# Resolution by Polygraphs, François Métayer, 2003 [1]

Raphaël Paegelow 25 mars 2020 1. Introduction des concepts clefs

Graphes et catégories

Polygraphes

Résolutions

2. Théorème homotopique

Catégorie des chemins de dimension supérieure

Théorème homotopique

Idée de la preuve

3. Invariance homologique

Invariance

Idée de preuve

### Partie 1.

# Introduction des concepts clefs

# Graphes et catégories

#### Définition:

Un ∞-graphe est la donnée suivante :

$$X_0 \xleftarrow{s_0} t_0 X_1 \xleftarrow{s_1} \dots \xleftarrow{s_{n-1}} t_n X_n \xleftarrow{s_n} \dots$$
 vérifiant les relations globulaires :  $\forall i > 0, s_i s_{i+1} = s_i t_{i+1} \quad t_i s_{i+1} = t_i t_{i+1}$ 

• Un morphisme d' $\infty$ -graphe  $\phi: X \to Y$  est une famille de fonctions  $\phi_i: X_i \to Y_i$  commutant avec source et but :

$$X_{i} \stackrel{s_{i}}{\longleftarrow} X_{i+1}$$

$$\phi_{i} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \phi_{i+1}$$

$$Y_{i} \stackrel{s_{i}}{\longleftarrow} Y_{i+1}$$

On notera  $\operatorname{Grph}_{\infty}$  la catégorie des  $\infty$ -graphes et  $\operatorname{Grph}_n$  la catégorie des n-graphes.

# Graphes et catégories

### Définition:

**Structure**  $d'\infty$ -catégorie sur X un  $\infty$ -graphe :

- *i*-composition :  $x^j \star_i y^j : x^i \xrightarrow{x^j} y^i \xrightarrow{y^j} z^i \ 0 \le i < j$
- j-identités :  $\forall x^i \in X_i$  on a  $id^j(x^i) \in X_j$   $0 \le i < j$
- 3 relations de compatibilités (avec 0 < i < j < k) :

$$(x^{k} \star_{j} y^{k}) \star_{i} (u^{k} \star_{j} v^{k}) = (x^{k} \star_{i} u^{k}) \star_{j} (y^{k} \star_{i} v^{k}) \text{ (relation d'échange)}$$
$$id^{k}(x^{i}) = id^{k}(id^{j}(x^{i}))$$
$$id^{k}(x^{j} \star_{i} y^{j}) = id^{k}(x^{j}) \star_{i} id^{k}(y^{j})$$

On notera  $\mathsf{Cat}_\infty$  la catégorie des  $\infty$ -catégories et  $\mathsf{Cat}_n$  la catégorie des n-catégories (avec comme morphismes ceux du graphe sous-jacent).

## Graphes et catégories

#### **Notations:**

- Si  $x^j \in X_j$  alors  $x_0^i := s_{ij}x^j$  et  $x_1^i := t_{ij}x^j, i < j$   $((s|t)_{ij} := (s|t)_i...(s|t)_{j-1})$
- $d_{-} := s_i$  et  $d_{+} := t_i$  (l'indice dépend du contexte)
- $d_{-}^{k} := s_{ij}$  et  $d_{+}^{k} := t_{ij}$  (avec j = i + k)

### Exemple:

On peut associer à un complexe de groupe abélien une structure d' $\infty$ -catégorie.

6

#### Définition:

On considère la catégorie  $Cat_n^+$  donnée par le pullback :

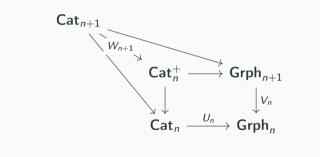


avec U et V des foncteurs d'oubli.

Un objet de  $\mathsf{Cat}_n^+ = \mathsf{une}\ n$ -catégorie + des (n+1)-cellules en faisant un (n+1)-graphe

-> On a alors  $W_{n+1}: \mathsf{Cat}_{n+1} \to \mathsf{Cat}_n^+$  un foncteur d'oubli tel que :

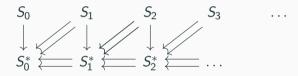
7



On a  $L: \mathbf{Cat}_n^+ \to \mathbf{Cat}_{n+1}$  qui est un adjoint à gauche de W (foncteur libre).

#### Définition:

Un *n*-polygraphe S est une suite  $S^{(i)} \in Obj(\mathbf{Cat}_{i-1}^+)$  construite par récurrence avec  $S^{(0)}$  un ensemble  $S_0$  et ensuite :



Avec  $S_i^* := L_i(S^{(i)}).$ 

On notera que  $S^* = QS$  définit une n-catégorie générée par S.

On peut de même définir des polygraphes sous-entendu  $\infty$ -polygraphes.

9

On a la propriété universelle des polygraphes :

Soit S un polygraphe, X une (n+1)-catégorie, un morphisme de  $\mathsf{Cat}_n$   $\forall i \in [n], \phi_i : S_i^* \to X_i$  et  $f_{n+1} : S_{n+1} \to X_{n+1}$  définissant avec les  $\phi_i$  un morphisme de  $\mathsf{Cat}_n^+$ ,

Alors  $\exists ! \phi_{n+1} : S_{n+1}^* \to X_{n+1}$  tel que  $(\phi)_{i \in [n+1]}$  soit un morphisme de  $\mathsf{Cat}_{n+1}$  et que :



- Un morphisme entre S et T est une suite  $f_i: S_i \to T_i$  qui fasse commuter les triangles induit par la propriété universelle.
- ullet On note Pol la catégorie des polygraphes et  $Q:\operatorname{Pol} o \operatorname{\mathsf{Cat}}_\infty$

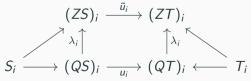
#### Linéarisation

À S on associe un complexe de groupe abélien  $(ZS, \partial)$  où :

- $(ZS)_i$  est le groupe abélien libre généré par  $S_i$ ,  $i \geq 0$ .
- $\partial$  est construit par récurrence avec une application de linéarisation  $\lambda: QS \to ZS$  tel que :

$$j_i \lambda_i = g_i$$
 où  $g_i : S_i \to (ZS)_i$  inclusion des générateurs  $\partial_{i-1} \lambda_i x^i = \lambda_{i-1} t_{i-1} x^i - \lambda_{i-1} s_{i-1} x^i$  avec  $x^i \in (QS)_i$ 

ullet On peut aussi linéariser un morphisme  $u: QS o QT \in Mor(\mathbf{Cat}_{\infty}):$ 



#### Résolutions

#### Définition:

Soit X une  $\infty$ -catégorie. Une **résolution de** X est une paire  $(S, \phi)$  où S est un polygraphe et  $\phi: QS \to X \in Mor(\mathbf{Cat}_{\infty})$  tel que :

- (i)  $\forall i \geq 0, \phi_i : S_i^* \to X_i$  est surjectif
- (ii) (Propriété de dilatation)  $\forall i \geq 0, \forall (x^i, y^i) \in (S_i^*)^2, (x^i||y^i \text{ et } \phi_i x^i = \phi_i y^i) \Rightarrow \exists z^{i+1} \in S_{i+1}^*, z^{i+1} : x^i \to y^i \text{ et } \phi_{i+1} z^{i+1} = id^{i+1}(\phi_i x^i)$

#### Remarque:

On peut considérer les cellules de  $S_{i+1}$  commes des générateurs de  $X_{i+1}$  et comme des relations pour  $X_i$ .

#### Résolution standard

On peut construire par récurrence une résolution d'une  $\infty$ -catégorie dite résolution standard :

- $n = 0 : S_0 := X_0 \text{ et } \phi_0 : S_0^* \to X_0 \text{ est } id$
- $n \rightarrow n+1$ :

$$S_{n+1} := \{ c^{n+1} = (z^{n+1}, x^n, y^n) | z^{n+1} \in X_{n+1}, (x^n, y^n) \in (S_n^*)^2$$
  
et  $x_n | |y_n, z^{n+1} : \phi_n x^n \to \phi_n y^n \}$ 

De plus  $s_n c^{n+1} = x_n, t_n c^{n+1} = y_n$ .

On a  $f_{n+1}: S_{n+1} \to X_{n+1}, c_{n+1} \mapsto z^{n+1}$  qui s'étend par la P.U. en :

$$\phi_{n+1}: S_{n+1}^* \to X_{n+1}$$

Il reste à vérifier que  $(S, \phi)$  est bien une résolution de X.

On notera PX := S le polygraphe de cette résolution standard.

## Propriété de relèvement

Proposition (Propriété fondamentale de relèvement) Soit X une  $\infty$ -catégorie, S et T deux polygraphes et  $\phi$ :  $QS \rightarrow X \in Mor(Cat_{\infty})$  et  $\psi: QT \to X$  une résolution.

Alors il existe un morphisme  $u: QS \to QT$  tel que :



### Partie 2.

Théorème homotopique

# Catégorie des chemins de dimension supérieure

#### Définition :

Soit X une  $\infty$ -catégorie. On peut lui associer une autre  $\infty$ -catégorie notée HX la catégorie des chemins sur X. On a alors les morphismes :

$$(HX)_n \stackrel{d_+}{\Longrightarrow} (HX)_{n-1}$$

Mais on va aussi construire (par récurrence) :

$$(HX)_n \xrightarrow{\stackrel{a_n^n}{\longrightarrow}} X_n$$
,  $(HX)_n \xrightarrow{[]} X_{n+1}$ 

On définit également 
$$\begin{cases} T_{-}^{n}x := a_{+}^{n}x \star_{0} [d_{+}^{n}x] \star_{1} [d_{+}^{n-1}x] \star_{2} ... \star_{n-1} [d_{+}x] \\ T_{+}^{n}x := a_{-}^{n}x \star_{0} [d_{-}^{n}x] \star_{1} [d_{-}^{n-1}x] \star_{2} ... \star_{n-1} [d_{-}x] \end{cases}$$

### Construction de HX

- n = 0:  $(HX)_0 := X_1$ , [] := id et  $a_+^0 x = d_-[x]$ ,  $a_-^0 = d_+[x]$
- $n \to n+1$  : On étend HX en un (n+1)-graphe en définissant l'ensemble  $(HX)_{n+1}$  et les morphismes :

$$(HX)_{n+1} \xrightarrow{d_+} (HX)_n$$

$$x \in (HX)_{n+1}$$
 est donné par  $(x_+^n, x_-^n, v_+^{n+1}, v_-^{n+1}, w_-^{n+2})$  où

- (i)  $x_{+}^{n}||x_{-}^{n} \in (HX)_{n}$
- (ii)  $v_{+}^{n+1}, v_{-}^{n+1} \in X_{n} + 1 \text{ tel que}: a_{+}^{n} x_{-}^{n} \xrightarrow{v_{+}^{n+1}} a_{+}^{n} x_{+}^{n} , a_{-}^{n} x_{-}^{n} \xrightarrow{v_{-}^{n+1}} a_{-}^{n} x_{+}^{n}$

(iii) 
$$w^{n+2} \in X_{n+2}$$
 tel que  $T_-^{n+1} \times \xrightarrow{w^{n+2}} T_+^{n+1} \times$ 

### Construction de HX

On définit alors :

- $d_+x := x_+^n$ ,  $d_-x := x_-^n$
- $a_{+}^{n+1}x := v_{+}^{n+1}, \ a_{-}^{n+1}x := v_{-}^{n+1}.$
- $[x] := w^{n+2}$ .

Ainsi  $x \in (HX)_{n+1}$  est donné par  $(d_+x, d_-x, a_+^{n+1}x, a_-^{n+1}x, [x])$  avec pour rappel :

$$(HX)_n \xrightarrow{d_+}^{d_+} (HX)_{n-1}$$

$$(HX)_n \xrightarrow{a_+^n} X_n$$
 ,  $(HX)_n \xrightarrow{[]} X_{n+1}$ 

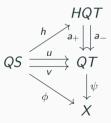
Il reste encore à définir les identités et les compositions et à vérifier que HX est bien une  $\infty$ -catégorie.

#### Théorème 1

#### Théorème

Soit X une  $\infty$ -catégorie, S et T deux polygraphes,  $\phi: QS \to X \in Mor(Cat_{\infty})$  et  $\psi: QT \to X$  une résolution de X.

Si  $u, v : QS \rightarrow QT$  tel que  $\psi u = \psi v = \phi$  alors il existe  $h : QS \rightarrow HQT$  tel que :



### Idée de la preuve

#### On construit *h* :

- n = 0:  $(QS)_0 = S_0$  alors  $u_0 x^0 || v_0 x^0$  et  $\psi_0 u_0 x^0 = \psi_0 v_0 x^0 = \phi_0 x^0$ Par dilatation de  $\psi$  on a  $w^1$ :  $u_0 x^0 \to v_0 x^0 \in (QT)_1$  t.q.  $\psi_1 w^1 = id^1(\psi_0 u_0 x^0)$ . On pose alors  $h_0 x^0 = w^1 \in (HQT)_0 = (QT)_1$ .
- $n \to n+1$ : On va construire d'abord  $k_{n+1}: S_{n+1} \to (HQT)_{n+1}$  qui s'étendra alors naturellement en  $h_{n+1}$  par la P.U.

Soit 
$$x^{n+1} \in S_{n+1}$$
, on considère : 
$$\begin{cases} E := u_{n+1}x^{n+1} \star_0 [h_0x_1^0] \star_1 \dots \star_n [h_nx_1^n] \\ F := [h_nx_0^n] \star_n \dots \star_1 [h_0x_0^n] \star_0 v_{n+1}x^{n+1} \end{cases}$$

Le coeur de la preuve est le fait suivant :

$$E||F \in (QT)_{n+1}$$

## Idée de la preuve

• Par hypothèse de récurrence  $(\psi_{i+1}[h_ix^i] = id^{i+1}[\psi_iu_ix^i])$  :

$$\begin{cases} \psi_{n+1}E = \psi_{n+1}u_{n+1}x^{n+1} = \phi_{n+1}x^{n+1} \\ \psi_{n+1}F = \psi_{n+1}v_{n+1}x^{n+1} = \phi_{n+1}x^{n+1} \end{cases}$$

• Par dilatation de  $\psi$ ,  $\exists w^{n+2} : E \to F \in (QT)_{n+2}$  t.q. :

$$\psi_{n+2}w^{n+2} = id^{n+2}(\psi_{n+1}u_{n+1}x^{n+1})$$

• On pose :

$$k_{n+1}x^{n+1} := (h_nx_+^n, h_nx_-^n, u_{n+1}x^{n+1}, v_{n+1}x^{n+1}, w^{n+2})$$

Il reste à vérifier que  $h_{n+1}$  vérifie bien :

$$a_{+}^{n+1}h_{n+1} = u_{n+1}, \quad a_{-}^{n+1}h_{n+1} = v_{n+1}, \quad \psi_{n+2}[h_{n+1}x^{n+1}] = id^{n+2}(\psi_{n+1}u_{n+1}x^{n+1})$$

### Partie 3.

# Invariance homologique

#### **Invariance**

#### Théorème

Soit X une  $\infty$ -catégorie et  $(S, \phi)$ ,  $(T, \psi)$  deux résolutions de X, Alors les complexes ZS et ZT ont la même homologie.

- -> On pourra alors donner un sens à  $H_*(X)$  en prenant égal à  $H_*(ZS)$  où S est une résolution polygraphique de X.
- -> Par exemple en considérant la résolution polygraphique standard de X.

# Idée de preuve

Soit  $\phi: QS \to X \in \mathbf{Cat}_{\infty}$ ,  $(T, \psi)$  une résolution polygraphique de X et  $u, v: QS \to QT$  avec  $\psi u = \psi v = \phi$  alors on a  $h: QS \to HQT$ . Le coeur de la preuve :

*h* induit une homotopie entre  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$ .

La preuve consiste donc à contruire une famille d'applications  $\mathbb{Z}$ -linéaire :

$$\theta_{i}: ZS_{i} \to ZT_{i+1}, i \geq 0$$

$$ZS_{i-1} \xleftarrow{\partial} ZS_{i} \xleftarrow{\partial} ZS_{i+1}$$

$$\tilde{u}_{i-1} \downarrow \tilde{v}_{i-1} \theta_{i} \downarrow \tilde{v}_{i} & \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_{i+1} \downarrow \tilde{v}_{i+1} \\ ZT_{i-1} \xleftarrow{\partial} ZT_{i} & ZT_{i} & ZT_{i+1}$$
 t.q. :

$$\tilde{u}_i - \tilde{v}_i = \partial \theta_{i+1} + \theta_i \partial$$

### Conclusion

- Résolutions polygraphiques
- Propriété de relèvement
- Existence d'une homotopie et invariance homologique
- Définition d'une homologie pour une ∞-catégorie

Ce travail de François Métayer et Albert Burroni creuse la notion : Type de Dérivation Fini

### Références

# Références



François Metayer. Resolutions By Polygraphs. 2003.