

图灵机作业

姓名： 叶子宁 学号： 1120231313

3.2

对于识别 $\{w | w = u\#u, u \in \{0, 1\}^*\}$ 的图灵机 M (见下图), 在下列输入串上, 给出 M 所进入的格局序列.

补充说明: 没有画出的箭头指向拒绝状态 (本人认为转移函数的结果是向右移动)。

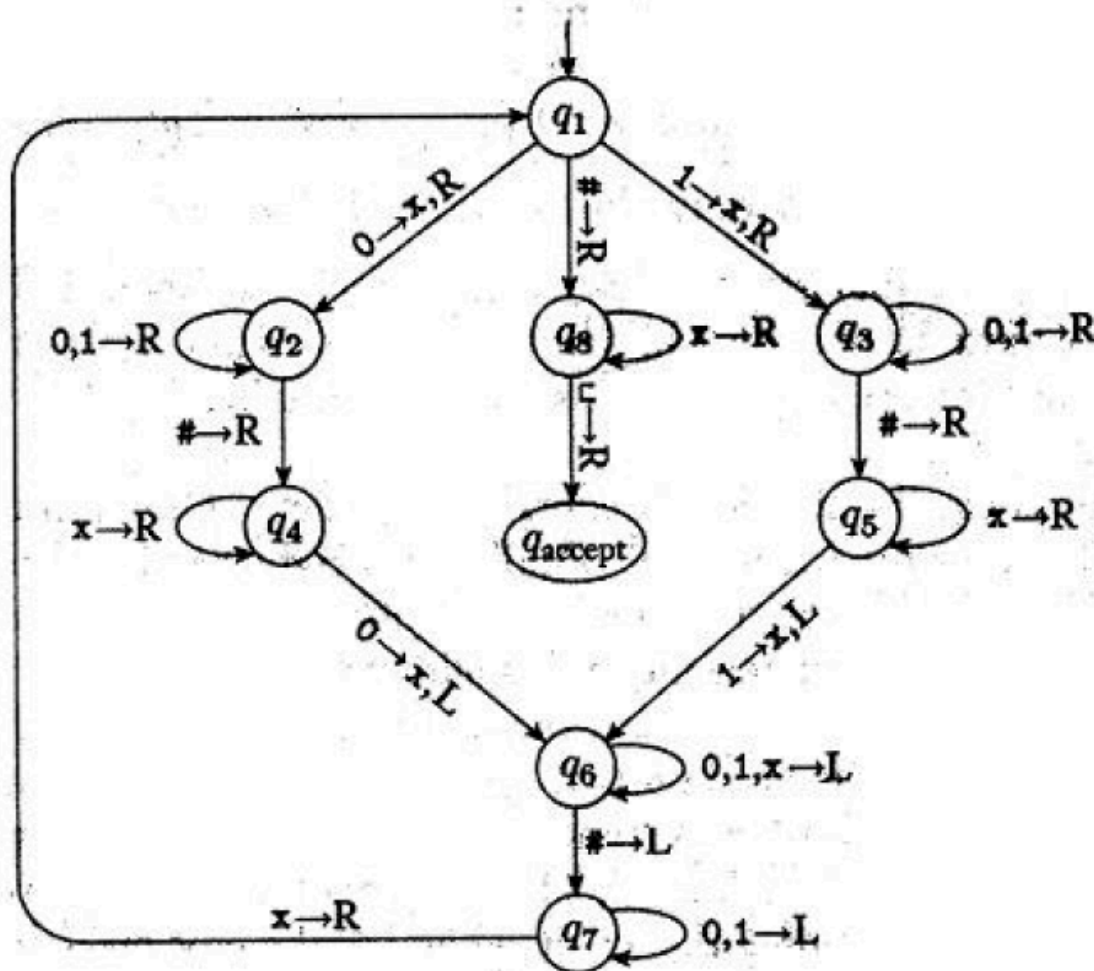


Figure 1: 图 3.1

c. 1##1

$$q_1 1 \# \# 1 \xrightarrow{1 \rightarrow x, R} x q_3 \# \# 1 \xrightarrow{\# \rightarrow R} x \# q_5 \# 1 \xrightarrow{\#} x \# \# q_{\text{reject}} 1$$

d. 10#11

$$\begin{aligned}
 q_1 10 \# 11 &\xrightarrow{1 \rightarrow x, R} x q_3 0 \# 11 \xrightarrow{0 \rightarrow R} x 0 q_3 \# 11 \xrightarrow{\# \rightarrow R} \\
 x 0 \# q_5 11 &\xrightarrow{1 \rightarrow x, L} x 0 q_6 \# x 1 \xrightarrow{\# \rightarrow L} x q_7 0 \# x 1 \xrightarrow{0 \rightarrow L} \\
 q_7 x 0 \# x 1 &\xrightarrow{x \rightarrow R} x q_1 0 \# x 1 \xrightarrow{0 \rightarrow x, R} x x q_2 \# x 1 \xrightarrow{\# \rightarrow R} \\
 x x \# x q_4 1 &\xrightarrow{x \rightarrow R} x x \# x 1 q_{\text{reject}}
 \end{aligned}$$

e. 10#10

$$\begin{aligned}
 q_1 10 \# 10 &\xrightarrow{1 \rightarrow x, R} x q_3 0 \# 10 \xrightarrow{0 \rightarrow R} x 0 q_3 \# 10 \xrightarrow{\# \rightarrow R} \\
 x 0 \# q_5 10 &\xrightarrow{1 \rightarrow x, L} x 0 q_6 \# x 0 \xrightarrow{\# \rightarrow L} x q_7 0 \# x 0 \xrightarrow{0 \rightarrow L} \\
 q_7 x 0 \# x 0 &\xrightarrow{x \rightarrow R} x q_1 0 \# x 0 \xrightarrow{0 \rightarrow x, R} x x q_2 \# x 0 \xrightarrow{\# \rightarrow R} \\
 x x \# x q_4 0 &\xrightarrow{x \rightarrow x, L} x x \# q_6 x x \xrightarrow{x \rightarrow L} x x q_6 \# x x \xrightarrow{\# \rightarrow L} \\
 x q_7 x \# x x &\xrightarrow{x \rightarrow R} x x q_1 \# x x \xrightarrow{\# \rightarrow R} x x \# q_8 x x \xrightarrow{x \rightarrow R} \\
 x x \# x q_8 x &\xrightarrow{x \rightarrow R} x x \# x x q_8 \sqcup \xrightarrow{\sqcup \rightarrow R} x x \# x x \sqcup q_{\text{accept}} \sqcup
 \end{aligned}$$

3.8

下面的语言都是字母表 $\{0, 1\}$ 上的语言, 以实现水平的描述给出判定这些语言的图灵机:

b. $\{w \mid w \text{ 所包含的 } 0 \text{ 的个数是 } 1 \text{ 的 } 2 \text{ 倍}\}$

- (1) 从左到右扫描纸带, 直到找到第一个出现的 1 或扫描到了空白符。
 - 若扫描到了空白符, 扫描向左扫描纸带直到最左端, 若在扫描过程中出现了 0 则拒绝; 否则接受。
- (2) 将该 1 替换为 x , 回到纸带左端。
- (3) 从左到右扫描输入串, 直到找到前两个出现的 0 或扫描到了空白符。
 - 若扫描到了空白符, 拒绝。
- (4) 在扫描过程中将扫描到的两个 0 替换为 x , 回到纸带左端。转(1)

c. $\{w \mid w \text{ 所包含的 } 0 \text{ 的个数不是 } 1 \text{ 的 } 2 \text{ 倍}\}$

- (1) 从左到右扫描纸带, 直到找到第一个出现的 1 或扫描到了空白符。
 - 若扫描到了空白符, 扫描向左扫描纸带直到最左端, 若在扫描过程中出现了 0 则接受; 否则拒绝。
- (2) 将该 1 替换为 x , 回到纸带左端。
- (3) 从左到右扫描输入串, 直到找到前两个出现的 0 或扫描到了空白符。
 - 若扫描到了空白符, 接受。
- (4) 在扫描过程中将扫描到的两个 0 替换为 x , 回到纸带左端。转(1)

上述方法不需要特判空串, 在 (2) 操作会自动判定空串。

3.15

证明图灵可判定语言类在连接运算 \circ 下封闭。

证明

即证明 L_1 被图灵机 M_1 判定, L_2 被图灵机 M_2 判定, 存在图灵机 M 判定 $L = L_1 \circ L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ 。

M 的工作原理如下:

- (1) 对输入的字符串 w , 设定 $w = xy$, 其中 x 是 w 的前缀, y 是 w 的后缀。对每一个可能的划分 $w = xy$ (即从 w 的第一个字符到最后一个字符的每一个位置都可以作为划分的位置) 进行:
 - 将 x 输入 M_1
 - 将 y 输入 M_2
- (2) 若存在某个划分使得 M_1 和 M_2 都接受, 则 M 接受 w ; 否则 M 拒绝 w 。

因为 L_1 和 L_2 都是图灵可判定的, 而且这个算法会对每一个可能的划分都进行尝试, 所以 M 会在有限步内判定 w 是否在 L 中, 所以 L 是图灵可判定的。

3.16

证明图灵可识别语言类在交运算 \cap 下封闭。

证明

即证明 L_1 被图灵机 M_1 识别, L_2 被图灵机 M_2 识别, 存在图灵机 M 识别 $L = L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1, x \in L_2\}$ 。

多纸带图灵机 M 的工作原理如下:

- (1) 给定输入字符串 w , 并行运行 M_1 和 M_2 :
 - 在两个纸带上同时写入 w 。
 - 在一个纸带上模拟 M_1 的运行, 另一个纸带上模拟 M_2 的运行。
- (2) 若 M_1 和 M_2 同时接受 w , 则 M 接受 w ; 否则 M 拒绝 w 。

因为 M_1 和 M_2 都是图灵可识别的, 而且这个算法会同时运行 M_1 和 M_2 , 所以 M 会在有限步内识别 w 是否在 L 中, 所以 L 是图灵可识别的。

3.28

设多项式 $p(x) = c_1x^n + c_2x^{n-1} + \dots + c_nx + c_{n+1}$ 有根 x_0 , c_{\max} 是 c_1, c_2, \dots, c_{n+1} 的最大值。
证明:

$$|x_0| \leq (n+1) \frac{c_{\max}}{|c_1|}$$

证明

设 $p(x_0) = 0$, 则有:

$$c_1x_0^n + c_2x_0^{n-1} + \dots + c_nx_0 + c_{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
c_1 x_0^n &= -c_2 x_0^{n-1} - \dots - c_n x_0 - c_{n+1} \\
|c_1 x_0^n| &= |c_2 x_0^{n-1} + \dots + c_n x_0 + c_{n+1}| \\
|c_1| |x_0|^n &= |c_2 x_0^{n-1} + \dots + c_n x_0 + c_{n+1}| \\
|c_1| |x_0|^n &\leq |c_2 x_0^{n-1}| + |c_3 x_0^{n-2}| + \dots + |c_n x_0| + |c_{n+1}| \\
|c_1| |x_0|^n &\leq |c_2| |x_0|^{n-1} + |c_3| |x_0|^{n-2} + \dots + |c_n| |x_0| + |c_{n+1}| \\
|c_1| |x_0| &\leq |c_2| + |c_3| |x_0|^{-1} + \dots + |c_n| |x_0|^{-n-2} + |c_{n+1}| |x_0|^{-n-1} \\
|c_1| |x_0| &\leq |c_{\max}| (1 + |x_0|^{-1} + \dots + |x_0|^{-n-2} + |x_0|^{-n-1})
\end{aligned}$$

有

$$\text{当 } |x_0| \leq 1 \text{ 时, } |x_0| \leq 1 < (n+1) < (n+1) \frac{c_{\max}}{|c_1|}$$

$$\text{当 } |x_0| > 1 \text{ 时, } |x_0| < \frac{c_{\max}}{|c_1|} (1 + |x_0|^{-1} + \dots + |x_0|^{-n-2} + |x_0|^{-n-1}) < n \cdot \frac{c_{\max}}{|c_1|} < (n+1) \frac{c_{\max}}{|c_1|}$$