

分治算法作业

姓名： 叶子宁 学号： 1120231313

2.8

题意

设 n 个不同的整数排好序后存于 $T[1:n]$ 中

若存在一个下标 i , $1 \leq i \leq n$ 使得 $T[i] = i$ 设计一个有效算法找到这个下标. 要求算法在最坏情况下的计算时间 $O(\log n)$

解法

由于是互不相同的整数, 且只存在一个下标使得 $T[i] = i$, 我们设这个下标为 t

互不相同:

$$\forall i \geq 1, T[i] - T[i-1] \geq 1$$

故有

$$\forall i > t, T[i] - i \geq (T[t] + i - t) - i \geq T[t] - t \geq 0$$

$$\forall i < t, T[i] - i \leq (T[t] - i) - i \leq T[t] - t \leq 0$$

而序列中只有一个数 t 使得 $T[t] - t = 0$, 且满足 t 的左侧均小于 0, 右侧均大于 0 采用二分答案解决, 时间复杂度为 $O(\log n)$

伪代码

```
int findIndex(int n, int T[])
{
    int l = 1, r = n;
    while (l <= r)
    {
        int mid = (l + r) / 2;
        if (T[mid] == mid)
            return mid;
        else if (T[mid] > mid)
            r = mid - 1;
        else
            l = mid + 1;
    }
    return -1;
}
```

2.9

题意

设 $T[0:n-1]$ 是 n 个元素的数组. 对任一元素 x , 设 $S(x) = \{i \mid T[i] = x\}$. 当 $|S(x)| > \frac{n}{2}$ 时, 称 x 为主元素. 设计一个线性时间算法, 确定 $T[0:n-1]$ 是否有一个主元素

解法

主元素出现的个数比其他的所有元素都要多

首先假定当前元素是主元素, 遍历数组, 按照是否和当前元素相同来更新计数器, 不合法的时候就更换主元素, 最后筛下来的一定是主元素

时间复杂度为 $O(n)$, 额外空间复杂度为 $O(1)$

伪代码

```
int findMode(int T[], int n)
{
    int count = 0;
    int answer = -1;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        if (answer == T[i])
            ++count;
        else
            --count;
        if (count ≤ 0)
        {
            answer = T[i];
            count = 1;
        }
    }
    return answer;
}
```

2.25

题意

在线性时间选择算法中, 输入元素被划分为 5 个一组, 如果将它们划分为 7 个一组, 该算法仍然是线性时间算法吗? 划分成 3 个一组又怎样?

答

1. 7 个一组

设 $T(n) = an$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + cn \\ &\leq \frac{6}{7}an + cn \\ &= an \end{aligned}$$

仍为线性复杂度

不考虑 7 个一组的原因是在组内插入排序时常数因子比较大, 得不偿失

2. 3 个一组

设 $T(n) = an$

$$\begin{aligned}T(n) &\leq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn \\&\leq an + cn \\&\neq an\end{aligned}$$

无法自证为线性复杂度