时间复杂性作业

姓名： 叶子宁 **学号：** 1120231313

7.9

题意

无向图中的三角形是一个 3 团。
证明：$\text{TRIANGLE} \in P$，其中 $\text{TRIANGLE} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ 是一个无向图，包含一个三角形}\}$。

证明

我们可以枚举三角形的三个点，然后判断这三个点是否构成一个三角形。
这样的话，我们需要枚举的点的个数是$O(n^3)$，然后判断是否构成三角形的时间复杂度是$O(1)$，所以总的时间复杂度是$O(n^3)$。

构造如下高水平描述的图灵机 H = "
对于输入 $\langle G\rangle$，G是一个无向图
1. 设 G 有 n 个顶点 $u_1, u_2, ..., u_n$。
2. 若 $n < 3$，则拒绝。
3. 对 i 从 1 到 n:
4. 　　对 j 从 $i+1$ 到 n:
5. 　　　　对 k 从 $j+1$ 到 n:
6. 　　　　　　若 u_i 和 u_j 和 u_k 之间有边，则接受。
7. 拒绝。"

我们可以看到，这个图灵机的时间复杂度是$O(n^3)$，所以$\text{TRIANGLE} \in P$。

7.11

题意

若图 G 的节点重新排序后，G 可以变得与 H 完全相同，则称 G 与 H 是同构的。
令 $\text{ISO} = \{\langle G, H\rangle \mid G\text{和}H \text{ 是同构的图}\}$。
证明：$\text{ISO} \in NP$。

证明

构造如下高水平描述的非确定性图灵机 N = "
对于输入 $\langle G, H\rangle$，G 和 H 是两个无向图
1. 设 G 有 n 个顶点 $u_1, u_2, ..., u_n$，H 有 m 个顶点 $v_1, v_2, ..., v_m$。
2. 若 $n \neq m$，则拒绝。
3. 非确定性地选择一个 n 的排列 p_i。
4. 对 i 从 1 到 n:
5. 　　对 j 从 1 到 n:
6. 　　　　若 u_i 和 u_j 之间有边且 v_{p_i} 和 v_{p_j} 之间无边，
　　　　或 u_i 和 u_j 之间无边且 v_{p_i} 和 v_{p_j} 之间有边，则拒绝。

7. 接受。”

若G, H同构,则 N 一定有分支接受； 否则，N 所有分支拒绝。
以上图灵机可以在 $O(n^2)$ 的时间内判定问题，故 ISO $\in NP$。

7.21

题意

令Double-SAT $= \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi\text{至少有两个满足赋值}\}$。
证明：Double-SAT 是 NP 完全的。

证明

1. Double-SAT 属于 NP
构造如下高水平描述的非确定性图灵机 N =“
对于输入 $\langle\varphi\rangle$，φ 是布尔公式
(1) 非确定性地产生两组不同赋值 s, t。
(2) 若在赋值 s 下 $\varphi = 1$ 且在赋值 t 下 $\varphi = 1$，则接受；否则，拒绝。”

因为 N 的语言是 Double-SAT，且 N 在多项式时间内运行，所以 Double-SAT 属于 NP。

2. 证明 SAT 可以多项式时间映射归约到 Double-SAT
对任意布尔公式 φ，添加一个新变量 a，构造函数 $f(\varphi) = \varphi \wedge (a \vee \neg a)$。
首先，f 可在多项式时间内计算完成。
其次，f 是 SAT 到 Double-SAT 的映射归约，即 φ 可满足 $\Leftrightarrow f(\varphi)$ 有两个满足赋值:
- 若 φ 有可满足赋值 s，则:
  - 在赋值 s 和 $a = 1$ 下 $f(\varphi) = 1$,
  - 在赋值 s 和 $a = 0$ 下 $f(\varphi) = 1$,

从而有两个不同的赋值;

若 $f(\varphi)$ 有可满足赋值 s，则从 s 中去掉 a 的赋值，必然也是 φ 的可满足赋值。
所以 f 是从 SAT 到 Double-SAT 的多项式时间映射归约。

由 1. 和 2. 及 SAT 是 NP 完全问题知，Double-SAT 是 NP 完全问题。

7.22

题意

令 HALF-CLIQUE = $\left\{\langle G\rangle \middle| G\text{ 是无向图, 包含结点数至少为 }\frac{m}{2}\text{ 的完全子图,}m\text{是}G\text{ 的结点数}\right\}$。

证明： HALF-CLIQUE 是 NP 完全的.

证明

1. HALF-CLIQUE **属于** NP
构造如下高水平描述的非确定性图灵机 N =“
对于输入 $\langle G\rangle$，G 是一个无向图，有 m 个顶点
(1) 非确定性地产生一个 $\frac{m}{2}$ 个顶点的子集。
(2) 若这个子集中的任意两个顶点之间都有边相连，则接受；否则，拒绝。”

因为 N 的语言是 HALF-CLIQUE，且 N 在多项式时间内运行，所以 HALF-CLIQUE 属于 NP。

2. 证明 CLIQUE 可以多项式时间映射归约到 HALF-CLIQUE

对任意 $\langle G, k\rangle$，其中 G 是一个无向图，k 是一个正整数。
构造函数 $f(\langle G, k\rangle) = G'$。
设 G 有 m 个顶点。按如下方式构造 G':
- 若 $k = \frac{m}{2}$，则 $G = G'$;
- 若 $k > \frac{m}{2}$，则在 G 中增加 $2k - m$ 个新顶点，这些新顶点都是孤立点，得到 G';
- 若 $k < \frac{m}{2}$，则增加 $m - 2k$ 个新顶点，这些新顶点之间两两都有边相连，新顶点与 G 的所有顶点之间也都相连。

首先，f 可在多项式时间内计算完成。
其次，证明 f 是 CLIQUE 到 HALF-CLIQUE 的映射归约，
即证明 G 有 k 团 $\Leftrightarrow G'$（设有 m' 个顶点）有 $\frac{m'}{2}$ 个顶点的团:
- 若 G 有 k 团:
  - 当 $k = \frac{m}{2}$ 时，$G' = G$，$m' = m$，则 G' 也有 $k = \frac{m}{2}$ 团;
  - 当 $k > \frac{m}{2}$ 时，$m' = 2k$，G' 中也有 $k = \frac{m}{2}$ 团;
  - 当 $k < \frac{m}{2}$ 时，$m' = 2m - 2k$，G 中的 k 团加上新添的 $m - 2k$ 个顶点形成 $m - k = \frac{m}{2}$ 团。
- 若 G' 有 $\frac{m}{2}$ 团:
  - 当 $k = \frac{m}{2}$ 时，$G' = G$，$m' = m$，则 G 也有 $k = \frac{m}{2}$ 团;
  - 当 $k > \frac{m}{2}$ 时，$m' = 2k$，G 中也有 $k = \frac{m}{2}$ 团;
  - 当 $k < \frac{m}{2}$ 时，$m' = 2m - 2k$，G' 中的 $m - k$ 团至多有 $m - 2k$ 个新添顶点，去掉新添顶点至少还有 k 个顶点，所以 G 中有 k 团。

由 1.，2. 和 CLIQUE 是 NP 完全问题知，HALF-CLIQUE 是 NP 完全问题。