Homework – Slide 43

1. Verifica che $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ sia uno spazio vettoriale

Affinché un insieme di vettori sia uno spazio vettoriale, deve rispettare le proprietà di seguito definite.

Definition 1 *Let V be a set of elements* (vectors) *for which we define the operation of* sum *'+'. In addition, consider the numerical set* (field) *K, such that among its elements we define the operations of* product *'$\cdot$' and* sum *'$\oplus$'. Furthermore, between the elements of K and the vectors of V the operation of* multiplication *'$\bullet$' is defined. Then, the set $V(K)$ is said to be a* **Vector Space** over the field K *if the following properties hold:*

$$
\begin{array}{lll}
0) & x+y \in V(K), & \forall x,y \in V(K) \\
1) & (x+y)+z = x+(y+z), & \forall x,y,z \in V(K) \\
2) & \exists w \in V(K) \ : \quad x+w = x, & \forall x \in V(K) \\
3) & \forall x \in V(K),\ \exists \bar{x} \in V(K) \ : \quad x+\bar{x} = w, & \\
4) & x+y = y+x, & \forall x,y \in V(K) \\
5) & \alpha \bullet x \in V(K), \quad \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \cdot \beta) \bullet x, & \forall x \in V(K),\ \forall \alpha,\beta \in K \\
6) & \exists \sigma \in K \ : \quad \sigma \bullet x = x, & \forall x \in V(K) \\
7) & \alpha \bullet (x+y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y, & \forall x,y \in V(K),\ \forall \alpha \in K \\
8) & (\alpha \oplus \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x, & \forall x \in V(K),\ \forall \alpha,\beta \in K
\end{array}
$$

□

Proprietà 0:

Siano $x, y \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, con $x \equiv (x_1, x_2)^T$ e $y \equiv (y_1, y_2)^T$
$x + y = (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T$
$x_1 + y_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$ per la chiusura di $\mathbb{R}$ rispetto all'addizione
$\Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$

Proprietà 1:

Siano $x, y, z \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, con $x \equiv (x_1, x_2)^T$, $y \equiv (y_1, y_2)^T$, $z \equiv (z_1, z_2)^T$
$(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T + (z_1, z_2)^T = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)^T$
$= (x_1, x_2)^T + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)^T = x + (y + z)$
Perché l'addizione gode della proprietà associativa in $\mathbb{R}$

Proprietà 2:

$\exists\, w \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}) : x + w = x$
Sia $w \equiv (0, 0)^T$ allora $x + w = (x_1, x_2)^T + (0, 0)^T = (x_1 + 0, x_2 + 0)^T = (x_1, x_2)^T = x$

Proprietà 3:

Per ogni $x \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, $\exists\ \bar{x} \equiv (-x_1, -x_2)^T : x + \bar{x} = (x_1 - x_1, x_2 - x_2)^T = (0, 0)^T$

Proprietà 4:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T = (y_1 + x_1, y_2 + x_2)^T = y + x$
per la proprietà commutativa dell'addizione

Proprietà 5:

$x \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\alpha \bullet (\beta \bullet x) = \alpha \bullet (\beta x_1, \beta x_2)^T = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2)^T = (\alpha\beta) \bullet x$

Proprietà 6:

Sia $\sigma = 1 \in \mathbb{R}$. Allora $\sigma \bullet x = 1 \bullet (x_1, x_2)^T = (1x_1, 1x_2)^T = (x_1, x_2)^T = x$

Proprietà 7:

$\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet (x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)^T = \alpha x + \alpha y$

Proprietà 8:

$(\alpha \oplus \beta) \bullet x = (\alpha + \beta) \bullet (x_1, x_2)^T = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2)^T = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2)^T$
$= (\alpha x_1, \alpha x_2)^T + (\beta x_1, \beta x_2)^T = \alpha x + \beta x$

2. Verifica che $\|x\|_2$ è una norma

La norma euclidea è definita come: $\|x\|_2 = \text{sqrt}(\Sigma\ x_i^2)$ per i = 1 a n
Si dimostra che soddisfa le proprietà:
a) Positività: $\|x\|_2 \geq 0$ e $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
b) Omogeneità: $\|\alpha x\|_2 = |\alpha|\|x\|_2$
c) Disuguaglianza triangolare: $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

Dimostrazione a):
Poiché la radice quadrata di una somma di quadrati di numeri reali, il risultato è sempre ≥ 0
$\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i \Rightarrow x = (0,\dots,0)^T$

Dimostrazione b):
$\|\alpha x\|_2 = \text{sqrt}(\Sigma\ (\alpha x_i)^2) = \text{sqrt}(\alpha^2\ \Sigma\ x_i^2) = |\alpha|\ \text{sqrt}(\Sigma\ x_i^2) = |\alpha|\|x\|_2$

Dimostrazione c):
$\|x + y\|_2^2 = \Sigma\ (x_i + y_i)^2 = \Sigma\ x_i^2 + \Sigma\ y_i^2 + 2\Sigma\ x_i y_i$
$\leq \Sigma\ x_i^2 + \Sigma\ y_i^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2$ (per disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Rightarrow \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

3. Verifica che f(x) = a + bx non è lineare

Sia $f(x) = a + bx$, con $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$
f non è lineare in $\mathbb{R}$ perché non soddisfa la condizione $f(\alpha x) = \alpha f(x)$:
$f(\alpha x) = a + b\alpha x \neq \alpha a + \alpha bx = \alpha(a + bx) = \alpha f(x)$
$\Rightarrow$ f non è lineare

Homework – Slide 65

1. Calcolo dei determinanti delle matrici

Matrice A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1/3 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Calcolo del determinante di A_1:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 2*(0*3/7 - 9*1) - (1/3)*(-1*3/7 - 9*3) + 2*(-1*1 - 0*3) \\ &= 2*(-9) - (1/3)*(-3/7 - 27) + 2*(-1) \\ &= -18 - (1/3)*(-192/7) - 2 = -18 + 64/7 - 2 \\ &= 76/7 \end{aligned}$$

Matrice A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Calcolo del determinante di A_2:

$$\det(A_2) = 2*(3/2) - (-3)*(-1) = 3 - 3 = 0$$

Matrice A_3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2c \\ -3 & -3c \end{pmatrix}$$

Calcolo del determinante di A_3:

$$\det(A_3) = 1*(-3c) - (-3)*(2c) = -3c + 6c = 3c$$

2. Verifica che i vettori non sono linearmente indipendenti

I vettori sono:

$(2, -1, 3)^T$,

$(1/3, 0, 1)^T$,

$(\sqrt{2}, 0, 7)^T$,

$(1, 0, 0)^T$

Non possono essere linearmente indipendenti perché sono 4 vettori in $\mathbb{R}^3$.
Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché un insieme di vettori sia linearmente indipendente è che il numero di vettori dell'insieme sia minore o uguale alla dimensione dello spazio vettoriale.
Qui abbiamo 4 vettori in uno spazio di dimensione 3 ⇒ dipendenza lineare garantita.

3. Calcolo di $I_3 \cdot I_3$

Sia I_3 la matrice identità 3x3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo il prodotto $I_3 \cdot I_3$ riga per colonna:

$$I_3 * I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1*1 + 0*0 + 0*0 & 1*0 + 0*1 + 0*0 & 1*0 + 0*0 + 0*1 \\ 0*1 + 1*0 + 0*0 & 0*0 + 1*1 + 0*0 & 0*0 + 1*0 + 0*1 \\ 0*1 + 0*0 + 1*0 & 0*0 + 0*1 + 1*0 & 0*0 + 0*0 + 1*1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Homework – Slide 81

$$M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.15 & 0.12 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.25 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

d= $(100, 200, 300)^T$

l'obiettivo è calcolare p tale che p = $(I - M)^{-1}$ * d

$$I - M = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.15 & -0.12 \\ -0.2 & 1 & -0.3 \\ -0.25 & -0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

det(I - M) =

$$0.9 * \det\begin{pmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.7 \end{pmatrix} + 0.15 * \det\begin{pmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.25 & 0.7 \end{pmatrix} - 0.12 * \det\begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.25 & -0.1 \end{pmatrix} =$$

$0.9 * (0.7 – 0.03) + 0.15 (-0.14 – 0.075) -0.12(-0.02 +0.25) =$

$= 0.90*0.67 + 0.15*(-0.215) - 0.12*0.27 = 0.53835$

La matrice è invertibile, pertanto è possible calcolare = $(I - M)^{-1}$ e di conseguenza p.

Nel prossimo step calcolo la matrice C dei cofattori di I-M:

Ogni elemento $C_{i,j}$ è calcolato come:
$C_{i,j} = (-1)^{(i+j)}$ * det(sottomatrice ottenuta eliminando riga i e colonna j)

Cofattori:

$$C_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.7 \end{pmatrix} = 0.67$$

$$C_{12} = - \det\begin{pmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.25 & 0.7 \end{pmatrix} = 0.215$$

$$C_{13} = \det\begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.25 & -0.1 \end{pmatrix} = 0.27$$

$$C_{21} = - \det\begin{pmatrix} -0.15 & -0.12 \\ -0.1 & 0.7 \end{pmatrix} = 0.117$$

$C_{22} = \det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.12 \\ -0.25 & 0.7 \end{pmatrix} = 0.6$

$C_{23} = -\det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.15 \\ -0.25 & -0.1 \end{pmatrix} = 0.1275$

$C_{31} = \det\begin{pmatrix} -0.15 & -0.12 \\ 1 & -0.3 \end{pmatrix} = 0.165$

$C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.12 \\ -0.2 & -0.3 \end{pmatrix} = 0.294$

$C_{33} = \det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.15 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} = 0.87$

Quindi, $C = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.215 & 0.27 \\ 0.117 & 0.6 & 0.1275 \\ 0.165 & 0.294 & 0.87 \end{pmatrix}$

$\text{adj}(I - M) = C^T = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.117 & 0.165 \\ 0.215 & 0.6 & 0.294 \\ 0.27 & 0.1275 & 0.87 \end{pmatrix}$

$(I-M)^{-1} = (1 / \det(I-M)) * \text{adj}(I-M)$
$= (1 / 0.53835) * \text{adj}(I-M)$

$(I-M)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.2445 & 0.2173 & 0.3065 \\ 0.3994 & 1.1145 & 0.5461 \\ 0.5015 & 0.2368 & 1.616 \end{pmatrix}$

$p = (I - M)^{-1} * d$
$p_1 = 1.2445*100 + 0.2173*200 + 0.3065*300 = 259.86$
$p_2 = 0.3994*100 + 1.1145*200 + 0.5461*300 = 426.67$
$p_3 = 0.5015*100 + 0.2368*200 + 1.616*300 = 582.31$

$p = (259.86, 426.67, 582.31)^T$

Homework – Slide 94

1. Calcolo dell'inversa delle matrici

Una matrice A è invertibile se $\det(A) \neq 0$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora $A^{-1} = (1 / \det(A)) * \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Sia $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$,

Allora, nel nostro caso:

$\mathrm{Det}(A_1) = 3*(-6) - (-4)*2 = -18 + 8 = -10$, il che garantisce l'invertibilità della matrice.

Quindi,

$A_1^{-1} = (1 / \det(A_1)) * \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (-1/10) * \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/10 & -2/5 \\ 1/5 & -3/10 \end{pmatrix}$

Sia $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2c \\ -3 & -3c \end{pmatrix}$

I vettori riga (o colonna) sono linearmente dipendenti $\forall\, c \in \mathbb{R}$,
$\Rightarrow \det(A_2) = 0 \Rightarrow$ A non è invertibile.

2. Calcolo degli autovalori delle matrici

Per $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$,

Si calcolano gli autovalori risolvendo $\det(A_1 - \lambda I) = 0$
$A_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -6-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A_1 - \lambda I) = (3-\lambda)(-6-\lambda) + 2*4 = -18 - 3\lambda + 6\lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -5$ sono gli autovalori

Per $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2c \\ -3 & -3c \end{pmatrix}$:

A_2 - λI = $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2c \\ -3 & -3c-\lambda \end{pmatrix}$

det(A_2 - λI) = $(2-\lambda)(-3c-\lambda) + 6c = \lambda^2 + (3c - 2)\lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda(\lambda + 3c - 2) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2 - 3c$ sono gli autovalori