Soluzione Ex_1.5

Per trovare le costanti C, A_1, A_2, A_3 e i coefficienti c_1, c_2, c_3, devo impostare le equazioni appropriate basate sull'interpretazione statistica della meccanica quantistica.

Passo 1: Normalizzazione delle autofunzioni

Per ogni autofunzione $\psi_n(x)$, la condizione di normalizzazione richiede:

$$\int_{-a}^{+a} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

Per $\psi_1(x) = A_1 \cos(\pi x/2a)$:

$$\int_{-a}^{+a} |A_1 \cos(\pi x/2a)|^2 dx = A_1^2 \int_{-a}^{+a} \cos^2(\pi x/2a) dx = A_1^2 \cdot a = 1$$

Quindi $A_1 = 1/\sqrt{a}$

Per $\psi_2(x) = A_2 \sin(\pi x/a)$:

$$\int_{-a}^{+a} |A_2 \sin(\pi x/a)|^2 dx = A_2^2 \int_{-a}^{+a} \sin^2(\pi x/a) dx = A_2^2 \cdot a = 1$$

Quindi $A_2 = 1/\sqrt{a}$

Per $\psi_3(x) = A_3 \cos(3\pi x/2a)$:

$$\int_{-a}^{+a} |A_3 \cos(3\pi x/2a)|^2 dx = A_3^2 \int_{-a}^{+a} \cos^2(3\pi x/2a) dx = A_3^2 \cdot a = 1$$

Quindi $A_3 = 1/\sqrt{a}$

Passo 2: Normalizzazione della funzione d'onda iniziale

Per $\Psi(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{4} C(a^2 - x^2)$ con $-a \leq x \leq a$:

$$\int_{-a}^{+a} |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$$

Questo ci dà:

$$\int_{-a}^{+a} \left[\frac{\sqrt{3}}{4} C(a^2 - x^2)\right]^2 dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 C^2 \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = 1$$

L'integrale $\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{16a^5}{15}$

Quindi $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 C^2 \cdot \frac{16a^5}{15} = 1$

Da cui $C = \sqrt{\frac{15}{4a^5}}$

Passo 3: Calcolo dei coefficienti c_1, c_2, c_3

I coefficienti si trovano usando il prodotto interno:

$$c_n = \int_{-a}^{+a} \Psi(x,0) \cdot \psi_n(x) dx$$

Per c_1:

$$c_1 = \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{3}}{4} C(a^2 - x^2) \cdot A_1 \cos(\pi x/2a) dx$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} C \cdot A_1 \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \cos(\pi x/2a) dx$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{15}{4a^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{8a^3}{\pi^2}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{45}}{2\pi^2}$$

Per c_2:

$$c_2 = \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{3}}{4} C(a^2 - x^2) \cdot A_2 \sin(\pi x/a) dx = 0$$

Questo integrale è zero perché stiamo integrando una funzione dispari ($\sin(\pi x/a)$) moltiplicata per una funzione pari ($a^2 - x^2$) su un intervallo simmetrico $(-a, a)$.

Per c_3:

$$c_3 = \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{3}}{4} C(a^2 - x^2) \cdot A_3 \cos(3\pi x/2a) dx$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} C \cdot A_3 \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \cos(3\pi x/2a) dx$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{15}{4a^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{-8a^3}{9\pi^2}$$

$$c_3 = -\frac{\sqrt{45}}{9\pi^2}$$

Passo 4: Normalizzazione dei coefficienti c_n

Verifichiamo se i coefficienti soddisfano la condizione di normalizzazione:

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

Calcoliamo:

$$|c_1|^2 = \left(\frac{\sqrt{45}}{2\pi^2} \right)^2 = \frac{45}{4\pi^4}$$

$$|c_2|^2 = 0$$

$$|c_3|^2 = \left(-\frac{\sqrt{45}}{9\pi^2} \right)^2 = \frac{45}{81\pi^4}$$

Quindi:

$$\sum_n |c_n|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = \frac{45}{4\pi^4} + 0 + \frac{45}{81\pi^4} = \frac{45}{4\pi^4} \left(1 + \frac{4}{81} \right)$$

$$\sum_n |c_n|^2 = \frac{45}{4\pi^4} \cdot \frac{85}{81} = \frac{45 \cdot 85}{4 \cdot 81 \cdot \pi^4}$$

Poiché questa somma non è uguale a 1, dobbiamo normalizzare i coefficienti.

Definiamo il fattore di normalizzazione N:

$$N = \sqrt{\sum_n |c_n|^2} = \sqrt{\frac{45 \cdot 85}{4 \cdot 81 \cdot \pi^4}} = \frac{\sqrt{45 \cdot 85}}{2\pi^2 \sqrt{81}} = \frac{\sqrt{3825}}{18\pi^2}$$

I coefficienti normalizzati diventano:

$$c_1^{norm} = \frac{c_1}{N} = \frac{\sqrt{45}/(2\pi^2)}{\sqrt{3825}/(18\pi^2)} = \frac{9\sqrt{45}}{\sqrt{3825}} = \frac{9}{\sqrt{85}}$$

$$c_2^{norm} = \frac{c_2}{N} = 0$$

$$c_3^{norm} = \frac{c_3}{N} = \frac{-\sqrt{45}/(9\pi^2)}{\sqrt{3825}/(18\pi^2)} = \frac{-2\sqrt{45}}{\sqrt{3825}} = \frac{-2}{\sqrt{85}}$$

Verifichiamo che questi coefficienti siano effettivamente normalizzati:

$$|c_1^{norm}|^2 + |c_2^{norm}|^2 + |c_3^{norm}|^2 = \left(\frac{9}{\sqrt{85}}\right)^2 + 0 + \left(\frac{-2}{\sqrt{85}}\right)^2 = \frac{81}{85} + \frac{4}{85} = \frac{85}{85} = 1$$

Risultati finali

- $C = \sqrt{\frac{15}{4a^5}}$
- $A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{\sqrt{a}}$
- Coefficienti non normalizzati:
  - $c_1 = \frac{\sqrt{45}}{2\pi^2}$
  - $c_2 = 0$
  - $c_3 = -\frac{\sqrt{45}}{9\pi^2}$
- Coefficienti normalizzati:
  - $c_1^{norm} = \frac{9}{\sqrt{85}}$
  - $c_2^{norm} = 0$
  - $c_3^{norm} = -\frac{2}{\sqrt{85}}$