_+^n || x_-^n \in (HX)_n$

(ii) $v_+^{n+1}, v_-^{n+1} \in X_n + 1$ tel que : $a_+^n x_-^n \xrightarrow{v_+^{n+1}} a_+^n x_+^n \quad , \quad a_-^n x_-^n \xrightarrow{v_-^{n+1}} a_-^n x_+^n$

(iii) $w^{n+2} \in X_{n+2}$ tel que $T_-^{n+1} x \xrightarrow{w^{n+2}} T_+^{n+1} x$

Construction de HX

On définit alors :

- $d_+x := x_+^n$, $d_-x := x_-^n$
- $a_+^{n+1}x := v_+^{n+1}$, $a_-^{n+1}x := v_-^{n+1}$.
- $[x] := w^{n+2}$.

Ainsi $x \in (HX)_{n+1}$ est donné par $(d_+x, d_-x, a_+^{n+1}x, a_-^{n+1}x, [x])$ avec pour rappel :

$$(HX)_n \overset{d_+}{\underset{d_-}{\rightrightarrows}} (HX)_{n-1}$$

$$(HX)_n \overset{a_+^n}{\underset{a_-^n}{\rightrightarrows}} X_n \ , \quad (HX)_n \xrightarrow{[\,]} X_{n+1}$$

Il reste encore à définir les identités et les compositions et à vérifier que HX est bien une ∞-catégorie.

Théorème 1

Théorème
Soit X une ∞-catégorie, S et T deux polygraphes, $\phi : QS \to X \in Mor(\mathbf{Cat}_\infty)$ et $\psi : QT \to X$ une résolution de X.
Si $u, v : QS \to QT$ tel que $\psi u = \psi v = \phi$ alors il existe $h : QS \to HQT$ tel que :

$$\begin{tikzcd}
 & HQT \arrow[d, shift right, "a_+"'] \arrow[d, shift left, "a_-"] \\
QS \arrow[ur, "h"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dr, "\phi"'] & QT \arrow[d, "\psi"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Idée de la preuve

On construit h :

- $n = 0$: $(QS)_0 = S_0$ alors $u_0 x^0 || v_0 x^0$ et $\psi_0 u_0 x^0 = \psi_0 v_0 x^0 = \phi_0 x^0$
  Par dilatation de ψ on a $w^1 : u_0 x^0 \to v_0 x^0 \in (QT)_1$ t.q. $\psi_1 w^1 = id^1(\psi_0 u_0 x^0)$.
  On pose alors $h_0 x^0 = w^1 \in (HQT)_0 = (QT)_1$.
- $n \to n+1$: On va construire d'abord $k_{n+1} : S_{n+1} \to (HQT)_{n+1}$ qui s'étendra alors naturellement en h_{n+1} par la P.U.
  Soit $x^{n+1} \in S_{n+1}$, on considère : $\begin{cases} E := u_{n+1} x^{n+1} \star_0 [h_0 x_1^0] \star_1 \dots \star_n [h_n x_1^n] \\ F := [h_n x_0^n] \star_n \dots \star_1 [h_0 x_0^0] \star_0 v_{n+1} x^{n+1} \end{cases}$
  Le coeur de la preuve est le fait suivant :
  $$E || F \in (QT)_{n+1}$$

Idée de la preuve

- Par hypothèse de récurrence ($\psi_{i+1}[h_i x^i] = id^{i+1}[\psi_i u_i x^i]$) :

$$\begin{cases} \psi_{n+1} E = \psi_{n+1} u_{n+1} x^{n+1} = \phi_{n+1} x^{n+1} \\ \psi_{n+1} F = \psi_{n+1} v_{n+1} x^{n+1} = \phi_{n+1} x^{n+1} \end{cases}$$

- Par dilatation de ψ, $\exists w^{n+2} : E \to F \in (QT)_{n+2}$ t.q. :

$$\psi_{n+2} w^{n+2} = id^{n+2}(\psi_{n+1} u_{n+1} x^{n+1})$$

- On pose :

$$k_{n+1} x^{n+1} := (h_n x_+^n, h_n x_-^n, u_{n+1} x^{n+1}, v_{n+1} x^{n+1}, w^{n+2})$$

Il reste à vérifier que h_{n+1} vérifie bien :

$$a_+^{n+1} h_{n+1} = u_{n+1}, \quad a_-^{n+1} h_{n+1} = v_{n+1}, \quad \psi_{n+2}[h_{n+1} x^{n+1}] = id^{n+2}(\psi_{n+1} u_{n+1} x^{n+1})$$

Invariance homologique

Invariance

Théorème
Soit X une ∞-catégorie et (S, ϕ), (T, ψ) deux résolutions de X,
Alors les complexes ZS et ZT ont la même homologie.

$->$ On pourra alors donner un sens à $H_*(X)$ en prenant égal à $H_*(ZS)$ où S est une résolution polygraphique de X.

$->$ Par exemple en considérant la résolution polygraphique standard de X.

Idée de preuve

Soit $\phi : QS \to X \in \mathbf{Cat}_\infty$, (T, ψ) une résolution polygraphique de X et $u, v : QS \to QT$ avec $\psi u = \psi v = \phi$ alors on a $h : QS \to HQT$.
Le coeur de la preuve :

$$h \text{ induit une homotopie entre } \tilde{u} \text{ et } \tilde{v}.$$

La preuve consiste donc à contruire une famille d'applications $\mathbb{Z}$-linéaire :

$$\theta_i : ZS_i \to ZT_{i+1}, i \geq 0 \qquad \begin{tikzcd} ZS_{i-1} \arrow[d, shift right, "\tilde{u}_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{v}_{i-1}"] \arrow[dr, "\theta_i"] & ZS_i \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right, "\tilde{u}_i"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{v}_i"] \arrow[dr, "\theta_{i+1}"] & ZS_{i+1} \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right, "\tilde{u}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{v}_{i+1}"] \\ ZT_{i-1} & ZT_i \arrow[l, "\partial"] & ZT_{i+1} \arrow[l, "\partial"] \end{tikzcd} \text{ t.q. :}$$

$$\tilde{u}_i - \tilde{v}_i = \partial\theta_{i+1} + \theta_i\partial$$

Conclusion

- Résolutions polygraphiques
- Propriété de relèvement
- Existence d'une homotopie et invariance homologique
- Définition d'une homologie pour une ∞-catégorie

Ce travail de François Métayer et Albert Burroni creuse la notion :
Type de Dérivation Fini

Références

François Metayer. *Resolutions By Polygraphs*. 2003.